استاتیک فصل ۱

استاد امینی — پیرو جانسون

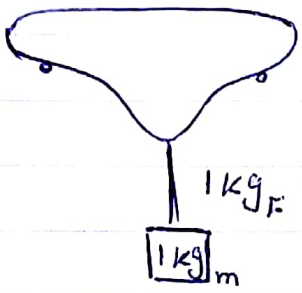
مهندس انتظاری - ویرایش هشتم

دکتر واحدیان - ویرایش هشتم

(۱) ~~۲۰ ترم~~ (۲) میان ترم و ترم ۱۴ و ۶ ✓ (۳) ~~دو میان ترم و ترم ۴ - ۳ و ۱۲~~

(۱) نیرو: N ، KN — واحد اصلی

kg — واحد مهندسی



$1kg_f = 9.81\,N$

$lb_f = 0.454\,kg \times 9.81\,N$ ← واحد پوند

(۲) واحد نیرو:

$M = r \times F$

$kN \cdot m$

$lb_f \cdot inch$

$lb_f \cdot foot$

$kg_f \cdot Cm$

دقت در مهندسی: تعیین کردن دقت در مهندسی

① اگر اولین عدد با صفر شروع شود صفرها را در نظر نمیگیریم و اگر عدد چهارم بعد از اولین عدد با صفر شروع شود صفرها را در نظر میگیریم.

۱۰۵۷۶,۳۲۵ — ۱ — اولین عدد

۱۰۵۷۶,۳۲۵ — ۵ — عدد چهارم بعد از اولین عدد

۱۰۵۷۶,۳۲۵ — ۶ — عدد سوم بعد از اولین عدد

۱۰۵۷۶,۳۲۵ — ۳ — عدد دوم بعد از اولین عدد

یک میزان ۱ و ۲ بود صفرشون رو حذف میکردیم اما اگر میزان ۲ بود صفرها را در نظر میگیریم

عدد چهارم یکی بعد سوم اضافه کرده و بقیه را صفر در نظر میگیریم

≈ ۱۰۵۷۷

PqPCC

Scanned by CamScanner

Subject
Date

۲) اگر عدد اول حذف شده از ۱ بزرگتر باشد، عدد اول بعد از ۱ صفرها است و بقیه‌ی اعمال تا مجموع مرحله‌ی اول ادامه است

200 x

300 x

⋮

900 x

مثال → 0.6666 ≃ 0.667

حالت اول → 1.533281 ≃ 1.533

<5

→ 0.17385 ≃ 0.1739

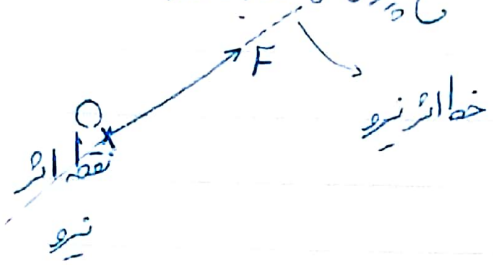
>54

حاصل عددی

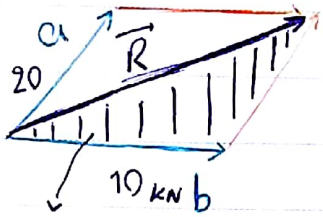
→ صفرهای گرفته شده

Scanned by CamScanner

نیرو: کمیتی برداری، دارای نقطه و خط اثر، از قانون جمع متوازی الاضلاع پیروی می‌کند و جهت دارد



طول بردار نیرو متناسب با بزرگی آن است

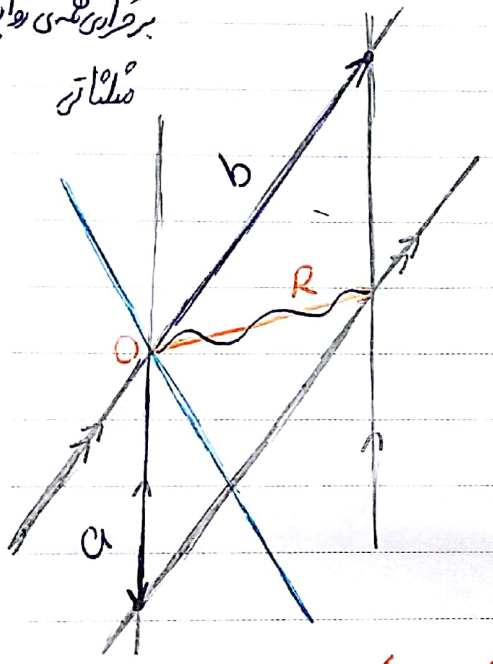


$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ $\quad 30 \neq 10 + 20$

یعنی اگر بجای a و b برآیندشان R را ← برایند گیری

قرارداد هیچ تغییری در بزرگی‌های آن ایجاد نمی‌شود

برقراری همی روابط مثلثاتی



اگر بردار را در یک جهت و راستا تجزیه کنیم، بردار اولیه در آن راستا حذف می‌شود

برای برآیندگیری بردارهای نیرو باید نقطه اثر آنها مشترک باشد

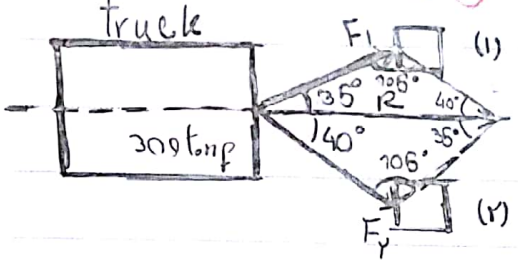
یک مهندس معدن تصمیم دارد با استفاده از دو عدد بلدوزر یک تراکم معیوب را به تخلیه‌گاه انتقال کند. اگر برای جابجایی کامیون به ۳۰۰ kgf نیرو در راستای محور کامیون نیاز باشد، مطابق با شکل زیر الف) نیروی وارد بر کابل‌های یک و ۲ را محاسبه کنید. ب) این مهندس ناظر چین حمل کامیون متوجه می‌شود کابل شماره ۲ آسیب دیده است. زاویه α را طوری محاسبه کنید که نیروی کابل ۱ ۲ برابر شود.

Scanned by CamScanner

Subject ٤

Date

وارد سراین کابل به حداقل کشش بر سرو کامیون نیز به تعویر کا مستقل شود.



الف)

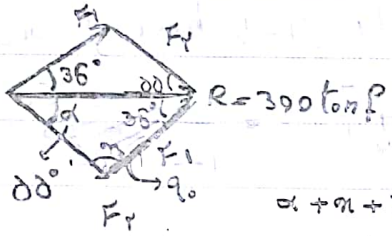
$$R = 300 \text{ tonf} \qquad \frac{300 \text{ tonf}}{\sin 100^\circ} = \frac{F_1}{\sin 60^\circ}$$

$$F_1 = \frac{300 \times \sin 60^\circ}{\sin 100^\circ} \text{ tonf} = 1199.4 \text{ tonf} \quad / \quad 24$$

$$\frac{300 \text{ tonf}}{\sin 100^\circ} = \frac{F_2}{\sin 25^\circ} \qquad F_2 = \frac{300 \text{ tonf} \times \sin 25^\circ}{\sin 100^\circ} = 127 \text{ tonf}$$

تعداد رشته‌های کابل مورد نیاز ← هر رشته‌ی کابل تحمل ۲۴ تن را دارد.

ب) ۲ آیت دیده



F_2 باید min شود تا F_1 max شود

$$\alpha + \alpha + 36^\circ = 180^\circ \longrightarrow \alpha = 146 - \alpha$$

$$\frac{R}{\sin(146-\alpha)} = \frac{F_2}{\sin 35^\circ} \qquad \downarrow \min \quad F_2 = \frac{300 \times \sin 35}{\sin(145-\alpha)} \uparrow \max \longrightarrow \sin\frac{\pi}{2} = \max = 1$$

$-1 \le \sin h \le 1$

روش اول $146 - \alpha = 90^\circ \longrightarrow \alpha = 56^\circ$

F_2 حداقل $\rightarrow 0 =$

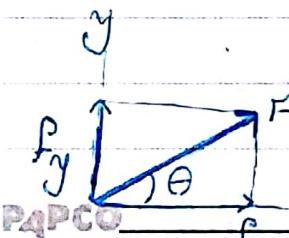
$$(F_2)' = \left(\underbrace{300 \sin 35}_{\text{ثابت}} \times \frac{1}{\sin(145-\alpha)}\right)' = 0 \longrightarrow 300 \sin 35 \times \left(\frac{0 - (-1)\cos(146-\alpha)}{\sin^2(146-\alpha)}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \cos(145-\alpha) = 0 \xrightarrow{\cos\frac{\pi}{2}=0} 145 - \alpha = 90^\circ \longrightarrow \alpha = 55^\circ$$

$$F_{1\,max} = \frac{300 \times \sin 55}{\sin 90} \text{ tonf} = 90.4 \text{ tonf}$$

$\sin 90 \rightarrow 1$

یکی از مهم‌ترین تجزیه‌ها، تجزیه بردار در دو جهت عمود بر هم است ← پرکاربرد



$$f_x = F\cos\theta$$

$$f_y = F\sin\theta$$

تجزیه $\vec{F} = F\cos\theta\,\hat{i} + F\sin\theta\,\hat{j}$

برآیند $R = (f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = \text{arctg}\left(\frac{f_y}{f_x}\right)$

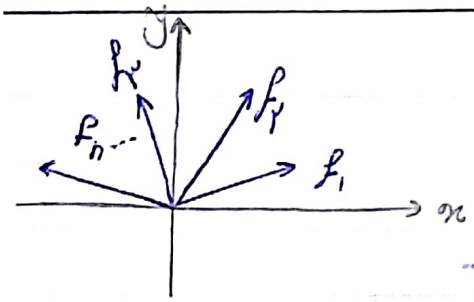
P4PCO

Scanned by CamScanner

۵

Subject

Date



$$f_1 = f_1 \cos\theta_1\, \hat{i} + f_1 \sin\theta_1\, \hat{i}$$

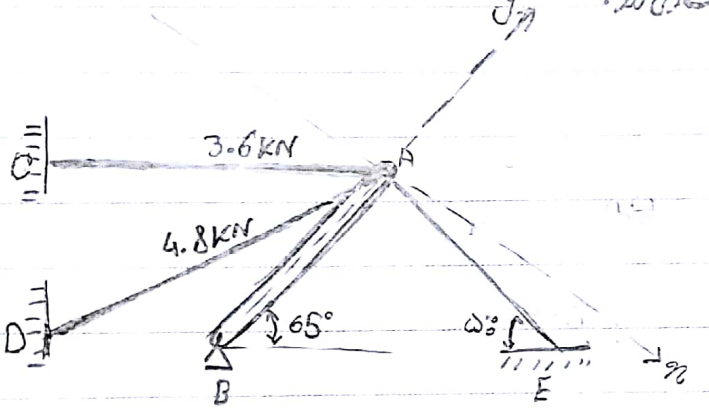
$$f_2 = f_2 \cos\theta_2\, \hat{i} + f_2 \sin\theta_2\, \hat{j}$$

$$f_n = f_n \cos\theta_n\, \hat{i} + f_n \sin\theta_n\, \hat{j}$$

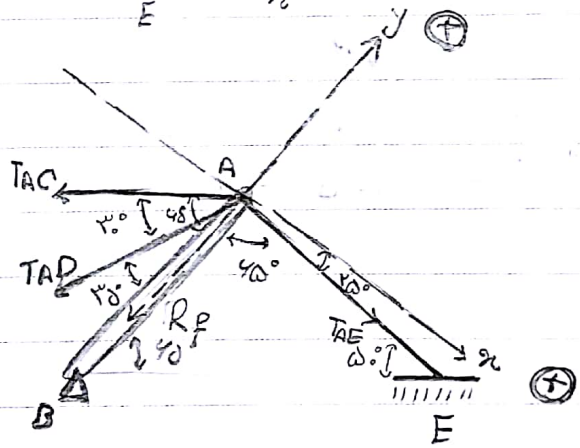
$$R = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$$

کابل ها فقط نیروی کششی دارند و فاقد نیروی فشاری اند.

سؤال ۴۲ بیرجاندون :



$$\sum F_{ix} = 0$$



(الف) $R_x = 0$

$$T_{AE}\sin 45 - T_{AC}\sin 65 - T_{AD}\sin 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{AE} = \frac{T_{AC}\sin 45 + T_{AD}\sin 25}{\sin 45}$$

$$T_{AE} = T_{AC} + T_{AD}\frac{\sin 25}{\sin 45}$$

(ب) $-T_{AE}\cos 45 - T_{AD}\cos 115 - T_{AC}\cos 45 = -R_F\, \hat{j}$

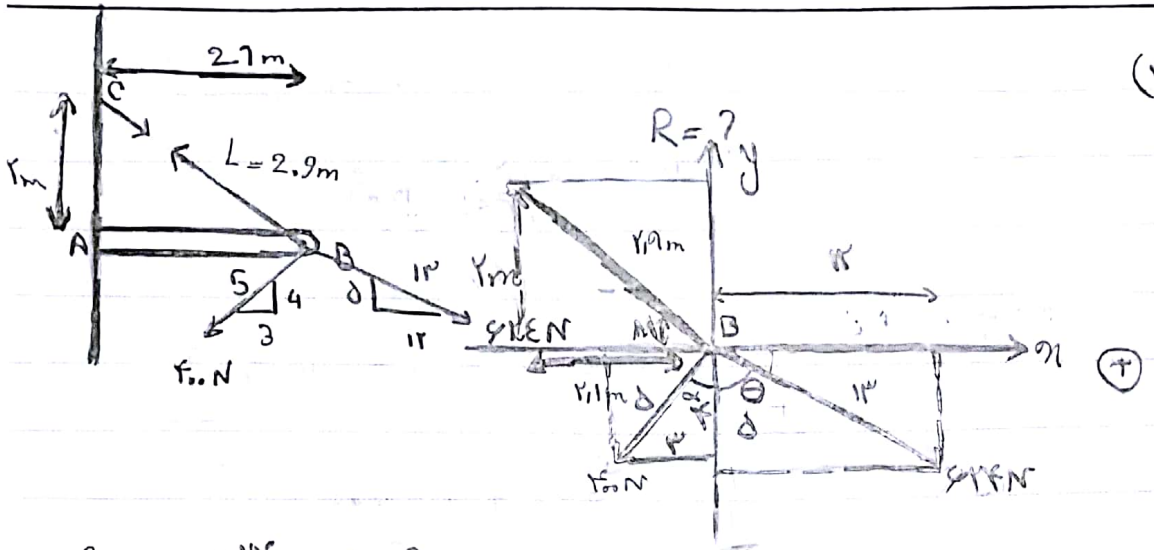
PdPCO

Scanned by CamScanner

Subject ۴

Date

سؤال ۲-۳۵)



$$R_x = 416\,N \sin\theta - 400\,N \sin\alpha - T_{BC} \times \cos 81^\circ \Rightarrow$$

$$416\,N \times \frac{12}{13} - 400\,N \times \frac{3}{5} - 815 \frac{2.11}{2.9} = R_x \longrightarrow R_x = 674 - 240 - 592 =$$

$$674 - 832 = -158\,N\,\hat{i}$$

$$R_y = -416 \times \frac{5}{13} - 400 \times \frac{4}{5} + 815 \times \frac{2}{2.9} = 320 - 320 + 400\,N =$$

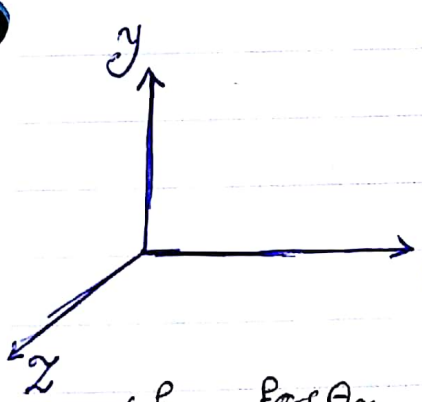
$$640 - 320 = 320\,N\,\hat{j}$$

برایکریل $\left(R = \vec{F}(400\,N) + \vec{F}(416\,N) + T_{BC}\right)$

$$R = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} = -158\,N\hat{i} + 320\,N\hat{j}$$

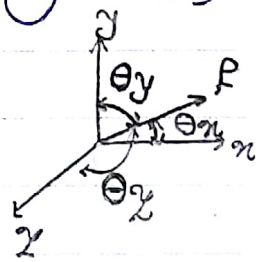
$$R = \sqrt{(-158)^2 + (320)^2} = \sqrt{25064 + 102400} = \sqrt{127464} = 357\,N$$

نیرو در فضای ۳ بعدی:



داده‌ها ← ۳ حالت در کتاب ← $\theta_x, \theta_y, \theta_z$

اولین حالت



$$\begin{cases} f_x = f\cos\theta_x \\ f_y = f\cos\theta_y \\ f_z = f\cos\theta_z \end{cases}$$

$$\vec{F} = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}$$

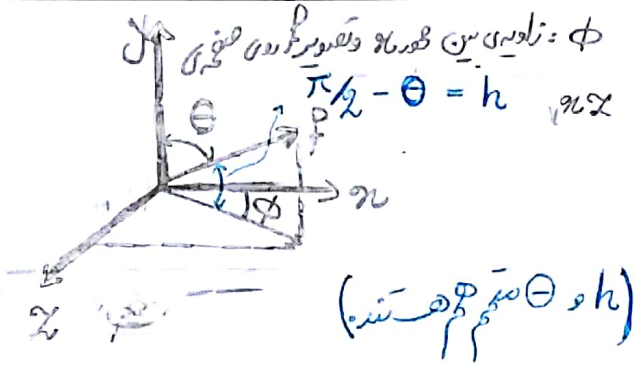
$$\vec{F} = f\cos\theta_x\hat{i} + f\cos\theta_y\hat{j} + f\cos\theta_z\hat{k}$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

حالت دوم ⟵ زاویه بردار با یک محور و تصویر آن روی آن محور در صفحه



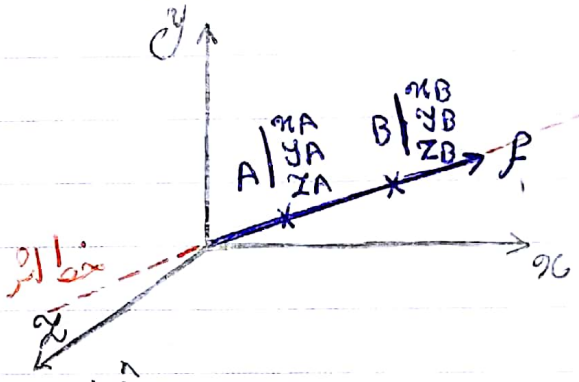
$$F = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

(h و θ معلوم هستند)

$$\begin{cases} F_x = F\sin\theta\cos\phi \\ F_y = F\cos\theta \\ F_z = F\sin\theta\sin\phi \end{cases} \longrightarrow F = F\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + F\cos\theta\,\hat{j} + F\sin\theta\sin\phi\,\hat{k}$$

برای تجزیه F روی صفحه افقی (اینجا xz) اول بردار F را روی صفحه تصویر کنید (با خط چین) سپس روی محور مورد نظر بیندازید

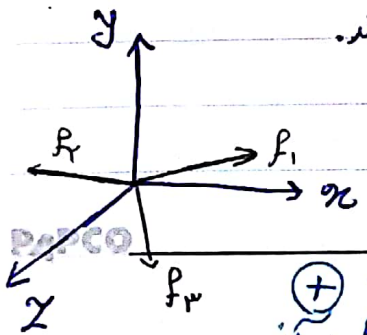
حالت سوم ⟵ نیروی به مبدا داده شده هیچ زاویه‌ای ندارد اما مختصات دو نقطه از روی نیرو (خط اثر نیرو) داده شده است



$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k} \\ e_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB} \\ e_{AB} \equiv \lambda \quad F_{(N)} \longrightarrow \lambda : F \text{ بردار یکه} \\ \overrightarrow{F} = |F|\,\lambda_F = |F|\,\dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB} \end{cases}$$

اگر دو بردار در یک راستا باشند و بردار یکه برابر دارند

نکته: در صورتی می‌توان از چند نیرو برآیند گرفت که نقطه اثر مشترک داشته باشند.



$$F_1 = F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j} + F_{1z}\hat{k}$$
$$\vdots$$
$$F_n = F_{nx}\hat{i} + F_{ny}\hat{j} + F_{nz}\hat{k}$$

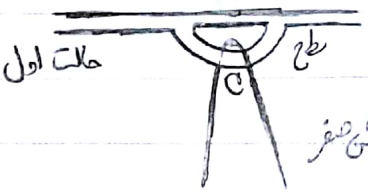
برآیند ⊕ $$R = (F_1 + \cdots + F_n)_x\hat{i} + (F_1 + \cdots + F_n)_y\hat{j} + (F_1 + \cdots + F_n)_z\hat{k}$$

Scanned by CamScanner

Subject

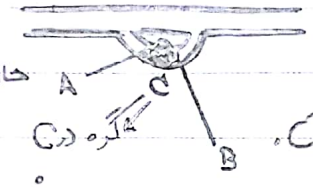
Date

اگر سطح آ صلب باشد کشش نداشت بزرگی A و B یکی است. حالت اول (۱)

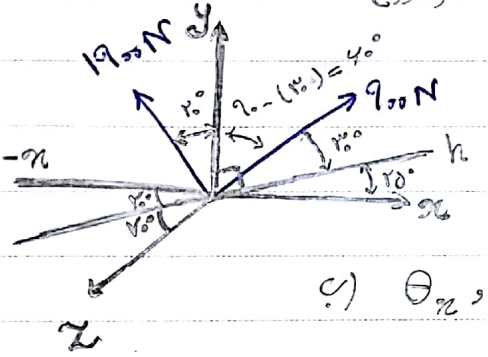


اگر گره C خود طناب به سطح (C) یکی داشت کشش طناب AC یا AB کشش آن صفر است و دیگری تنها نیرو بر سطح (C) وارد می‌کند

(A) (B)



سؤال ۲۷ فصل ۲: نکته ← y بردار عرضی h عمودست.



(الف) $F_{900N} = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}$ ⟶ $\sin(\frac{\delta\pi}{۳۶})$

$F_{(900N)} = 900_N\left(\underbrace{\cos۳۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\cos۲۵^\circ\,\hat{i} + \sin۳۰^\circ\,\hat{j} - \cos۳۰\sin۲۵\right)$ ⟵ $\cos(\frac{۲۵}{۱۸۰}\pi) = \cos(\frac{\delta}{۳۶}\pi)$

ب) $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ $\cos\theta_x = \frac{f_x}{f}$

با توجه ساختاری که در صورت سوال f_x با محورها در نظر داشته باشید

$F_{(900N)} = \left(900\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\underbrace{\cos(\frac{\delta\pi}{۳۶})}_{0.906}\;,\; 900\sin۳۰^\circ\;,\; -900\underbrace{\cos۳۰}_{\frac{۱.۷۳۲}{۲}}\underbrace{\sin(\frac{\delta\pi}{۳۶})}_{۰.۴۲۳}\right)$ ⟵ $\frac{۱.۷۳۲}{۲} = ۰.۸۶۶$

نکته کاربردی: بردار $\vec{۱۹۰۰N}$: $f_{(1900N)} = 1900N\left(-\sin۲۰\cos۲۰\,\hat{i} + \cos۲۰\,\hat{j} + \sin۲۰\cos۲۰\right)$

$F_{(900N)} = (900\times۰.۸۶۶\times۰.۹۰۶\;,\; 900\times\frac{۱}{۲}\;,\; -900\times۰.۸۶۶\times۰.۴۲۳) = (۷۰۶\;,\; ۴۵۰\;,\; -۳۳۰)$

$\cos\theta_x = \frac{۷۰۶}{|1900|} = \frac{۳۵۳}{۴۵۰}$ ، $\cos\theta_y = \frac{۴۵۰}{|1900|}$ ، $\cos\theta_z = \frac{-۳۳۰}{|1900|} = -\frac{۳۳}{۹۰} = -\frac{۱۱}{۳۰}$

$\cos\theta_y = \frac{۱}{۲}$ $\theta_y = \frac{\pi}{۳} = ۶۰^\circ$ $\cos\theta_x = \frac{۳۵۳}{۴۵۰}$ $\theta_x = \cos^{-1}(\frac{۳۵۳}{۴۵۰})$

$\theta_z = \cos^{-1}(-\frac{۱۱}{۳۰})$

$\cos\theta_x = \frac{f_x}{f}$

$\cos\theta_y = \frac{f_y}{f}$

$\cos\theta_z = \frac{f_z}{f}$

PqPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

کتاب دوستر حمیه دارو با اعداد متفاوت در سؤال

$\vec{B} = (۱۰۰ و ۱۱۵)$ $\vec{G} = (۰ و ۰/۱۷ و ۰)$

سؤال ۹۱۰۹۲ کتاب ترجمه واحیان:

$T_{BG} = ۴۵۰N$ $\overline{BG} = (-۱ i + ۰/۱۷ و -۱۱۵)$

$T_{BG} = T_{BG}\lambda_{BG} = T_{BG}\frac{\overline{BG}}{|BG|}$ $|BG| = \sqrt{(-۱)^۲ + (۰/۱۷)^۲ + (۱۱۵)^۲} =$

$\sqrt{۱ + ۰/۰۲۹ + ۲۱۲۵} = \sqrt{۲۰۷۴} =$ $T_{BG} = ۴۵۰N \frac{(-۱)\hat{i} + (۰/۱۷)\hat{j} - ۱۱۵\hat{k}}{۱/۹۳۴} \longrightarrow$

$۱/۹۳۴$

نکته: نیرو را نمی‌توان جا به جا کرد اما مختصات قطعاً می‌توان

$T_{BG} = -۲۳۳\hat{i} + ۱۷/۱۹\hat{j} - ۲۲۹\hat{k}$

چون کابل در نقطه‌ی B بر صفحه‌ی افقی بزرگی نیروی کشش BG و BH یکی است.

