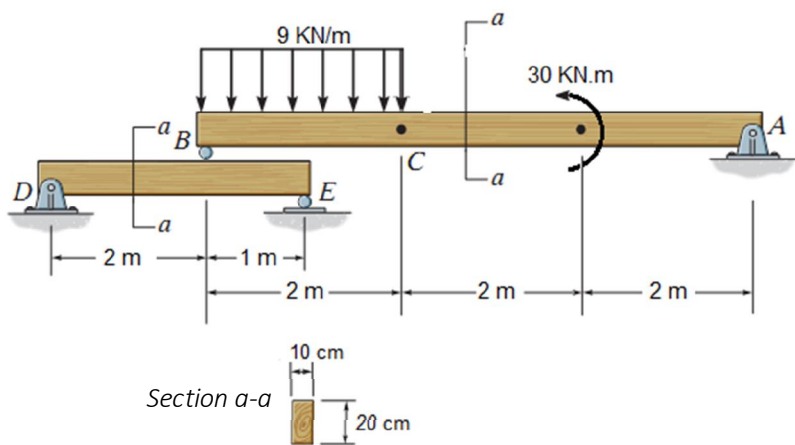




تغییر مکان نقطه‌ای از تیر AB را که در فاصله یک متری از تکیه گاه A قرار دارد، بدست آورید. هر دو تیر از چوب با مدول الاستیسیته $E=10 \text{ GPa}$ ساخته شده اند.

Handwritten solution for the beam deflection problem:

35

1. $W(x) = -20\langle x \rangle^1 + 9\langle x \rangle^2 - 7\langle x-2 \rangle^2 + 30\langle x-4 \rangle^{-2}$

2. $\sum M_A = 0 \rightarrow -F_B(6) + 18(5) + 30 = 0$

3. $F_B = 20 \text{ kN}$

4. $M(x) = 20\langle x \rangle^1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{9}{2}\langle x-2 \rangle^2 - 30\langle x-4 \rangle^0$

5. $EI y''(x) = 10x^2 - 1.5x^3 + 1.5\langle x-2 \rangle^3 - 30\langle x-4 \rangle^1$

6. $EI y'(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{1.5}{4}x^4 + \frac{1.5}{4}\langle x-2 \rangle^4 - 15\langle x-4 \rangle^2 + C_1$

7. $x=0, y=0 \rightarrow C_2 = 0$

8. $x=6, y=0 \rightarrow 720 - 486 + 96 - 60 + C_1 = 0$

9. $C_1 = -45$

10. $y(x) = \frac{1}{EI} \left[-0.375x^4 + 0.375\langle x-2 \rangle^4 + \frac{10}{3}x^3 - 15\langle x-4 \rangle^2 - 45x \right]$

11. $(\Delta F)_I = y(x=5) = \frac{-27.3333}{EI} \text{ kN.m}^3$

12. $(\Delta F)_II = \Delta_B \times \frac{1}{6}$

13. $\Delta_B = -\frac{F_B \cdot a^2 b^2}{3EI L}$

14. $\Delta_B = -\frac{20 \times 4 \times 1}{(EI)(3)(3)}$

15. $\Delta_B = -\frac{8.8889}{EI} \text{ kN.m}^3$

16. $(\Delta F)_II = -\frac{1.48}{EI} \text{ kN.m}^3$

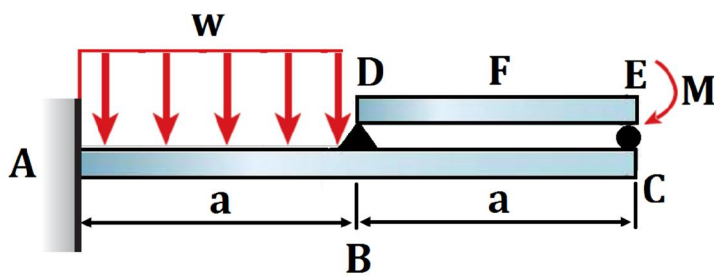
17. $\Delta F = (\Delta F)_I + (\Delta F)_II = \frac{-28.81}{EI} \text{ kN.m}^3$

18. $\Delta F = \frac{-28.81 \times 10^3}{10 \times 10^9 \times 66.67 \times 10^6}$

19. $\Delta F = -0.0432 \text{ m}$

20. $\Delta F = 43.21 \text{ mm}$

21. $I = \frac{1}{12} (0.1)(0.2)^3 = 66.67 \times 10^{-6} \text{ m}^4$



تیر DE روی تیر یکسرگیردار AC قرار دارد و گشتاور M به انتهای تیر DE و بار یکنواخت $w = M/a^2$ مطابق شکل به قسمتی از تیر اعمال می گردد. اگر صلبیت خمشی هر دو تیر EI باشد خیز نقطه F (وسط تیر DE) را بدست آورید.

