

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi=\text{cte}} = - \frac{1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi=\text{cte}}} \quad (17)$$

الف) مختصات کارترین

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (19)$$

ب) مختصات استوانه‌ای

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (20)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (21)$$

ج) مختصات کروی

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = - \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (23)$$

8-3- گردش

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{N}_C \cdot \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (24)$$

یا به شکل زیر

$$\Gamma = \oint_S (\text{curl} \mathbf{V})_z \cdot d\mathbf{s} \quad (25)$$

8-4- پتانسیل مختلط

برای جریان دوبعدی غیرچرخشی:

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (26)$$

 $\phi(x, y)$ و $\psi(x, y)$ توابع جریان و پتانسیل

$$\frac{dw}{dz} = u - iv \quad (27)$$

$$q = \frac{dw}{dz} = u + iv \quad (28)$$

q: سرعت مختلط

8-5- جریان‌هاک ساده

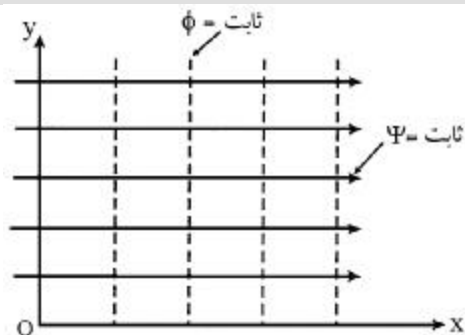
8-5-1- جریان یکنواخت

جریان یکنواخت با سرعت ثابت U و موازی محور xها

$$u = U, \quad v = 0 \quad (29)$$

$$\phi = Uy, \quad \psi = Ux \quad (30)$$

$$w = \phi + i\psi = Ux + iUy = U(x + iy) \Rightarrow w = Uz \quad (31)$$

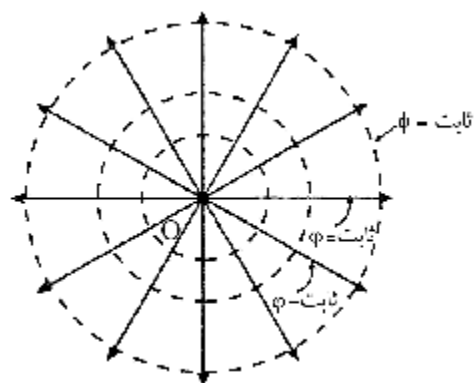


برای جریان یکنواخت با زاویه حمله θ نسبت به محور xها:

$$\phi = U(y\cos\theta - x\sin\theta) \quad (32)$$

$$\psi = U(x\cos\theta + y\sin\theta) \quad (33)$$

8-5-2- چشمه و چاه



قدرت چشمه (Λ):

$$u_r = \frac{\Lambda}{2\pi r}, \quad u_\theta = 0 \quad (34)$$

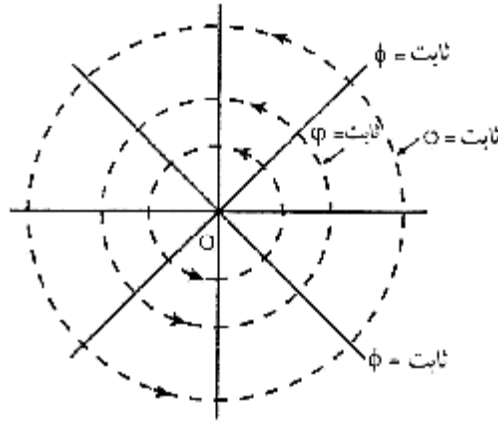
$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \theta \quad (35)$$

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r \quad (36)$$

پتانسیل مختلط جریان چشمه:

$$w = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln z \quad (37)$$

8-5-3- گردابه



$$u_r = 0, \quad u_\theta = -\frac{\Lambda}{2\pi r} \quad (38)$$

$$\varphi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r \quad (39)$$

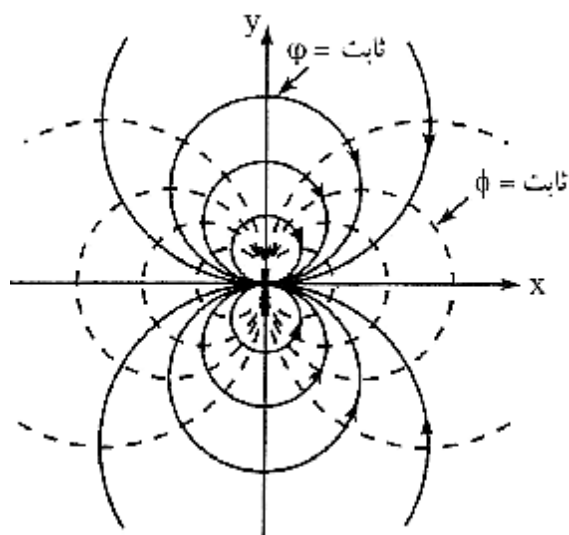
$$\phi = -\frac{\Lambda}{2\pi} \theta \quad (40)$$