$H = (۱/۱۷۵m و ۱/۱۵m و ۰)$

ب) B بردار در نقطه‌ی $\Rightarrow R_B$ $\overline{BH} = (۰/۱۷۵m و ۱/۱۵m و -۱/۱۵m)$

$\vec{R_B} = \vec{T_{BG}} + \vec{T_{BH}}$ $\vec{T_{BH}} = T\lambda_{BH} = T \times \frac{\vec{BH}}{|BH|}$ طبق مثلث $\longrightarrow$ $|BH| = |BG| = ۱/۹۳۴$

$\vec{T_{BH}} = ۶۰۰ \times \frac{(\frac{۳}{۴}\hat{i} , \frac{۳}{۲}\hat{j} , -\frac{۳}{۲}\hat{k})}{۱/۹۳۴} = +۲۳۳\hat{i} + ۴۶۵\hat{j} - ۴۶۵\hat{k}$

$\vec{R_B} = (-۲۳۳ + ۲۳۳ ; ۱۷/۱۹ + ۴۶۵ , -۲۲۹ - ۴۶۵) = ۰\hat{i} + ۴۸۲/۱۹\hat{j}$
$- ۸۱۴\hat{k} \longrightarrow \vec{R_B} = ۴۸۲/۱۹\hat{j} - ۸۱۴\hat{k}$

سؤال ۷۳ و ۷۴ و برایشگری در نقطه‌ی A: ترجمه‌ی استاد انتظاری

$AB: T_{AB} = ۴/۲kN$

$\vec{AB} = ۴/۲kN(+\sin ۵۰^\circ \cos ۴۰^\circ , -\cos ۵۰^\circ , +\sin ۵۰^\circ \cos ۲۵)$

$۵۰^\circ = \frac{۱۰}{۳۶}\pi$ $۴۰^\circ = \frac{۲}{۹}\pi$ $۵۰^\circ = \frac{۱۰}{۳۶}\pi$ $۲۵ = \frac{۵}{۳۶}\pi$

$\vec{AC} = ۳/۶kN(-\sin ۴۵ \sin ۲۵ , -\cos ۴۵ , \sin ۴۵ \cos ۲۵)$

$\vec{AB} = ۴/۲(۰/۷۶۶ \times ۰/۴۲۳ , -۰/۷۰۷ , ۰/۷۶۶ \times ۰/۹۰۶) =$

$\sin \frac{۵\pi}{۳۶} = ۰/۴۲۳$ $\cos \frac{۵\pi}{۳۶} = ۰/۹۰۶$

$\vec{AB} = ۲/۴۶\hat{i} - ۲/۷۵\hat{j} + ۲/۹۴\hat{k}$

$\cos \frac{۱۰\pi}{۳۶} = ۰/۷۰۷$ $\sin \frac{۱۰\pi}{۳۶} = ۰/۷۶۶$

$\cos \frac{۲\pi}{۹} = ۰/۷۶۶$

Scanned by CamScanner

Subject ۱۵
Date

$\overrightarrow{AC} = 3.6 \times (-0.1866 \times 0.1423 \; و \; -0.866 \; و \; 0.1866 \times 0.9064) = (-1.132\,\hat{i} - 3.012\,\hat{j} + 2.082\,\hat{k})$

$R = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (2.146 - 1.132)\hat{i} + (-3.012 + (-2.170))\hat{j} + (2.082 + 2.912)\hat{k} =$

$1.014\,\hat{i} - 5.182\,\hat{j} + 5.074\,\hat{k} = \vec{R}$

فصل ۳:

جلب و غیر جلب

تعریف ریاضی ← وقتی که نیرو به جسم وارد می‌شود تغییر شکل نمی‌دهد

تعریف مهندسی ← جسمی است که در محدوده‌ای که به آن نیرو وارد می‌کنیم تغییر شکل آنقدر ناچیز است که می‌توان از آن صرف نظر کرد

Rigid

نیرو ← خارجی: فقط برای اجسام جلب بررسی می‌کنیم؛ نیرویی است که از طرف جسم دوم بر جسم مورد نظر وارد می‌شود

داخلی: نیرویی که مولکول‌ها و اتم‌های یک جسم را کنار هم نگه می‌دارد.

متمرکز: نیرویی است که نقطه اثر آن کاملاً شفاف و مشخص است.

نیروی خارجی ← گسترده / متمرکز

جلب ← بررسی ما در این فصل: نیروی خارجی / متمرکز / جلب

غیر جلب

PAPCO

Scanned by CamScanner

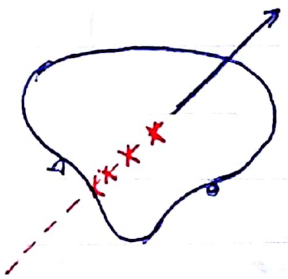
11

Subject

Date

قانون: نیروهای خارجی وارد بر اجسام صلب بردار لغزاند یعنی اگر نیروی خارجی روی خط اثر

جسم صلب جابجا شود تغییری در حالت جسم صلب ایجاد نمی‌شود.

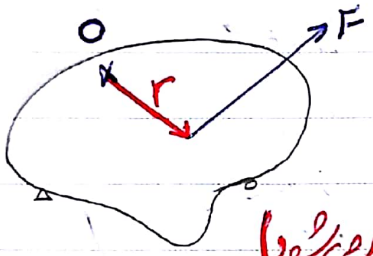


جسم صلب ← کسینوس‌های بردارهای دال تغییری نخواهند کرد

گشتاور نیرو:

انواع گشتاور:

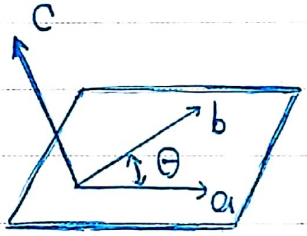
(۱) گشتاور نیرو حول یک نقطه دلخواه



گشتاور بردار مکان نیرو نسبت به نقطه ← (از نقطه به اول نیرو رسم می‌شود)

$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ همه‌ی قوانین ریاضی از جمله قوانین ضرب خارجی در گشتاور برقرار است.

$\vec{C} = \vec{a} \times \vec{b}$ $\quad |\vec{C}| = |a||b| \sin\theta$



$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

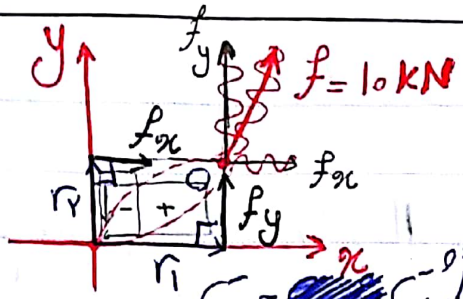
$\vec{C} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$

$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}$ $\quad |C| = (C_x^2 + C_y^2 + C_z^2)^{1/2}$

$\cos\theta_x = \frac{C_x}{|C|}$ ، $\cos\theta_y = \frac{C_y}{|C|}$ ، $\cos\theta_z = \frac{C_z}{|C|}$

Scanned by CamScanner

مسائل دوبعدی



$$M_O = \overset{+}{M}_1 + \overset{-}{M}_2 = 0\hat{k}$$

۴ انگشت دوجهت r، بسته شدن آن جهت f و انگشت شست جهت

$$M = [r_1 \times f_y - r_2 \times f_x]\hat{k}$$

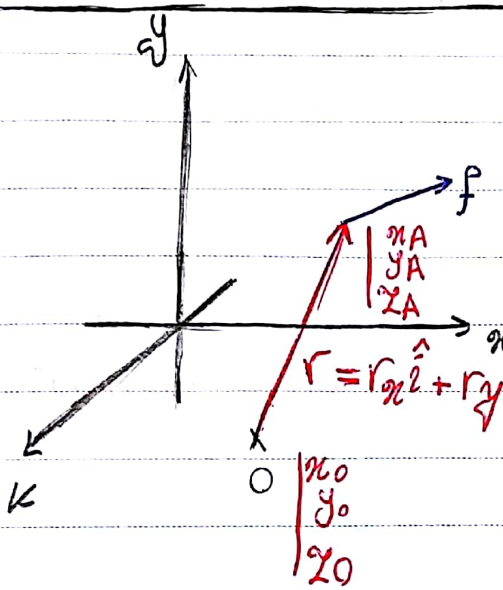
انگشت شست در جهت $\hat{k}$ است

شست عمود بر صفحه است پس بردار حول بدست می‌آید

نیروست.

نکته: انگشت در جهت وارد شدن به داخل صفحه علامت منفی باید در نظر داشته باشیم.

مسائل سه‌بعدی:



واحد طول

$$M = r \times f$$

واحد نیرو

$$r = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}$$

$$\vec{r} = (x_A - x_O)\hat{i} + (y_A - y_O)\hat{j} + (z_A - z_O)\hat{k}$$

قانون وارینون: اگر n نیرو با نقطه اثر مشترک داشته باشیم و بخواهیم نسبت به یک نقطه خاص گشتاور بگیریم، اگر برآیند نیروها را محاسبه و گشتاور بگیریم نتیجه‌اش یکی خواهد بود با این که تک تک گشتاور گرفته و برآیند بگیریم.

خلاصه

- چه گشتاور بگیرید بعد برآیند بگیرید
- چه برآیند بگیرید بعد گشتاور بگیرید

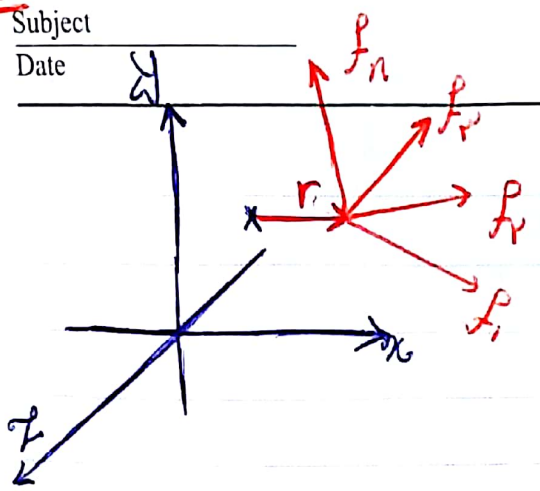
نتیجه یکی است

Scanned by CamScanner

۱۳

Subject

Date

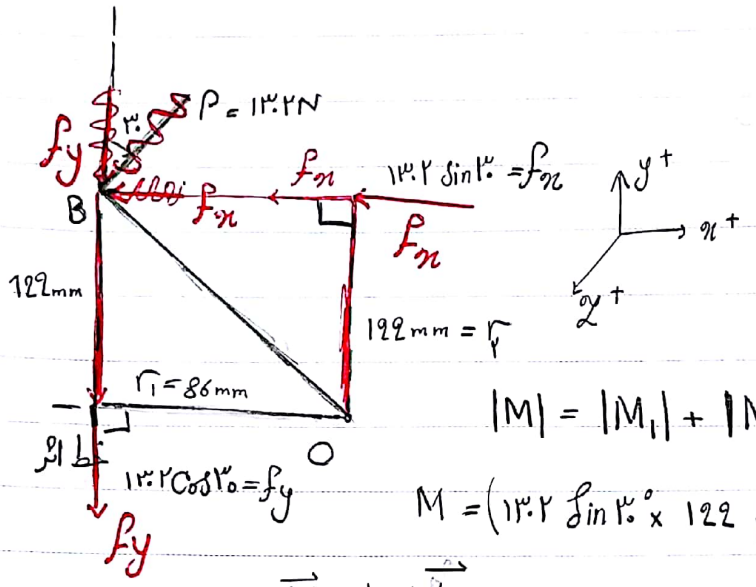


$$M = r \times f$$

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n$$

$$M = r \times f_1 + r \times f_2 + \cdots + r \times f_n$$

سوال ۳ صفحه ۱۱۱ ترجمه ی استاد و احیان

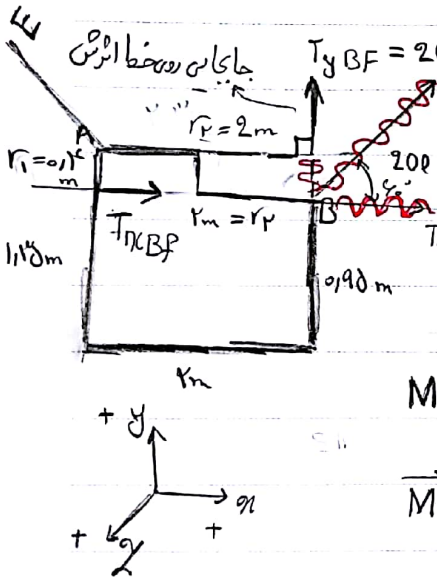


$$|M| = |M_1| + |M_2| = f_x \times r_2 \sin 90 + f_y \times r_1 \sin 90$$

$$M = (1302 \sin 30^\circ \times 122 \pm 1302 \cos 30 \times 86)\,\hat{k}$$

$$\vec{M} = |M|\,\vec{k}$$

س ۶ صفحه ۱۱۱ ترجمه ی استاد انتظار ل :



الف)

$$|M| = \pm|M_1| \pm |M_2|$$

$$T_{xBF} = 200\,N \times \cos 60 = 100\,N$$

$$r_{AB} = \sqrt{4 + 0.16} = \sqrt{4.16} = 2.03$$

$$M_1 = r_1 \times T_{xBF} \times \sin 90 = \frac{12}{100}\,m \times 100\,N = 12\,N.m$$

$$M_2 = r_2 \times T_{yBF} \sin 90 = 2\,m \times 173.2\,N = 346.4\,N.m$$

$$\vec{M} = [12\,N.m + 346.4\,N.m]\,\vec{k}$$

نکته : ساعتگرد پادساعتگرد

Scanned by CamScanner

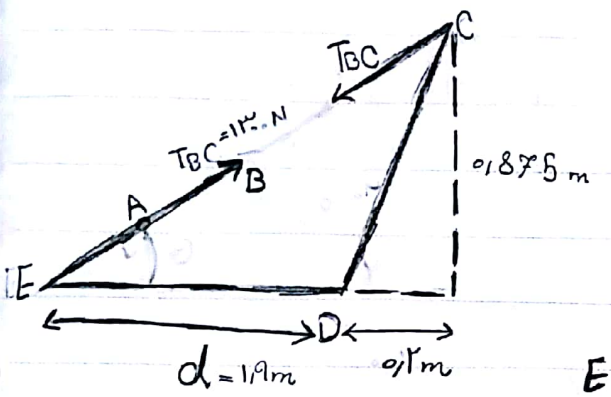
Subject

Date

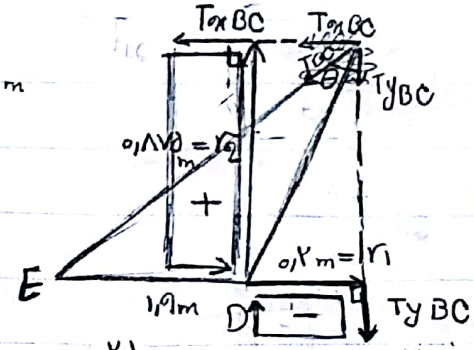
هم‌نقطه‌ای

نکته: گشتاور تمایل نیروی وارد بر جسم حول یک نقطه، مشخص است.

س ۳-۹ ص ۱۲۲ ترجمه‌ی استاتیک انتظار:



الف)

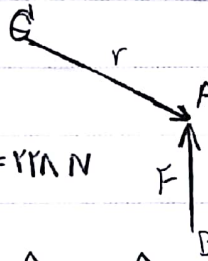


$$\sin\theta = \frac{۲٫۱}{\sqrt{(۰٫۱۸۷۵)^۲+(۲٫۱)^۲}} = \frac{۲٫۱}{\sqrt{۰٫۷۶۷ + ۴٫۴۱}} = \frac{۲٫۱}{\sqrt{۵۰۱۸}} = \frac{۲٫۱}{۲٫۲۸} = ۰٫۹۲۱$$

$$\cos\theta = \frac{۰٫۱۸۷۵}{۲۰۲۸} = ۰٫۳۸۴ \qquad |M| = -r_1 T_{y}BC + r_2 T_{x}BC$$

$$\vec{M} = -(۰٫۲ \times ۴۹۹) + (۰٫۱۸۷۵ \times ۱۱۹۷) = -۹۹۰۸ + ۱۰۴۷ = (۹۴۸\ N.m)\,k$$

$$T_{y}BC = ۱۲۰۰N \times \cos\theta = ۱۲۰۰ \times ۰٫۳۸۴ = ۴۹۹N \qquad T_{x}BC = ۱۲۰۰ \times \sin\theta = ۱۱۹۷N$$



$F_{AB} = ۲۲۸N$ $\quad M_C = r_{A/C} \times F_A$

س ۳ و ۴ ص ۱۲۳:

C | ۰ ۰ ۰

A | ۰٫۹۴ ۰٫۱۱۲ ۰٫۷۲

B | ۰٫۹۴+۱ ۰٫۱۱۲−۱٫۸ = −۱٫۰۹ ۱٫۳۲

$$F_A = F_{xA}\hat{i} + F_{yB}\hat{j} + F_{zB}\hat{k}$$

$$r_{A/C} = (۰٫۹۴-۰\,\hat{i},\ ۰٫۱۱۲-۰\,\hat{j},\ ۰٫۷۲-۰\,\hat{k})$$

$$r_{A/C} = r_{xA/C}\hat{i} + r_{yA/C}\hat{j} + r_{zA/C}\hat{k}$$

$$\vec{F}_{BA} = F_{BA}\lambda_{BA} = (۲۲۸N)\frac{(-۰٫۱\hat{i} + ۱۰N\hat{j} - ۰٫۶\hat{k})}{\sqrt{(-۰٫۱)^۲ + (۱۰N)^۲ + (-۰٫۶)^۲}} = \frac{۲۲۸}{\sqrt{۳٫۶۱}}(-۰٫۱\hat{i} + ۱۰۶۲\hat{j} - ۰٫۶\hat{k})$$

$\lambda_{BA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{|BA|}$; $\sqrt{(-۰٫۱)^۲ + (۱۰N)^۲ + (-۰٫۶)^۲} = \sqrt{۰٫۰۱ + ۳۰۲۴ + ۰٫۳۶} = \sqrt{۳٫۶۱} = ۱٫۹$

PAPCO

$$= \left(-\frac{۲۲۸}{۱۹},\ \frac{۲۲۸ \times ۱۶٫۲}{۱۹},\ -\frac{۲۲۸ \times ۶}{۱۹}\right) = (-۱۲,\ +۱۹۴٫۴,\ -۷۲)$$

Scanned by CamScanner

۱۵

Subject

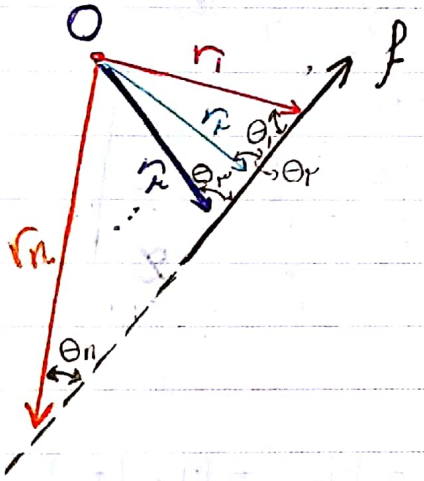
Date

$$M_C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.95 & 0.12 & 0.25 \\ -12 & +19.34 & -72 \end{vmatrix} = i(-72\times0.12 - 0.25\times19.34) - j(-72\times0.95 + 0.25\times12) + k(19.34\times0.95 + 12\times0.12)$$

$$= -15.324\,i - 0.48\,j + 19.164\,k$$

$$M_C = (-15.324,\ -0.48,\ 19.164)$$

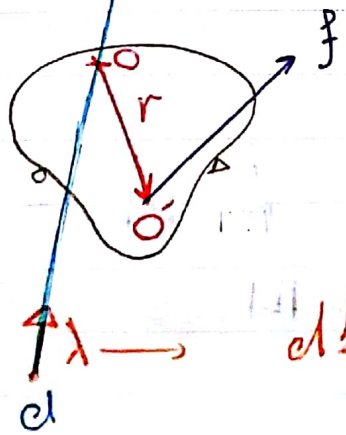
نکته:



$$r_1\times f = r_2\times f = r_3\times f = \cdots = r_n\times f$$

گشتاور نیرو حول خط:

نحوه ی محاسبه: ① نقطه ای دلخواه بر خط d منطبق بگیرید (در مسائل نقطه ای را که مختصاتش را دارید در نظر بگیرید)



② بردار مکان نیرو نسبت به خط را رسم کنید (r)

$$M_{d\,d'} = \lambda_{\cdot}(r\times f)$$

اسکالر

بردار یکه خط d

Scanned by CamScanner

Subject

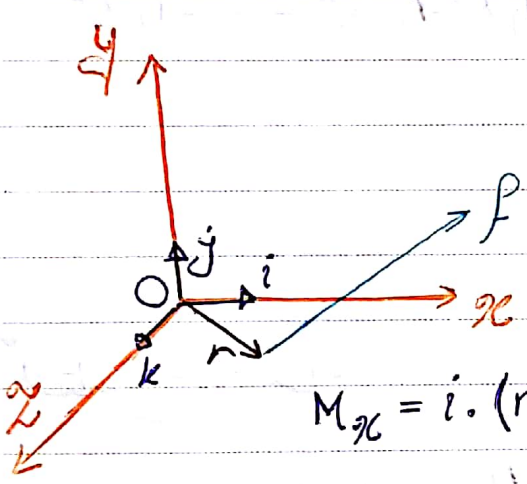
Date

$$\lambda = \lambda_x i + \lambda_y j + \lambda_z k$$

$$r = r_x i + r_y j + r_z k \qquad f = f_x i + f_y j + f_z k$$

$$M_{dl'} = \lambda_x (r_y f_z - r_z f_y) + \lambda_y (r_z f_x - r_x f_z) + \lambda_z (r_x f_y - r_y f_x) =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

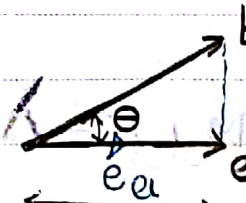


$$M_O = r \times f = M_x i + M_y j + M_z k$$

$$M_x = i \cdot (r \times f) \qquad M_y = j \cdot (r \times f) \qquad M_z = k \cdot (r \times f)$$

$$m = a \cdot b = |a||b| \cos\theta \qquad \vec{V} = \vec{c} \times \vec{s} = |c||s| \sin\alpha$$:یادآوری

$$\begin{cases} a = a_x i + a_y j + a_z k \\ b = b_x i + b_y j + b_z k \end{cases}$$



$$\vec{b}_a = |b| \cos\theta \, e_a$$ بردار

$$a \cdot b = a_x b_x i + a_y b_y j + a_z b_z k \rightarrow |b| \cos\theta$$

$$b \cdot e_a = |b||e_a| \cos\theta = |b| \cos\theta$$ (1)

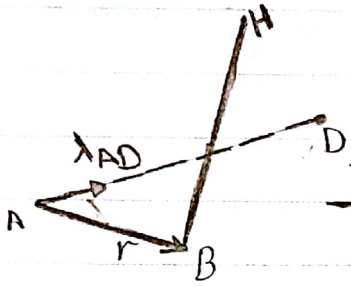
PdPCO $(b \cdot e_a) e_a = \vec{b}_a$ $\qquad V = C \cdot (a \times b)$

Subject

Date

س۴۸ فصل ۳ ترجمه‌ی استاد استاتیک

B | 400, 0, 600 — A | 0, 0, 600 — H | 700, 600, 0



$\frac{\overrightarrow{AD}}{|AD|} = \lambda_{AD} = \frac{(800\,\hat{i} + 0\,\hat{j} - 600\,\hat{k})}{1000}$

$AD = (800, 0, -600)$

$|AD| = \sqrt{(800)^2 + (-600)^2} = 1000$

$T_{BH} = 1125\,N$

$\lambda_{AD} = 0.8\,\hat{i} - 0.6\,\hat{k}$

$r = AB = (400, 0, 0)\,(m) = 400\,i\,(m)$

$M_{AD} = \lambda_{AD} \cdot (r_{AB} \times T_{BH})$

$T_{BH} = \lambda_{BH} \times T_{BH} = \frac{300i + 600j - 600k}{\sqrt{(300)^2 + (600)^2 + (600)^2}} \times 1125\,N$

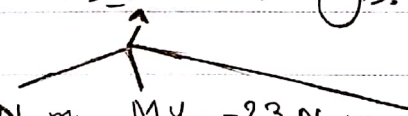
$T_{BH} = \frac{1}{3} \times 1125\,\hat{i} + \frac{2}{3} \times 1125\,\hat{j} - \frac{2}{3} \times 1125\,\hat{k} = 375\hat{i} + 750\hat{j} - 750\hat{k}$

$$M_{AD} = (0.8\,i - 0.6\,\hat{k}) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 400 & 0 & 0 \\ 375 & 750 & -750 \end{vmatrix} = (0.8\,\hat{i} - 0.6\,\hat{k}) \cdot (-400(750)\,\hat{j} + 400 \times 750\,\hat{k}) = (0.8\,\hat{i} - 0.6\,\hat{k}) \cdot (+300000\,\hat{j} + 300000\,\hat{k}) =$$