حل سوال اول: (اصلاح شده)

⑤ سؤالات حل شده: ① طرح ABC ② سؤالات حل شده: ③ طرح ABC ④ سؤالات حل شده: ⑤ طرح ABC

Equilibrium: $F_D = F_E = \frac{M}{a}$ ①

Deflection: $EI y'' = -\frac{M}{a} x$
 $EI y' = -\frac{M}{a} \frac{x^2}{2} + C_1$
 $EI y(x) = -\frac{M}{6a} x^3 + C_1 x + C_2$ ②

Beam DE: $y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$; $y(a) = 0 \rightarrow -\frac{Ma^2}{6} + C_1 a = 0 \rightarrow C_1 = \frac{Ma}{6}$ ③

$\rightarrow y(x) = \frac{M}{6EI} \left(-\frac{x^3}{a} + ax \right)$; $y_F = y(x=a/2) = \frac{M}{6EI} \left(-\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{3Ma^2}{48EI} = \frac{y_F}{16}$ ④ + ⑤

Beam AC: $w = M/a^2$; $F_A = wa = \frac{M}{a}$ ①

Equilibrium: $\sum \vec{M}_A = 0 \rightarrow M_A - \frac{wa^2}{2} + \frac{M}{a} a - \frac{M}{a} (2a) = 0$
 $\rightarrow M_A = \frac{wa^2}{2} - M + 2M = \frac{3M}{2}$ ②

$EI y'' = M(x) = -\frac{3M}{2} + \frac{M}{a} x - \frac{M}{2a^2} x^2 + \frac{M}{2a^2} \langle x-a \rangle^2 + \frac{M}{a} \langle x-a \rangle$ ③

$EI y' = -\frac{3M}{2} x + \frac{M}{2a} x^2 - \frac{M}{6a^2} x^3 + \frac{M}{6a^2} \langle x-a \rangle^3 + \frac{M}{2a} \langle x-a \rangle^2 + C_1$

$EI y(x) = -\frac{3M}{4} x^2 + \frac{M}{6a} x^3 - \frac{M}{24a^2} x^4 + \frac{M}{24a^2} \langle x-a \rangle^4 + \frac{M}{6a} \langle x-a \rangle^3 + C_1 x + C_2$ ④

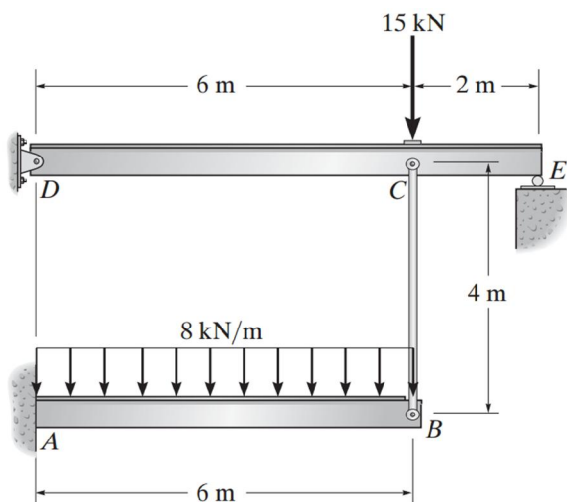
$y(0) = y'(0) = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0$ ⑤

$y(a) = \frac{M}{EI} \left[\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{24} \right] = \frac{15}{24} \frac{Ma^2}{EI} = \frac{5}{8} \frac{Ma^2}{EI}$ ⑥ + ⑦

$y(2a) = \frac{M}{EI} \left[\frac{3(2a)^2}{4} + \frac{(2a)^3}{6} - \frac{(2a)^4}{24} + \frac{(2a)^2}{24} + \frac{(2a)^3}{6} \right] = \frac{51}{24} \frac{Ma^2}{EI}$ ⑧ + ⑨

