Subject:
Date ۹۶/۱۱/۱۷

«به نام خدا»

محاسبات عددی

جلسه دوم

۹

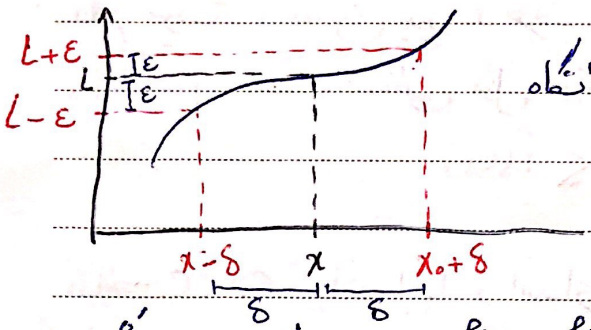
اصول اولیه ریاضی :

حد $\lim$ t

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

اگر به ازای هر عدد کوچک دلخواه مثل ε بتوان عدد کوچکی مثل δ پیدا کرد که وقتی $0 < |x - x_0| < \delta$ باشد $|f(x) - L| < \varepsilon$

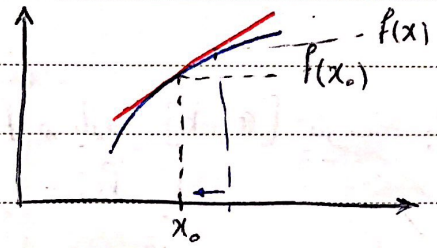
آنگاه $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. اگر $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ آنگاه تابع در x_0 پیوسته است .



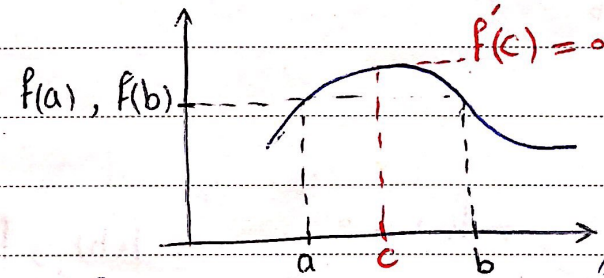
مشتق :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

اگر تابع در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد در آن نقطه پیوسته است .



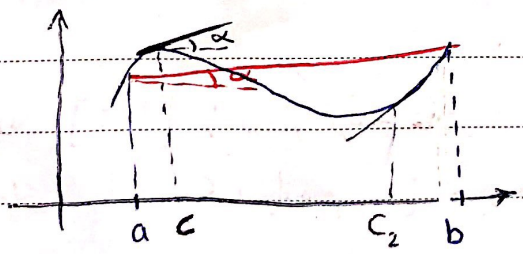
Rolle's theore



مشتق پذیر

اگر تابع در بازه $[a, b]$ پیوسته و تعریف شده است و $f(a) = f(b)$ آنگاه عددی مثل c وجود دارد که $f'(c) = 0$. (الزاماً نه یک عدد)

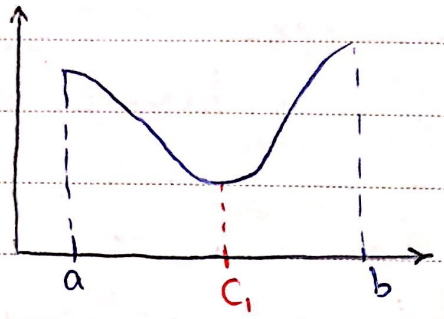
قضیه مین ولیو (Mean Value) :



اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و در آن بازه مشتق پذیر باشد عددی مثل c وجود دارد که:

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Extreme Value :

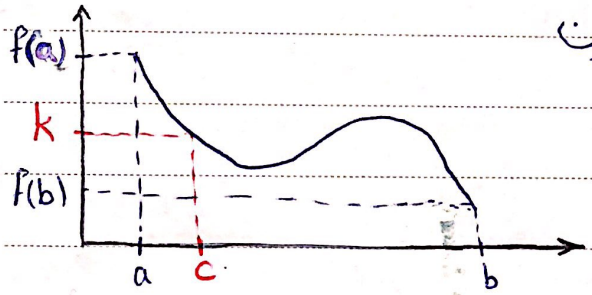


تابع پیوسته و مشتق پذیر، تعریف شده در بازه $[a,b]$ آنگاه نقاطی مثل c_1, c_2 وجود دارند که

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

نقاط c_1, c_2 یا در ابتدا و انتهای بازه هستند یا در نقاطی که مشتق برابر صفر است.

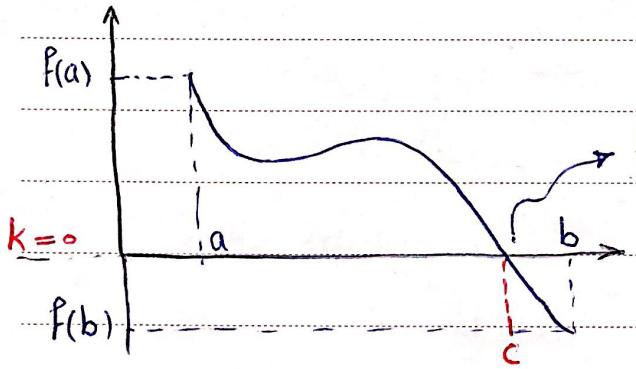
Intermedate Value Theore :



اگر f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد.

آنگاه عددی مثل c وجود دارد که c در بازه $[a,b]$ قرار دارد و $f(c) = k$.

حالت خاص:



f در $[a,b]$ پیوسته

0 عددی بین $f(a)$ و $f(b)$

$\Leftarrow$ c وجود دارد که $f(c) = 0$

مثال: $f(x) = (x-2)^2 - \ln x$

بازه $[1,2]$ را در نظر گرفتیم.

$f(1) = 1$

$f(2) = -0/6931 \rightarrow$ $f(c) = 0$ وجود دارد که c_1 مانند نقطه‌ای در بازه $[1,2]$

Subject:
Date

بازه $[1,4]$ را در نظر می‌گیریم. $f(1) = 1$, $f(4) = 2,913V$

پس نتیجه نمی‌شود گرفت که در آن بازه ریشه ندارد !!!

بازه $[e,4]$: $f(e) = -0,4841$, $f(4) = 2,913V$

معادله در این بازه ریشه دارد.

مثال ۲ : ثابت کنید معادله $f(x) = x^3 + 2x + 1$ فقط یک ریشه دارد ؟

$f(-1) = -2$, $f(0) = 1$

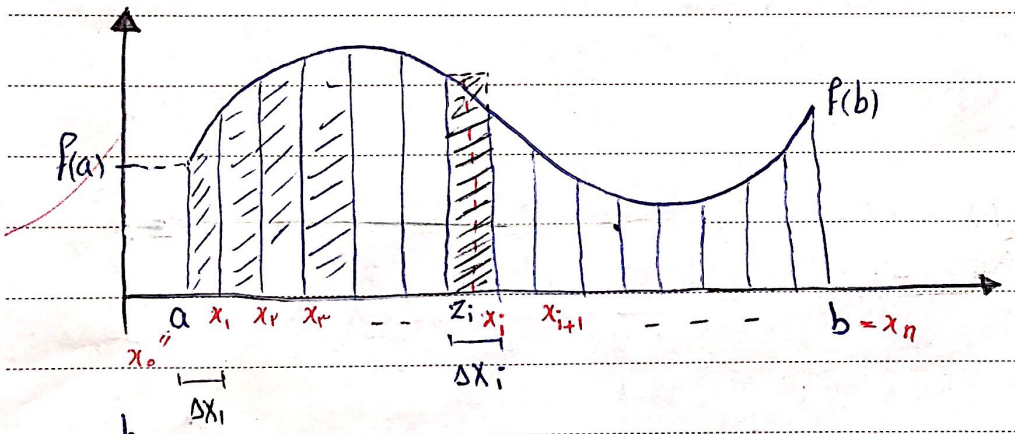
معادله حتماً ریشه دارد. (در بازه $[-1,0]$)

اگر معادله دو ریشه داشته باشد، بنابر قضیه رول

$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$

" $f'(x) = 0$ غیر ممکن "

تعریف انتگرال :



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i$$

نقطه z_i نقطه‌ای در بازه $[x_{i-1}, x_i]$ است.

اگر فواصل مساوی انتخاب شوند $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

Subject:
Date

Weighted Mean Value :

اگر $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته، $g(x)$ در همان بازه پیوسته باشد و در عین حال تغییر علامت ندهد آنگاه نقطه‌ای مثل c وجود دارد که :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

اگر $g(x)=1$ فرض کنیم، مقدار میانگین تابع f در بازه $[a,b]$ نتیجه خواهد شد :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

بسط تیلور "Taylor" :

تابع در بازه $[a,b]$ پیوسته، $f(x)$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، ... ، $f^{n}(x)$ در آن بازه موجود و پیوسته و همچنین $f^{(n+1)}(x)$ در آن بازه موجود باشد برای هر x در آن بازه تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت :

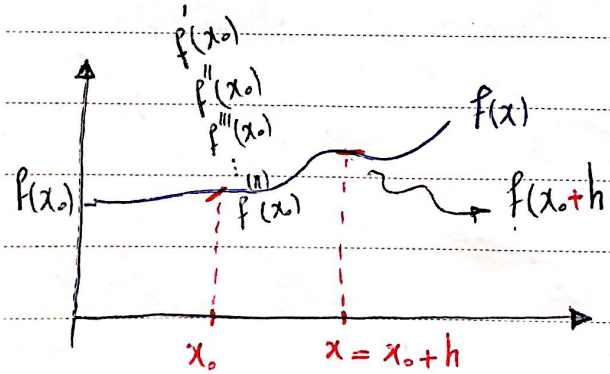
$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

"عدد مشتق ازشان" — "می‌دهد"

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

* عدد ξ عددی بین x و x_0 است.