$-6 \times 10^{-1} \times 3 \times 10^{5} = -18 \times 10^{4}$

نکته: در فضای سه بعدی کسینوس‌ها دیگر کاربردی ندارند. تنها در تبدیل بردها مختصات

س۴۹ فصل ۳ ترجمه‌ی استاد استاتیک



$M_x = +26\,N.m$ $\quad M_y = -23\,N.m$ $\quad M_z = -4\,N.m$

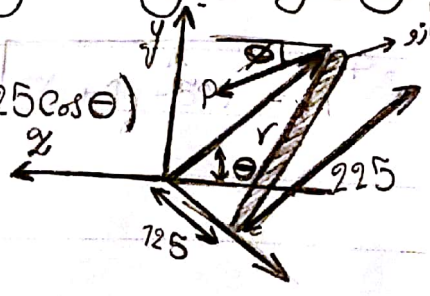
$M_{yc} = \underbrace{j}_{(0,1,0)} \cdot (r \times f)$

$M_y = \underbrace{j}_{(0,1,0)} \cdot (r \times f)$

$M_z = \underbrace{k}_{(0,0,1)} \cdot (r \times f)$

$r = (125, +225\sin\theta - 225\cos\theta)$

$P = (0, -P\sin\phi, P\cos\phi)$



Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$M_{\text{ref}} = (1,0,0)\cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 125 & 225\sin\theta & -225\cos\theta \\ 0 & -P\sin\phi & P\cos\phi \end{vmatrix} = (1,0,0)\cdot\Big((225P\sin\theta\cos\phi - 225P\sin\phi\cos\theta)\Big)$$

$$\left(125P\cos\phi - 0\right)j + \left(-125P\sin\phi - 0\right)\hat{k} = 26\ N.m \longrightarrow$$

$$225\,P\sin\theta\cos\phi - 225\,P\sin\phi\cos\theta = 26000\ N.mm$$

$$M_y = -23\ N.m = -23000\ N.mm = -125P\cos\phi \quad (2)$$

$$M_x = -4000\ N.mm = -125P\sin\phi \quad (3)$$

$\sqrt{16+529} = \sqrt{545}$, ϕ, 4, 23

$$\frac{(2)}{(3)} = \frac{23000}{4000} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} = \cot\phi = \frac{23}{4} \longrightarrow \phi = 10^\circ \quad (4)$$

$$\xrightarrow{3,1} 225\,P\sin\theta\cos 10^\circ - 225\,P\sin 10^\circ\cos\theta = 26000\ N.mm \quad (5)$$

$$\xrightarrow{3,4} 4000\ N.mm = 125\,P\sin 10^\circ \longrightarrow P = \frac{4000\ N.mm}{125\sin 10^\circ} = \frac{4000}{125\times 0.1736} =$$

$$184.3\ N = P$$

$$(5) \longrightarrow 225(184.3)\sin\theta\times 0.985 - 225(184.3)(0.1736)\cos\theta$$

$$26000 \longrightarrow 26000 = 40848\sin\theta - 37198\cos\theta$$

$$26000 + 37198\cos\theta = 40848\sin\theta \qquad 26000 + 37198\left(\sqrt{1-\sin^2\theta}\right) - 40848\sin\theta = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تربيع}} 37198\times 37198\,(1-\sin^2\theta) = (4084\times 4084)\sin^2\theta + (26000)^2 +$$

$$52000(4084)\sin\theta \longrightarrow 1384\,1184\sin^2\theta = 1667\,9056\sin^2\theta +$$

$$676000000 + 272360000\sin\theta \longrightarrow (1384\,1184 + 1667\,9056)\sin^2\theta + 272360000\sin\theta$$

$$+ 676\,1184 = 0$$

PAPCO

$$\Delta = \qquad \sin\theta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

کوپل: تشکیل یک کوپل f_3 و f_4 — f_1 و f_2 — ۳ نیروی خارجی f_n

f_3 و f_4: (A) خط اثرهای معادل دارند (B) خلاف جهت همدیگر هستند (C) بزرگی آنها برابر است

$r = r_1 - r_2 \rightarrow r_2 + r = r_1$

$\sum f_x = 0 \rightarrow f - f = 0 \rightarrow f = f$

$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = r_1 \times f_1 + r_2 \times (-f) = (r_1 - r_2) \times f = r \times f$

۳: برابر صفر کوپل $\Leftarrow$ برداری است که از اول یکی از نیروها به اول دیگری متصل می‌شود.

(A) C

(B) C

نیروی که باید استفاده شود

$M = r \times f$ گشتاور کوپل

* نکته: گشتاور کوپل مستقل از دیگر نقطه‌ای است پس برداری

$M = (-r) \times (-f)$

آزاد است اما نمی‌تواند بچرخد و فقط دو خاصیت انتقال

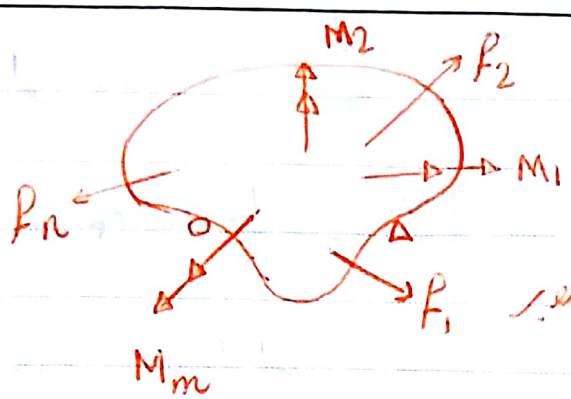
و جابجایی در جهت موازی خودش را دارد.

گشتاور کوپل وابسته به ۲ نیرو است و جابجایی آزاد است

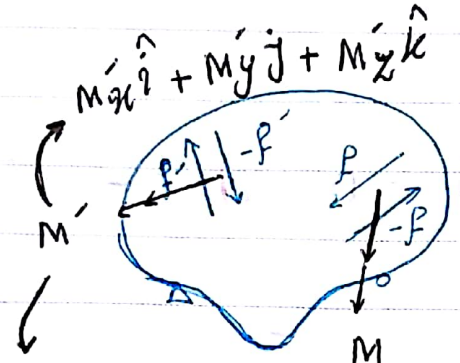
$(r' \times f' = r \times f)$

در مسائل گشتاور کوپل جابجایی دو نیرو به جهه آورنده آن می‌شود.

Scanned by CamScanner



نیروهای خارجی وارد بر جسم صلب : $n + 2m$

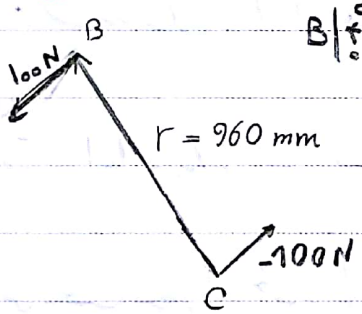


نکته: M و M' در دو صفحه‌ی متمایز نه هم خط‌اند اما چون بردار آزادند می‌توان آن‌ها را بر امتداد گرفت و به یک گشتاور کوپل واحد تبدیل کرد.

$$M'' = M + M' = (M_x + M'_x)\hat{i} + (M_y + M'_y)\hat{j} + (M_z + M'_z)\hat{k}$$

نکته: گشتاور کوپل تنها تمایل به چرخاندن جسم دارد و هیچ تمایلی برای انتقال دادن جسم ندارد

مرجع فصل ۳: ترجمه‌ی استاد استادانتظار ۷۶



$B\left|{}^{0}_{0}{}^{400\,mm}\right.$ $C\left|{}^{960\,mm}_{0}\right.$

کوپل اول $M =$

کوپل اول

$r = CB = (-960, 400, 0)$

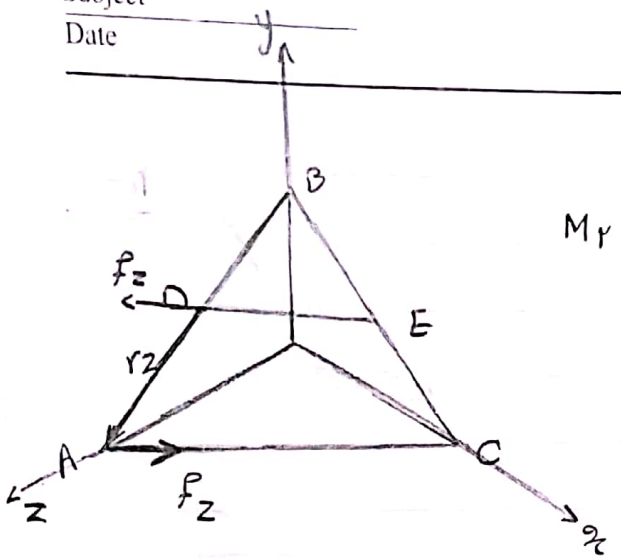
$F_{100N} = (0, 0, 100k) = 100\hat{k}$

$$M_1 = r \times f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -960 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 10^{4}\,\hat{i} - (-96 \times 10^{3})\,\hat{j} + 0\hat{k} = 40000\,\hat{i} + 96000\,\hat{j}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date



کوپل نیرو: $D\begin{vmatrix}0\\200\\550\end{vmatrix}$ $A\begin{vmatrix}0\\0\\1100\end{vmatrix}$

$M_2 = r \times F$

$F = 146\, e_{AC}$

$\vec{r} = \overrightarrow{DA} = (0, -200, 550)$

$\overrightarrow{AC} = 960\,\hat{i} + 0\,\hat{j} - 1100\,\hat{k}$

$$e_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|} = \frac{960\,i - 1100\,k}{\sqrt{960^2 + 1100^2}} \Rightarrow F = 146\, e_{AC} = 146(0.896\,\hat{i} - 0.996\,\hat{k})$$

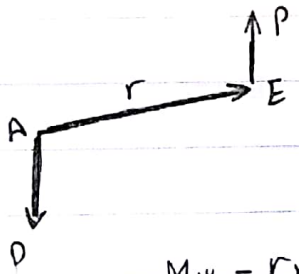
$$= 130.8\,i - 145.4\,\hat{k}$$

$$e_{AC} = \frac{960\,\hat{i} - 1100\,\hat{k}}{\sqrt{921600 + 1210000}} = \frac{960\,\hat{i} - 1100\,\hat{k}}{\sqrt{1219210}} = \frac{960\,\hat{i} - 1100\,\hat{k}}{1104.1} =$$

$0.869\,\hat{i} - 0.996\,\hat{k}$

$$M_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -200 & 550 \\ 130.8 & 0 & -145.4 \end{vmatrix} = i(29080) - j(-71950) + k(-26140)$$

$E\begin{vmatrix}480\\200\\0\end{vmatrix}$ $A\begin{vmatrix}0\\0\\1100\end{vmatrix}$ کوپل نیرو: $P = 210\,N$



$r = E - A = (480, 200, -1100)$

$\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}$

$P = (0, 210, 0) = 210\,\hat{j}$

$$M_3 = r \times P = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 480 & 200 & -1100 \\ 0 & 210 & 0 \end{vmatrix} = (+1100)(210)\,i + (210)(480)\,k$$

$$= 231000\,\hat{i} + 100800\,\hat{k}$$

$$M_T = M_1 + M_2 + M_3 = (M_{1x} + M_{2x} + M_{3x})\,\hat{i} + (M_{1y} + M_{2y} + M_{3y})\,\hat{j}$$

$$+ (M_{1z} + M_{2z} + M_{3z})\,\hat{k} = (50000 + 29080 + 231000)\,\hat{i} + (96000 + 71950)\,\hat{j}$$

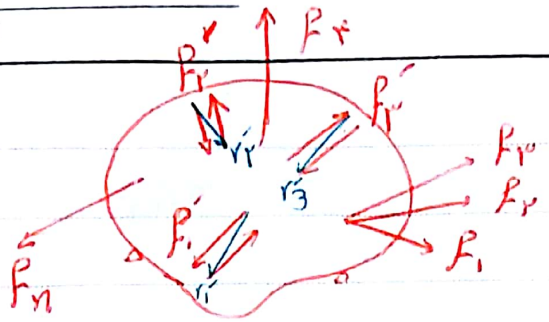
$$+ (26140 + 100800)\,\hat{k} = 300080\,\hat{i} + 167940\,\hat{j} + 126960\,\hat{k}$$

Scanned by CamScanner

۲۲

Subject

Date



F ها می‌خواهند حرکت انتقالی دهند

F' ها می‌خواهند حرکت چرخشی دهند

$$M'_1 = r'_1 \times f'_1 = M'_{1x}\hat{i} + M'_{1y}\hat{j} + M'_{1z}\hat{k}$$

$$\vdots$$

$$M'_n = r'_n \times f'_n = M'_{nx}\hat{i} + M'_{ny}\hat{j} + M'_{nz}\hat{k}$$

$$\vec{M} = M'_x\hat{i} + M'_y\hat{j} + M'_z\hat{k} \qquad M = \left(M'^2_x + M'^2_y + M'^2_z\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta_x = \frac{M'_x}{M} \;,\; \cos\theta_y = \frac{M'_y}{M} \;,\; \cos\theta_z = \frac{M'_z}{M}$$

$$\vec{f_1} = f_{1x}\hat{i} + f_{1y}\hat{j} + f_{1z}\hat{k}$$
$$\vec{f_2} = f_{2x}\hat{i} + f_{2y}\hat{j} + f_{2z}\hat{k}$$
$$\vec{f_3} = f_{3x}\hat{i} + f_{3y}\hat{j} + f_{3z}\hat{k}$$

قابل برآیندگیری چون نقطه‌ی اثر مشترک دارند

$$\vdots$$

$$f_n = f_{nx}\hat{i} + f_{ny}\hat{j} + f_{nz}\hat{k}$$

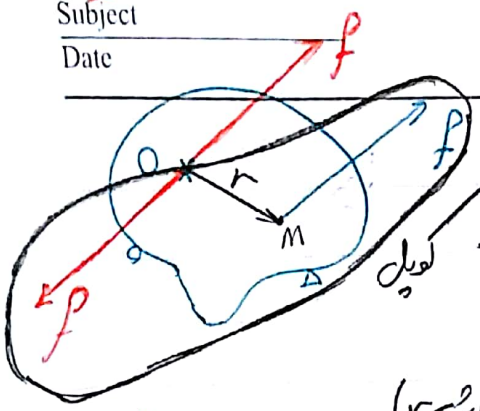
قابل برآیندگیری نیست چون نقطه‌ی اثر مشترک ندارند

راه حل: انتقال نیرو

Scanned by CamScanner

از نقطه ای به نقطه ای دیگر (با کمک کوپل)

انتقال نیرو:

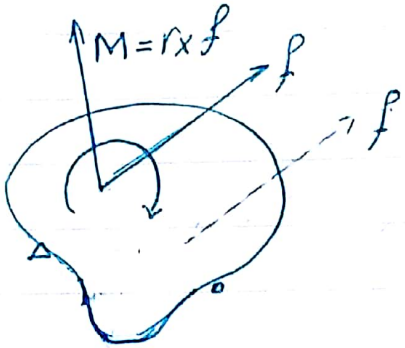


کوپل ← (۲ کوچک)

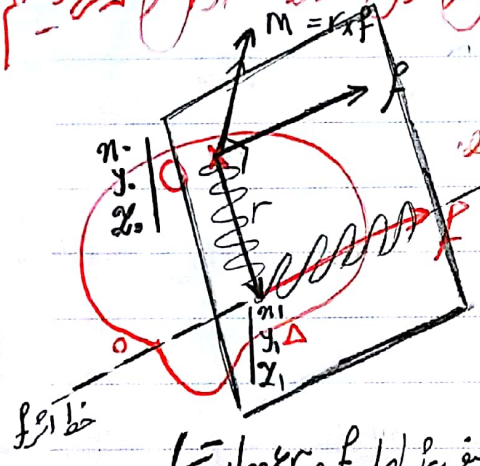
نزدیک به f اولیه کوپل کوچک است

و M کوپل صفر است و تأثیر ندارد

هرچه از f اولیه دور شویم کوپل بزرگتر می شود (افزایش r)

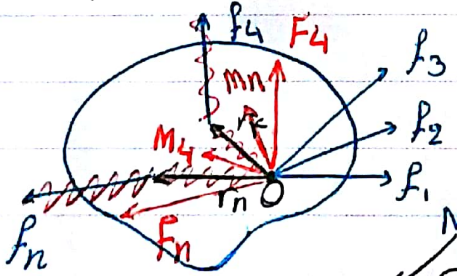


برداری نیرو بردار است برحسب واحدهای طول که از نقطه ای که می خواهیم نیرو را به آنجا منتقل کنیم شروع می شود به محل نیرو ختم می شود.



$$\vec{r} = (x_1 - x_0)\,\hat{i} + (y_1 - y_0)\,\hat{j} + (z_1 - z_0)\,\hat{k}$$

نکته: f برهر M ای که تولید می کند یکسان است. (چون M برحسب f و r محاسبه است)



ابتدا f_4 و f_n را به O منتقل می کنیم. ۲ کوپل M_n و M_4 تشکیل می شوند.

$$M_4 = r_4 \times f_4 = M_{4x}\,i + M_{4y}\,\hat{j} + M_{4z}\,\hat{k}$$

$$M_n = r_n \times f_n = M_{nx}\,\hat{i} + M_{ny}\,\hat{j} + M_{nz}\,\hat{k}$$

برآیند گیری به این شکل می شود که f ها با هم و M ها با هم برآیند گرفته می شوند.

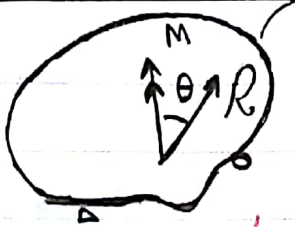
$f_1, f_2, f_3, f_4, f_n \longrightarrow R = R_x\,\hat{i} + R_y\,\hat{j} + R_z\,\hat{k}$

برآیند $M = M_x\,\hat{i} + M_y\,\hat{j} + M_z\,\hat{k}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

دستگاه کوپل نیرو



$$\cos\theta = \frac{R \cdot M}{|R||M|}$$

نکته: اگر هیچ کوپل دیگر بر سیستم انتقال نیرو هیچ تغییری در مولفه‌های نیروی اولیه ایجاد نمی‌کند.

س۹۳: برحسب انتقال M مستقیماً می‌بریم در D می‌گذاریم

$A|_{180}^{180}$ $D|_{0}^{360}$ $I|_{360}^{360}$

$r = DA = A - D = (-360, 120, 180)$ $F = 315N$

$$F = \lambda_{AI} F = \frac{\overrightarrow{AI}}{|AI|} F = \frac{360\hat{i} - 120\hat{j} + 180\hat{k}}{\sqrt{(360)^2 + (-120)^2 + (180)^2}} \times 315 \text{ N.mm}$$

$\sqrt{129600} \longrightarrow 420$ (129600 = 0 + 144000 + 32400)

$$F = \frac{360 \times 315}{420}\hat{i} - \frac{120 \times 315}{420}\hat{j} + \frac{180 \times 315}{420}\hat{k} = 270\hat{i} - 90\hat{j} + 135\hat{k}$$

$$M' = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -360 & 120 & 180 \\ 270 & -90 & 135 \end{vmatrix} = i(120 \times 135 - (-90)(180)) - j((-360)(135) -$$

$$(180 \times 270) + \hat{k}((-360)(-90) - 120 \times 270) =$$

$$M = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k}$$

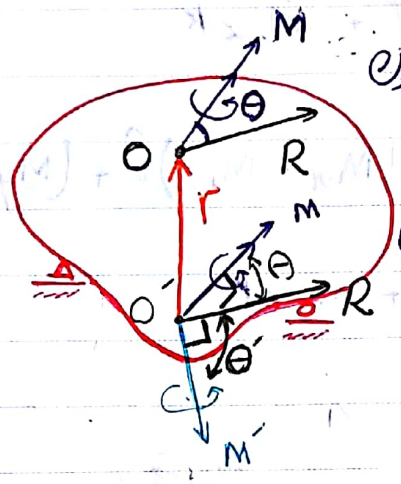
P4PCO

Scanned by CamScanner

$$M_{total} = M' + M = 88400\,\hat{i} + 97200\,\hat{j} - 42000\,\hat{k}$$

$$\Sigma F = F = 270\,\hat{i} - 90\,\hat{j} + 135\,\hat{k}$$

یک نیرو



نتیجه: می خواهیم ببینیم که آیا می شود کاری کرد که پس از جابجا کردن نیرو و تشکیل کوپل، کوپل از بین برود و فقط برآیند نیروها (R) بماند.

$$R = R_x\,\hat{i} + R_y\,\hat{j} + R_z\,\hat{k}$$

$$\begin{cases} M = M_x\,\hat{i} + M_y\,\hat{j} + M_z\,\hat{k} \\ M' = M'_x\,\hat{i} + M'_y\,\hat{j} + M'_z\,\hat{k} \end{cases}$$

برآیند Mها

$$M' = r \times R$$

$$\vec{M}_t = 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + 0\,\hat{k} = \vec{0}$$

سؤال: آیا می شود چنین کاری کرد؟ ✗

$$M'_x = -M_x \;,\; M'_y = -M_y \;,\; M'_z = -M_z$$

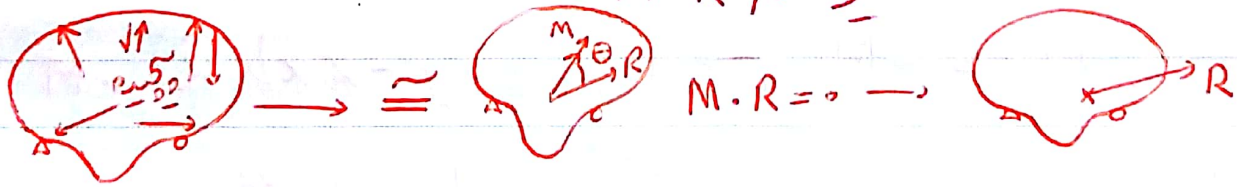
شرط داره.

باید M و M' هم اندازه و در خلاف جهت هم باشند و باید نوک‌های M و M' با R، ۹۰ باشند. یعنی:



if $M \cdot R = 0$: بله

if $M \cdot R \neq 0$: خیر

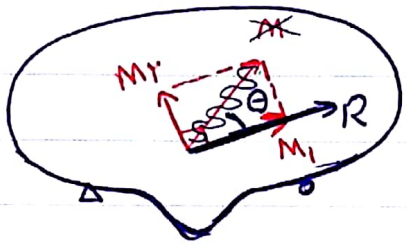


if $M \cdot R \neq 0 \longrightarrow$ نیچ

Scanned by CamScanner

Subject

Date



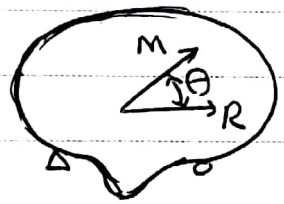
$\theta \neq 90^\circ$

$$\begin{cases} R = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \\ M = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k} \end{cases}$$

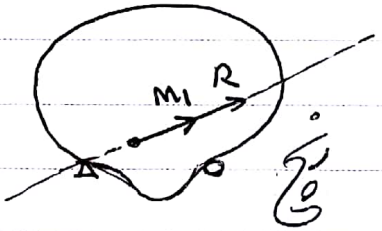
$$M_1 = (M \cdot e_R)\, e_R = M_{1x}\hat{i} + M_{1y}\hat{j} + M_{1z}\hat{k}$$

$$M_2 + M_1 = M \longrightarrow M_2 = M - M_1 = (M_x - M_{1x})\hat{i} + (M_y - M_{1y})\hat{j}$$

$$+ (M_z - M_{1z})\hat{k} = M_{2x}\hat{i} + M_{2y}\hat{j} + M_{3z}\hat{k}$$

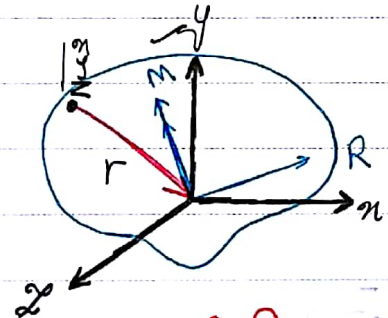


if $\theta \neq 90$, $M \cdot R \neq 0$ $\longrightarrow \cong$



نکته: یک سیستم هرچقدر هم پیچیده باشد قابل تبدیل به یک نیرو است.

M_2 خنثی حذف شد زیرا R می‌تواند M های مجهول را حذف کند.



چگونگی بدست آوردن نقطه‌ای که حذف می‌شود:

$$r = -x\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}$$

$$r \times R = -M \longrightarrow (-x\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}) \times R = -M$$

نکته: چون R بردار است نقطه‌ای که گویل حذف می‌شود تنها یک نقطه نیست و معادله یک خط است.