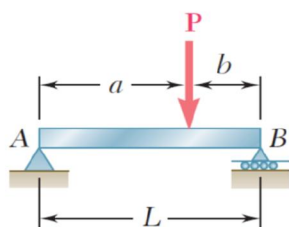
$y_F = \frac{1}{2} \left(-\frac{15}{24} + \frac{51}{24} \right) \frac{Ma^2}{EI} = \frac{66}{48} \frac{Ma^2}{EI} = \frac{11}{8} \frac{Ma^2}{EI}$ ⑩ + ⑪

$(y_F)_{total} = \frac{63}{48} \frac{Ma^2}{EI}$ ⑫



در سازه نشان داده شده در شکل روبرو، نیرو در میله عمودی BC و $A = 200 \text{ mm}^2$ و همچنین خیز نقطه C را فقط و فقط با استفاده از روش جمع آثار (superposition) محاسبه نمایید. برای تیرهای افقی DE و AB فرض نمایید $I = 100 \times 10^6 \text{ mm}^4$ و همچنین برای همه اعضاء سازه فرض نمایید $E = 200 \text{ GPa}$.

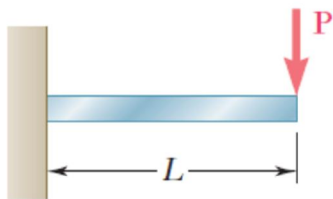
راهنمایی: از رابطه ذیل میتوانید مستقیماً استفاده نمایید. روابط مورد نیاز دیگر را (جهت استفاده در روش جمع آثار) خود اثبات نمایید.



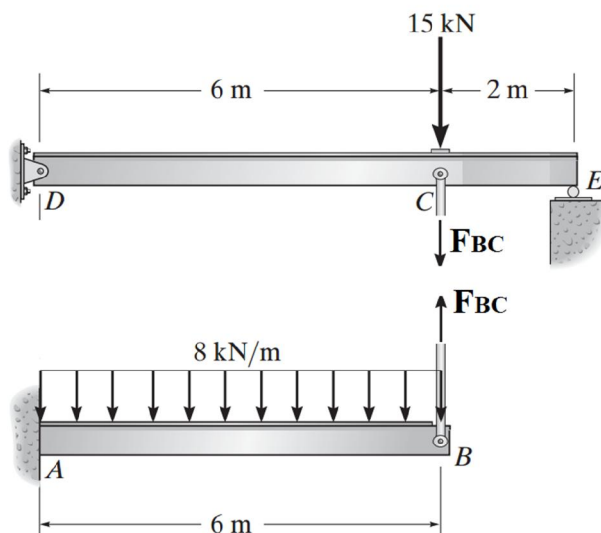
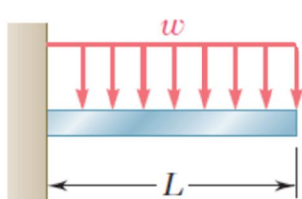
$$\text{For } x = a: y = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$

جواب:

$$y_{\max} = -\frac{PL^3}{3EI}$$



$$y_{\max} = -\frac{wL^4}{8EI}$$



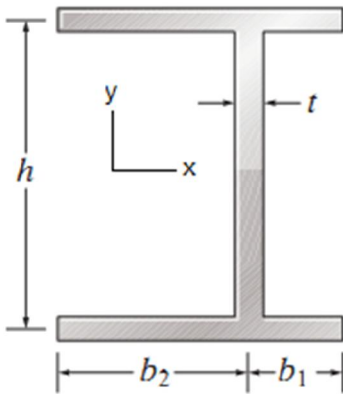
$$y_C = y_B + \frac{F_{BC}L_{BC}}{A_{BC}E_{BC}}$$

$$\rightarrow \frac{-(15 \text{ kN} + F_{BC}) \times (6 \text{ m})^2 \times (2 \text{ m})^2}{3 \times E \times (100 \times 10^{-6} \text{ m}^4) \times 8} = \left(\frac{-8 \times (6 \text{ m})^4}{8 \times E \times (100 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} + \frac{F_{BC} \times (6 \text{ m})^3}{3 \times E \times (100 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} \right) + \frac{F_{BC} \times (4 \text{ m})}{200 \text{ mm}^2 \times E}$$

$$\rightarrow F_{BC} = 15.075 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \delta_C = \frac{-(15000 + 15075) \text{ N} \times (6 \text{ m})^2 \times (2 \text{ m})^2}{3 \times 200 \times 10^9 \times (100 \times 10^{-6} \text{ m}^4) \times 8} = -9.02 \text{ mm} \cong 9 \text{ mm} \downarrow$$

مقطع شکل زیر تحت نیروی $V=34.5 \text{ KN}$ در امتداد محور y قرار دارد.