$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

ξ نقطه‌ای بین x_0 و x_0+h است.

P4PCO

Subject:
Date

مثال : $f(x) = \cos x$ $\quad O(x^3)$ ← "خطا از مرتبه سوم x" و مشتق مرتبه دوم $P_2(x)$

حول نقطه $x_0 = 0$ بسط تیلور را می‌نویسیم.

$f(0) = 1$, $f'(0) = -\sin 0 = 0$, $f''(0) = -\cos 0 = -1$

$f'''(0) = \sin 0 = 0$, $f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$

$P_2(x) = 1 + 0(x-0) - 1\frac{(x-0)^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}$

$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

یعنی با $n=2$ جلو رفتیم، خطا $O(x^3)$ خواهد بود.

$P_0(0/1) = P_1(0/1) = 1$

$\cos(0/1)$: $P_2(0/1) = 0/995$

$P_4(0/1) = 0/995004167$

مقدار دقیق : $0/995004165$

حول نقطه "$x_0 = 0$"

خطا : $R_1 = \frac{f''(\xi)}{2} x^2 = -\cos\xi \frac{x^2}{2}$

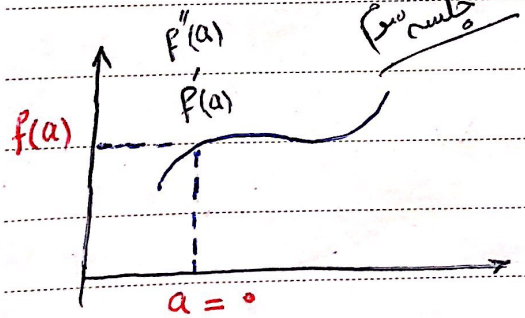
ξ بین 0 و x است ← ماکزیمم مقدار $\cos\xi$ برابر 1 خواهد بود.

$R_1(0/1) = -1 \times \frac{(0/1)^2}{2} = 0/005$

$R_2(0/1) = \frac{(0/1)^4}{24} \cos\xi = 0/000004167$

$R_4(0/1) = \frac{-(0/1)^6}{720} \cos\xi = -1/39 \times 10^{-9}$

محاسبات عددی — به نام خدا — ۹۹/۱۱/۲۴



$f(x) = \cos x$

$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \cos\xi(x)$

$-1 \leq \cos x \leq 1$, $\sin x \leq x$

$\cos(0/01)$: , $1 - \frac{x^2}{2} = 0/99995$

Subject:
Date

$$R_3 = \frac{1}{24}(0.01)^4 \cos\varphi(x)$$

$$\left|\frac{1}{24}x^4\cos\varphi(x)\right| \le \left|\frac{1}{24}(0.01)^4\right| = 4.2\times10^{-10}$$

$$0.99995 \le \cos(0.01) \le 0.99995 + 4.2\times10^{-10}$$
$$- 4.2\times10^{-10}$$

مثال: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4\cos\varphi(x)$

$$\int_0^{0.1}\cos(x) = \int_0^{0.1}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)dx + \frac{1}{24}\int x^4\cos\varphi(x)\,dx =$$

0.09983

$$0.1 - \frac{1}{6}\times(0.1)^3 + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4\cos\varphi(x)\,dx$$

مقدار ثابت

خطای محاسبات

$f(x) = x^3$ ..... "تمرین"

جبر ماتریس:

element

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow \text{row \#1} \quad \leftarrow \text{row \#2}$$

↑ colour #1 ↑ colour #2

2 × 2 → تعداد ستون، تعداد ردیف

$A(2,1)$ → المان ردیف دوم، ستون اول

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2} \qquad [C] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$[A] + [C] = \not\exists$ $\qquad [A] - [C] = \not\exists$

$[A] * [C] = \not\exists \neq [C] * [A]$ $\qquad [A] * [B] = X$

$[B] * [A] = \not\exists$

$$[A]_{m\times n} * [D]_{n\times p} = [E]_{m\times p}$$

انواع نمایش بردار:

$$A = \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}_{3\times1} \qquad \langle 5\ 2\ 2 \rangle$$

P4PCO

Subject :
Date

2nd type of matrix multipication :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

ترانهاده یک ماتریس :

$$[A]_{m\times n} \rightsquigarrow [A]^T_{n\times m}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times ۲} = \text{Det}[A] = |A| = ۲\times ۳ - ۱\times ۴$$

$$\text{Det}[۲] = ۲$$

$$(-۱)^{(۱+۱)} \times ۲ \times \text{Det}(۳) + (-۱)^{(۱+۲)} \times ۱ \times \text{Det}(۴)$$

$$\text{Det}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۴ & -۲ \\ ۰ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} = ۲\times[۲\times ۴ - (-۲\times ۳)] - ۱[۰\times ۴ - ۰\times(-۲)] - ۱\times[۰\times ۳ - ۰\times ۲] = ۲۸$$

رتبه (Rank) ماتریس :

$$\bar{a}_۱ = \begin{Bmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۰ \end{Bmatrix} \quad \bar{a}_۲ = \begin{Bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۶ \end{Bmatrix} \quad \bar{a}_۳ = \begin{Bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ -۳ \end{Bmatrix}$$

اگر معادله روبرو جواب داشته باشد آنگاه سه بردار $x_۱\bar{a}_۱ + x_۲\bar{a}_۲ + x_۳\bar{a}_۳ = ۰$ به هم وابسته هستند.

جواب بدیهی : $x_۱ = x_۲ = x_۳ = \dots = ۰$

اگر سیستم تنها جواب بدیهی داشته باشد ← بردارهای $\bar{a}_۱, \bar{a}_۲, \dots, \bar{a}_n$ را می‌توان

Subject:
Date

به صورت ترکیب خطی از هم نوشت ← بردارها مستقل هستند.
در غیر این صورت ← اگر x_1 تا x_n جوابی غیر از صفر داشته باشند بردارها وابسته هستند.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & -۱ \\ ۴ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۶ & -۳ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{Bmatrix}$$

$$[A] = [\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}]$$

$Det[A] = -۲۴$

$Det[A] = ۰$ ← سیستم غیر از جواب بدیهی، جواب دارد. (بردارها وابسته)

$Det[A] \neq ۰$ ← تنها جواب بدیهی دارد (بردارها مستقل)

$$[A] = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۹ & ۵ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad det[A] = ۰$$

"وابسته به $\bar{a}_2, \bar{a}_3$"

$$\bar{a}_1 = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۹ \\ ۲ \end{Bmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{Bmatrix} ۲ \\ ۵ \\ ۱ \end{Bmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{Bmatrix}$$

$(\bar{a}_1 = ۷\bar{a}_2 - ۱۳\bar{a}_3)$

"Rank = ۲"

حداکثر تعداد بردار مستقل هر ماتریس را رتبه ماتریس می نامیم.

* اگر ماتریس مربعی $n \times n$ باشد ← رتبه ماتریس حداکثر برابر n خواهد بود.
* اگر ماتریس $m \times n$ $(n \times m)$ باشد که $m \leq n$ ← رتبه حداکثر برابر m خواهد بود.

رتبه ماتریس مربعی ۲×۲:

$Det[A]_{2\times 2} \neq ۰ \longrightarrow rk(A) = ۲$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightsquigarrow a \times d - b \times c \neq ۰$$

$Det[A] = ۰ \longrightarrow rk(A) = ۱$ "به شرط آنکه حداقل یک المان مخالف صفر"

Subject:
Date

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow rk(A) = 1$

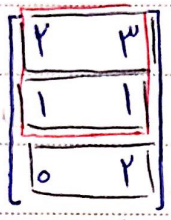
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow rk(A) = 0$

رتبه ماتریس حداکثر برابر ۲ خواهد بود.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq 0$



ماتریس‌های ۲×۲ را جدا می‌کنیم، دترمینان ماتریس‌ها را حساب می‌کنیم اگر حداقل یکی مخالف صفر ← رتبه ماتریس برابر ۲ خواهد بود.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

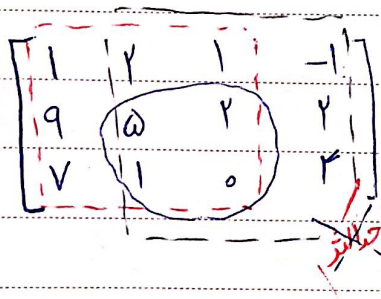
$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 18 - 18 = 0$

$\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 36 - 36 = 0$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 12 - 12 = 0$

رتبه ماتریس ۲ نخواهد بود، حالا حداکثر ۱ خواهد بود.

اگر فقط یک المان غیر صفر داشته باشیم آنگاه رتبه برابر ۱ خواهد بود.



چهار بردار $\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}_{3\times 1}$ داریم.

$\binom{P}{n} \times \binom{P}{n} = \underbrace{\binom{4}{3}}_{4} \times \underbrace{\binom{3}{3}}_{1} = 4$

دترمینان همه ماتریس‌های ۳×۳ برابر صفر.

← رتبه ماتریس حداکثر ۲

Subject :
Date

با توجه به این که حداقل یکی از ماتریس های ۲×۲ دترمینان مخالف صفر دارد ،
رتبه ماتریس برابر ۲ خواهد بود .