Scanned by CamScanner

۳-۱۲۰ تمرین دکتر انتظاری: نیروی A که مختصات آنرا داریم متصل می‌کنیم:

$r = OA = (1.8, 0, 1.5)$ $\quad A\begin{vmatrix}1.8\\0\\1.5\end{vmatrix}$

$B = (1.2, 3.2, 0)$ $\quad \overrightarrow{AB} = (-0.6, 3.2, -1.5)$

$|AB| = \sqrt{0.36 + 10.24 + 2.25} = 4.15$

$R = \frac{60}{4.15}(-0.4\hat{i} + 4.2\hat{j} - 2.5\hat{k}) = -8\hat{i} + 56\hat{j} - 20\hat{k}$

$M = r \times f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1.8 & 0 & 1.5 \\ -8 & 56 & -20 \end{vmatrix} = -84\hat{i} + 144\hat{j} + 436.8\hat{k}$

$R_{BA} = \frac{0.6\hat{i} + 4.2\hat{j} + 1.5}{4.15} \rightarrow M_2 = \frac{22.5}{4.15}(0.6\hat{i} - 4.2\hat{j} + 1.5\hat{k})$

$= 3\hat{i} - 21\hat{j} + 7.5\hat{k}$ $\quad M_{total} = M_1 + M_2 = -81\hat{i} + 123\hat{j} + 444\hat{k}$

سؤال ۳-۱۳۶) ترجمه ای دکتر انتظاری:

$A\begin{vmatrix}0\\0.12\\0.06\end{vmatrix}$ $\quad G\begin{vmatrix}0.16\\0\\0\end{vmatrix}$

$AG = (0.16 - 0.12 - 0.06) = r$ $\quad D\begin{vmatrix}0\\0.12\\0\end{vmatrix}$

$DA = (0i, 0j, +0.06\hat{k})$ $\quad |DA| = 0.06$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$\frac{10}{0/06}(0i + 0\hat{j} + 0/06\hat{k}) = 10\hat{k}$ ۱۰ تجزیه نیروی

نیوتونی

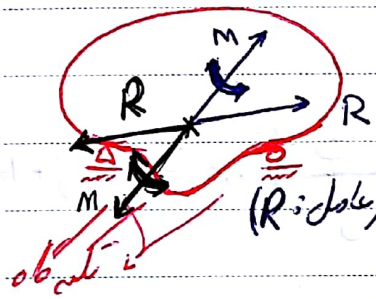
$H\begin{vmatrix} 0/2 \\ 0/06 \\ -0/12 \end{vmatrix}$ $\quad GH = (0/04\hat{i} + 0/06\hat{j} - 0/12\hat{k}) \longrightarrow |GH| = 0/14$

$GH = 100(0/04 + 0/06 - 0/12) = 4i + 6\hat{j} - 12\hat{k}$

$$M = \begin{vmatrix} i & \hat{j} & k \\ 0/16 & -0/12 & -0/06 \\ 4 & 6 & -12 \end{vmatrix} = \underbrace{(0/12\times 12 + 0/36)}_{1/44}\hat{i} - \underbrace{(0/16(-12)}_{-1/92} - \underbrace{(4)(0/06)}_{-0/24})\hat{j}$$

$$+ \hat{k}(0/96 + 0/48) \longrightarrow M = 1/8\hat{i} + 2/16\hat{j} + 1/44\hat{k}$$

فصل ۴: تعادل



تکیه گاه ها می‌خواهند مانع از چرخش جسم (عامل: M) و حرکت جسم (عامل: R) شوند ← باید R و M ای در خلاف جهت R و M اولیه ایجاد کنند

تعادل $\begin{cases} \sum \vec{M} = \vec{0} \\ \sum \vec{R} = \vec{0} \end{cases}$ $\longrightarrow$ استاتیک

در فضای ۳ بعدی $\rightarrow$ $\begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \\ R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

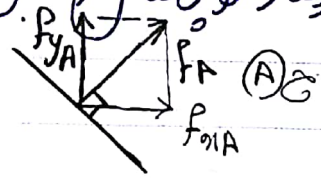
در فضای ۲ بعدی $\begin{cases} M_z = 0 \\ R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases}$

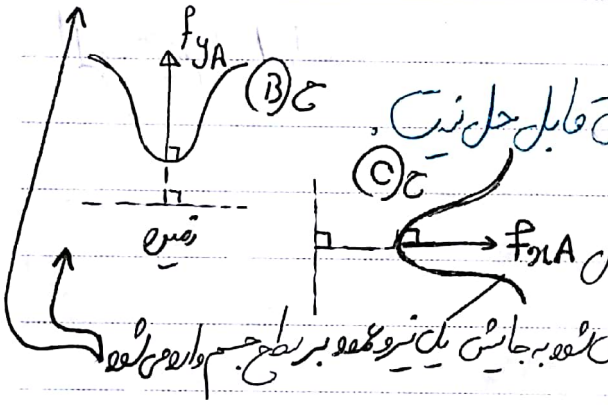
نکته: تکیه گاه ها را می توان با M و R جدید جایگزین کرد.

۱- جسم معین: جسمی که فقط با روابط تعادل همه ی کوپل ها و نیروهای وارد بر آن قابل شناسایی است.

بدست آمدن ← کوپل های خارجی

اگر جسمی را بخواهیم حل کنیم باید با استفاده از معادلات تعادل تمام نیروها و کوپل های خارجی و تکیه گاهی وارد بر آن را به دست آوریم.





۲- جسم نامعین: با استفاده از روابط تعادل قابل حل نیست.

تکیه گاه عامل اتصال بین دو جسم است همچون مفصل

خصوصیات تکیه گاه ها

① غلطکی: اگر تکیه گاه حذف شود به جایش یک نیرو عمود بر سطح جسم وارد می شود.

② گهواره ای: همچون غلطکی است.

③ کابل کوتاه: اگر تکیه گاه را پاک کردید یک نیرو در راستای کابل حذف شده به جسم اولیه وارد می شود. (در این صورت راستای نیرو هم است و جهت آن نیرو اهمیتی ندارد. اگر جواب معادلات منفی شد جهت را عوض کنید)

نکته: اگر سطحی اصطکاک ندارد همچون تکیه گاه غلطکی عمل می کنیم.

④ میله کوتاه: همانند ۳ است

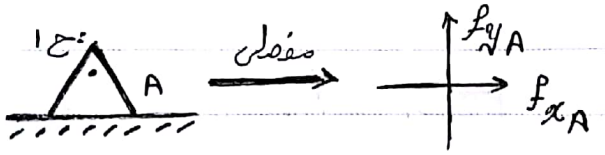
PqPCO

Scanned by CamScanner

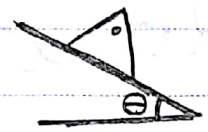
⑤ طوقه روی میله بی اصطکاک: اگر تکیه گاه حذف شود، فقط یک نیرو تولید می‌شود که عمود بر میله یا طوقه است (میله‌ی شیار دار منظور است) ← به شرط اینکه اصطکاک نباشد

⑥ پین بی اصطکاک در شیار: همانند ⑤ است

⑦ مفصلی:



۲ حالت:



مفصلی

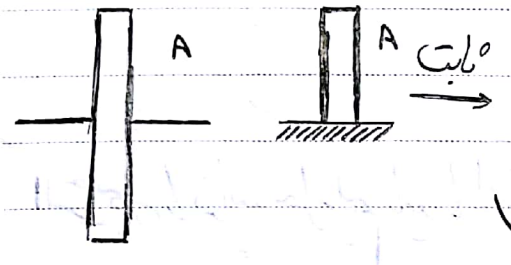
$f_{y_A} = f \sin\theta$

$f_{x_A} = f \cos\theta$

وقتی هم در جهت افق هم مؤلفه نیرو داریم و...

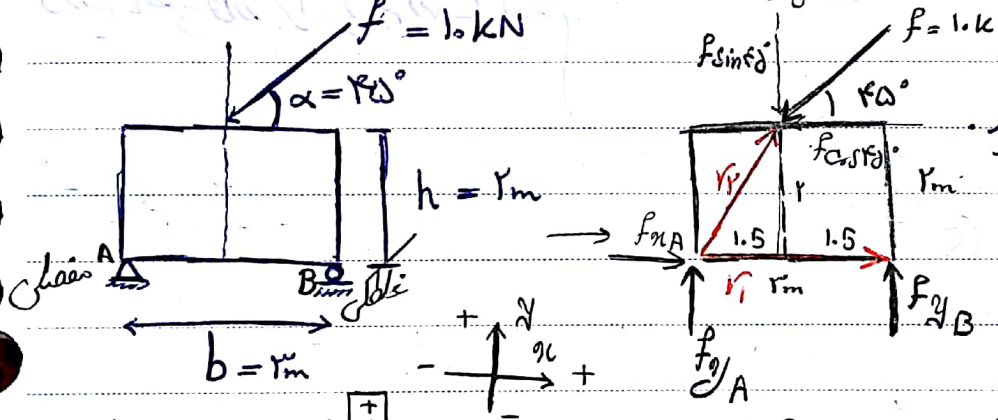
اگر نیرو در این جهت به تکیه گاه وارد شود، مقاومت می‌کند و هیچ حرکتی ایجاد نمی‌کند

⑧ تکیه گاه ثابت:



در مقابل گشتاور هم مقاومت می‌کند

مثال: جسم را حل کنید.



عکس العمل ۳ تا نیروی تکیه گاهی داریم ← پس جسم بصورت معین است

$\vec{M} = 0 \rightarrow M_z = 0 \rightarrow 10\cos45° \times 2 - 10\sin45° \times 1.5 + f_{y_B} \times 3 = 0$

$\vec{R} = 0 \rightarrow \vec{R}_x = 0 \rightarrow f_{x_A} - f\cos45° = 0$

$\vec{R}_y = 0 \rightarrow f_{y_A} + f_{y_B} - f\sin45° = 0$

جسم معین: جسمی که فقط و فقط از روابط تعادل بتوان تمامی نیروهای وارد بر آن را محاسبه کرد.

نکته: جسم معین جسمی است که تحت شرایط عمومی بارگذاری نیروهای خارجی هیچ حرکتی نکند (جسم مقید) مگر اینکه شکسته باشد.

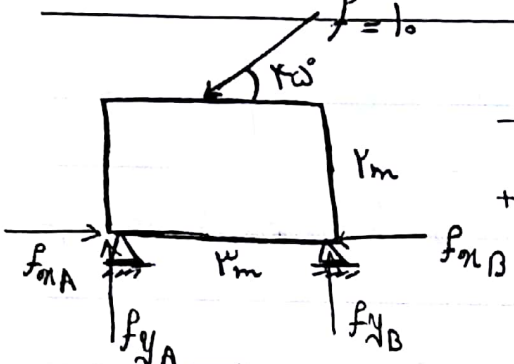
PqPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مکانیک سنگ ۲

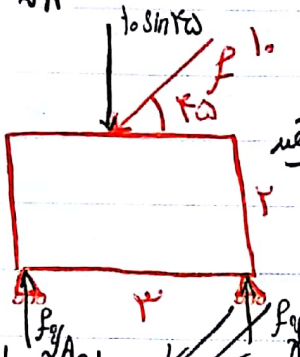
جسم ۲ نیروی تکیه‌گاهی و ۳ مجهول دارد پس جسم نامعین مقید است.



$$\xrightarrow{+} R_x = 0 \quad f_{xA} - f_{xB} - 10\cos 45 = 0$$

$$+\uparrow R_y = 0 \quad f_{yA} + f_{yB} - 10\sin 45 = 0$$

$$M_z = 0 \quad 10\cos 45 \times 2 - 10\sin 45 \times 1.5 + f_{yB} \times 3 - f_{yA} \times 3 = 0$$



نامعین نامقید

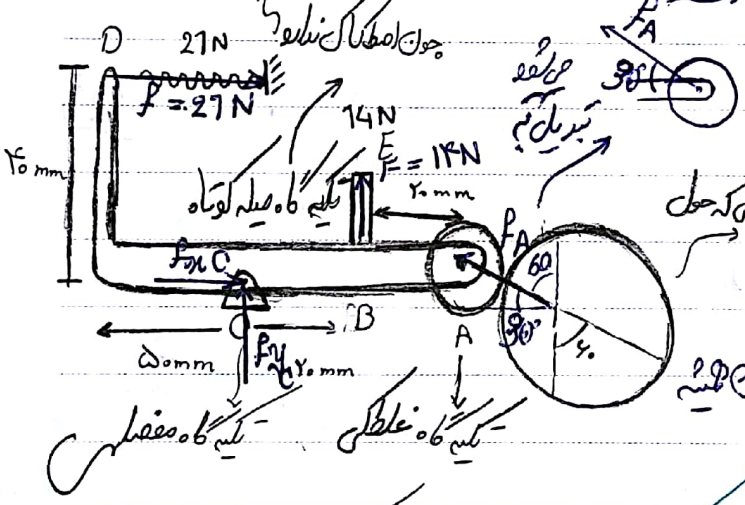
دینامیک ← ثابت $R_x = 0 = ma_x$

نکته: اگر جسمی فقط ۳ عکس العمل تکیه‌گاهی باشد و عکس العمل‌ها از تکیه‌گاهی رد شوند و نا گذرا و لذا یک نقطه معین نکنند آن جسم معین مقید است و نکته‌ی قابل توجه اینکه تمام مسائل استاتیک بجز حالت‌ها اینگونه‌اند

مسئله ۱۶ فصل ۴ استاد انتظار:

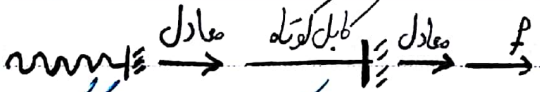
غلطکی بدون عضو تکیه‌گاه است ← (میل بادامک)

اگر داشت: تکیه‌گاه ثابت



۳ مجهول ← معین مقید است و در امتحان همینه

همین گونه است در استاتیک



قوانین: (۱) فنر همچون تکیه‌گاه کابل کوتاه عمل می‌کند.

(۲) هر موقع یک دایره قابل چرخش به یک جسم مالتی در تماس باشد صرف نظر از شکل جسم مالتی تکیه‌گاه غلطکی است.

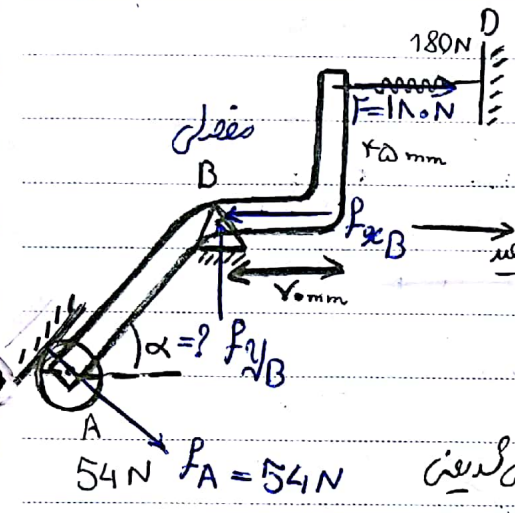
Scanned by CamScanner

Subject

Date

(۳) هرگاه از دو جسم متصل به هم (به هم متصل باشند یا هم را گرفته باشند) دست هر شرایط تکیه‌گاه مفصلی است.

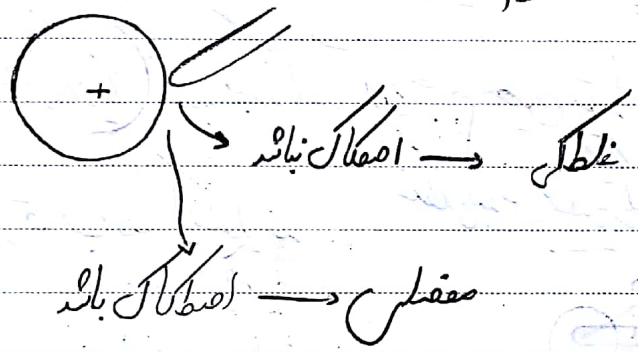
س ۲۳-۴: ترجمه‌ی استاد:



نکته: جهت مجهول است. هر جهتی می‌خواهید در نظر بگیرید چون راستا مهم است.

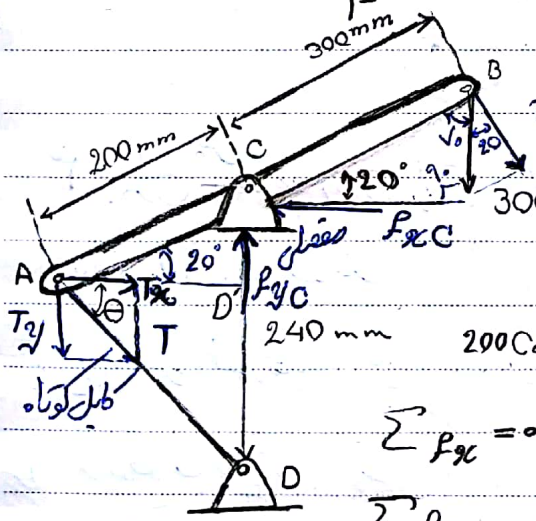
راستا باید مهم است و باید به طور صحیح رسم شود و گرنه به مجهولات مسئله اضافه می‌شود و مسئله‌ی معین تبدیل به نامعین می‌شود.

اگر پس از حل معادلات جوابها منفی شدند جهت غلط بوده عوضش می‌کنیم.



س ۲۴-۲۵: ترجمه‌ی استاد:

در عمل تعادل گشتاورها را انداریم.



نکته: ما دو نیرو را داریم برآیند می‌گیریم، پس باید نقطه‌ای که آن را داشته باشند که این عمل باعث تولید کوپل می‌شود یعنی $\sum M$ همان کوپل است.

$$\begin{cases} R_x = 0 \rightarrow \sum f_{gx} = 0 \\ R_y = 0 \rightarrow \sum f_{gy} = 0 \\ M_z = 0 \rightarrow \sum M = 0 \end{cases}$$

$200 \sin 20^\circ = CD' = 68\,mm \rightarrow DD' = 240 - 68 = 172\,mm$

$200\cos 20^\circ = 188 \rightarrow AD' \rightarrow \tan\theta = \frac{172}{188} \rightarrow \theta = 42^\circ$

$\sum f_{gx} = 0 \rightarrow T\cos 42 - f_{xC} = 0$

$f_C = (f_{xC}^2 + f_{yC}^2)^{\frac{1}{2}}$

$\sum f_y = 0 \rightarrow -300 - T\sin 42 + f_{yC} = 0$

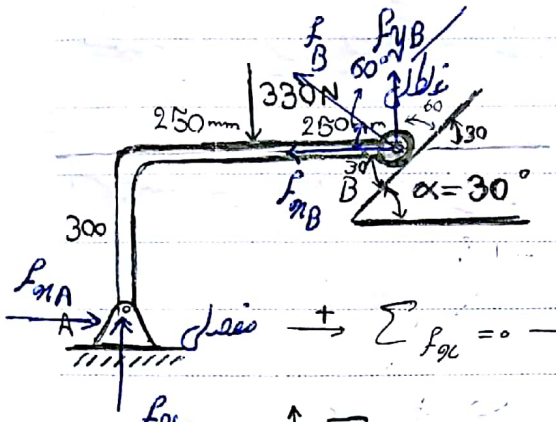
P4PCO

$\sum M = 0 \rightarrow +68 \cdot f_{xC} + 188 \cdot f_{yC} - 500 \cdot 300\cos 20^\circ = 0$

Scanned by CamScanner

۴-۱۷ ص ۱۵۶ ترجمه ی استاتیک :

عکس العمل در A و B ؟



f_B : $\begin{cases} f_{xB} : f_B \cos 60^\circ \\ f_{yB} : f_B \sin 60^\circ \end{cases}$

مفصلی $\xrightarrow{+} \sum f_x = 0 \longrightarrow f_{xA} - f_B \cos 60^\circ = 0$

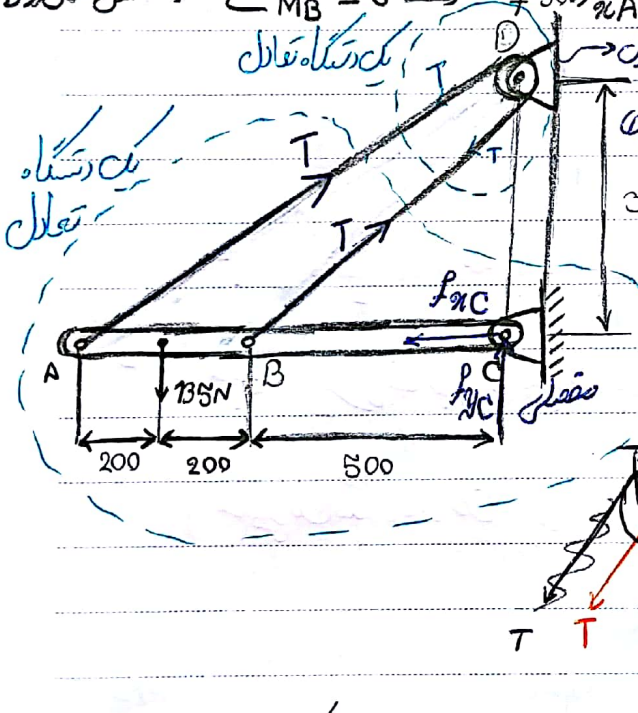
$+\uparrow \sum f_y = 0 \longrightarrow f_{yA} + f_B \sin 60^\circ - 330 = 0$

$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = 0 \longrightarrow 500 \cdot f_B \sin 60 + 300 f_B \cos 60 - 250 \times 330 = 0$

عکس العمل در B : $\sum M_B = 0 \longrightarrow +300 f_{xA} - 500 f_{yA} + 250 \times 330 = 0$

۴-۳۲ ص ۱۵۷ ترجمه ی استاتیک

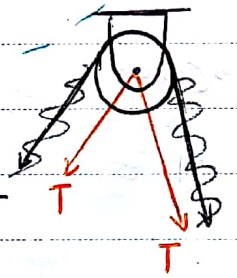
کشش طناب در دو طرف قلاب یکسان می باشد



اگر مفصلی بگیریم ۳ مجهول میشود. پس نمی توانیم

قانون قرقره : نیروهای وارد بر قرقره را می توان با حفظ جهت و خط اثر به مرکز قرقره منتقل کرد

شرط : اگر اصطکاک وجود نداشته باشد



نکته : اگر بخواهیم بر اثر یک نقطه تعادل بررسی کنیم دو معادله و دو مجهول خواهیم داشت چون نقطه گسترده ندارد.

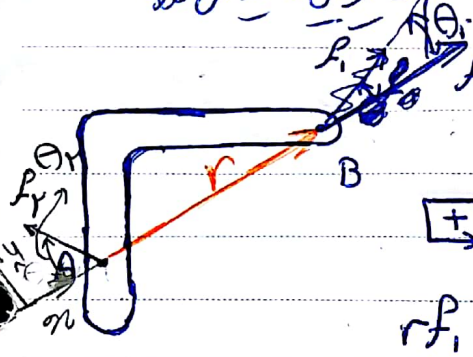
اجسام دو نیرویی و سه نیرویی : کمک به حل مسائل غیر قابل حل (مانند مسئله ۳ معادله و ۴ مجهول) در استاتیک جسم یک نیرویی نداریم.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

ب) هرگاه دو جسم سوراخ شده توسط یک پین وصل شده تکیه گاه مفصلی است اما اگر به هم جوش بخورند تکیه گاه گیردار است.

منظور از جسم دو نیرویی این است که فقط از لحاظ جسم هایی که دیدیم که در انتهای نیروهای آن برآیند گرفته ایم و در آخر فقط از لحاظ جسم دارای فقط دو نیرو باشد بدون حتی یک کوپل، آن جسم دو نیرویی نامیده می شود.



$$\boxplus \sum M_A = 0 \qquad r \times f_1 = 0$$

$$r f_1 \sin\theta_1 = 0 \longrightarrow \sin\theta_1 = 0 \longrightarrow \theta_1 = 0$$

$$r \neq 0 \quad f \neq 0$$

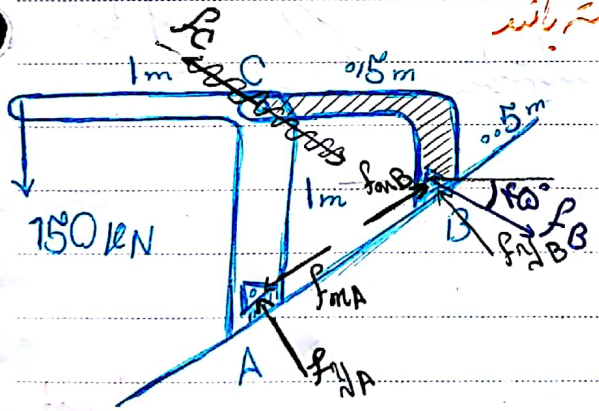
f_1 و f_2 دو نیرو هم‌گذر با $f_1 - f_2 = 0$ و هم‌اندازه هستند

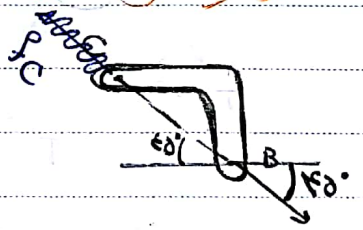
$\theta_2 = \theta_1 = 0$

(۲) $\nearrow^{+} \sum f_{x'} = 0 \longrightarrow f_1 = f_2 \qquad f_1 \cos\theta_1 = f_2 \cos\theta_2 \longrightarrow f_1 = f_2$

(۳) $\nwarrow^{+} \sum f_y = 0 \longrightarrow f_2 \sin\theta_2 = 0 \longrightarrow \theta_2 = 0$

اگر:
- جسمی ۲ تکیه گاه داشته باشد بدون نیروی خارجی
- جسمی ۲ نیروی خارجی داشته باشد بدون تکیه گاه و
- جسمی یک تکیه گاه و یک نیروی خارجی داشته باشد





۴ مجهول
۳ معادله
} نامعین است

نیاز به جسم ۲ نیرویی

f_C توسط نیروی داخلی که جسم بزرگتر به آن وارد می کند حذف می شود

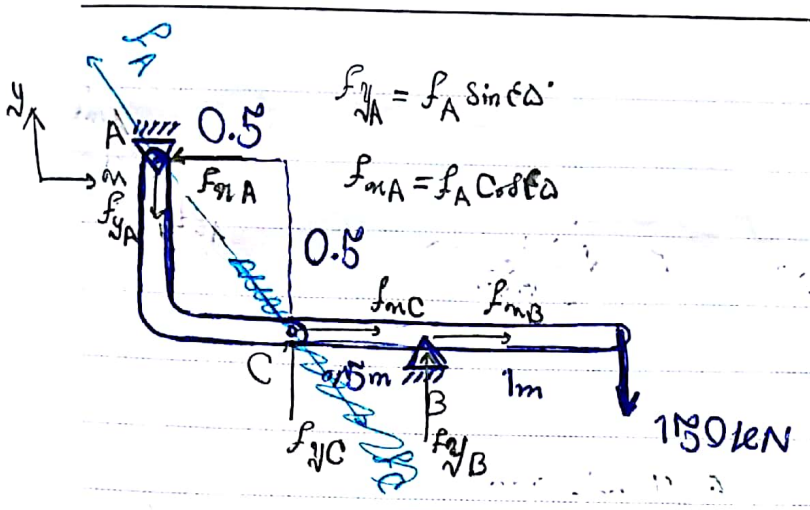
f_B هم عکس العمل وارد شده از تکیه گاه وارد می شود یعنی تکیه گاه B که حذف شده است پس f_B

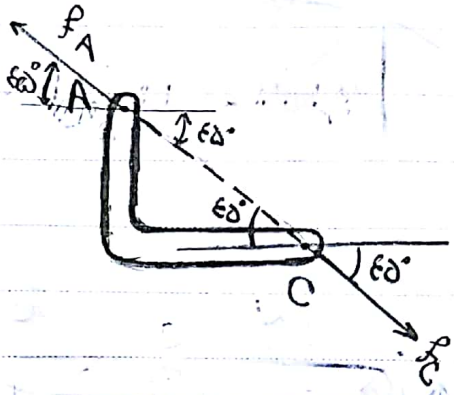
PARCO

Scanned by CamScanner

تکیه: سطح دارای اصطکاک تکیه‌گاه مفصلی است.