الف) مطلوب است تعیین نقطه اعمال بار به طوری که مقطع تحت پیچش قرار نگیرد.

ب) در این حالت ۱- دیاگرام جریان برشی را رسم نمایید.

۲- محل و مقدار تنش برشی ماکزیمم را بدست آورید.

$$b_1 = 2 \text{ cm}, \quad b_2 = 8 \text{ cm}, \\ t = 1 \text{ cm and } h = 11 \text{ cm}$$

Handwritten solution for the shear stress distribution in an I-beam:

First, the moment of inertia I_x is calculated:

$$I_x = \frac{1}{12}(10)(12)^3 - \frac{1}{12}(9)(10)^3 = 690 \text{ cm}^4$$

Then, the shear flow q_1 in the web is determined:

$$R_1 = \int_A dR_1 = \int_0^{b_1} \tau_1 t dx_1$$

$$R_1 = \int_0^{b_1} q_1 dx_1 \quad ; \quad R_2 = \int_0^{b_2} q_2 dx_2$$

Using the shear flow formula $q = \frac{VQ}{I}$:

$$q_1 = \frac{VQ_1}{I} \quad ; \quad Q_1 = (t x_1) \frac{h}{2} = \frac{th}{2} x_1 \quad \rightarrow \quad q_1 = \frac{Vth}{2I} x_1$$

$$q_2 = \frac{VQ_2}{I} \quad ; \quad Q_2 = (t x_2) \frac{h}{2} = \frac{th}{2} x_2 \quad \rightarrow \quad q_2 = \frac{Vth}{2I} x_2$$

The resultant forces R_1 and R_2 are:

$$R_1 = \frac{Vth}{2I} \cdot \frac{b_1^2}{2} \quad ; \quad R_2 = \frac{Vth}{2I} \cdot \frac{b_2^2}{2}$$

Applying the equilibrium condition $\sum M_A = 0$:

$$R_2 \cdot h - R_1 \cdot h = V \cdot e \quad \rightarrow \quad e = \frac{th^2}{4I} (b_2^2 - b_1^2) = 2.63 \text{ cm}$$

The shear flow distribution is shown in the diagram, with maximum values at the neutral axis:

$$q_1 = \frac{Vth}{2I} x_1 \quad ; \quad q_{1\max} = \frac{Vth b_1}{2I} = 0.55 \text{ kN/cm}$$

$$q_2 = \frac{Vth}{2I} x_2 \quad ; \quad q_{2\max} = \frac{Vth b_2}{2I} = 2.2 \text{ kN/cm}$$

$$q_A = q_{A'} = q_1 + q_2 = 2.75 \text{ kN/cm}$$

The shear flow in the flanges is:

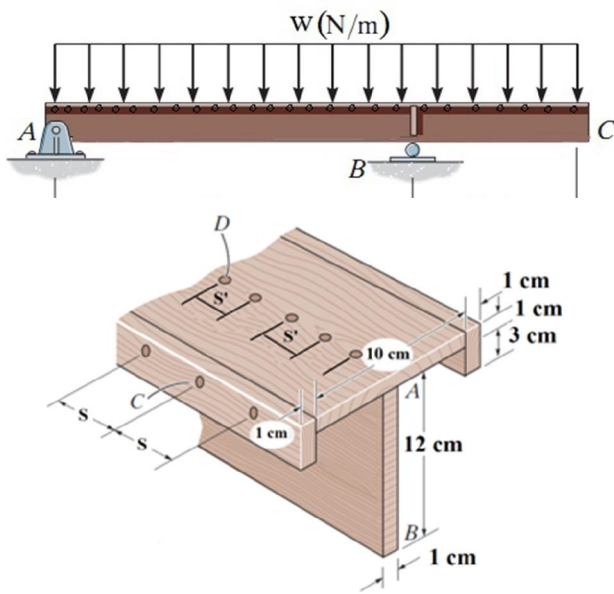
$$q_3 = \frac{VQ_3}{I} \quad ; \quad Q_3 = (b_1 + b_2) t \cdot \frac{h}{2} + \left(\frac{b_1}{2} - y \right) t \cdot \frac{1}{2} (b_1 + y)$$

$$q_3 = \frac{Vt}{2I} \left[(b_1 + b_2) h + \left(\frac{b_1^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

The maximum shear stress is:

$$q_{\max} = q_{3\max} = q_c = q_3(y=0) = 3.5063 \text{ kN/cm}$$

$$\tau_{\max} = \tau_c = \frac{q_c}{t} = 3.5063 \text{ kN/cm}^2 \times 10^3 \times \frac{1}{1} = 35.063 \text{ MPa}$$



در تیر شکل مقابل با مقطع نشان داده شده، اگر ماکزیمم نیروی برشی که هر میخ می تواند تحمل کند 450 N باشد و فاصله بین میخ ها $s=8\text{ cm}$ و $s'=1.5\text{ cm}$ باشد، حداکثر مقدار بار گسترده w که تیر می تواند تحمل کند را تعیین کنید .