Λ : قدرت گردابه

پتانسیل مختلط جریان گردابه:

$$W = \frac{i\Lambda}{2\pi} \ln z \quad (41)$$

8-5-4- جریان دوتایی (Doublet)



$$u_r = -\frac{\kappa}{r^2} \cos \theta, \quad u_\theta = -\frac{\kappa}{r^2} \sin \theta \quad (42)$$

$$\phi = -\frac{\kappa \sin \theta}{r} \quad (43)$$

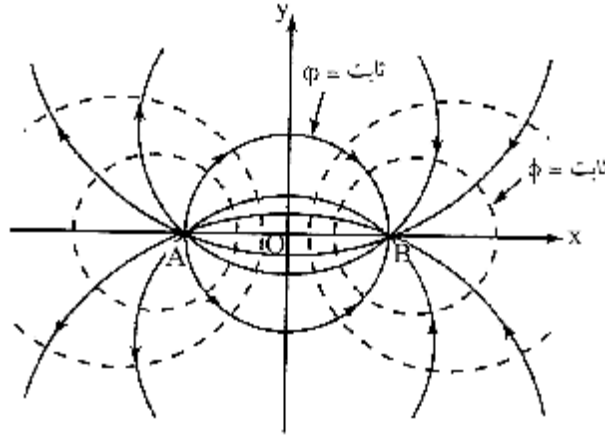
$$\psi = \frac{\kappa \cos \theta}{r} \quad (44)$$

8-5-5- پتانسیل مختلط جریان دوتایی

$$w = \frac{k}{z} \quad (45)$$

8-6- ترکیب جریان‌هاک ساده

8-6-1 - ترکیب چشمه و چاه



$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\Lambda}{2\pi} \theta_1 - \frac{\Lambda}{2\pi} \theta_2 = \frac{\Lambda}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \quad (46)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r_1 - \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r_2 = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (47)$$

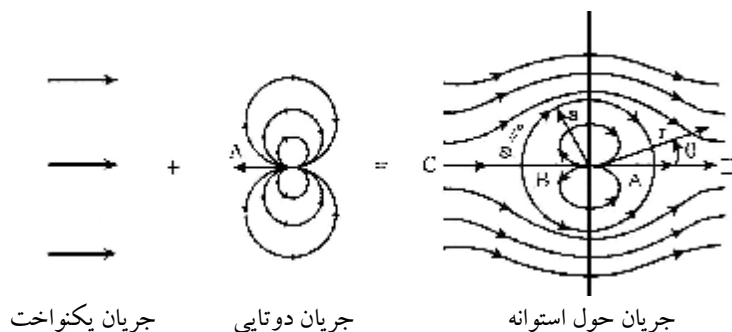
1: چشمه، 2: چاه

8-6-2 - ترکیب جریان دوتایی و جریان یکنواخت (جریان حول استوانه)

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + Ur \sin \theta = Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (48)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} + Ur \cos \theta = Ur \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (49)$$

$$a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}} \quad (50)$$



$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (51)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (52)$$

در روی سطح استوانه $(r = a)$:

$$u_r = 0, \quad u_\theta = -2U \sin \theta \quad (53)$$

$$P_s = P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

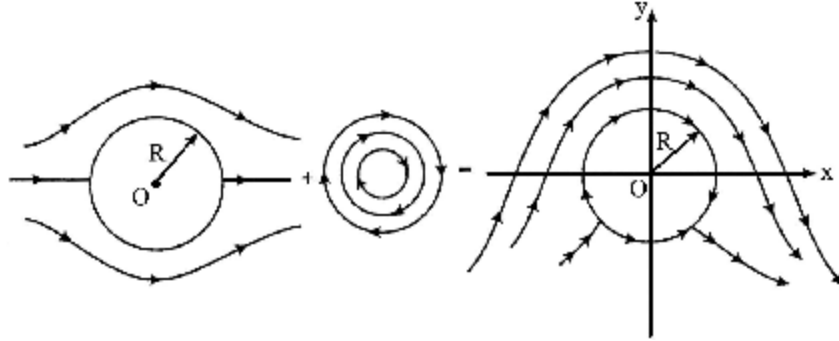
$$\text{ضریب فشار } C_P = \frac{P_s - P_0}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (54)$$

8-6-3- ترکیب جریان دوتایی و جریان یکنواخت و گردابه (جریان حول استوانه با گردش)

$$\phi = U r \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r \quad (55)$$

$$\phi = U r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{\Lambda}{2\pi} \theta \quad (56)$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (57)$$



$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Lambda}{2\pi r} \quad (58)$$

ضریب فشار:

$$C_P = \frac{P_s - P_0}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - \left(-2 \sin \theta - \frac{\Lambda}{2\pi a U} \right)^2 \quad (59)$$

جریان‌های تراکم‌پذیر

9-1- مقدمه

سرعت صوت:

$$C^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = k \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \quad (1)$$

k: نسبت گرماهای ویژه سیال.