از بین می‌رود.





f_C می‌خواهد جسم اصلی را بچرخاند اما جسم کل تمایل به ثابت ماندن شرایط داده پس نیروی f_C خلاف جهت و هم اندازه با آن وارد می‌کند و آنرا حذف می‌کند.

حال: $\sum M_A = 0$

$\rightarrow \sum f_{mA} = 0$

$+\uparrow \sum f_{yA} = 0$



تکیه: ماژیک

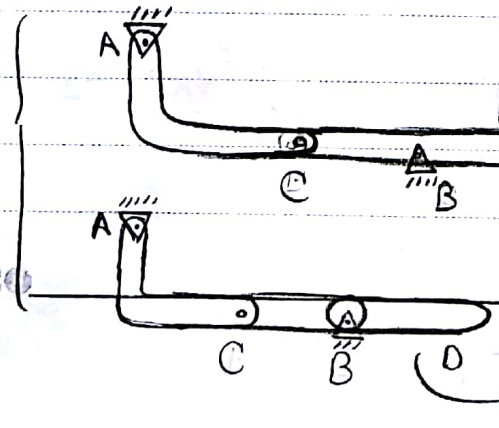
لگد: دست خود را به

قسمت تیر ماژیک یا تراشش گیردار تکیه‌گاه مفصلی است زیرا کوپل را تحمل می‌کند اما اگر جسم از C قیچی شود C تکیه‌گاه ثابت می‌شود

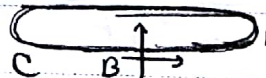
(B)

(A)

اگر جسم M و f را نتواند تحمل کند و جسم خارجی داده اما اگر نتواند تحمل کند (همچون تکیه‌گاه مفصلی) در محاسبات حذف می‌شود و جسم خارجی نخواهد داشت.

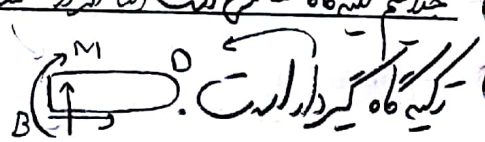


تکیه‌گاه مفصلی است



اگر جسم مثال بالای صفحه را از قسمت C جدا کنم تکیه‌گاه مفصلی است اما اگر از قسمت B جدا کنم

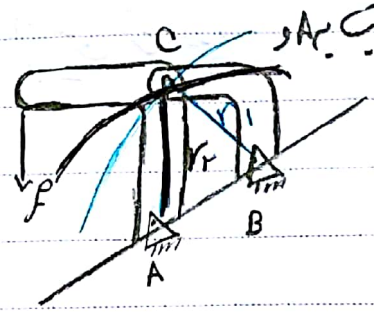
تکیه‌گاه گیردار

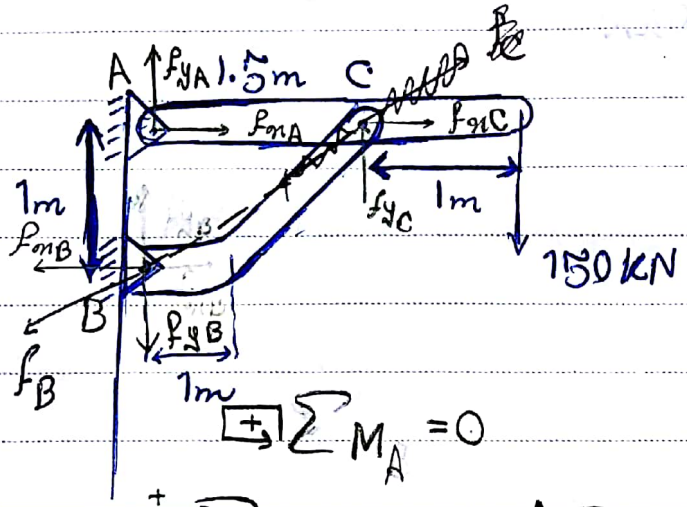


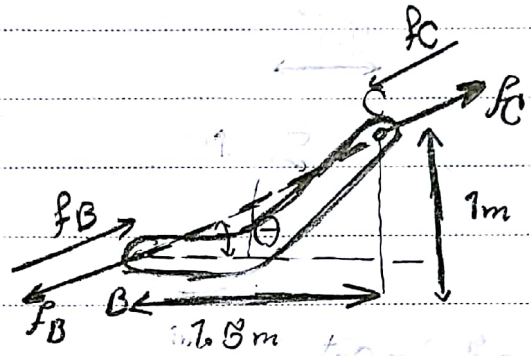
تکیه‌گاه گیردار است.

Scanned by CamScanner

نکته: کل جسم برای اینکه سُر نخورد نیروی f_x به سمت پایین شیب نمی‌رود زیرا پین در C باید هم نیت به A و هم نیت به B بچرخد یعنی چرخش یا دو شعاع متقاطع (غیرممکن)







$$\overset{+}{\rightarrow}\sum f_{xA}=0 \qquad +\uparrow\sum f_{yA}=0 \qquad \boxed{+}\sum M_A=0$$

$$\tan\theta=\frac{1}{\frac{3}{2}}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=33.7^\circ$$

$$f_{xB}=f_B\cdot\cos(33.7^\circ)$$

$$f_{yB}=f_B\sin(33.7)$$

$$\sum M_A=0 \longrightarrow -f_B\cos(33.7^\circ)\times(1)-150\cdot 2.5=0$$

$$f_B=\ominus\frac{150\cdot 2.5}{\cos(33.7^\circ)}$$

علامت f_B گفت عوضش می‌کنیم

$$\sum f_x=0\rightarrow f_{xA}+f_B\cos 33.7^\circ=0 \qquad f_{xA}=-f_B\cos 33.7^\circ=\oplus 150\times 2.5$$

f_{xA} جهت درست است ←

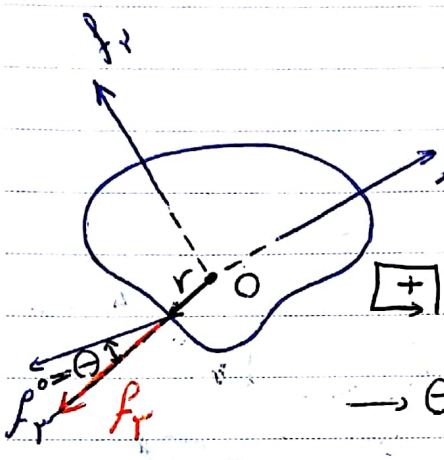
$$\sum f_{yA}=0\longrightarrow f_{yA}-f_{yB}-150\,KN=0 \qquad f_{yA}=f_{yB}+150\,KN$$

$$\Rightarrow f_{yA}=-\frac{150\cdot 2.5}{\sin 33.7}+150\,KN$$

Scanned by CamScanner

سه نیروی

⊙ اگر سه نیرو متوازن باشند کار بعدی باید برای آن توانند معادله اضافه کنند.

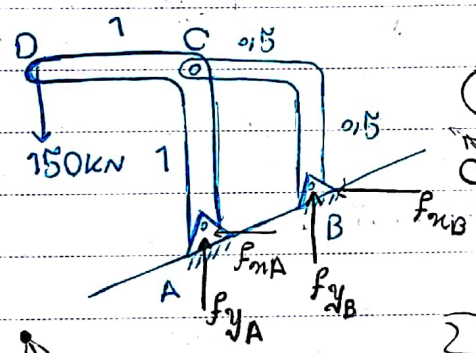


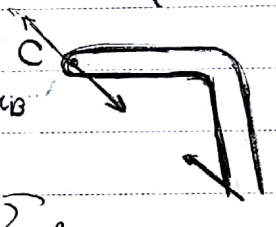
فرض کنیم دو نیرو در یک نقطه متقاطع اند.

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_O = 0 \longrightarrow r \times f_3 = 0 \quad |r||f_3|\sin\theta = 0$$

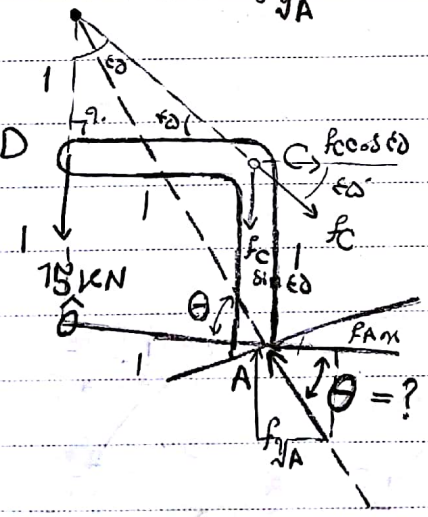
$$\longrightarrow \theta = 0$$

این جسم هم با قوانین دو نیرو یی قابل بررسی است و هم سه نیرو یی





دو نیرو یی



$$\sum f_x = 0 \qquad \sum M = 0 \quad \text{حول A معادله ۳ مجهول} \quad \times$$

$$\sum f_y = 0$$

$$tg\,\theta = \frac{2}{1} \qquad \theta = tg^{-1}(2) = 63.4^\circ$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_A = 0 \longrightarrow -f_C \cos 45^\circ (1) + 150kN(1) = 0$$

$$\sum f_x = 0 \qquad f_C \cos 45 - f_A \cos(63.4^\circ) = 0$$

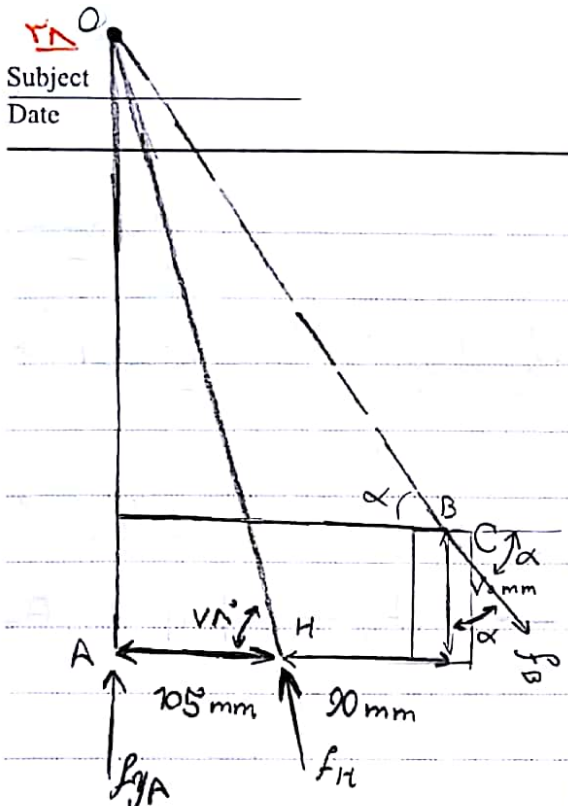
$$\sum f_y = 0 \qquad -f_C \sin 45 + f_{yA} \sin(63.4^\circ) - 150kN = 0$$

سوال ۲-۷۷ برجه ی انتقادی :

Scanned by CamScanner

Subject

Date



$\tan 75^\circ = \frac{OA}{105\,mm}$

$OA = 105 \tan 75^\circ$

$\tan\alpha = \frac{OA - 70mm}{(105 + 70)\,mm}$

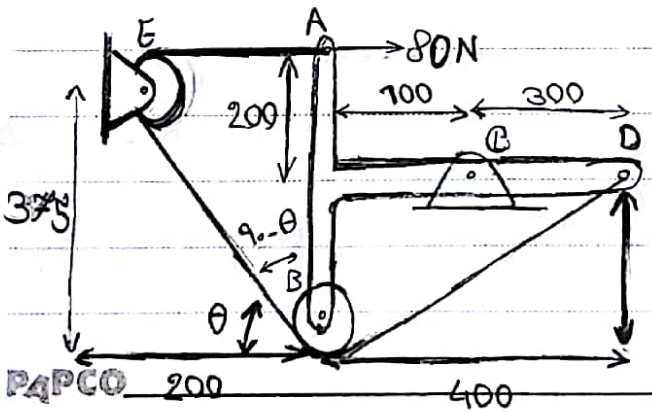
$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad +f_{Hy} \cdot 105mm - f_{Cy}(105 + 90)mm - f_{xB}(70)mm = 0$

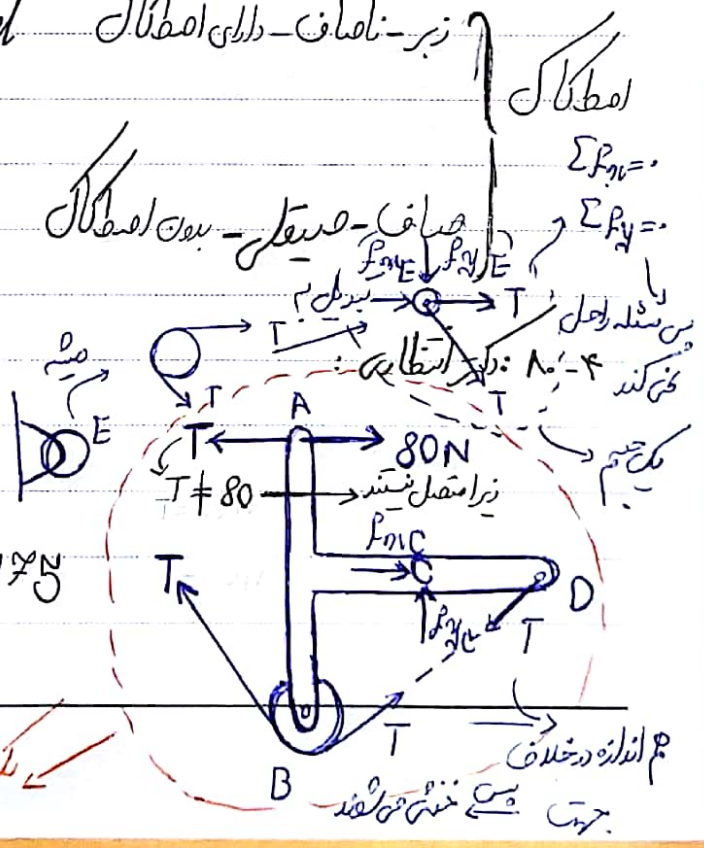
$\rightarrow + \sum f_x = 0 \quad f_B \cos\alpha - f_H \cos(75^\circ) = 0$

$+\uparrow \sum f_y = 0 \quad f_{y_A} + f_H \sin(75^\circ) - f_B \sin\alpha = 0$

Textured ← بافت‌دار — زبر — ناصاف — دارای اصطکاک

Smooth ← لغزان — بدون اصطکاک — صیقلی — صاف — صیقلی

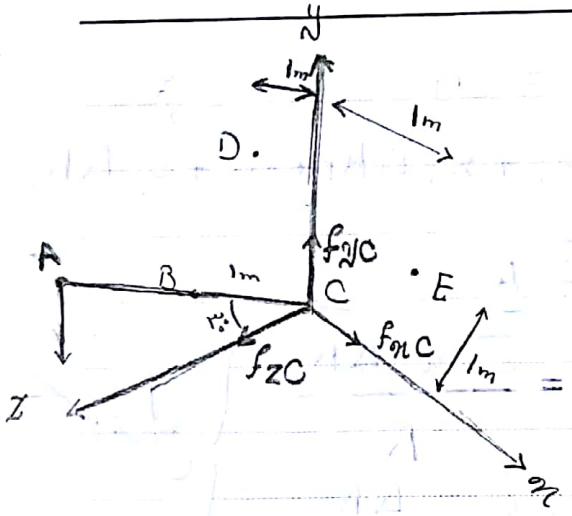




Scanned by CamScanner

Subject

Date



س ۴-۱۱۴ : ترجمه دکتر انتظاری :

E	1	B	0
	1		BC sin 30°
	0		BC cos 30°
D	-1		
	+1		
	0		

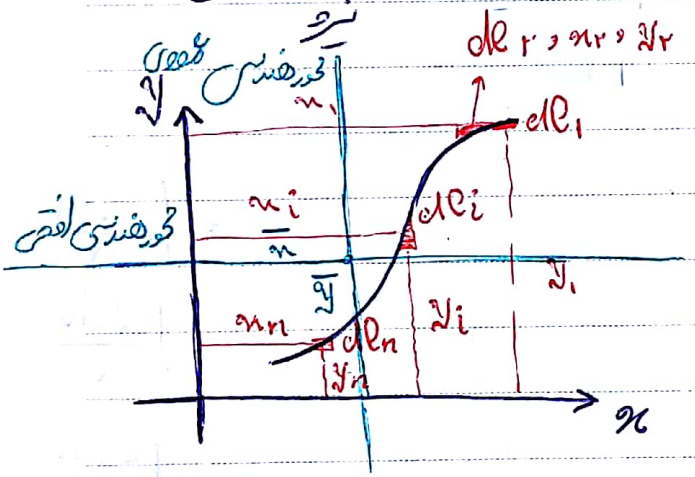
$$T_{BE} = T\lambda_{BE} = T_{BE}\frac{\overline{BE}}{BE}$$

$$T_{BD} = T\lambda_{BD} = T_{BD}\frac{\overline{BD}}{BD}$$

۵ مجهول : T_{BE} ، T_{BD} ، f_{ZC} ، f_{yC} ، f_{xC}

فصل ۵ : نیروهای گسترده / نیروی گسترده

نیروی خارجی گسترده حجم حلب : نیروهایی هستند که نقطه اثر مشخصی ندارند و در یک سطح گسترش پیدا کرده است.



مرکز خط ـ سطح ـ حجم

گشتاور خط ـ سطح ـ حجم

$$x_1 dl_1 + x_2 dl_2 + \cdots + x_n dl_n = m = L \cdot \bar{x}$$

مرکز خط

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i dl_i}{L} = \int \frac{x\,dl}{l}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i dl_i}{L} = \int \frac{y\,dl}{l}$$

گشتاور نیرو با محور نیرو $M = f \times \Delta x$

نکته : گشتاور هر خط حول محورهای هندسی مخصوص صفر است.

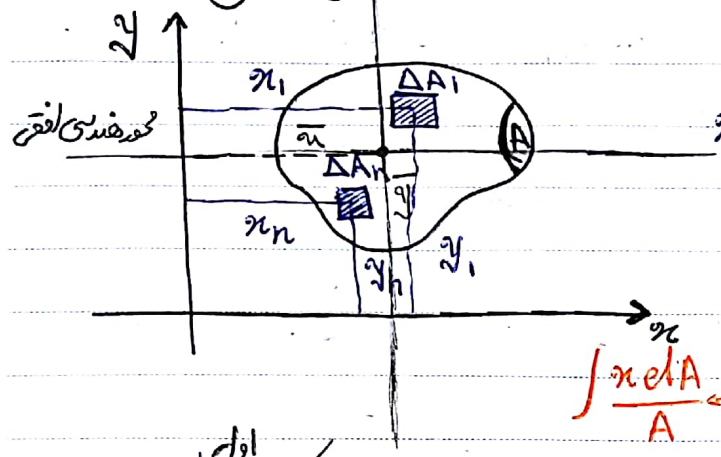
گشتاور خطی نسبت به محور yها $P_y = \bar{x} \cdot L$

گشتاور خطی نسبت به محورها $P_x = \bar{y} \cdot L$

Scanned by CamScanner

۴۰
Subject
Date

گشتاور سطح



محور هندسی

محور هندسی افقی

$$x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \cdots + x_n \Delta A_n = \bar{x} \cdot A$$

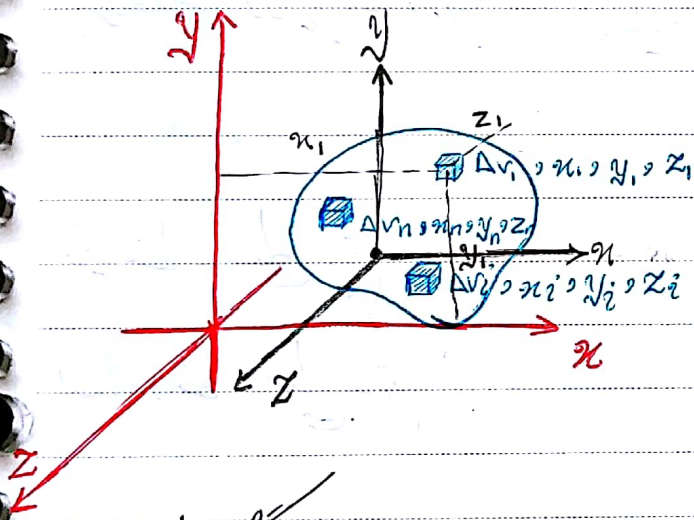
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \Delta A_i}{A} = \frac{\int x \, dA}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \Delta A_i}{A} = \frac{\int y \, dA}{A}$$

} مرکز سطح

گشتاور اول سطح نسبت به محور yها: $Q_y = \bar{x} \cdot A$

گشتاور اول سطح نسبت به محور xها: $Q_x = \bar{y} \cdot A$



$$x_1 \Delta v_1 + x_2 \Delta v_2 + \cdots + x_n \Delta v_n = \bar{x} \cdot v$$

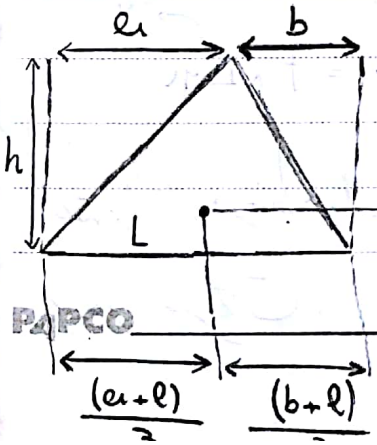
مرکز ثقل

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \Delta v_i}{v} = \frac{\int x \, dv}{v}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \Delta v_i}{v} = \frac{\int y \, dv}{v}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i \Delta v_i}{v} = \frac{\int z \, dv}{v}$$

گشتاورهای حجمی: $S_{zy} = \bar{x} v$ ، $S_{xz} = \bar{y} \cdot v$ ، $S_{xy} = \bar{z} \cdot v$



$$\bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{(a+e)}{3} \, , \, \frac{(b+e)}{3}$$

PARCO

Scanned by CamScanner

۴۱

Subject

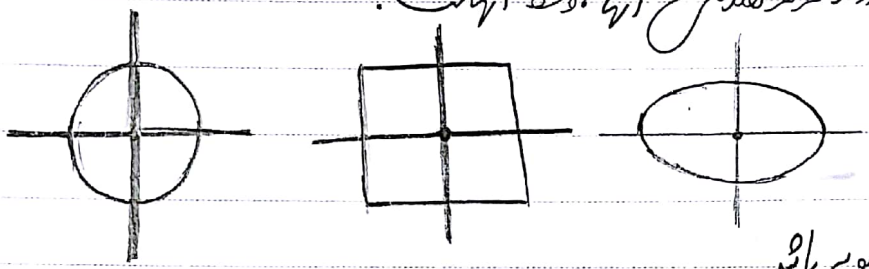
Date

مرکز هندسی برای کل یک جسم که خود حاصل چند جسم است

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{A}$$

نکته: اجسامی که تقارن دارند مرکز هندسی آنها، وسط آن است.

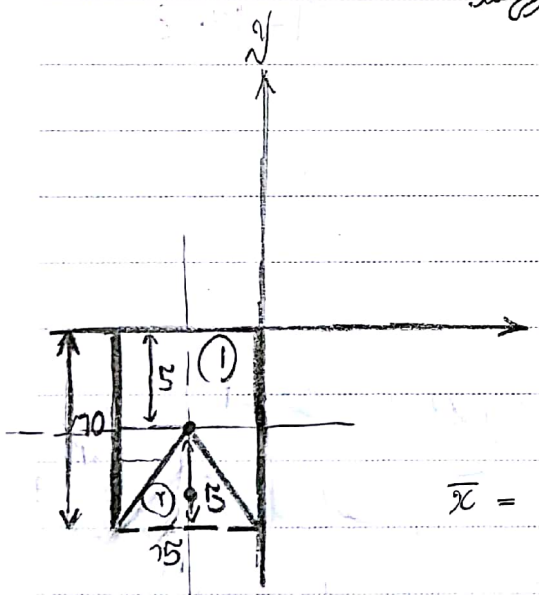


نکته:

مساحت > 0 ← جسم توپر باشد

مساحت < 0 ← جسم توخالی باشد

مرکز هندسی همواره ثابت است و فقط $\bar{x}$ و $\bar{y}$ با جابجا کردن محورها تغییر می‌کنند.