جواب :

$$\sum M_B = 0 \rightarrow 4A_y - 6w(1) = 0, \rightarrow A_y = 1.5w(N), B_y = 4.5w(N)$$

$$V = 1.5w - wx + 4.5w < x - 4 >^0$$

$$V_{max} = 2.5w N$$

$$\bar{y} = \frac{0.5(10)(1) + 2 \times 2(4)(1) + 7(12)(1)}{10 \times 1 + 2 \times 4 \times 1 + 12 \times 1} = 3.5\text{ cm}$$

$$I_{NA} = \left[\frac{1}{12}(10)(1)^3 + (10)(1)(3.5 - 0.5)^2 \right] + 2 \left[\frac{1}{12}(1)(4)^3 + (4)(1)(3.5 - 2)^2 \right] + \left[\frac{1}{12}(1)(12)^3 + (1)(12)(7 - 3.5)^2 \right] = 410.5\text{ cm}^4$$

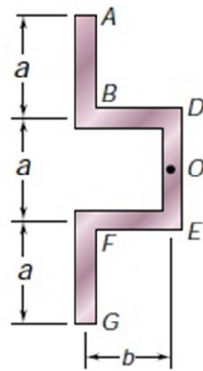
$$Q_c = (1)(4)(3.5 - 2) = 6\text{ cm}^3$$

$$Q_D = (1)(12)(7 - 3.5) = 42\text{ cm}^3$$

$$F_c = \frac{VQ_c}{I} s \rightarrow 450 = \frac{2.5w(6\text{ cm}^3)(8\text{ cm})}{410.5\text{ cm}^4} \rightarrow w = 1539\text{ N/m}$$

$$F_D = \frac{VQ_D}{I} s' \rightarrow 450 = \frac{2.5w(42\text{ cm}^3)(1.5\text{ cm})}{410.5\text{ cm}^4} \rightarrow w = 1173\text{ N/m}$$

$$w_{max} = 1173\text{ N/m}$$



در شکل روبرو یک مقطع جدار نازک با ضخامت یکنواخت t نشان داده شده است. اندازه پارامتر b را بر حسب سایر پارامترها چنان تعیین کنید که مرکز برش برای تیر ساخته شده از مقطع نشان داده شده منطبق بر نقطه ای باشد که روی شکل با نقطه O مشخص گردیده است.

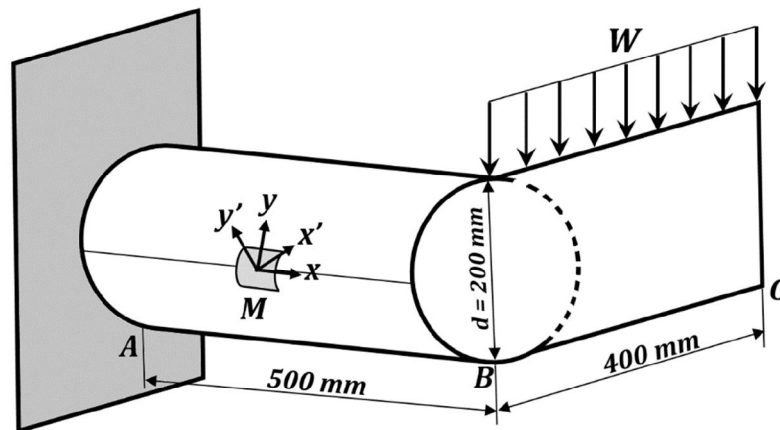
For O to be the shear center we should have: $2b \times F_{AB} = a \times F_{BD}$

$$F_{AB} = \int_0^a q_{AB} ds = \int_0^a \frac{V}{I} st \left(\frac{3a}{2} - \frac{s}{2} \right) ds = \frac{V}{2I} \int_0^a (3ats - ts^2) ds = \frac{7Vta^3}{12I}$$

$$F_{BD} = \int_0^b q_{BD} ds = \int_0^b \frac{V}{I} \left(at \times a + st \times \frac{a}{2} \right) ds = \frac{V}{I} \int_0^b \left(a^2 t + \frac{ats}{2} \right) ds = \frac{Vabt}{4I} (4a + b)$$

$$2b \times F_{AB} = a \times F_{BD} \rightarrow 2b \frac{7Vta^3}{12I} = a \frac{Vabt}{4I} (4a + b) \rightarrow b = \frac{2a}{3}$$