مثلب :

دستور پاک کردن

```
> clc        دستور ——→ صفحه را پاک می‌کند
> ۳*4 + 5
  17
> a = 5      تعریف متغیر ⇝ > a = 5 ;
  5
> b = a + 2  > b = a + 2 ;
  7
```

"جواب را نشان نمی‌دهد"

```
> a          یا    > b
  5                7
```

```
> clear      متغیر را پاک می‌کند
```

تعریف بردار و ماتریس در متلب مثلاً $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

```
> y = [ 4        یا  > y = [4 ; 5 ; 6] ≡ [4; 5; 6]
        5
        6 ]  و  ~~[4; 5; 6]~~
```

(عمودی)

```
> x = [1  2  3] ;   یا  > x = [1, 2, 3] ;
```

(افقی) (کسه بردار)

"مثلاً" : $Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

P4PCO

Subject:
Date

```
>Z=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
```

محاسبات عددی «به نام خدا» ۹۶/۱۱/۲۹

جلسه چهارم

اگر متغیری را تعریف نکنیم عدد خود به خود داخل متغیر "ans" می‌رود.
clear کل متغیرها را پاک می‌کند.

تعریف ماتریس: Z=[1 2 3 4 ; 5 6 7 8 ; 9 10 11 12]
اگر روی متغیر دبل کلیک کنیم صفحه اکسل باز می‌شود.

Z(row, col) ⟵ فراخوانی درایه ij ماتریس
(row: سطر، col: ستون؛ i، j)

مثلاً Z(3,4) = 3*5

a = 1:10 ⟵ گام: یکی یکی ⟵ 1 2 3 ... 9 10
عدد انتهایی ؛ عدد ابتدایی

b = 2:2:12 ⟵ گام: دوتا دوتا ⟵ 2 4 6 8 10 12

b = عدد ابتدایی : گام (step) : عدد انتهایی

x = linespace(1,2) فاصله ۱ تا ۲ را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

x = linespace(1,2,4) فاصله ۱ تا ۲ را به ۴ قسمت تقسیم می‌کند.

با clc صفحه پاک می‌شود.

Subject :
Date

تعریف ماتریس صفر : x = zeros (۳)

```
0 0 0
0 0 0
0 0 0
```

a = zeros (2 ; 4)

b = ones (۳)

```
1 1 1
1 1 1
1 1 1
```

* تمام دستورات با حروف کوچک است .

x = eye (3) : (ماتریس قطری) اعضای روی قطر اصلی = ۱

```
1 0 0
0 1 0
0 0 1
```

eye (2 , 4) :

```
1 0 0 0
0 1 0 0
```

برای فهمیدن بعد ماتریس از size استفاده می‌کنیم .

size (Z) → مثلا ۳ ۴ (۳ سطر ، ۴ ستون)

X = [1 , 2 , 3] , Y = [5 , 10 , 15]

⇝ Z = [1 2 3 ; 5 10 15] ← Z = [X ; Y]

Z = [X , Y] → 1 2 3 5 10 15

X + Y → 6 12 18

$[\ ]_{1\times3}$ X $[\ ]_{1\times3}$ → eror

ضرب نوع دوم ماتریس : x .* y → 5 20 45

Subject:
Date

$Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$Z * Z = Z \hat{} 2 \longrightarrow \begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۱۵ & ۲۲ \end{bmatrix}$

$Z .\hat{} 2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & ۴ \\ ۹ & ۱۶ \end{bmatrix}$ المان ها تک تک به توان ۲ می رسد.

$X = [1 \quad 2 \quad 3]$

$X' \longrightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$

ترسیم روابط و گراف:
قلب تابع پیوسته نمی تواند ترسیم کند.

مثلاً: $y = x^2 - ۳$

$x = [0, \ldots, 2]$

$y = [- - -]$

$y = x .\hat{} 2 - ۳$

```
x = linspace (0, 2) ;
y = x .^ 2 - 3 ;
plot (x , y) ;
grid on ;
```

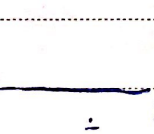
← دستور ترسیم

"برای گرید بندی بودن"

```
xx = [0, 2] ;  yy = [0, 0]
```

نشان دهنده خط بودن است.

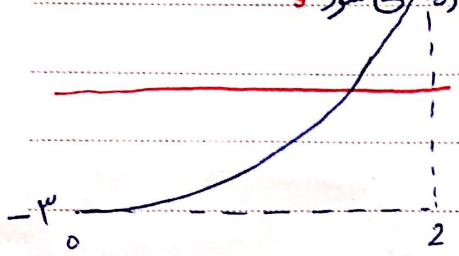
```
plot ( xx , yy)
```



شکل قبلی پاک می شود، برای پاک نشدن شکل قبلی از دستور hold on استفاده می شود.

Subject :
Date

با کلید بالا (↑) کدهای قبلی که استفاده کرده‌ایم نمایش داده می‌شود.




```
x = (0 : 0/4 : 2)
y = x.^2 - 3
plot(x, y, 'g')
```

رنگ نمودار (سبز) ←

① تعریف رنگ‌ها :

y	m	c	r	g	b	w	k
زرد	صورتی	آبی فیروزه‌ای	قرمز	سبز	آبی	سفید	سیاه

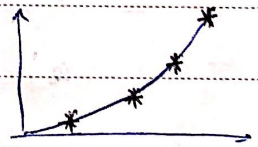
```
plot(x, y, 'b--')
```

← تعریف نوع خط

② تعریف نوع خط‌ها : — -- : -.

```
plot(x, y, 'b--*')
```

نوع مارکر ←



③ تعریف مارکر (marker) :

o	+	*	.	z	s	d	^	v	<	>
x	□	◇	△	▽	◁	▷				

h ۸ ضلعی — P پنج ضلعی

مارکر، نوع خط، رنگ، ترتیب

اگر فقط نوع مارکر را مشخص کنیم، خط را نمی‌کشد.

Defualt خط = —

Subject:
Date

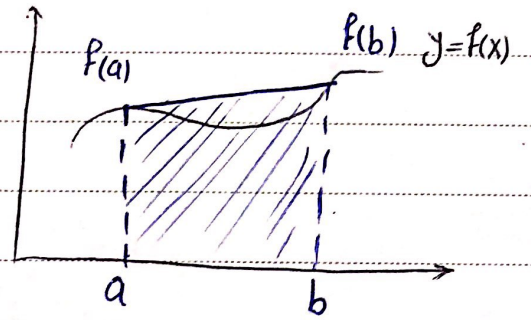
توابع ریاضی در متلب :

Sin Cos tan cot sinh cosh sqrt (جذر)

عدد پی در متلب = pi یا pi()

x = pi ⟶ 3,14

اگر به توابع مثلاً Sin ، Cos یک بردار بدهیم ، جواب نیز به صورت بردار خواهد بود .



تعریف انتگرال : مثلاً

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \times (b-a)$$

new script / برای کد نوشتن

```
a = 1 ;
b = 3 ;
x = [a  b] ;
y = x.^(1/3) ;
I = (b-a) * (y(1) + y(2))/2
```

چون فقط یک سطر داریم ، y(1) و y(2) قابل تعریف است و نیازی به شماره سطر نیست .

تعریف تابع : new function

مثلاً تابع Integ را تعریف می کنیم که دو عدد بگیرد و انتگرال را محاسبه کند

Integ (ابتدایی , انتهایی)

% سطری است که متلب به آن توجه نمی کند و برای توضیحات است .

Subject:
Date

```
function [I] = Integ(a,b)
    x = [a,b] ;
    y = x.^3 ;
    I = (b-a) * (y(1) + y(2)) / 2 ;
```

Dead line تمرینات ⟵ سه‌شنبه هفته بعد ۹۶/۱۲/۸

دنباله فیبوناچی : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

$x(1) = 0$

$x(2) = 1$

$x(3) = x(2) + x(1)$

$\vdots$

$x(n) = x(n-1) + x(n-2)$

تعریف تابع :

```
function [P] = Fibo(n)
    x(1) = 0 ;
    x(2) = 1 ;
```

٪ * برای ایجاد حلقه for i = ابتدایی : گام : انتهایی

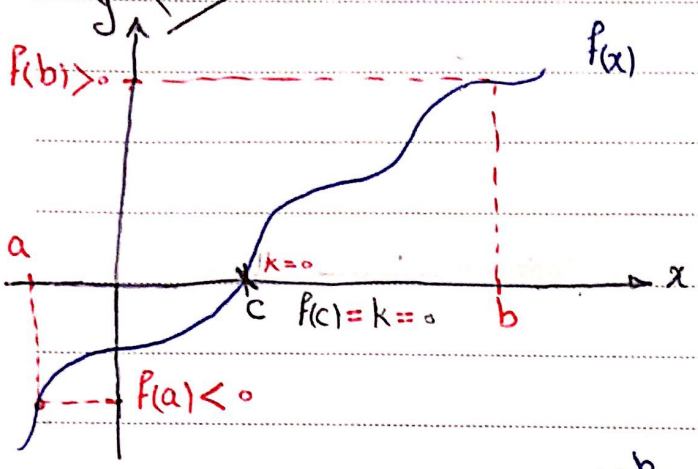
* با گام ۱ ⟵ (انتهایی : ابتدایی)

```
for i = 3 : n
    x(i) = x(i-2) + x(i-1)
end
P = x ;
```