$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2}$$

$$A_1 = 10 \times 15 \qquad A_2 = -\frac{1}{2} \times 5 \times 15$$

$$x_1 = -\frac{15}{2} \qquad x_2 = -\frac{15}{2}$$

$$y_2 = -5 - \frac{10}{3} = -\frac{25}{3} \qquad y_1 = -5$$

$$\bar{x} = \frac{10 \times 15 \times -\frac{15}{2} + \left(-\frac{1}{2} \times 5 \times 15\right)\left(-\frac{15}{2}\right)}{10 \times 15 + \left(-\frac{75}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{15}{2}(150) + \left(\frac{15}{2}\right)\left(\frac{15}{2} \times 5\right)}{\frac{300}{2} - \frac{75}{2}} = \frac{\frac{15}{2}\left(-150 + \frac{75}{2} \times 5\right)}{\frac{225}{2}} = \frac{\frac{15}{2}\left(\frac{-300+75}{2}\right)}{\frac{225}{2}}$$

$$= -\frac{15}{2} = -7.5$$

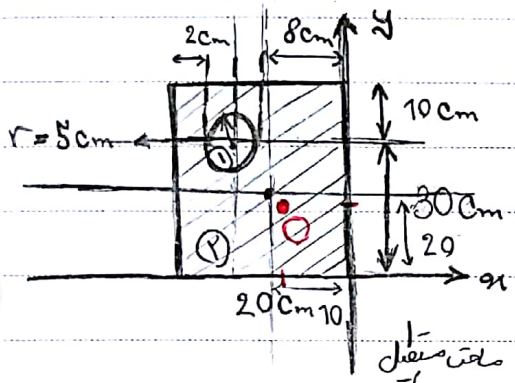
PAPCO

Scanned by CamScanner

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{-5 \times (10 \times 15) + \left(-\frac{25}{3}\right)\left(\frac{\pi 5}{2}\right)}{150 - \frac{\pi 5}{2}} = \frac{-\pi 50 + 212}{\frac{225}{2}}$$

$$= \frac{-438 \times 2}{225} = -3,89$$

مثال:



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \Delta A_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \Delta A_i}{\sum A_i}$$

$\sum A_i = A_1 + A_2$

مساحت مستطیل: $A_2 = 20cm \times 20cm = 800 cm^2$

مساحت دایره: $A_1 = \pi r^2 = 25\pi cm^2 = 25 \times 3,14 = 78,5 cm^2$

مختصات دایره: $x_1 = -13cm$, $y_1 = 30cm$

مختصات مرکز سطح مستطیل: $x_2 = -10cm$, $y_2 = 20cm$

$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{-13 \times (-78,5) + (-10)(800)}{-78,5 + 800} = \frac{1020,5 - 8000}{721,5} = -9,81$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{30 \times (-78,5) + 20 \times 800}{721,5} = \frac{-2355 + 16000}{721,5} = \frac{13645}{721,5}$$

$= 19,18 cm$

O | -9.81
+19,18

چند نکته

۱- سطوحی که دارای مرکز تقارن هستند، مرکز هندسی آنها روی محور تقارن است

۲- اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد، مرکز هندسی روی آن محور است.

۳- اگر سطحی دارای دو محور تقارن باشد، مرکز هندسی لاجرم باید روی هر دو باشد، بنابراین راه حل تلاقی آنهاست

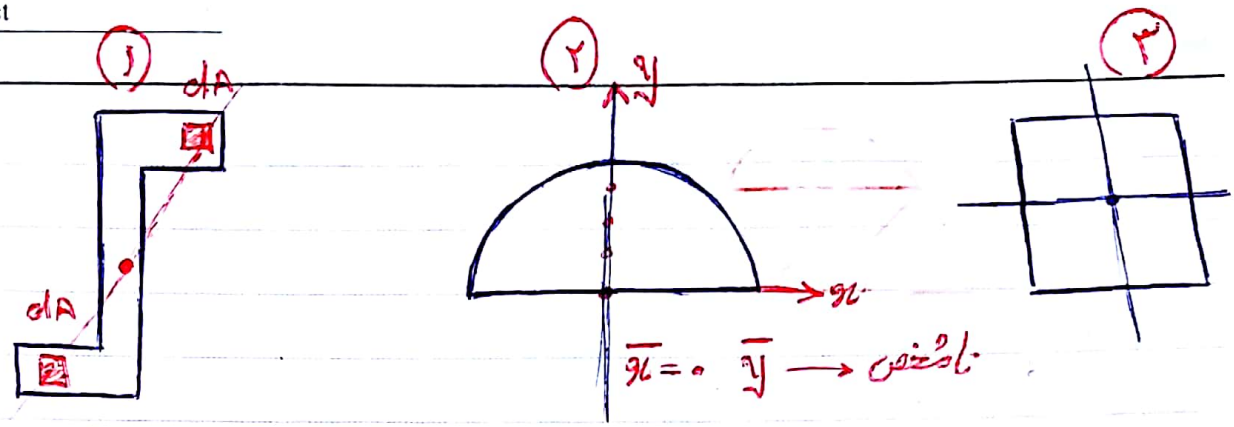
PaPCO

Scanned by CamScanner

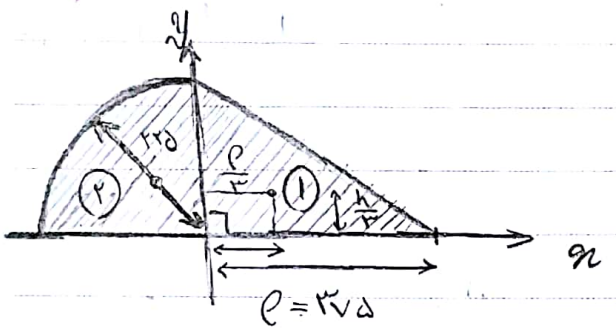
۴۲

Subject

Date



مسئله ۵-۵ : ترجمه دکتر انتظار ل :



(۱) : $b=0$ $\quad x_1=\frac{\rho}{2}=\frac{225}{2}=112.5$

$y_1=\frac{h}{3}=\frac{225}{3}=75$

$A_1=\frac{1}{2}\times 225\times 225=42200$

(۲) : $\quad x_2=-\frac{4r}{3\pi}=-\frac{4\times 225}{3\times 3.14}=-95.15$

$y_2=+\frac{4r}{3\pi}=+\frac{4\times 225}{3\times 3.14}=+95.15$

$A_2=\frac{\pi r^2}{4}=\frac{3.14\times 225\times 225}{4}=39700$

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}=\frac{x_1A_1+x_2A_2}{A_1+A_2}=\frac{112.5\times 42200+(-95.15)(39700)}{42200+39700}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}=\frac{y_1A_1+y_2A_2}{A_1+A_2}=\frac{75\times 42200+(95.15)(39700)}{42200+39700}$$

$$\bar{x}=\frac{4750000-3781250}{81900}=\frac{1468750}{81900}=18.12$$

$$\bar{y}=\frac{3165000+3781250}{81900}=\frac{6946250}{81900}=84.9$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

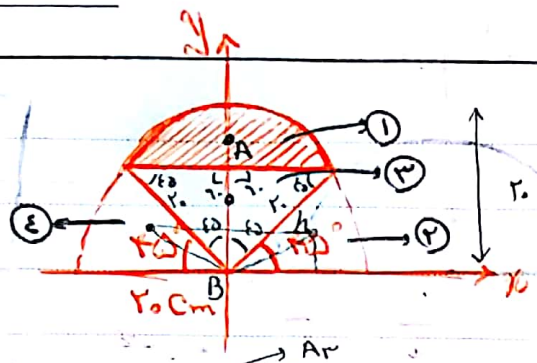
Subject

Date

$y_{c_1} = 0 \quad \bar{y}_1 = r_0 - AB = r_0 - 16{,}16 = 3{,}84$

$y_{c_2} = 0 \quad \bar{y}_2 = h_1 - \frac{h}{3} = \frac{3h}{8} = \frac{3 \times 16{,}16}{8} = \frac{48{,}48}{8} = 9{,}42$

مثال



$\bar{x} = ?$

$\bar{y} = ?$

$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}\,Rad$

$S_{مثلث} = \frac{1}{2} \times r_0 \times r_0 = 200 \rightarrow A_1$

$S_{قطاع} = \frac{1}{2} \alpha r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \times 20^2 = \frac{400\pi}{8} = 50\pi \rightarrow A_2, A_3, A_4$

$\sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_1 + 2A_2 + A_3$

$A_1 = S_{ربع\,دايره} - S_{مثلث} = \frac{1}{4}\pi r^2 - (2A_2 + A_3) = 100\pi - (100\pi + 200) = 100\pi - 200$

$= 314 - 200 = 114 \qquad \sum A_i = 114 - 314 - 200 = -400$

$AB: \quad \sin 45 = \frac{AB}{20} \quad AB = 10\sqrt{2} = 10 \times 1{,}414 = 14{,}14$

(۲)
$x_2 = \frac{2r \sin\alpha}{3\alpha} \times \cos\alpha$

$y_2 = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha} \sin\alpha$

$x_2 = \frac{2 \times 20 \times \sin\frac{\pi}{8}}{\frac{3\pi}{8}} \cos\frac{\pi}{8} = \frac{320}{3 \times 3{,}14} \times 0{,}382 \times 0{,}924 = 11{,}99$

$y_2 = \frac{40 \sin\frac{\pi}{8}}{\frac{3\pi}{8}} \sin\frac{\pi}{8} = \frac{320}{9{,}42} \times (0{,}382)^2 = 4{,}95$

(۴)
$x_4 = -11{,}99$

$y_4 = 4{,}95$

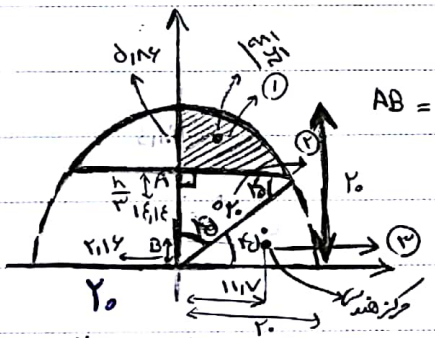
$\bar{x} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4}{\sum A_i} = 0 - 11 \qquad \bar{y} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3 + y_4A_4}{\sum A_i} = \frac{478 - 1057 + 1885}{-400}$

$= -2{,}42$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = -2{,}66$

مثال



$AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 20 = 14{,}14$

A_1: قطاع S − مثلث S

$S_{قطاع} = \frac{1}{2} \alpha r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \times 400 = 50\pi = 50 \times 3{,}14 =$

$50 \times 3{,}14 = 157 \qquad S_{مثلث} = \frac{1}{2} \times 14{,}14 \times 14{,}14 = 100$

$A_1 = 314 - 100 - 157 = 314 - 257 = 57$

$S_{ربع\,دايره} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{400 \times 3{,}14}{4} = 314$

$\sum A_i = 57 - 100 - 157 = -200$

(۳)
$x_3 = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha} \cos\alpha = 11{,}99 \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$

$y_3 = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha} \sin\alpha = 4{,}95$

(۱)
$x_1 = 14{,}14 - \frac{\rho}{3} = 14{,}14 - \frac{14{,}14}{3} = 9{,}42 \qquad \rho = 14{,}14$

$y_1 = 14{,}14 - \frac{14{,}14}{3} = \frac{2(14{,}14) - 14{,}14}{3} = \frac{2 \times 14{,}14}{3} = \frac{28{,}28}{3} = 9{,}42$

$\frac{h}{3} = \frac{14{,}14}{3}$

$h = \rho = 14{,}14$

PqPCO

Scanned by CamScanner

۴۵

Subject

Date

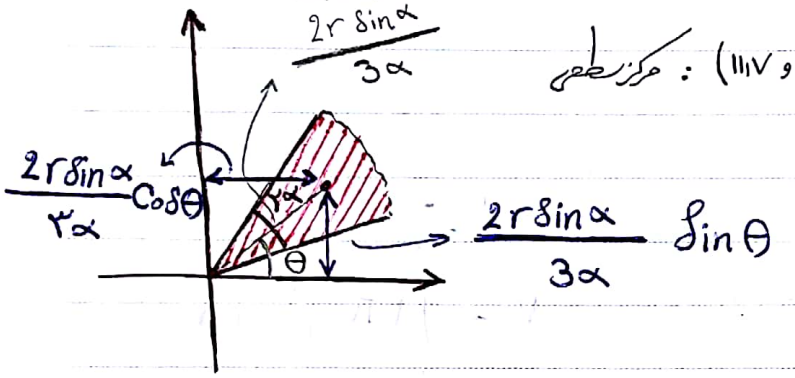
① $\begin{cases} x_1 = \frac{۴r}{۳\pi} = \frac{۸۰}{۹,۴۲} = ۸,۴۹ \\ y_1 = \frac{۴r}{۳\pi} + AB = \frac{۸۰}{۹,۴۲} + ۱۴,۱۴ = ۸,۴۹ + ۱۴,۱۴ = ۲۲,۶۳ \end{cases}$

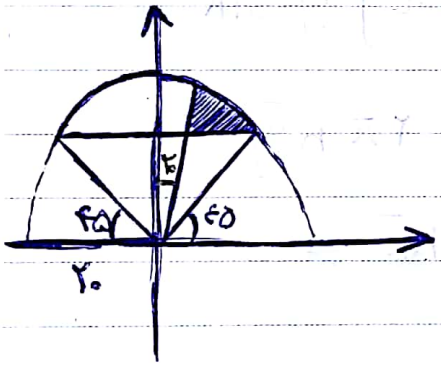
$$\overline{xc} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3}{\sum A_i} = \frac{(۸,۴۹)(۵۷) + (۹,۴۳)(-۱۰۰) + (۱۱,۹۹)(-۱۵۷)}{-۲۰۰} = \frac{-۲۲۴۰}{-۲۰۰}$$

$$= \frac{۲۲۴}{۲۰} = ۱۱,۲$$

$$\overline{y} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{\sum A_i} = \frac{(۲۳,۶۳)(۵۷) + (۹,۴۳)(-۱۰۰) + (۴,۹۶)(-۱۵۷)}{-۲۰۰} = \frac{-۴۳۶}{-۲۰۰} = ۲,۱۶$$

مرکز سطح : (۱۱,۲ و ۲,۱۶)



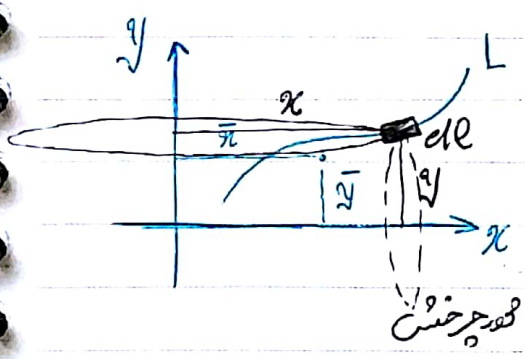


Scanned by CamScanner

Subject

Date

قضیهٔ پاپوس - گلدینوس :

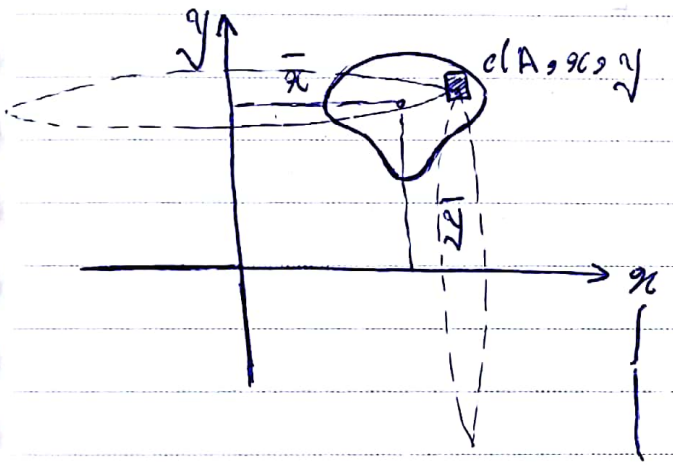


مساحت رویه : $\int 2\pi y \cdot dl = 2\pi \int y \cdot dl$

$\bar{y}$ محل تقریبی

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dl}{L} \quad \Rightarrow = 2\pi \bar{y} L = A_x$$

$$A_y = 2\pi \bar{x} L$$



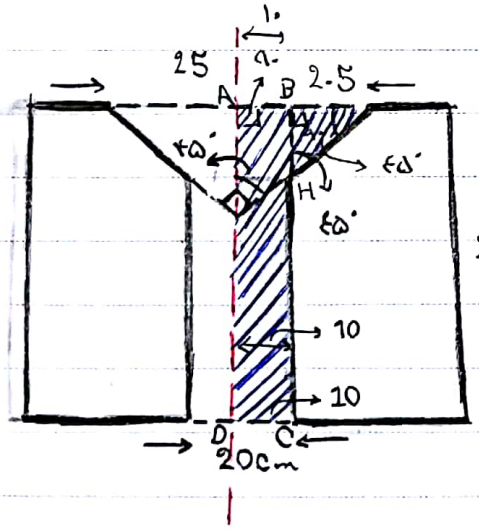
$$V = \int 2\pi y \cdot dA$$

$$= 2\pi \int y \cdot dA$$

$$V_x = 2\pi A \bar{y}$$

$$V_y = 2\pi A \bar{x}$$

مثال ۵-۳۵ : ترجمهٔ دکتر انتظار :



مستطیل ABCD

$$V = V_1 + V_2 = 2\pi \left[A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 \right]$$

$$= 2 \times 3.14 \left[10 \times 20 \times 5 + (0.5 \times (25)^2)\left(10 + \frac{2.5}{3}\right) \right]$$

$\frac{h}{3}$

$$= 6.28 \left[1000 + \left(\frac{1}{2} \times \frac{25}{4}\right)\left(\frac{32.5}{3}\right) \right]$$

$$= 6.28 \left[1000 + \frac{25}{8} \times \frac{32.5}{3} \right] = 6290$$

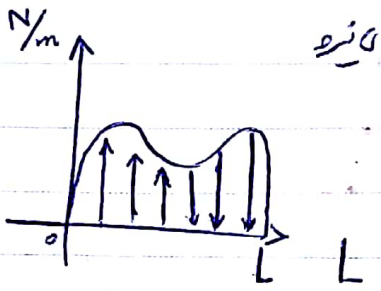
۳۳۱۹

PdPCO

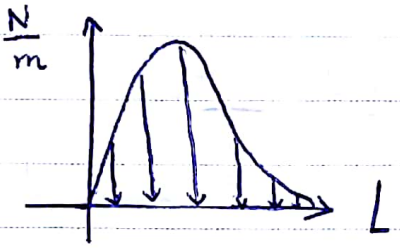
Scanned by CamScanner

تابع توزیع بار گسترده: $q(x)$ (KN/m)

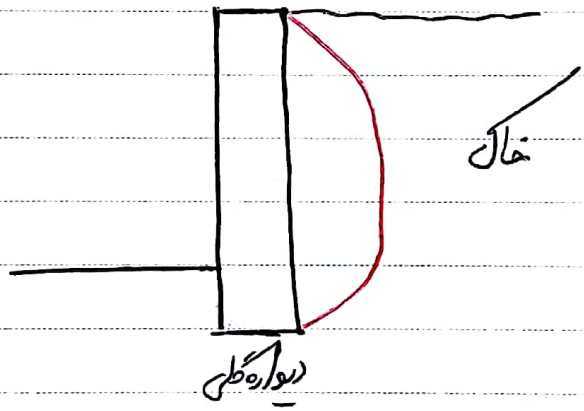




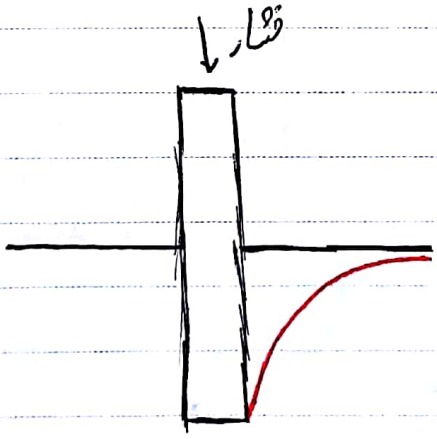
جهت های نیرو



دست و پا میزند ←



در گود برداری:



صلبه خود رفته در زمین

PqPCO

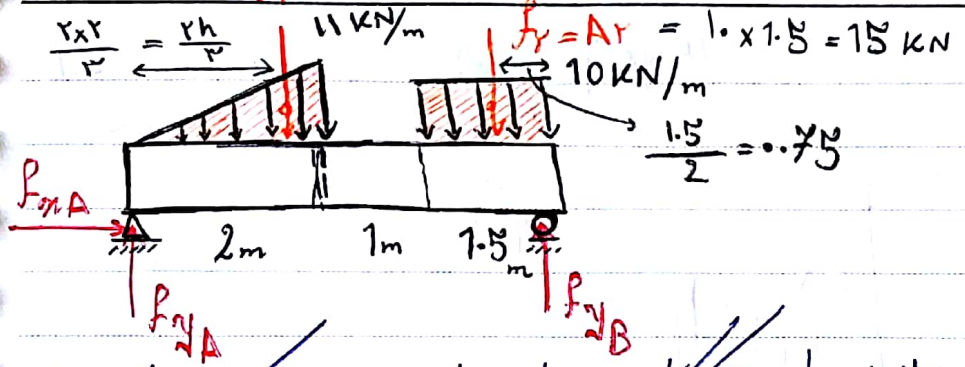
Scanned by CamScanner

Subject

Date

$f_1 = A_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 11 = 11\ kN$

تیر را حل کنید.



$f_2 = A_2 = 10 \times 1.5 = 15\ kN$

f_{xA}

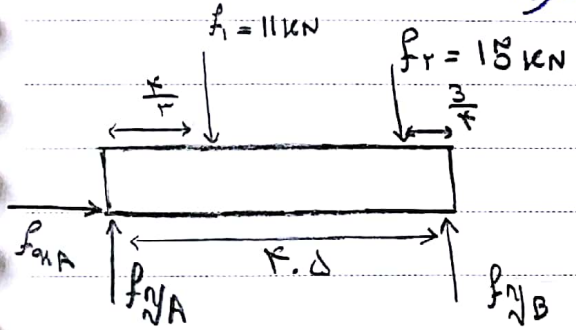
f_{yA}

f_{yB}

نکته: برای محاسبه‌ی عکس‌العمل‌ها اگر تکیه‌گاه‌ها یا نیروهای خارجی متمرکز مجهول می‌توان نیروها گسترده را با نیروهای متمرکز معادل جایگزین کرد.

= سطح زیر نمودار $q(x)$

نکته: f معادل در مرکز سطح جسم هندسی وابسته می‌شود

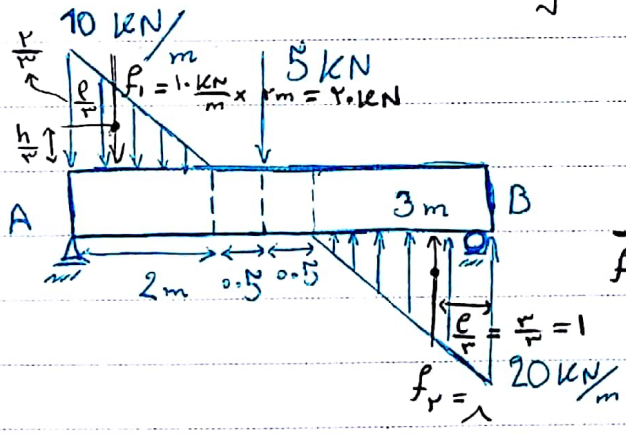


$\overset{+}{\square} \sum M_A = 0 \rightarrow -11 \times \frac{4}{2} - 15 \times 3.75$

$+ f_{yB} \times 4.5 = 0 \rightarrow f_{yB} = \frac{44}{2} + 15 \times 2.75 = \frac{16.7}{4.5} + \frac{54.3}{4.5} = 18.17$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum f_x = 0 \rightarrow f_{xA} = 0$

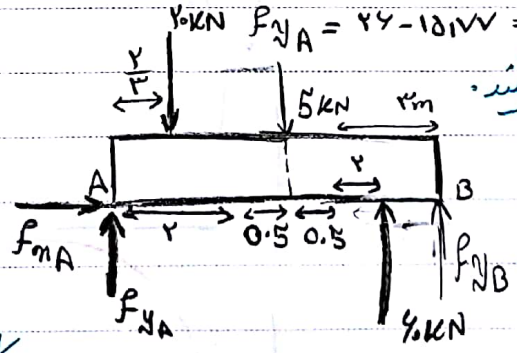
$+\uparrow \sum f_y = 0 \quad f_{yA} - 11\ kN - 15\ kN + f_{yB} = 0$ ($f_{yB} = 18.17$)



$20\ \frac{kN}{m} \times 3m = 60\ kN$

$f_{yA} = 44 - 18.17 = 10.23$

تیر را حل کنید.