در مجموعه شکل زیر



مطلوب است:

الف- حداکثر شدت بار گسترده اگر مقدار کرنش اندازه‌گیری شده در المان M (در لایه‌ی خارجی و وسط محور AB) توسط دو کرنش سنج عبارت باشد از:

$$\epsilon_{x'} = +80 (10^{-6}) \quad \& \quad \epsilon_{y'} = -80 (10^{-6})$$

ب- حداکثر تنش عمودی

کل مجموعه از یک ماده با مشخصات زیر ساخته شده است:

$$E = 210 \text{ GPa}, G = 85 \text{ GPa}$$

جواب:

As element M is located on the neutral axis of the section, no normal stress occurs in the element. So we have: $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$.

$$\epsilon'_x = \epsilon_x \cos^2 45^\circ + \epsilon_y \sin^2 45^\circ + \gamma_{xy} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 80 \times 10^{-6} \rightarrow \gamma_{xy} = 160 \times 10^{-6}$$

Or

$$\epsilon'_y = \epsilon_x \cos^2 135^\circ + \epsilon_y \sin^2 135^\circ + \gamma_{xy} \sin 135^\circ \cos 135^\circ = -80 \times 10^{-6} \rightarrow \gamma_{xy} = 160 \times 10^{-6}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 85 \text{ GPa} \times 160 \times 10^{-6} \rightarrow \tau_{xy} = 13.6 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \text{for element M: } \tau_{xy} &= \frac{VQ}{It} + \frac{Tr}{J} = -\frac{4V}{3A} + \frac{Tr}{J} = -\frac{4}{3} \frac{400w}{\pi(100)^2} + \frac{400w \times 200 \times 100}{\frac{\pi}{2}(100)^4} \\ &= 13.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$w = 400.5 \text{ N/mm}$$

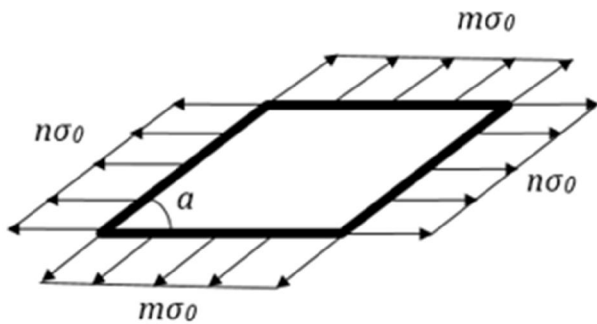
Maximal normal stress occurs at point N where the bending moment is maximum:

$$\sigma_x = \frac{MC}{I} = \frac{(400 \text{ mm} \times 400.5 \text{ N/mm} \times 500 \text{ mm}) \times 100 \text{ mm}}{\frac{\pi}{4}(100)^4 \text{ mm}^4} = 102 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} + \frac{Tr}{J} = 0 + \frac{Tr}{J} = \frac{400 \text{ mm} \times 400.5 \text{ N/mm} \times 200 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{\frac{\pi}{2}(100)^4 \text{ mm}^4} = 20.4 \text{ MPa}$$

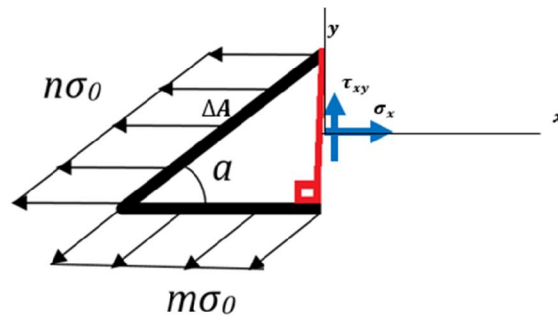
$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{102 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{102 - 0}{2}\right)^2 + 20.4^2}$$

$$\sigma_{max} = 105.9 \text{ MPa}$$



المان متوازی الاضلاع شکل نشان داده شده مطابق وضعیت روبرو تحت تنش قرار دارد. مقادیر تنشهای اصلی و همچنین تنش برشی حداکثر درون صفحه ای را بصورت پارامتری برحسب α و دیگر متغیرهای نشان داده شده بر روی شکل بدست آورید.