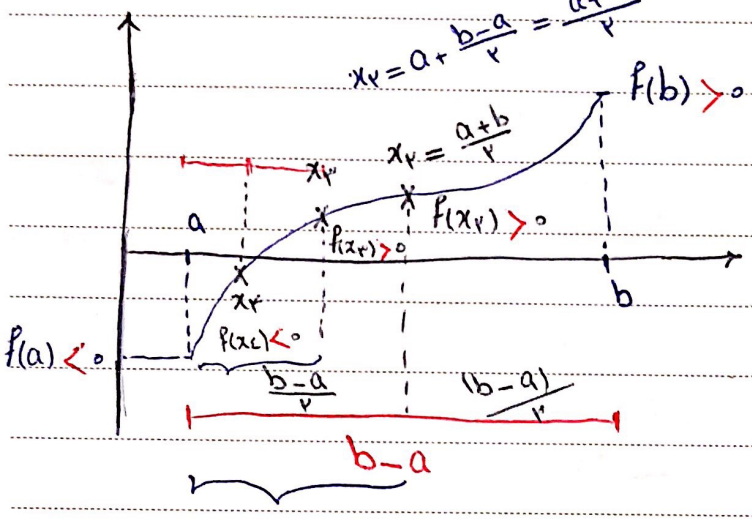
جلسه پنجم

حل معادلات غیرخطی: "Bisection"

هدف پیدا کردن $f(x) = 0$



روش "bisection (نصف کردن)"



هدف پیدا کردن x به نحوی که $f(x) = 0$:

۱/ در اولین قدم باید "نقطه پیدا کنیم که مثل a و b (ابتدا و انتهای بازه فرض ابتدایی) که $f(a)f(b) \leq 0$

$a \to x_0$ ، $b \to x_1$

۲/ نقطه فرض بعدی ما برابر خواهد بود با $x_2 = a + \frac{(b-a)}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{x_1+x_0}{2}$

۳/ اگر $f(x_2) = 0 \longleftarrow x_2$ جواب در غیر اینصورت:

if $f(a) \cdot f(x_2) < 0 \longrightarrow a = a$, $b = x_2$ ✓

if $f(a) \cdot f(x_2) > 0 \longrightarrow a = x_2$, $b = b$ ✓

۴/ $x_i = \frac{a+b}{2}$, $i = i+1$

Subject:
Date

چه وقت به جواب رسیده ایم ؟

① $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

② $\dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon$ → "حتماً به صورت" تلرانس 10^{-4} 10^{-5} 10^{-6}

③ $|f(x_n)| < \varepsilon$

توصیه شده : ۱۰۷ → $\dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1}|}$

تلرانس کوچک تر از 10^{-4} باشد (از order)

مثال : $y = x^3 - 3x^2 + 1$

$x_0 = 0 \rightsquigarrow f(x_0) = 1$ ⋮ $a = 0$

$x_1 = 1 \rightsquigarrow f(x_1) = -1$ ⋮ $b = 1$

$f(a).f(b) < 0$

it	a	b	y(a)	y(b)	x_i	y_i	tol
1	۰	۱	۱	−۱	$\frac{1+0}{2} = ۰/۵$	۰/۳۷۵	$\frac{|۰/۵-1|}{۰/۵}$
2	۰/۵	۱	۰/۳۷۵	−۱	$\frac{۰/۵+1}{2} = ۰/۷۵$	−۰/۲۴۵۶	$\frac{1}{3}$
3	۰/۵	۰/۷۵	×۰/۳۷۵	−۰/۲۴۵۶	۰/۶۲۵۰	×۰/۰۲۲۳	
4	۰/۶۲۵۰	۰/۷۵	...	−۰/۲۴۵۶	,,	−۰/۰۹	...
⋮							
13	۰/۶۲۴۶	۰/۶۲۷۸	۰/۰۰۰۳	−۰/۰۰۰۳	۰/۶۲۷۲	≈۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۲
14	۰/۶۲۴۶	۰/۶۲۷۲	۰/۰۰۰۳	−۰/۰۰۰۰	۰/۶۲۴۶	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱

Cntl + R ⟶ ٪ (درصد) می گذارد .

Cntl + T ⟶ ٪ را پر می دارد .

٪٪ ⟿ سکشن بندی می کند

maxtol = ۰/۰۰۰۱ ;

maxIter = ۱۰۰ ; اگر ۱۰۰ تا به پایان برسد که تمام می شود .

Subject:
Date

دستور "disp" : برای نشان دادن خروجی در صفحه نمایش.

```
disp('Homework #1')
disp('by ....')
disp(date)
```

دستور while (شرط) : تا زمانی که شرط برقرار باشد (درست باشد) صحیح خواهد بود.

دستور and تا زمانی که هر دو شرط برقرار باشد (درست باشد) صحیح خواهد بود.

دستور or تا زمانی که یکی از شرط ها برقرار باشد، صحیح خواهد بود.

```
while and(Tol > maxtol , Iter < maxIter)
    Iter = Iter + 1 ;
    x(Iter) = a(Iter) + b(Iter) - a(Iter)/2 ;
    y(Iter) = fun(x(Iter)) ;
    if y(Iter) == 0 | ya(Iter) == 0 | yb(Iter) == 0 ;
                    or
        Tol = 0 ;
    :
```

a = b ; بیانگر تخصیص است ، a == b ; بیانگر تساوی بودن است

برای نشان دادن دو چیز در disp باید آنها را داخل براکت گذاشت.

```
disp(['date: ', date])
date: 25_Feb_2018
```

مثلا $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.75$

```
disp([x1, x2]) ;        /   disp(x1, x2)
0.5  0.75               /   error
```

Subject:
Date

$$tol = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{\min(|x_n|, |x_{n-1}|)} < \varepsilon$$

در متلب با ماتریس‌ها و بردارها سروکار داریم پس در توان‌های اسکالر هم باید به صورت ^. بنویسیم که بتواند در متغیرهای ماتریسی و برداری جوابگو باشد.

دستور sprintf :

sprintf(' text یا format ')

format : % یک حرف یک عدد

% حرف عدد

format ← تعریف

% 10 i

یک فضای ده تایی در نظر می‌گیریم

i ← integer = صحیح

f: تعداد رقم اعشار (اعداد اعشاری)

استخراج یک ستون:

A = [1 2 3 ; 4 5 6 ; 7 8 9]

1 2 3
4 5 6
7 8 9

A(1,2)

2

A(:,2)

2
5
8

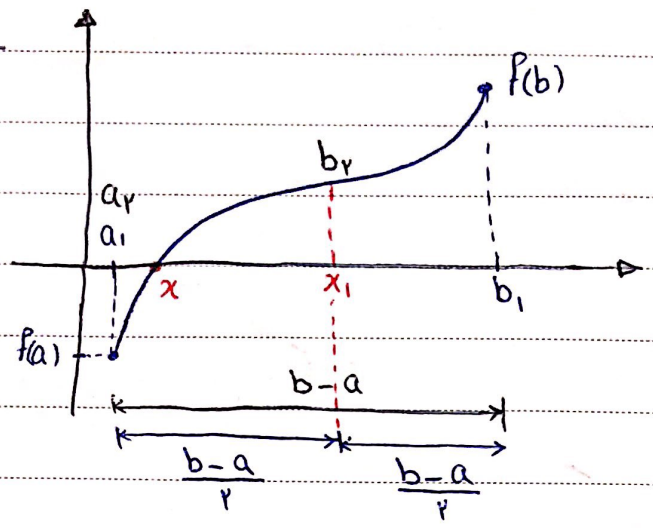
A(3,:)

7 8 9

A(2:3,:)

4 5 6
7 8 9

جلسه ششم



$f(a).f(b) < 0$

$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$

$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \boxed{\frac{1}{2^{n-1}}(b-a)}$

$|x - x_1| \leq \frac{b_1 - a_1}{2}$

$\boxed{|x - x_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2}}$

حداکثر خطا بعد از k مرحله : $\frac{b_1 - a_1}{2^k}$

$\boxed{|x_n - x| \leq 2^{-N}(b-a)}$ ← N مرحله

مثلاً اگر بخواهیم خطا کمتر از 10^{-3} باشد.

نمونه ثبت برای عمان کد cw که Ite = ۱۰۰ بود، آن را تغییر دهیم و با توجه به خطا (tol) Ite را بدست آوریم. حداکثر مرحله را بدست بیاوریم.

$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

10^{-3}
$10^{-4} - 10^{-5}$

truncation error

$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(\xi)$

truncation

"ξ عددی بین x و x_0"

هدف پیدا کردن x به نحوی که $f(x) = 0$

$0 = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(\xi)$

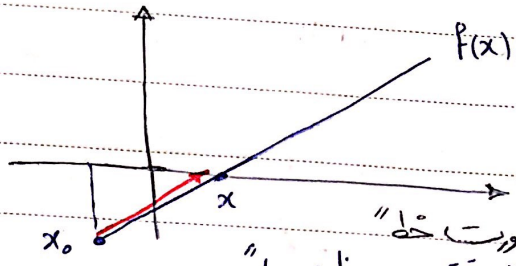
x و x_0 اعدادی نزدیک به هم خواهند بود ← $(x-x_0)^2$ عدد خیلی کوچکی می‌شود و می‌توان

Subject :
Date

با دقت مناسب از آن صرف نظر کرد.

$$0 \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

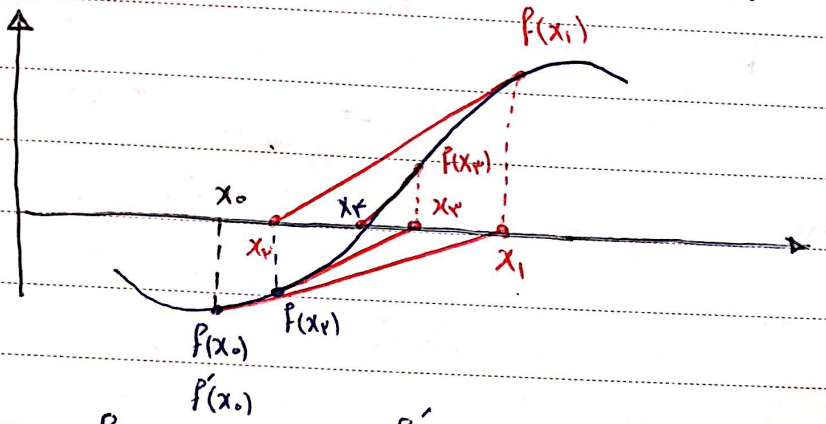
$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$



"تابع به صورت خط"

"دارای تقریب مناسب"

"روش نیوتون ـ رافسون":



$$0 \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) \rightsquigarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

* روش bisection طولانی تر از این روش بود و برای شروع به دو نقطه نیاز داشتیم ولی در این روش با یک نقطه نیز می توان شروع کرد.