Scanned by CamScanner

۴۹

Subject

Date

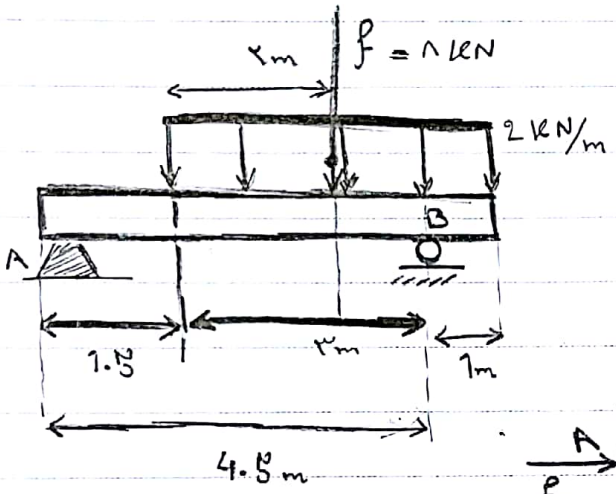
$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = 0 \quad -۲۰ \times \frac{۲}{۳} - ۵ \times \frac{۵}{2} + ۶۰ \times ۵ + f_{y_B} \times ۶ = 0$$

$$-\frac{۴۰}{۳} - \frac{۲۵}{۲} + ۳۰۰ + ۶ f_{y_B} = 0 \qquad -۱۳.۳۳ - ۱۲.۵ + ۳۰۰ = -۶ f_{y_B}$$

$$f_{y_B} = \frac{۲۷۴.۱۷}{-۶} = -۴۵.۶۹ = -۴۶ \text{ kN}$$

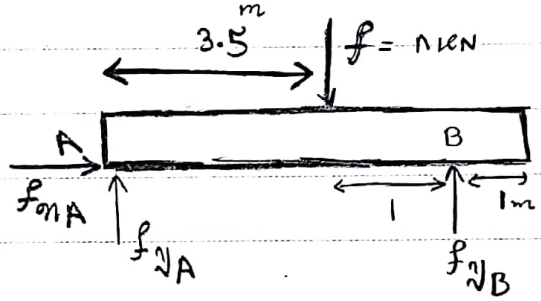
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum f_x = 0 \qquad f_{xA} = 0 \qquad +\uparrow \sum f_y = 0 \longrightarrow -۲۰ - ۵ + f_{y_A} + ۶۰ + f_{y_B} = 0$$

$$f_{y_A} = -۲۵ + ۴۶ = ۹ \text{ kN}$$



دیاگرام آزاد ←

$f = 2\frac{\text{kN}}{\text{m}} \times ۲\text{m} = ۸\text{kN}$ ↓



$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = 0 \longrightarrow -۸ \times \frac{۷}{2} + f_{y_B} \times \frac{۹}{۲} = 0 \qquad -۲۸ + \frac{۹}{۲} f_{y_B} = 0$$

$$f_{y_B} = \frac{۲۸}{۹/۲} = \frac{۵۶}{۹} = ۶.۲۲$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum f_x = 0$$

$$f_{xA} + 0 = 0 \qquad \boxed{f_{xA} = 0}$$

$$+\uparrow \sum f_y = 0$$

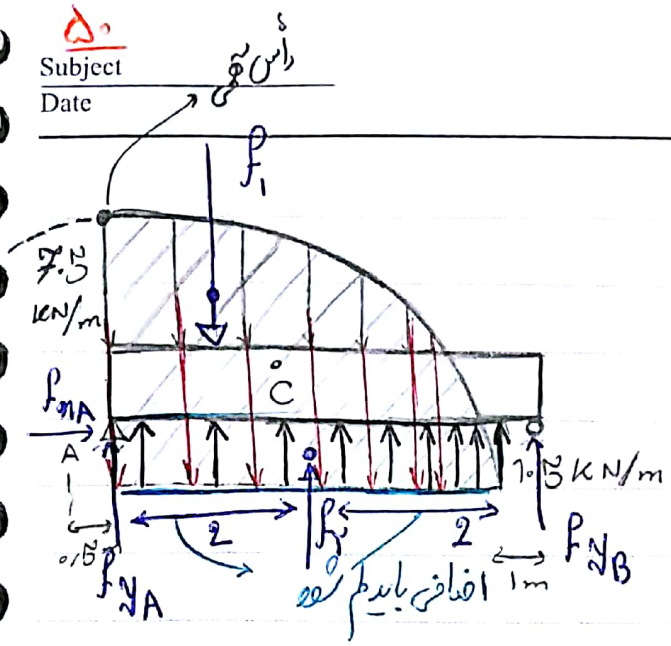
$$f_{y_A} - ۸\text{kN} + f_{y_B} = 0 \qquad f_{y_A} - ۸ + ۶.۲۲ = 0$$

$$\boxed{f_{y_A} = +۱.۷۸ \text{ kN}}$$

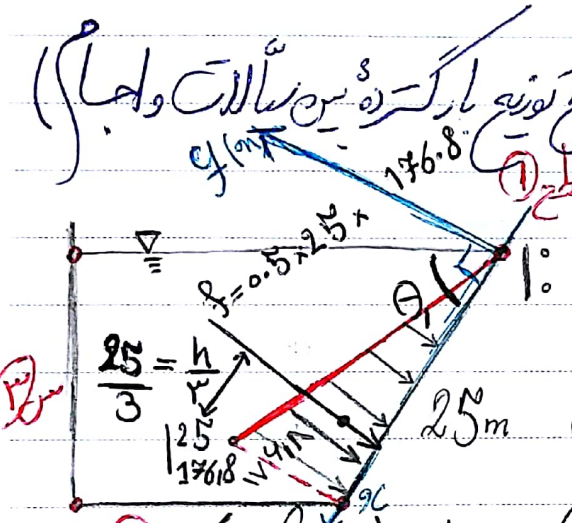
Scanned by CamScanner

Subject
Date

۵-۶۷ ترجمه دکتر انتظاری :



نیروهای متمرکز و استاتیکی : (بدست آوردن تابع توزیع بارگسترده بین سالات واجسام)



γ_f : وزن واحد حجم سیال : γ ($10\ kN/m^3$)

b_1 : ضخامت سطح مستوی که معمولاً ۱ m است

$$q_f(x) = \gamma b_1 \sin\theta_1 \cdot x + \gamma b h_1$$

* h_1 : ارتفاع سیال بین صفحه و نقطه مبدا مختصات

θ_1 : زاویه بین محور x ها و سطح سیال

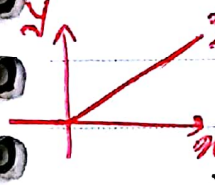
ⓐ سطح آب

ب) ضخامت سطح به سمت داخل صفحه است.

تعیین تابع توزیع بارگسترده سیالات استاتیکی بر دیواره های صاف (مستوی)

$$q_f(x) = 10 \times 1 \times \sin 45^\circ \cdot x + 10 \times 1 \times 5 = 5\sqrt{2}$$

$$q_1(x) = 7.07\,x$$



۱- سطح برخورد بین سطح و آب به عنوان مبدا مختصات در نظر گرفته می شود.

۲- محورها به سمت داخل آب در سطح تماس بین آب و سطح مستوی قرار می گیرد

۳- محور عمود بر آن $q_f(x)$ است به سمت آب.

PdPCO

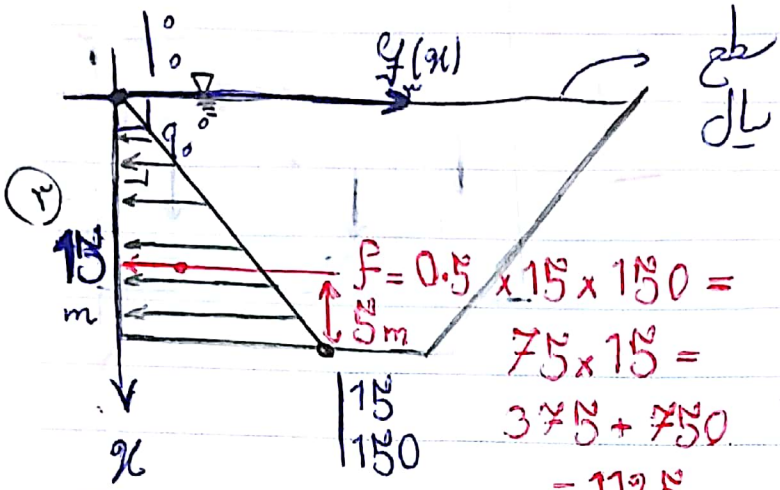
Scanned by CamScanner

۱۵

Subject:

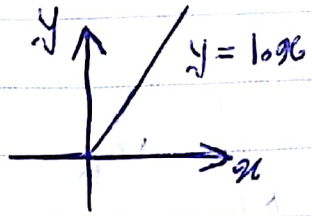
Date

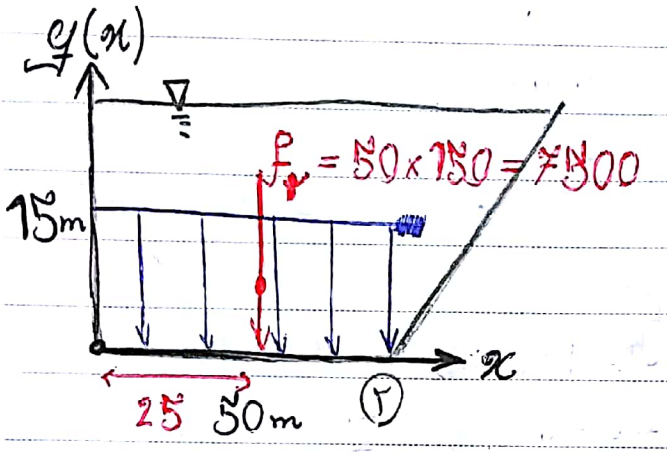
نکته: سیال نیروی کششی نمی‌تواند وارد کند و همواره فشاری است.



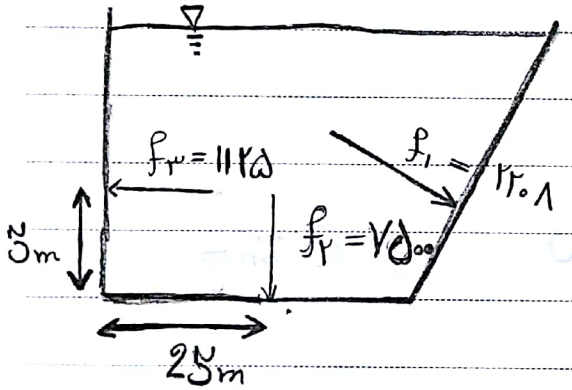
سطح سیال

$q_{f_3}(x) = 10 \times 1 \sin 90 x + 10 \times 1 \times 0 = 10x$





$q_{f_2}(x) = 10 \times 1 \sin 0.x + 10 \times 1 \times 15 = 150$



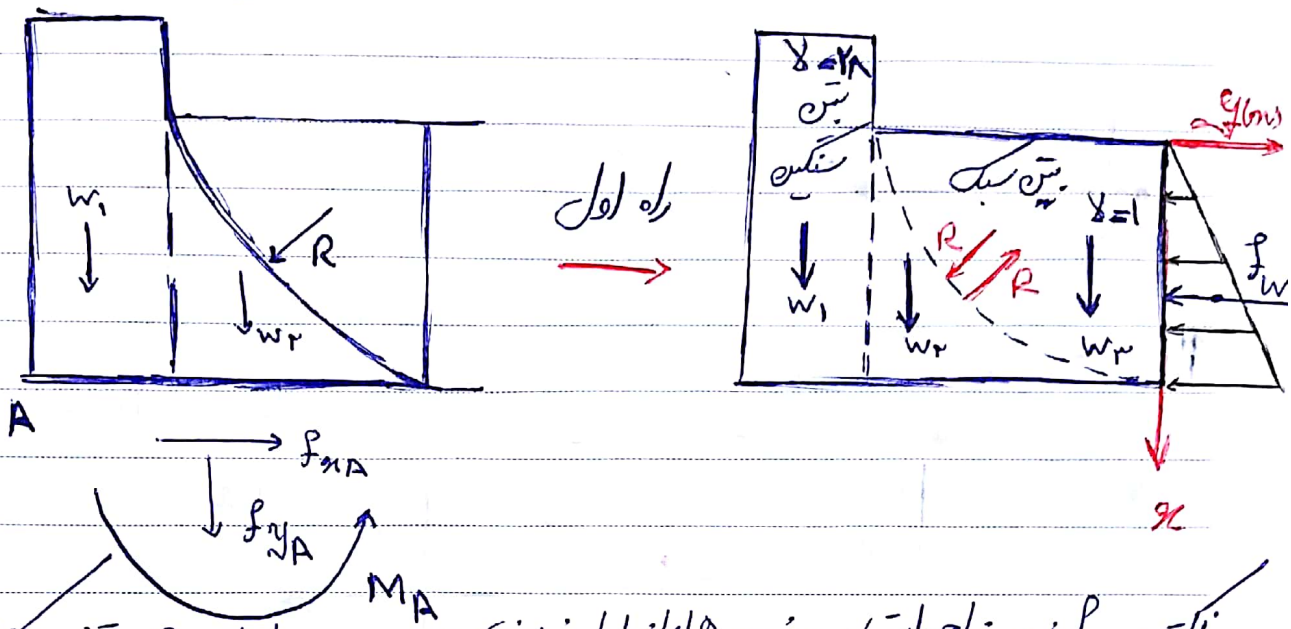
Scanned by CamScanner

۱۲

Subject:

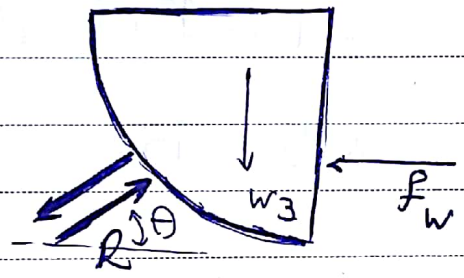
Date

⊗ سطح مستوی زبانه



نکته: f_w نیروی خارجی است پس نیروی هم اندازه اما در خلاف جهت نیروی داخلی R در بتن سبک تولید می کند.

راه دوم:



$$\vec{R} + \vec{W_3} + \vec{f_w} = \vec{\emptyset}$$

$$\vec{R} = -\vec{W_3} - \vec{f_w}$$

$$\sum f_x = 0 \longrightarrow R\cos\theta - f_w = 0 \qquad f_w = R\cos\theta$$

$$I: R = \frac{f_w}{\cos\theta}$$

$$\sum f_y = 0 \longrightarrow R\sin\theta - W_3 = 0 \qquad W_3 = R\sin\theta$$

$$II: R = \frac{W_3}{\sin\theta}$$

$$\xrightarrow{I,\ II} R = R \rightarrow \frac{f_w}{\cos\theta} = \frac{W_3}{\sin\theta}$$

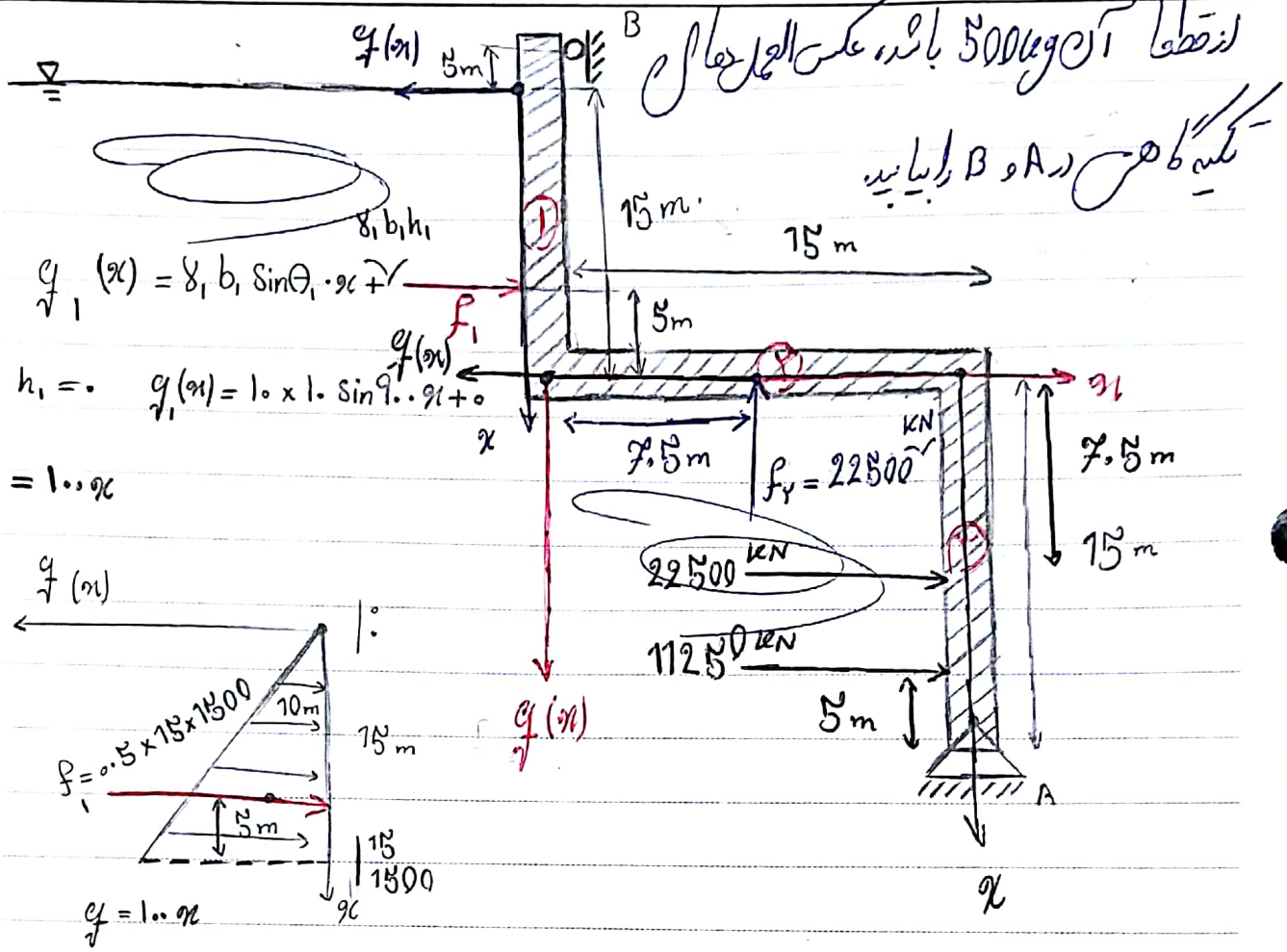
$$\longrightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{W_3}{f_w}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

۵۲

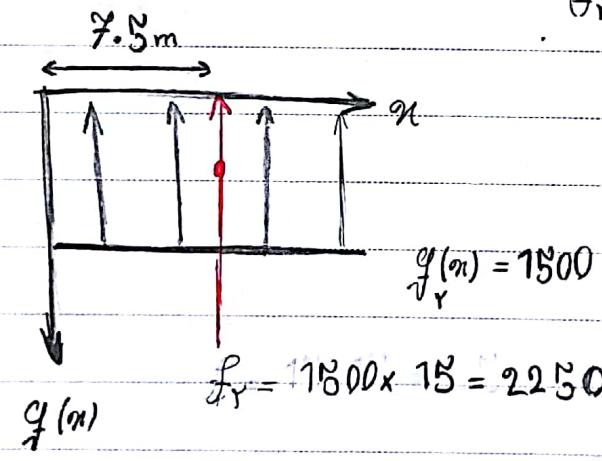
شکل زیر مقطع دیواره ریز سدکوچکی را نشان می دهد. اگر عرض این دیواره ۱ متر باشد و فشار آب در قسمت آن ۵۰۰ kg/m² باشد، عکس العمل های تکیه گاهی در A و B را بیابید.



$f_1 = 7.5 \times 15 = 750 + 375 = 11250 kN$

$q_{f_2}(x) = \gamma_2 b_2 \sin\theta_2 x + \gamma_2 b_2 h_2 = 10 \times 10 \times 0 \times x + 10 \times 10 \times 15 = 1500$

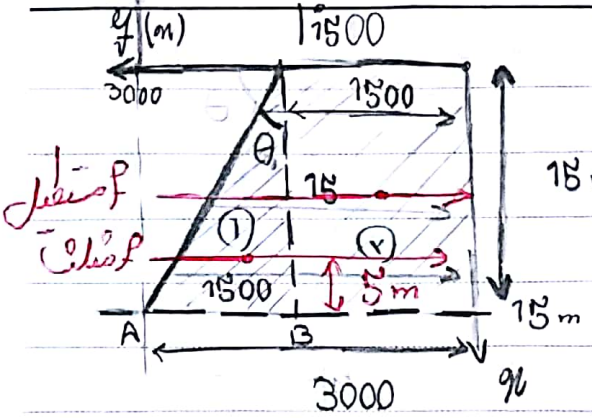
$\theta_2 = 0$



$q_{f_3}(x) = \gamma_3 b_3 \sin\theta_3 x + \gamma_3 b_3 h_3 = 100x + 1500$

P4PCO

Scanned by CamScanner

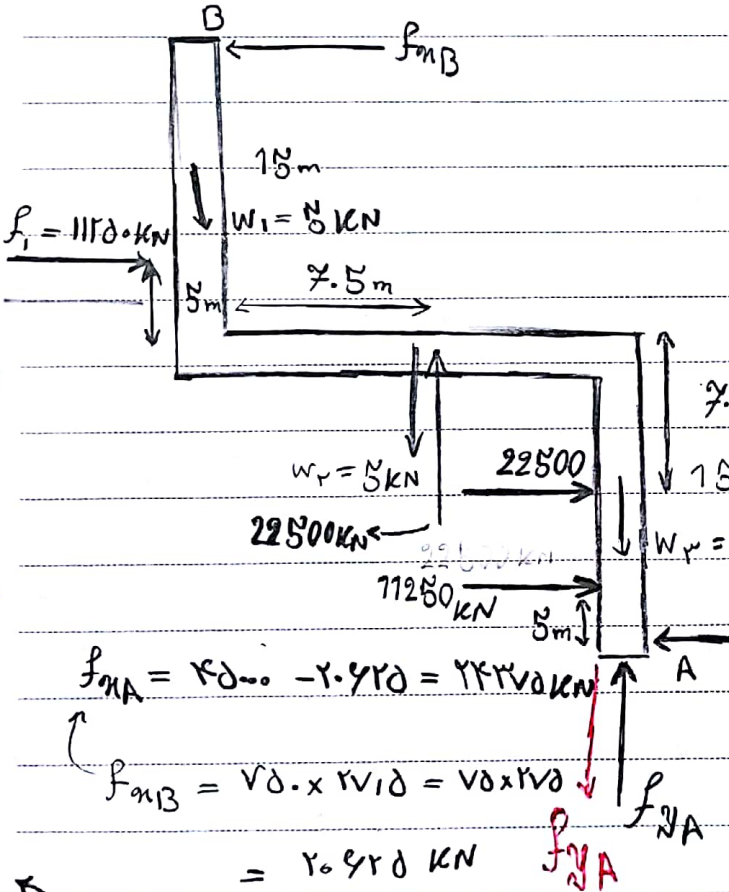


روش کلی: $\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$ ، $\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$

f_r = ارتفاع (مجموع ۲ جامده) / ۲

راه اول = روش: مستطیل ۲ + مثلث ۱ ⟵ دو نیرو به سطح (۳) وارد می‌شود

مستطیل: $f = 1500 \times 15 = 22500$ مثلث: $0.5 \times 1500 \times 15 = 11250$



$\rightarrow \sum f_x = 0 \quad -f_{xB} - f_{xA} + 11250 + 11250 + 22500 = 0$

$45000 = f_{xA} + f_{xB}$

$+\uparrow \sum f_y = 0 \quad +f_{yA} + 22500\,kN - 3(5)\,kN = 0$

$f_{yA} = -22485\,kN$

$f_{xA} = 45000 - 20625 = 24375\,kN$

$f_{xB} = 750 \times 27.5 = 750 \times 27.5 = 20625\,kN$

f_{xA} با جهت فرض شده f_{yA} تفاوت

$\leftarrow -f_{yA} = -22485\,kN \rightarrow$

$f_{yA} = 22485\,kN$

$\curvearrowleft \sum M_A = 0 : -11250 \times 5 - 22500 \times 7.5 + f_{xB} \times 30 - 11250 \times 20 - 22500 \times 7.5 = 0$

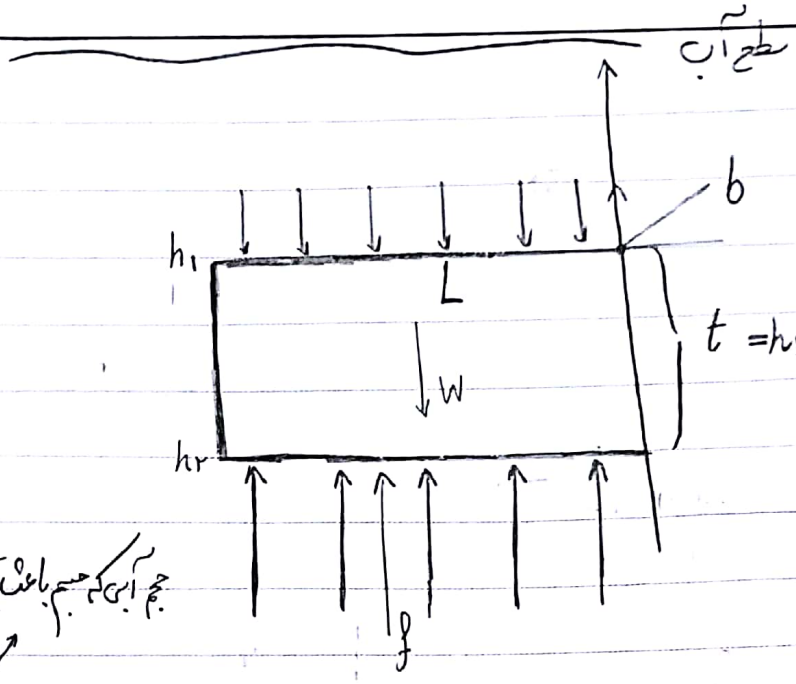
$f_{xB} = \frac{75 \times 11250 + 15 \times 22500}{30} = \frac{7.5 \times 22500}{30}$

Scanned by CamScanner

۵۵

Subject:

Date



نکته: $t = h_2 - h_1$ تفاوت ضخامت‌ها

$h_2 > h_1$

حجم آبی که جسم باعث جابجایی می‌شود

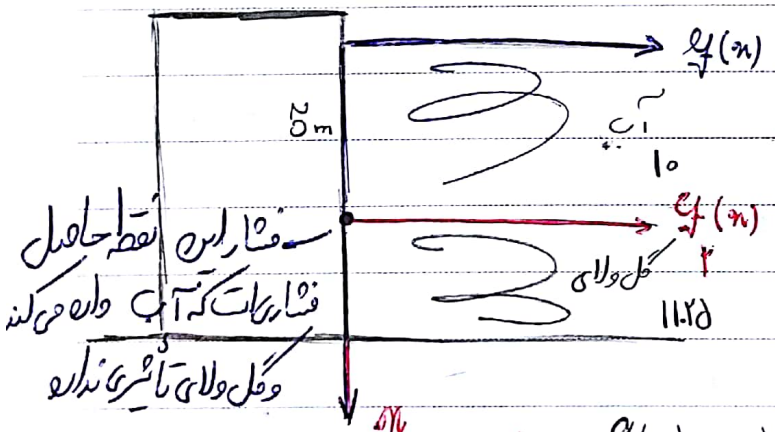
نیروی ارشمیدس: $f = \gamma \times L \times b \times t = \frac{L \times b \times t \times \gamma}{2}$

نکته: if $f > w$: جسم روی سطح آب شناور می‌ماند.

if $w > f$: جسم در آب فرو می‌رود

نکته ⑦:

اگر تابع $q_f(x)$ عرضی از مبدأ نداشت می‌توان f آنرا از رابطه: $f_w = \frac{1}{2}\gamma_w h_w^2$ محاسبه کرد.