جواب :

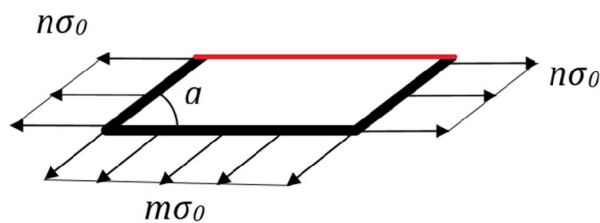


$$\sum F_x = 0 \rightarrow \sigma_x (\Delta A \sin \alpha) - n\sigma_0 (\Delta A) - m\sigma_0 \cos \alpha (\Delta A \cos \alpha) = 0 \rightarrow \sigma_x \sin \alpha = (n + m \cos^2 \alpha) \sigma_0$$

$$\sigma_x = \frac{(n + m \cos^2 \alpha) \sigma_0}{\sin \alpha}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \tau_{xy} (\Delta A \sin \alpha) - m\sigma_0 \sin \alpha (\Delta A \cos \alpha) = 0$$

$$\rightarrow \tau_{xy} = m\sigma_0 \cos \alpha$$

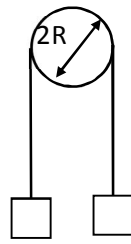


$$\rightarrow \sigma_y = m\sigma_0 \sin \alpha$$

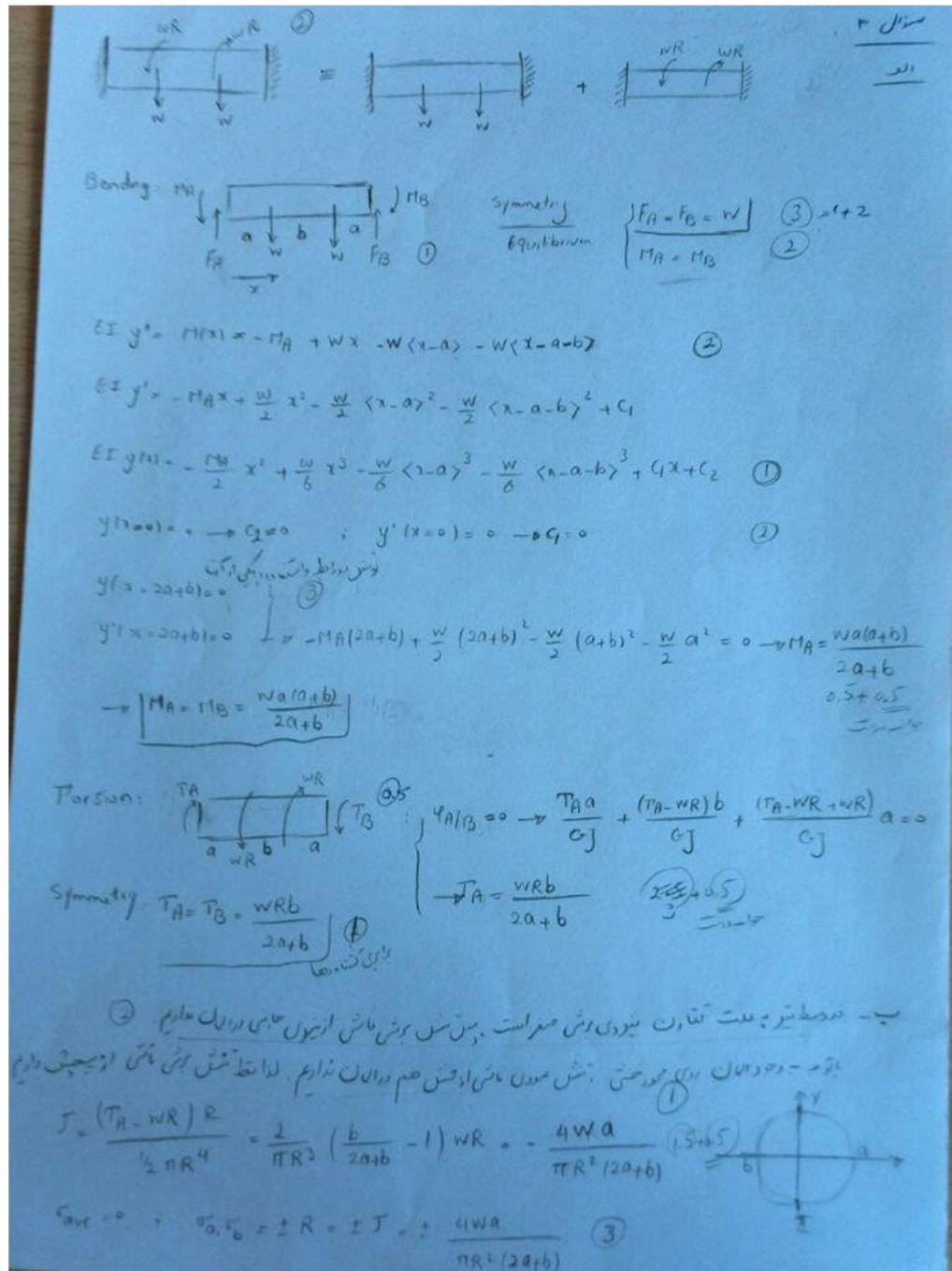
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