مثال: $f(x) = \cos x - x$

$$f'(x) = -\sin x - 1$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{\cos(x_{n-1}) - x_{n-1}}{-\sin(x_{n-1}) - 1}$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4} = 0.7854, \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.7854 - \frac{-0.0783}{-1.707} = 0.7395$$

$$tol: \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} = 0.042$$

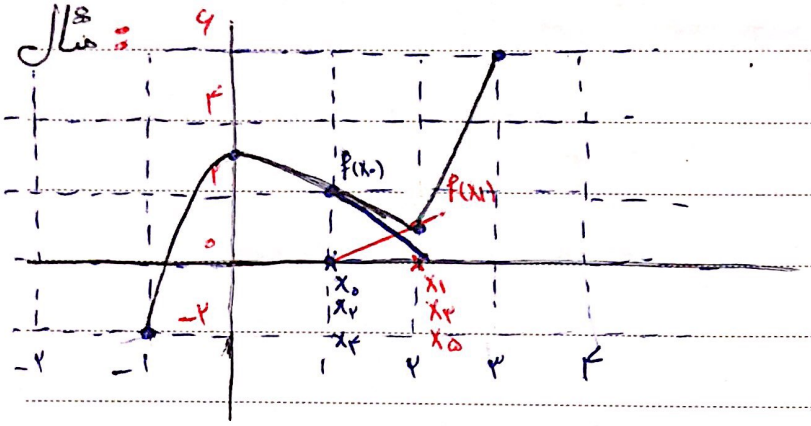
P4PCO

Subject :
Date

$x_2 = 0/7295 - \frac{0/0008}{1/9739} = 0/7391$ ⟶ $|tol = 0/0006|$

$x_3 = 0/7391$ ⟶ $|tol = 0/0000|$

مثال :



$y = x^3 - 3x^2 + x + 3$

$x_0 = 1$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{2}{-2} = 2$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{1}{1} = 1$

داخل یک loop (حلقه) قرار گرفت که از اشکالات این روش است همین طور پیدا کردن حدس که ممکن است سخت باشد و یا صفر شدن آن از دیگر اشکالات این روش است.

روش سکانت :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

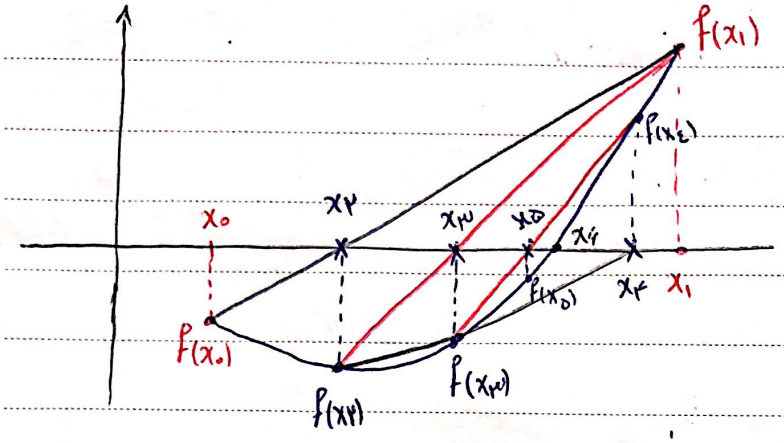
اگر بسط تیلور x_{n-1} و x_{n-2} خیلی به هم نزدیک باشند.

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

با قرار دادن رابطه بالا در فرمول نیوتن ـ رافسون خواهیم داشت :

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

Subject:
Date



این روش از bisection سریع تر است
ولی از روش نیوتون - رافسون سریع تر نیست.
روش نیوتن - رافسون از همه روش ها زودتر به جواب می رسد.

مثال: $\sqrt[5]{0.5} = ?$ $\longrightarrow$ $x^5 - 0.5 = 0$

$x_0 = 0 \longrightarrow f(x_0) = -0.5$

$x_1 = 1 \longrightarrow f(x_1) = 0.5$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - \frac{0.5(1-0)}{0.5 - (-0.5)} = 0.5$$

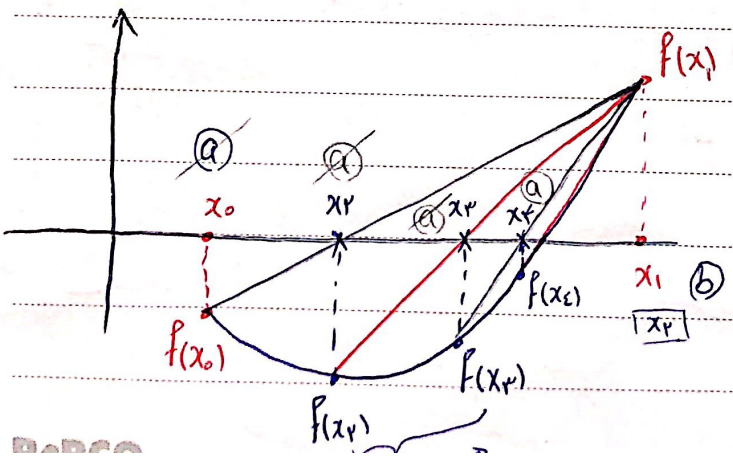
$f(x_2) = f(0.5) = -0.46875$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1) f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.7419$$

$x_4 = 1.0859$, $x_5 = 0.81581$, $x_6 = 0.8433$, $x_7 = 0.8273$

..... , $x_{10} = 0.8706$

روش False position (اصلاحی روی روش سکانت) : "regula False"
تلاش می کند مقدار تابع در نقاط $x_1, x_2, x_3, \ldots$ دو به دو با هم مختلف العلامت باشند.



Subject:
Date

مثال: $\sqrt[3]{2} = ?$ ⟵ $f(x) = x^3 - 2$

$x_0 = a = 1$

$x_1 = b = 2$

$x_2 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b) = 1,1429$

step	a	b	x	y
1	1	2	1,1429	-0,3673
2	1,1429	2	1,2097	-0,22...
⋮		2		
9	1,2599	2		-0,0005

از اشکالات روش سکانت این است که مثلاً $f(x_2)$, $f(x_3)$ هردو مثبت هستند و ریشه الزاماً بین آنها قرار نمی‌گیرد.

محاسبات عددی «به نام خدا» 96/12/13

جلسه هفتم

کد متلب نیوتن:

چقدر طول میکشد به جواب برسیم.

```
maxtol = .0001 ;
mxIte = 100 ;
Tol = 1 ; از maxtol کم‌تر است.
Ite = 0 ; "یعنی کاربرد نداشته است."
format short
x(1) = 1.0 ;
Ite = 1 ;
y(1) = fun(x(1)) ;
yp(1) = dfun(x(1)) ;
```

Subject :
Date

دستور format short : در نحوه نمایش تأثیر می‌گذارد

```
>> format short
>> pi
ans = 3.1416
```

چهار رقم اعشار

```
>> format long
>> pi
```

ans = 3.1416 .... تا ۱۵ رقم اعشار

انواع فرمت‌ها در style قرار دارد.

```
function [yp] = fun (x)
```

روش نیوتن ـ رافسون احتیاج به دو تابع دارد.

برای نشان دادن y' باید به صورت "y (دو تا پرین) بنویسیم.

مثلاً `disp('Iteration x y y' tol')` error ✗

`disp('Ite x y y'' tol')` ✓

اگر cntl + I را بگیریم (در صورتیکه کل همه کد را انتخاب کرده باشیم) کد را مرتب خواهد کرد.

باید فرمت را درست کنیم، Inte... باید عدد صحیح باشد و فرمت‌ها را مرتب کنیم.

در متلب آرایه صفر هیچ وقت وجود ندارد، آرایه‌ها از 1 شروع می‌شود.

X(1), X(2), ...

ثمره مثبت : یک یا دو خط به کد سکانت و برگولا فالسی اضافه کنیم تا اگر y(2) * y(1) > 0 خطا بگیرد و برنامه متوقف شود. (اگر y(1), y(2) هم علامت باشند)

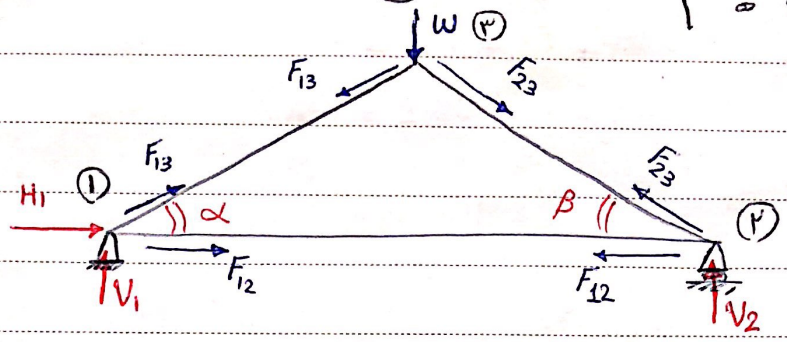
روش برگولا فالسی تعداد iteration بیش‌تری از سکانت دارد ولی شانس همگرایی آن بالاتر است.