برای گاز ایده‌آل:

$$C = \sqrt{kRT} \quad (2)$$

☀ **نکته:** سرعت انتقال صوت در: گازها > مایعات > جامدات

براساس ضریب کشسانی حجمی:

$$C = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \quad (3)$$

عدد ماخ:

$$M = \frac{V}{C} \quad (4)$$

V: سرعت واقعی سیال یا سرعت یک جسم در سیال ساکن

C: سرعت صوت در همان سیال

9-2- فرایند ایزنتروپیک

9-2-1- مقدمه

اگر سیال گاز ایده‌آل باشد:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (5)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1} \quad (6)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k \quad (7)$$

9-2-2- اثر تغییر سطح مقطع در جریان‌های ایزنتروپیک یک‌بعدی

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1) \quad (8)$$

$$\frac{dP}{\rho V^2} (1 - M^2) = \frac{dA}{A} \quad (9)$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{(k-1)M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A} \quad (10)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A} \quad (11)$$

9-2-3- خواص سکون

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0 \quad (12)$$

برای گاز ایده آل:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2C_p} \quad (13)$$

9-2-4- روابط مربوط به جریان ایزنتروپیک گاز ایده آل

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) M^2 \quad (14)$$

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) M^2 \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (15)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) M^2 \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (16)$$

روابط بین خواص بحرانی (خواص سیال در گلوگاه که $M=1$ است) و خواص سکون:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (17)$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (18)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (19)$$

9-3- حالت خفگی

$$\dot{m}_{\max} \propto \frac{P_0 A^*}{\sqrt{T_0}}$$

9-6- جریان آدیباتیک همراه با اصطکاک در يك كانال با مقطع يکنواخت

جریان مافوق صوت	جریان مادون صوت	خاصیت
کاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد	سرعت V
کاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد	عدد ماخ M
افزایش می‌یابد	کاهش می‌یابد	فشار P
افزایش می‌یابد	کاهش می‌یابد	دما T
افزایش می‌یابد	کاهش می‌یابد	چگالی ρ
ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	آنتالپی سکون h_0
افزایش می‌یابد	افزایش می‌یابد	آنتروپی s

9-7- جریان همدم همراه با اصطکاک

$$\frac{f}{D} L_{\max} = \frac{1 - kM^2}{kM^2} + \ln(kM^2) \quad (20)$$

$M > 1/\sqrt{k}$	$M < 1/\sqrt{k}$	خاصیت
افزایش می‌یابد	کاهش می‌یابد	فشار P
افزایش می‌یابد	کاهش می‌یابد	چگالی ρ
کاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد	سرعت V
کاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد	عدد ماخ M
کاهش می‌یابد	افزایش می‌یابد	دمای سکون T_0
اگر $M < \sqrt{2}/(k+1)$ باشد افزایش می‌یابد اگر $M > \sqrt{2}/(k+1)$ باشد کاهش می‌یابد	کاهش می‌یابد	فشار سکون P_0

جریان در بسترهای پر شده

10-1- تعاریف

ضریب تخلخل (ε):

$$\varepsilon = \frac{V_e}{V_t} \quad (1)$$

سطح ویژه (a_p):

برای پرکن‌های کروی:

$$a_p = \frac{6(1-\varepsilon)}{d_p} \quad (2)$$

d_p : قطر پرکن

شعاع هیدرولیکی:

$$r_H = \frac{\varepsilon}{a} \quad (3)$$

برای پرکن‌های کروی:

$$r_H = \frac{\varepsilon}{6(1-\varepsilon)} d_p \quad (4)$$

سرعت ظاهری و سرعت واقعی سیال:

$$V_s = \frac{Q}{A} \quad (5)$$

سرعت ظاهری:

$$V_b = \frac{V_s}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon A} \quad (6)$$

A: سطح مقطع برج خالی

Q: دبی حجمی سیال در بستر خالی

ضریب شکل:

$$a = \frac{6(1-\varepsilon)}{\phi_s d_p} \quad (7)$$

برای کره: $\phi_s = 1$

10-2- رابطه افت فشار با سرعت

$$\text{جریان آرام سیال: } \frac{\Delta P}{L} = \frac{150\mu(1-\varepsilon)^2 V}{\varepsilon^3 d_p^2}$$

$$\text{جریان درهم سیال: } \frac{\Delta P}{L} = \frac{1/75(1-\varepsilon)\rho V^2}{\varepsilon^3 d_p}$$

در بستر سیال شده:

$$\frac{\Delta P}{L_{mf}} = (1-\varepsilon_{mf})(\rho_p - \rho)g \quad (8)$$

ε_{mf} : تخلخل در شروع سیال شدن

L: طول بستر در شروع سیال شدن