مطلوب است :



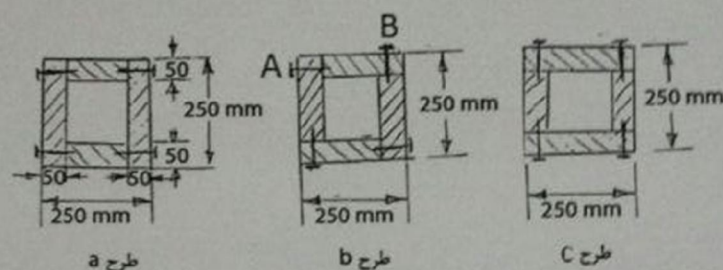
ب- تعیین تنش های اصلی در المان C که در لایه خارجی و در وسط محور قرار گرفته است با رسم دایره مور.



می خواهیم از به هم پیوستن چهار الوار با ضخامت 50 mm یک تیر با مقطع مربع به ابعاد 250 mm بسازیم. همانطور که در شکل های زیر نشان داده شده است سه طرح برای ساختن تیر مذکور در نظر گرفته شده است.

الف) کدام طرح کمترین میخ را احتیاج دارد. با دلایل کافی توضیح دهید.

ب) اگر نیروی برشی قابل انتقال به وسیله این تیر 3000 N و نیروی برشی قابل تحمل توسط هر میخ 240 N باشد فاصله میخ های A و B در طرح b و در طرح c را تعیین کنید.

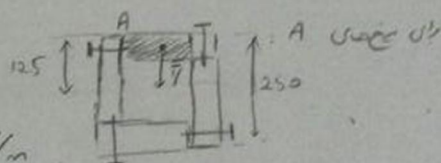


جواب: طرح a مناسب ترین طرح است زیرا مقدار گشتاور سطح و در نتیجه جریان برشی که میخ ها باید تحمل کنند کمترین است. در طرح b، تعداد میخ های A، با تعداد میخ های طرح c برابر است. و تعداد میخ های B، با تعداد میخ های طرح c برابر است.

$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{250}{1000} \right)^4 - \frac{1}{12} \left(\frac{150}{1000} \right)^4 = 2.833 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$Q = \left(\frac{50}{1000} \times \frac{150}{1000} \right) \times \frac{100}{1000} = 0.00075 \text{ m}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{3000 \times 0.00075}{2.833 \times 10^{-4}} = 7942 \text{ N/m}$$

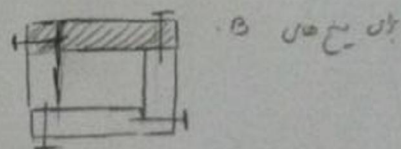


$$\frac{q}{2} \times s = 240 \rightarrow s = \frac{2 \times 240}{7942} = 0.06 \text{ m} \rightarrow s' = 60 \text{ mm}$$

فاصله میخ های A

$$Q = \left(\frac{50}{1000} \times \frac{250}{1000} \right) \times \frac{100}{1000} = 0.00125 \text{ m}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{3000 \times 0.00125}{2.833 \times 10^{-4}} = 13237 \text{ N/m}$$



$$\frac{q}{2} \times s' = 240 \rightarrow s' = \frac{2 \times 240}{13237} = 0.036 \text{ m} \rightarrow s' = 36 \text{ mm}$$

فاصله میخ های B