Subject:
Date

حل سیستم معادلات خطی :

کاربرد در مهندسی عمران ← حل خرپاها

یک متغیر دارد (سه تا تکیه گاه و سه تا نیرو در اعضا)



$$
\begin{array}{l|cccc|c}
(1) & V_1 & H_1 & +F_{13}\sin\alpha & & = 0 \\
 & & & +F_{12} & +F_{13}\cos\alpha & = 0 \\
(2) & & V_2 & & +F_{23}\sin\beta & = 0 \\
 & & & -F_{12} & -F_{23}\cos\beta & = 0 \\
(3) & & & -F_{13}\sin\alpha & -F_{23}\sin\beta & = 0 \\
 & & & -F_{13}\cos\alpha & +F_{23}\cos\beta & = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & \cos\alpha & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sin\beta \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\cos\beta \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & -\sin\beta \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\alpha & \cos\beta
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_1 \\ H_1 \\ V_2 \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$[A][X] = [b]$

- $[A]$ ← ماتریس ضرایب (left hand matrix) ماتریس سمت چپ
- $[X]$ ← بردار متغیرها
- $[b]$ ← بردار (ماتریس) سمت راست (معلومات) right hand matrix or vector

Subject:
Date

"روش حذفی گاوس"

مثال:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 6y + 10z = 0 \\ 3x + 14y + 28z = -8 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 14 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 6 & 10 \\ \boxed{3} & 14 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2\times1+2=0 & -2\times2+6=2 & 10-2\times3=1 \\ 3-3\times1=0 & 14-3\times2-8 & 28-3\times3=19 \end{bmatrix}$$

ردیف اول $\times(-2)$ +

ردیف اول $\times(-3)$ +

"گام اول": صفر کردن ستون اول (غیر از سطر اول)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0-2\times1=-2 \\ -8-3\times1=-11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{8} & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -11 \end{bmatrix}$$

(-4) برابر سطر دوم و جمع با سطر سوم

"گام دوم": صفر کردن ستون دوم (به جز سطر اول و دوم)

تعداد گام‌ها: $n-1$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}^{A} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}}^{b}$$

$$z = \frac{-3}{3} = \boxed{-1} \quad , \quad 2y = -2 - 4z \longrightarrow \boxed{y = 1}$$

$$\boxed{x = 2}$$

Subject :
Date

امتحان پایان ترم ۹۷/۲/۲۰

کد نویسی : $x_n = \frac{b_n}{A(n,n)}$

$x_{n-1} = (b_{n-1} - A(n-1, n) * x_n) / A(n-1, n-1)$

$x_i = (b_i - A(i, i+1:n) * x(i+1:n)) / A(i,i)$

Size (A) , Size (A, 1) , Size (A, 2)

2 x 3 2 3

m = zeros (n x 1) بردار صفر (n x 1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

m (i+1:n) ضرایب جمع شدن را نشان می‌دهد

$m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow m = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

از n-1 به ۱، یکی یکی کاهش می‌یابد. for (n-1 , -1 , 1)

محاسبات عددی «به نام خدا» ۹۶/۱۲/۱۵

جلسه هشتم

برای اضافه شدن break point می‌توان روی شماره مست چپ کلیک کرد و یا "F12" را زد و برنامه تا سر آن قسمت متوقف می‌شود.

برای run کردن F5 را می‌زنیم.

می‌توان کد را خط به خط چک و اصلاح کرد.

روی "work space" کلیک کنیم صفحه‌ای به شکل متلب باز می‌شود.

مثال:
$$\begin{cases} 2x + 6y + 10z = 0 \\ x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 14y + 28z = -8 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 14 & 28 & -8 \end{bmatrix}$$

سطر اول $\times(-\frac{1}{2})$ + سطر اول

سطر اول $\times(-\frac{3}{2})$ +

هدف روش گاوس: هر ترکیب خطی دستگاه معادلات خطی جواب خواهد داد.

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & -9 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 13 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & \textcircled{3} & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & -8 & -8 \end{bmatrix}$$ Row Pivoting

هدف گام دوم صفر کردن المان سوم ستون دوم.

با هیچ کاری نمی‌توان این المان را صفر کرد. ← یکی از اشکالات روش گاوس

روش (Gauss - pivoting):

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -17 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

روش Gauss - Pivoting:

دقتی در گام اول هستم المان اصلی ما المان (1,1) است (سطر اول و ستون اول)

هرکدام از المان های ستون اول قدر مطلق بیش‌تری داشت سطر آن را با سطر مورد نظر جابه‌جا می‌کنیم.

در گام دوم المان (2,2) برای ما مهم است (سطر دوم و ستون دوم).

هرکدام از المان های ستون دوم قدر مطلق بیش‌تری داشت سطر آن را با سطر مورد نظر عوض می‌کنیم.

گام اول:
$$\begin{bmatrix} 3 & 14 & 28 & -8 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Subject :
Date

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۴ \\ ۶ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

$\max(C) = \quad 6 \quad 5 \quad 5$ ماکزیمم مقدار هرستون را به ما می‌دهد.

$(P, S) = \max(C)$

$P = \quad 6 \quad 5 \quad 5$

$S = \quad 3 \quad 3 \quad 1$

دستور max در حقیقت دو خروجی دارد یکی مقادیر ماکزیمم و دیگری محل قرارگیری این مقادیر در ستون‌ها.

سطر ۱ ← سطر ۳ ← سطر ۲

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۶ & ۱۰ & ۰ \\ i & ۳ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۱۴ & ۲۸ & -۸ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گام اول}} \begin{bmatrix} ۳ & ۱۴ & ۲۸ & -۸ \\ ۱ & ③ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ① & ۱۰ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{به همراه صفر کردن}]{\text{گام دوم}}$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱۴ & ۲۸ & -۸ \\ ۲ & ۶ & ۱۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

مثال: $\begin{cases} ۰/۰۰۱x + y = ۳ \\ x + ۲y = ۵ \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} ۰/۰۰۱ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} ۰/۰۰۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۹۹۸ & -۲۹۹۵ \end{bmatrix} \rightsquigarrow \boxed{y = ۳}$$

$۰/۰۰۱x + y^۲ = ۳$

$\longrightarrow \boxed{x = ۰}$

ولی این مقدار درست نیست. X (اشتباه)

$$\max\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۰/۰۰۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \cdot \longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۰/۹۹۸ & ۲/۹۹۵ \end{bmatrix} \rightsquigarrow \boxed{y = ۳}$$

$x + ۲y = ۵$

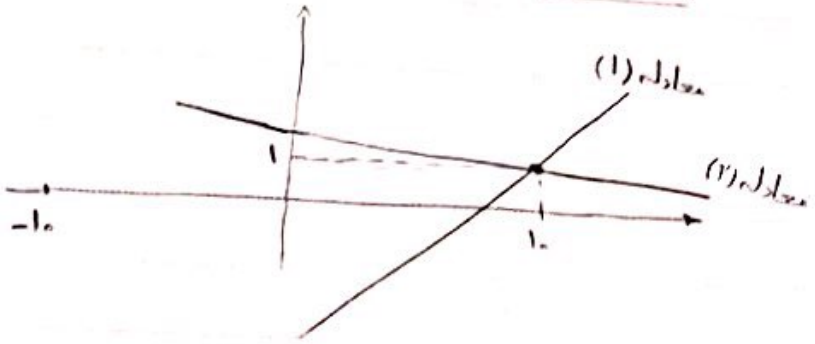
$\longrightarrow \boxed{x = -۱}$

ill condition (ماتریس مریض)

مثال ۲ :
$$\begin{cases} 30x + 59140y = 5917 \\ 5.291x - 6.13y = 49.87 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} (30) & 59140 & 5917 \\ 5.291 & -6.13 & 49.87 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 30 & 59140 & 5917 \\ 0 & -104300 & -10426 \end{array}\right]$$

$\rightsquigarrow$ $y = 1$ ، $x = -10$ (اشتباه X)



جواب اصلی : $(x = -10 \ , \ y = 1)$

باید مقیاس سازی درست انجام دهیم .

$$\frac{30}{59140} = 0.0005$$

$$\frac{5.291}{6.13} = (0.8631)$$

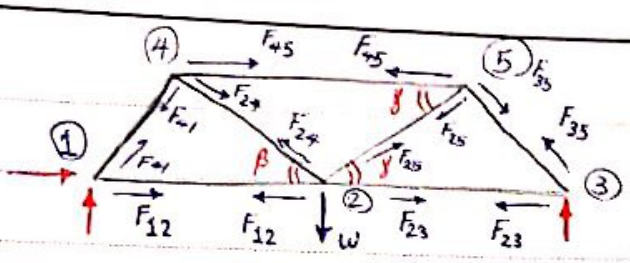
نرم شبت : اسکیل سازی را در کد Pivoting اجرا کنیم .

Pivoting ــ Scale :
باید ابتدا اعداد را بر max مقدار هر سطر تقسیم کنیم تا مقدار مقیاس هر عدد ــ ستون اول بدست آید و بعد "scale" هر کدام را باهم مقایسه کند .
در مواردی که اعداد از order های متفاوت هستند و خیلی باهم اختلاف دارند کاربرد دارد .

$$\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{100} \\ 1 \end{array} \leftarrow \left[\begin{array}{ccc} (1) & 2 & 3 \\ (5) & 5 & 100 \\ (4) & 3 & 0 \end{array}\right] \neq$$

Subject :
Date

مثال :



(۱۰ معادله - ۱۰ مجهول)

حل « cw » ⟵ ماتریس ضرایب

حل با روش Gauss ✗ ⟵ 'Gauss_Pivoting' ✓

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

سیستم معادله خطی به شکل فوق اگر و فقط اگر رتبه ماتریس A با رتبه ماتریس افزوده $[A \;\; b]$ برابر باشد ، جواب دارد . « غیر این صورت جواب ندارد .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۵ \\ -۱ & -۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ & -۴ & ۳ \end{array}\right]$$

A ⟵ ۳×۳ ، b ⟵ ۳×۱

$$\left.\begin{array}{l} rank(A) = ۲ \\ rank([A\ b]) = ۳ \end{array}\right\}$$ "جواب نخواهد داشت."

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۵ \\ -۱ & -۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ & -۴ & -۴ \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} rank(A) = ۲ \\ rank([A\ b]) = ۲ \end{array}\right\}$$ "جواب خواهد داشت."

« منظور : $rank(A)$ ، $Z = [A \;\; b]$ ماتریس افزوده ، $rank(Z)$

سیستم معادلات $n \times n$ جواب unique (تنها یک جواب) دارد ، اگر و فقط اگر :

$$\begin{cases} rank(A) = rank([A\ b]) \\ rank(A) = n \end{cases}$$

اگر شرط $rank(A) = n$ برقرار نباشد ولی شرط اول برقرار باشد ، معادله بی‌نهایت جواب دارد .

$\{b\} = 0$ ⟵ سیستم همگن | سیستم غیرهمگن ⟵ $\{b\} \neq 0$

در سیستم همگن اگر جواب داشته باشد و رتبه A برابر n باشد، تنها جواب بدیهی دارد.
$\{x\} = 0$

اگر $rank(A) < n$ آنگاه سیستم جواب غیربدیهی هم دارد.

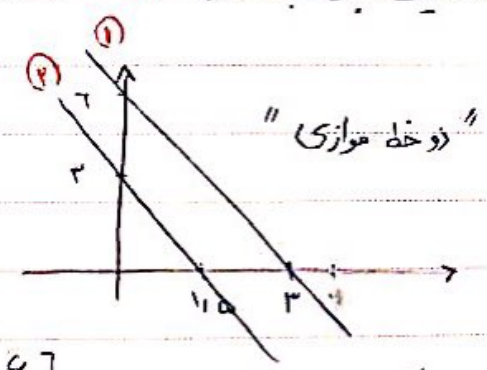
مثال:
$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad rank(A) = 2$$

$$b = \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \end{Bmatrix} \longrightarrow [A \;\; b] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad rank([A\ b]) = 2$$

تنها یک جواب دارد.



"دو خط موازی"

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow rank(A) = 1$$

$$b = \begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \end{Bmatrix} \longrightarrow [A \;\; b] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{رتبه} = 2$$

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{رتبه} =$$

$$b = \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \end{Bmatrix} \longrightarrow [A \;\; b] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{رتبه} =$$

ماتریس اسپارس: ماتریسی که اکثر درایه‌های آن صفر است.

PAPCO

جلسه نهم

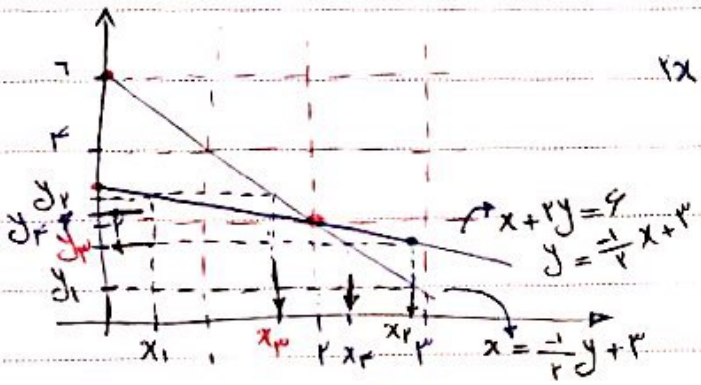
روش ژاکوبی : "Jacobi"

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

اساس روش ژاکوبی تبدیل سیستم فوق به سیستم زیر است.

$$\{x\}_{\text{جدید}} = [c]\{x\}_{\text{قدیم}} + \{d\}$$

که ماتریس $[c]$ ماتریسی است که المان های روی قطر اصلی برابر صفر است.
از $\{x\}_{\text{قدیم}}$ برای بدست آوردن $\{x\}_{\text{جدید}}$ استفاده شده و در هر سعی و خطا $\{x\}$ به روز رسانی می‌شود.



$$2x + 4y = 6$$
$$x + 2y = 6$$

$$x = \frac{-1}{2}y + 3$$
$$y = \frac{-1}{2}x + 3$$

سعی اولیه : $\begin{Bmatrix} 0/5 \\ 0/5 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{\substack{\text{جدید} \\ \text{new}}} = [c] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{\substack{\text{قدیم} \\ \text{old}}} + [d]$$

روش ژاکوبی « حل سیستم معادلات خطی به روش سعی و خطا انجام می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0/5 \\ 0/5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_2 = [c] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_1 + \{d\} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0/5 \\ 0/5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2/75 \\ 2/75 \end{Bmatrix}$$

$\|\Delta x\|$ (Δx نرم)

هروقت $\|\Delta x\| \to 0$ آنگاه ما به جواب رسیده‌ایم.

$$\Delta x = \begin{Bmatrix} 2/75 \\ 2/75 \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \|\Delta x\| \gg 0$$

نُرم یک ماتریس :

مثلاً : $\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$$\left\{\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}_3 = \begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{2}\\ \frac{-1}{2} & 0\end{bmatrix}\left\{\begin{matrix}2{,}75\\2{,}75\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1{,}625\\1{,}625\end{matrix}\right\}$$

ile	x	y
۴	۲٫۱۸۷۵	۲٫۱۸۷۵
۵	۱٫۹۰۶۳	۱٫۹۰۶۳
۶	۲٫۰۴۶۹	۲٫۰۴۶۹
⋮	⋮	⋮
۹	۲٫۰۰۳	۲٫۰۰۳
دقیق	۲	۲

$\|\Delta x\|$: یعنی اختلاف مقدار هر مرحله با مرحله قبلی چقدر است . و این مقدار هرموقع به صفر میل کرد ، ما به جواب رسیده‌ایم .

$$\|\Delta x\| = norm\left(x_{\text{جدید}} - x_{\text{قدیم}}\right) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

مثال :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & +2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} -1 \\ 6 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = x_2 - x_3 - 1 \\ 2x_2 = -x_1 + x_3 + 6 \\ 2x_3 = -x_1 + x_2 - 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + 3 \\ x_3 = \frac{-1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}\right\}_{\text{جدید}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}\right\}_{\text{قدیم}} + \left\{\begin{matrix}\frac{-1}{2}\\3\\\frac{-3}{2}\end{matrix}\right\}$$

P4PCO

حدس اول : $\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix}-0.5\\3\\-1.25\end{Bmatrix}$ ، $\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix}1.125\\2.5\\0.125\end{Bmatrix}$

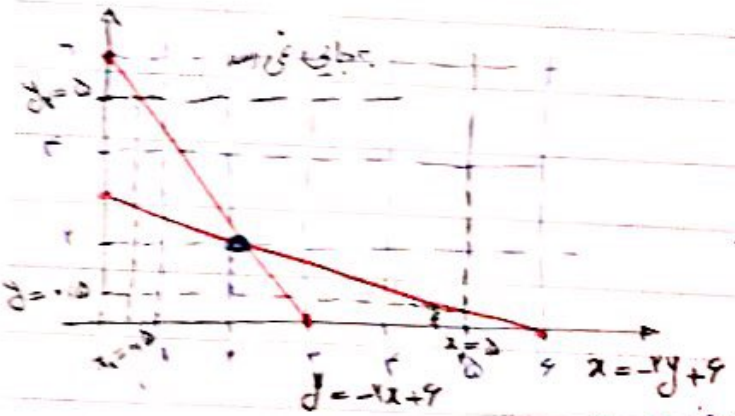
$\cdots \quad \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}_{13} = \begin{Bmatrix}1.0002\\2.0001\\-0.9997\end{Bmatrix}$ norm <0.001

جواب دقیق : $\begin{Bmatrix}1\\2\\-1\end{Bmatrix}$

گام های بدست آوردن ماتریس c :

$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{bmatrix}(-2)&-1\\-1&(-2)\end{bmatrix} \xrightarrow{\div(\text{بزرگترین عدد})} \begin{bmatrix}-1&\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}&-1\end{bmatrix}$

صفر کردن قطر اصلی $\rightarrow \begin{bmatrix}0&\frac{-1}{2}\\-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$



$x + 2y = 6$

$2x + y = 6$

$\rightsquigarrow \begin{cases} x = -2y + 6 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$

اعداد دارند از جواب دور می‌شوند و به بی‌نهایت می‌روند.

$\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix}5\\5\end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix}0&-2\\-2&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\5\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}6\\6\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-4\\-4\end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix}12\\12\end{Bmatrix}$

به سمت بی نهایت میروند.

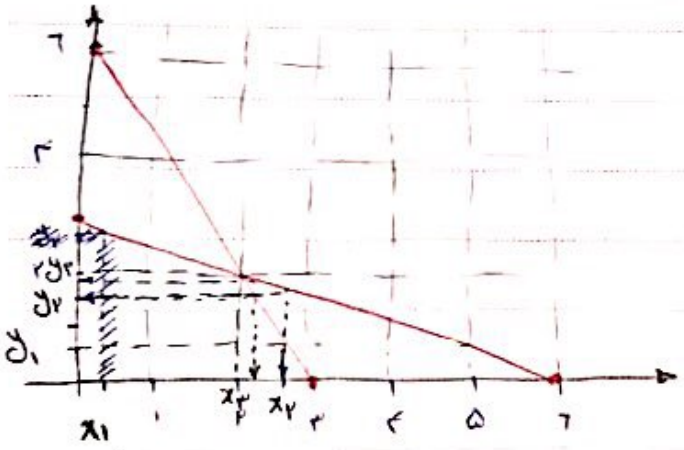
ترتیب معادلات در روش ژاکوبی مهم است .

★★ روش ژاکوبی وقتی خوب جواب می‌دهد که مقدار عضو روی قطر اصلی ماتریس ضرایب هر ردیف به مقدار قابل توجهی بزرگ‌تر از بقیه اعضای آن ردیف باشد .

$$\begin{bmatrix} (2) & 1 \\ 1 & (2) \end{bmatrix} \leftarrow \qquad \begin{bmatrix} (1) & 2 \\ 2 & (1) \end{bmatrix} \leftarrow$$

روش Gauss - Siedel :

مشتقی از روش ژاکوبی است و مقدار بردار x در هر لحظه بروز رسانی می‌شود .



$$x = \frac{-1}{2} y + 3$$

$$y = \frac{-1}{2} x + 3$$

$$\{x_1\} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{-1}{2} y_1 + 3 = 2.75$$

$$y_2 = \frac{-1}{2} x_2 + 3 = \frac{13}{8}$$

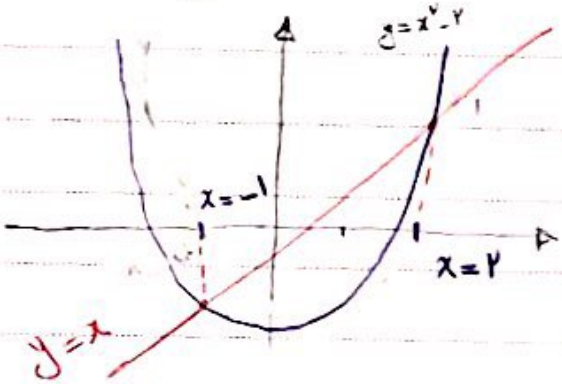
ite	x	y
1	۰٫۵	۰٫۵
2	۲٫۷۵	۲٫۷۵
3	۲٫۱۸۷۵	۱٫۹۰۶۲
4	۲٫۰۴۹۹	۱٫۹۷۹۵
5	۲٫۰۱۱۷	۱٫۹۹۱۴

جلسه دهم

قضیه نقطه ثابت : "Fixed Point theori"

به نقطه‌ای گفته می‌شود که مقدار تابع در آن نقطه، با خود آن نقطه برابر باشد. $f(x) = x$

برای یافتن نقطه ثابت یک تابع کافی است معادله $f(x) - x = 0$ حل شود.



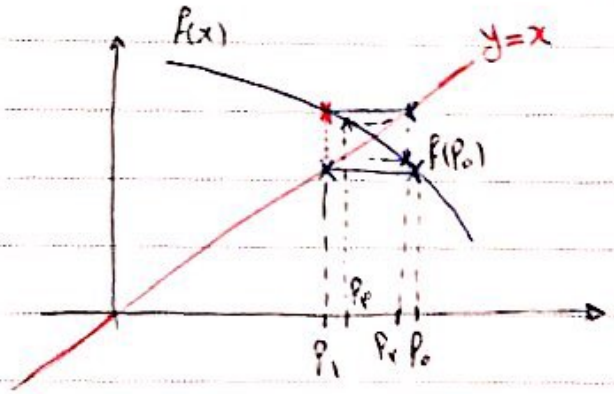
$f(x) - x = 0$

$x^2 - 2 - x = 0$

$x = -1 \quad , \quad x = 2$

$f(-1) = x^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1$

$f(2) = x^2 - 2 = (2)^2 - 2 = 2$



الگوریتم روش نقطه ثابت :

(P_0) ورودی اولیه

```
ite = 1
max ite = 100 , max tol = %0.1
while ite < max ite & tol > max tol
    P = f(P0) ;
    tol = abs(P0 - P) ;
    ite = ite + 1 ;
    P0 = P ;
end
```

Subject :
Date

هدف پیدا کردن نقاط (نقطه) ثابت تابع روبرو : $x^3 + 4x^2 - 10$

a) $x = x - x^3 - 4x^2 + 10$

b) $x^2 = 10 - 4x^2 \longrightarrow x^2 = \frac{10}{x} - 4x \longrightarrow x = \sqrt{(\frac{10}{x}) -$

c) $4x^2 = 10 - x^3 \longrightarrow x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3) \longrightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x}$

d) $x^2(x+4) = 10 \longrightarrow x^2 = \frac{10}{x+4} \longrightarrow x = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$

e) $x = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$ } نیوتون - رافسون

$P_0 = 1,5$

a) $x_0 = 1,5 \longrightarrow f(x_0) = -0,875 = x_1$

$x_1 = -0,875 \longrightarrow f(x_1) = 9,732 = x_2$

$x_2 = 9,732 \longrightarrow f(x_2) = -449,7$

$\vdots$

$x_4 = -\infty \longrightarrow$ جواب ندارد

b) $x_0 = 1,5 \longrightarrow f(x_0) = 0,8125 = x_1$

$x_1 = 0,8125 \longrightarrow f(x_1) = 2,997 = x_2$

$x_2 = 2,997 \longrightarrow f(x_2) = \sqrt{-8,495}$ جواب ندارد

c) $x_0 = 1,5 \longrightarrow f(x_0) = 1,2869 = x_1$

$x_1 = 1,2869 \longrightarrow f(x_1) = 1,4095 = x_2$

$x_2 = 1,4095 \longrightarrow f(x_2) = 1,3452 = x_3$

$\vdots$

$x_{30} = 1,3672 = f(x)$

Date

d) $x_0 = 1,5 \longrightarrow f(x_0) = 1,3484 = x_1$

$x_1 = 1,3484 \longrightarrow f(x_1) = 1,3473 = x_2$

$x_2 = 1,3473 \longrightarrow f(x_2) = 1,3450 = x_3$

$\vdots$

$\boxed{x_{15} = 1,3452} = f(x)$

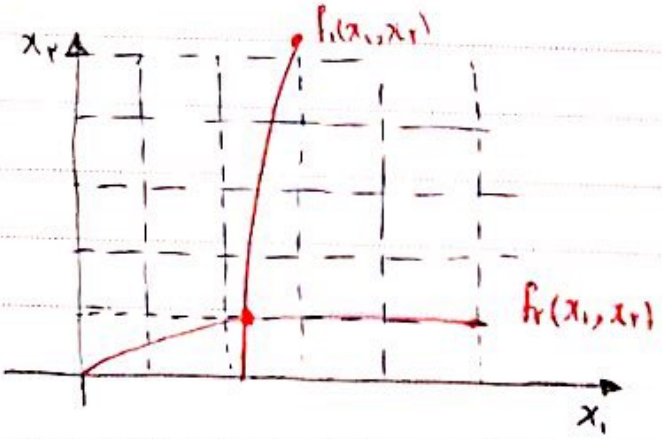
e) $x_0 = 1,5 \longrightarrow f(x_0) = 1,5733$

$x_2 = \dots$

$\boxed{x_3 = f(x_2)}$ "نیوتون - رافسون" $\left(x_{\text{جدید}} = x_{\text{قدیم}} + \frac{f(x)}{f'(x)} \right)$

روش نقطه ثابت ، حل سیستم معادلات غیرخطی :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^3 + 10x_1 - x_2 - 5 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^3 - 10x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$



سعی اول : $\begin{cases} x_1 = 0,6 \\ x_2 = 0,6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = -0,1x_1^3 + 0,1x_2 + 0,5 \\ x_2 = 0,1x_1 + 0,1x_2^3 + 0,1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = -0,1 \times 0,6^3 + 0,1 \times 0,6 + 0,5 = 0,5384 \\ x_{2,2} = 0,1 \times 0,6 + 0,6^3 \times 0,1 + 0,1 = 0,1816 \end{cases}$$

PAPCO

Subject :
Date

ماتریس افزوده : Agmented ⟵ [A b] ⟵ b = ... ⟵ A = ...

ite	x_1	x_2	tol (norm) $\|\Delta x\|$
0	۰٫۶	۰٫۹	
1	۰٫۵۳۸۴	۰٫۱۸۱۹	۰٫۴۲۲۹۱
2	۰٫۵۰۲۵۵	۰٫۱۵۴۴۴	۰٫۰۴۴۹۷۵
3	۰٫۵۰۲۷۵	۰٫۱۵۰۶۲	۰٫۰۰۳۸۲۰۴
4	۰٫۵۰۲۳۵	۰٫۱۵۹۹۲	۰٫۰۰۰۴
5	۰٫۵۰۲۳۸	۰٫۱۵۰۵۸	5×10^{-5}

در متلب نام توابع و ذخیره نمی‌تواند space , dash (مثلاً منفا -) داشته باشد بلکه می‌توانیم از onder line استفاده کنیم.

max tol ⟵ در روش fixed Point ⟵ 10^{-4}

$x_1 = g_1(x_1, x_2)$, $x_2 = g_2(x_1, x_2)$

$g = [g_1 \quad g_2]$ "به صورت بردار دو تایی"