$q_{f_2}(x) = \gamma b \sin\theta\, x + \gamma b h =$

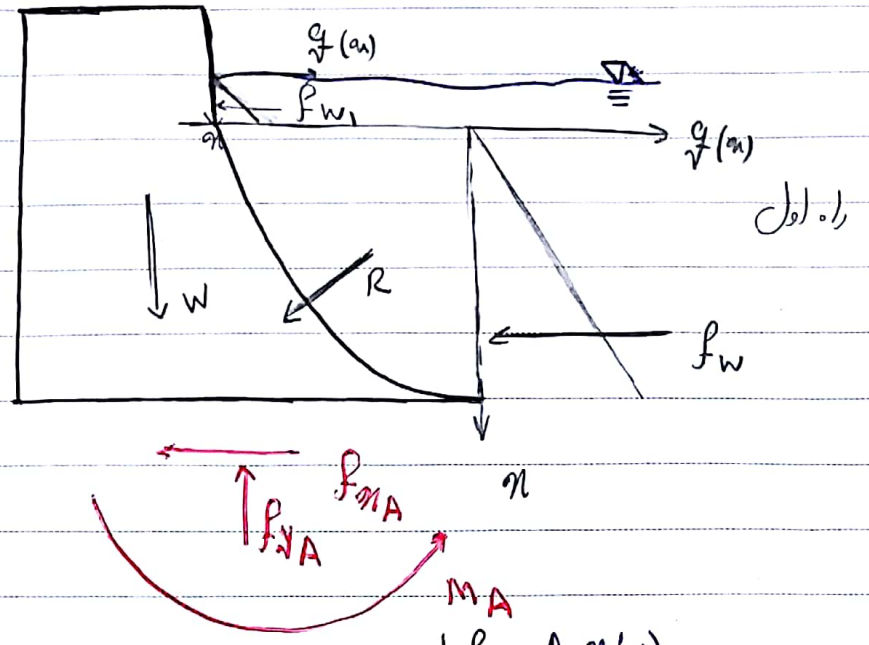
آب — گل ولای

$11.25 \times 10 \times \sin 90 \cdot x + 10 \times 10 \times 2$

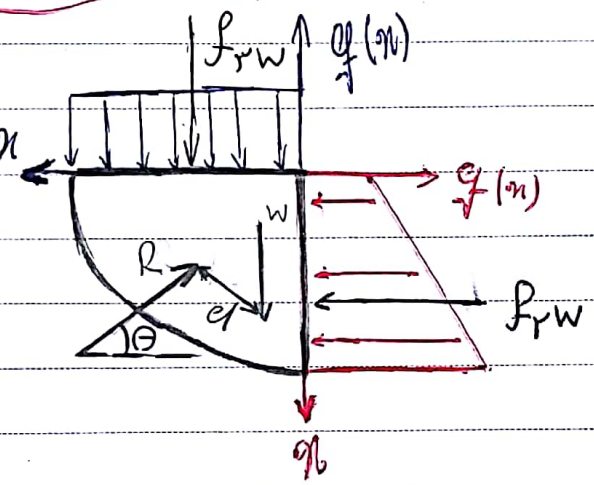
P4PCO

Subject :

Date



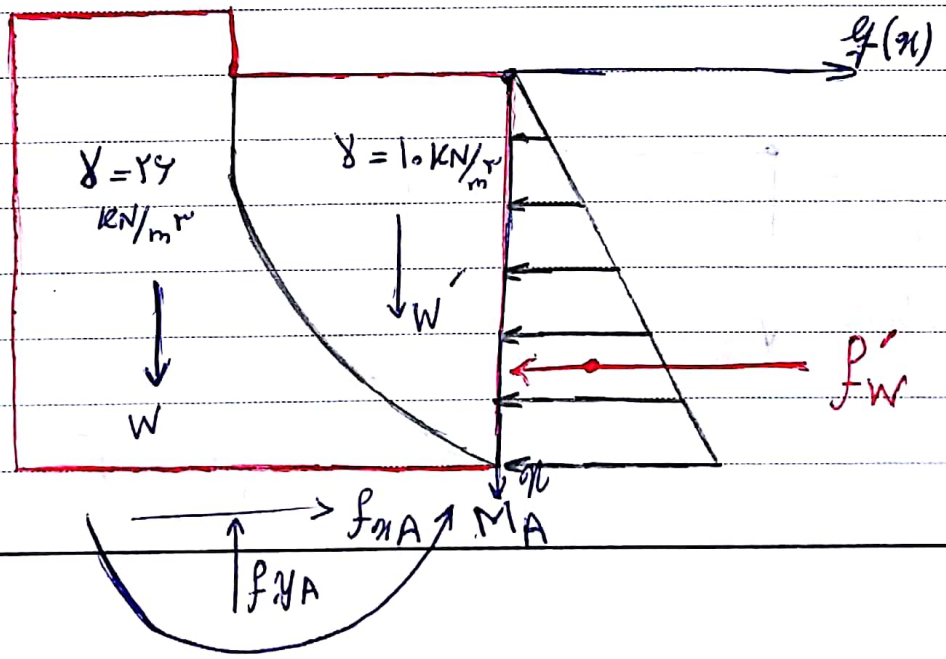
روش اول



روش دوم :

$$\begin{cases} R\cos\theta = f_{rw} \\ R\sin\theta = W + f_{rw} \end{cases}$$

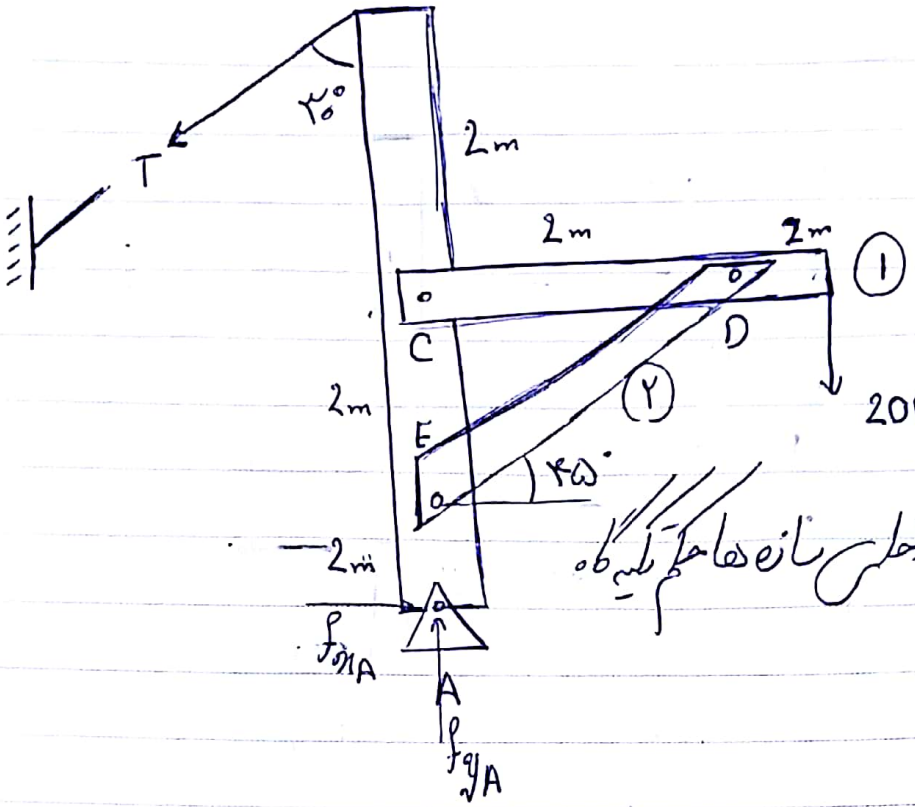
روش سوم (واحدی) :



PAPCO

Scanned by CamScanner

تحلیل سازه‌ها:



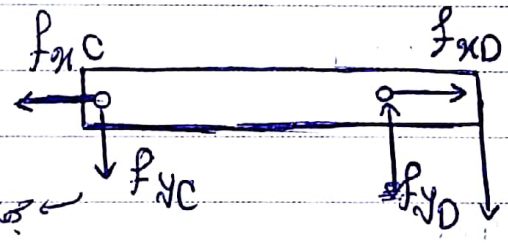
نکته: نیروهای داخلی سازه‌ها حل نکنید.
مفصلی دارند.

$$\overset{+}{\circlearrowright}\sum M_A = 0 \longrightarrow -200\times 4 + T\sin 30^\circ \times 6 = 0 \longrightarrow T = \frac{800}{6\sin 30^\circ} = 266$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum f_x = 0 \longrightarrow f_{xA} - T\sin 30^\circ = 0 \qquad f_{xA} = 133\ kN$$

$$+\uparrow \sum f_y = 0 \longrightarrow f_{yA} - T\cos 30^\circ - 200 = 0 \qquad f_{yA} = 431\ kN$$

(1):



جهت اختیاری

$$\overset{+}{\circlearrowright}\sum M_C = 0 \longrightarrow -f_{yD}\times 2 - 200\times 4 = 0$$

$$f_{yD} = -400\ kN$$

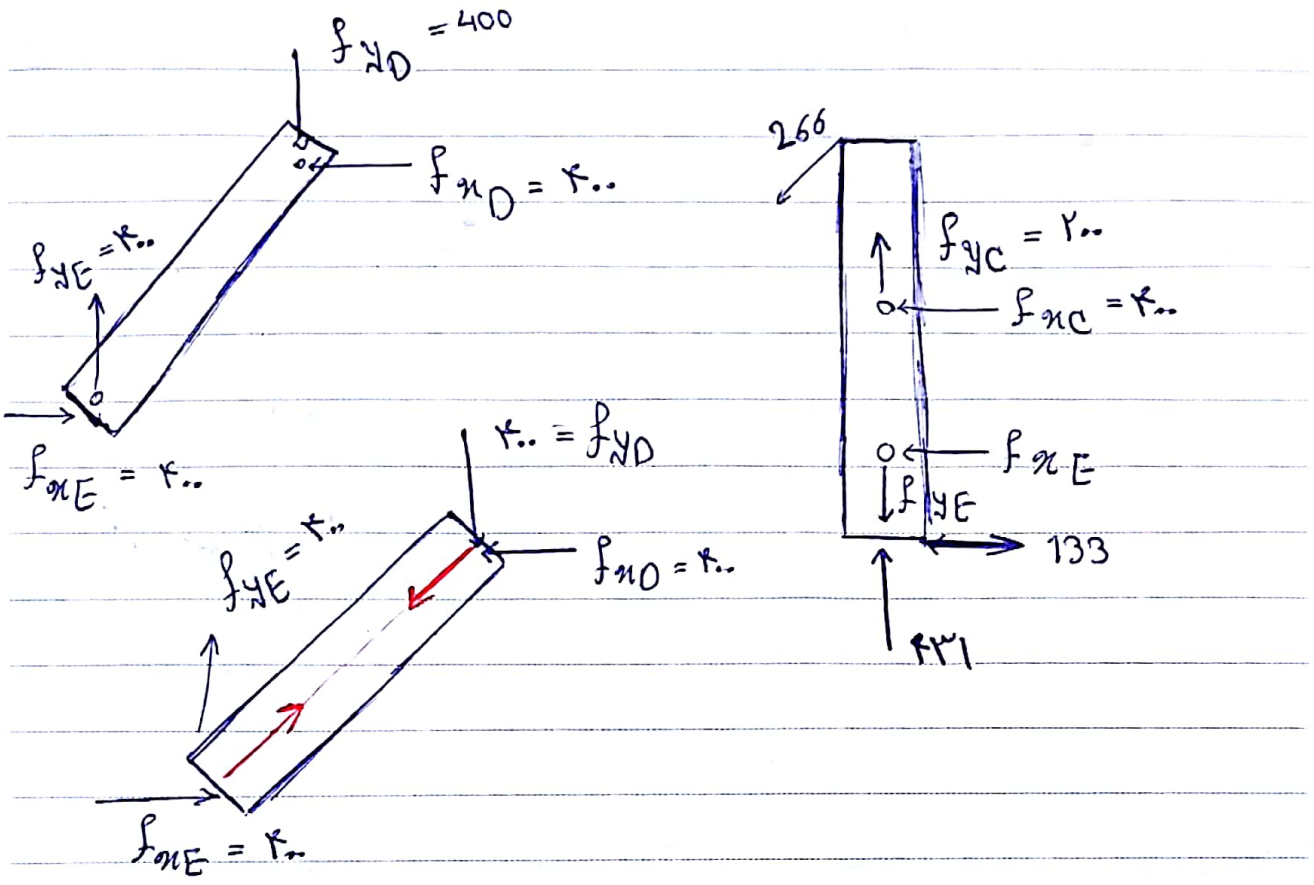
$$+\uparrow \sum f_y = 0 \qquad f_{yC} - 200 + 400 = 0 \qquad f_{yC} = -200$$

جهت باید عوض شود

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date



سازه‌ها ← truss خرپا
سازه‌ها ← frame قاب
سازه‌ها ← ماشین‌ها

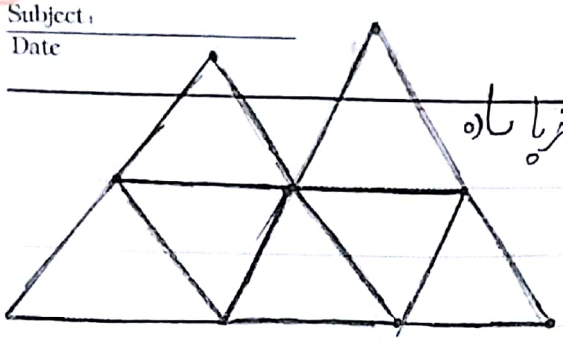
حال دیگر در خرپا:

① تمامی اعضای آن اگر برداشته شوند نیروبر هستند
② نیروهای خارجی فقط به پین‌ها وارد می‌شوند
③ اعضای کج، زاویه‌دار و... ندارند و اعضای مستقیم هستند.
④ هر عضو که به مفصل می‌رسد تمام می‌شود، ادامه نداده و بعد از آن عضو یا اعضای دیگر است

Scanned by CamScanner

۱۵

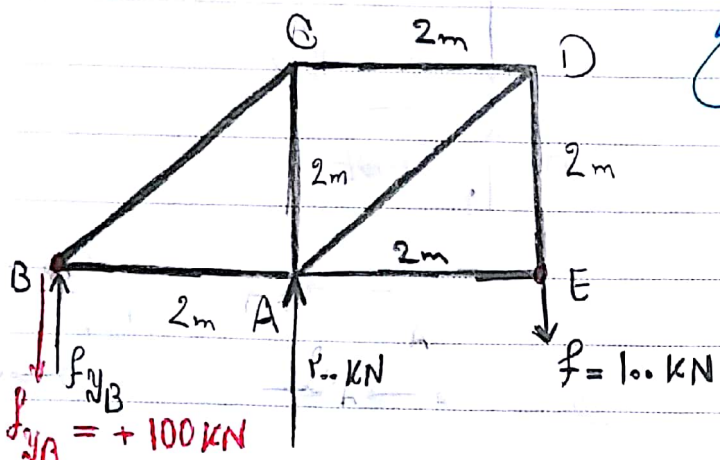
Subject :
Date



نکته: خرپای ساده همواره معین و معیّد است.

روش‌های حل خرپا: ① روش مفصل
② روش مقطع

نکته: عکس‌العمل‌ها تکیه‌گاهی در خرپا نیروی خارجی محسوب می‌شوند



$f_{y_B} = +100\,kN$

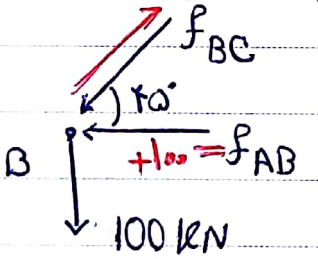
① مرحله‌ی اول حل خرپا:

$\boxed{+}\ \sum M_A = 0 \longrightarrow -100\times 2 - f_{y_B}\times 2 = 0$ تعیین جهت $\quad f_{y_B} = -100$

$+\uparrow \sum f_y = 0 \longrightarrow -100 + f_{y_A} - 100 = 0 \longrightarrow f_{y_A} = 200\,kN$

$\xrightarrow{+} \sum f_x = 0 \longrightarrow -f_{x_A} = 0 \longrightarrow f_{x_A} = 0$

② در خرپاهای ساده می‌توانید بینی پیدا کنید که فقط دو عضو آن متصل باشد. ← حداقل یک بینی معفلی



$\xrightarrow{+} \sum f_x = 0$

$+\uparrow \sum f_y = 0$

$\longrightarrow f_{AB}, f_{BC}$

$f_{AB} = -\left(-100\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

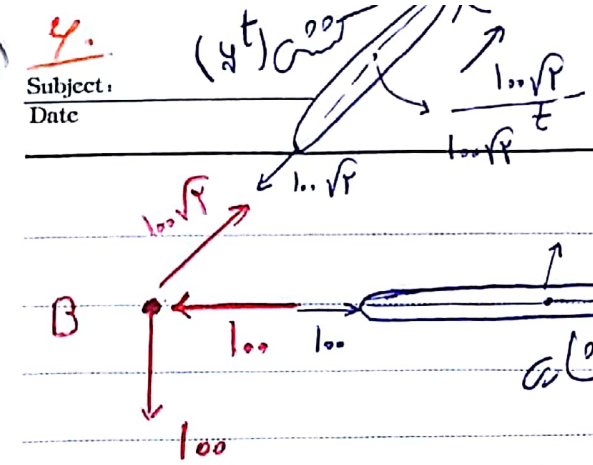
$\xrightarrow{+}: -f_{BC}\cos 45^\circ - f_{AB} = 0 \qquad f_{AB} = +100\,kN$

$+\uparrow: -100 - f_{BC}\sin 45^\circ = 0 \qquad f_{BC} = -100\sqrt{2} = -141.4$ جهت فرض شده

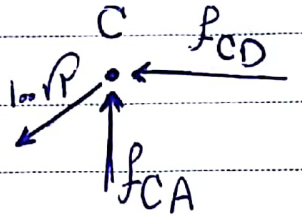
Scanned by CamScanner

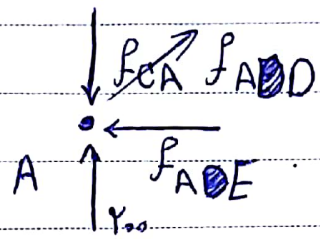
۷۰

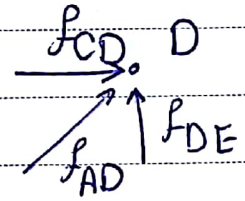
Subject:
Date



کشش (+) فشاری (-) ← میله‌ها و یاطه‌ها

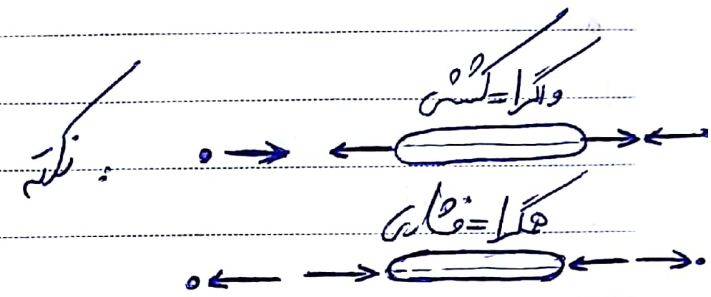




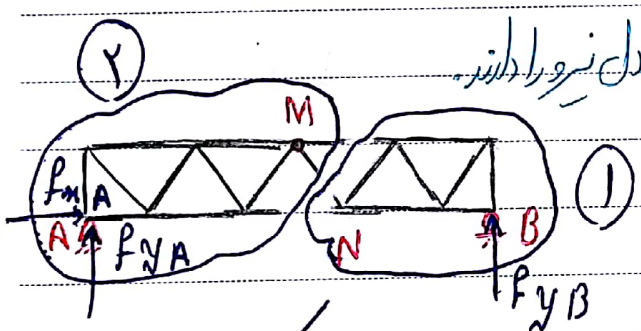


نکته: ولگرا = کشش

هگرا = فشاری



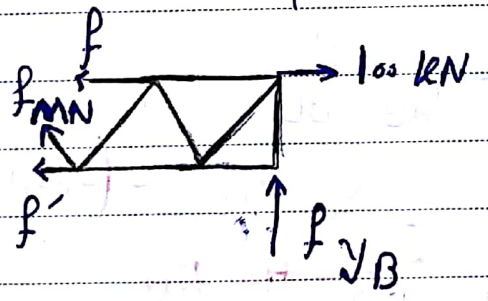
نکته: پین‌ها تعادل گشتاور ندارند و فقط دو معادله‌ی تعادل نیرو را دارند.



$F_{MN} = ?$

روش مقطع:

نکته: جسم به گونه‌ای به ۲ تکه قسمت کنید که فقط ۳ جسم (عضو) را قطع کند.



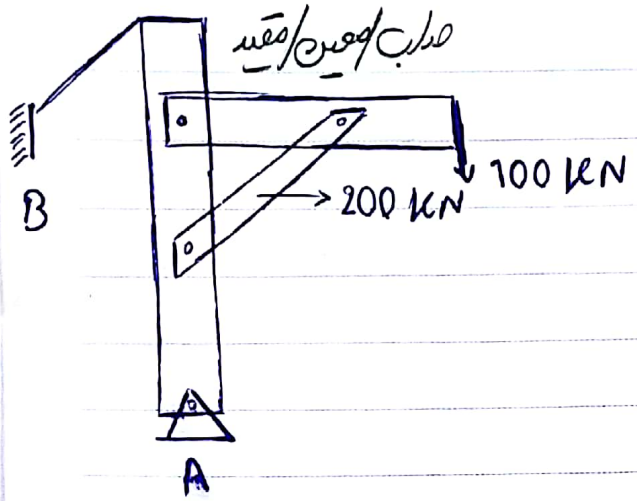
P4PCO

Scanned by CamScanner

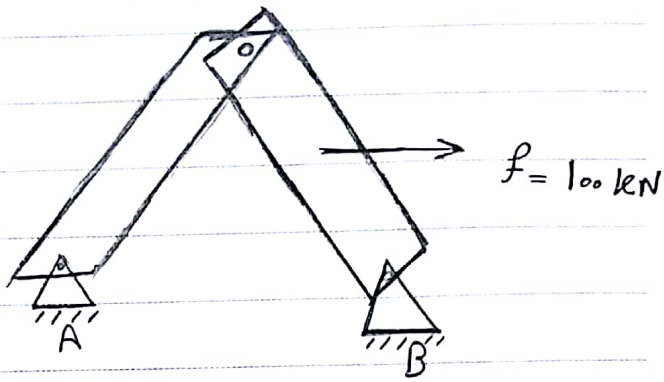
Subject:
Date

قابها:

صلب / معین / مقید



غیرصلب / نامعین / مقید



قابها ← صلب: پس از جدا کردن از تکیه گاه، در هنگام چرخ دادن سازه، سازه شکل صلبی خود را حفظ می کند.

← غیرصلب: " " "

۶۲

Subject:

Date

گام اول:

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_A = 0 \rightarrow T \sin 45^\circ \times 6 - 100 \cos 45 \times 2 - 200 \times 3 + 100 \sin 45 \times 8 = 0$$

$$T = \frac{600 + 200 \cos 45 - 800 \sin 45}{6 \sin 45} KN = 123 kN$$

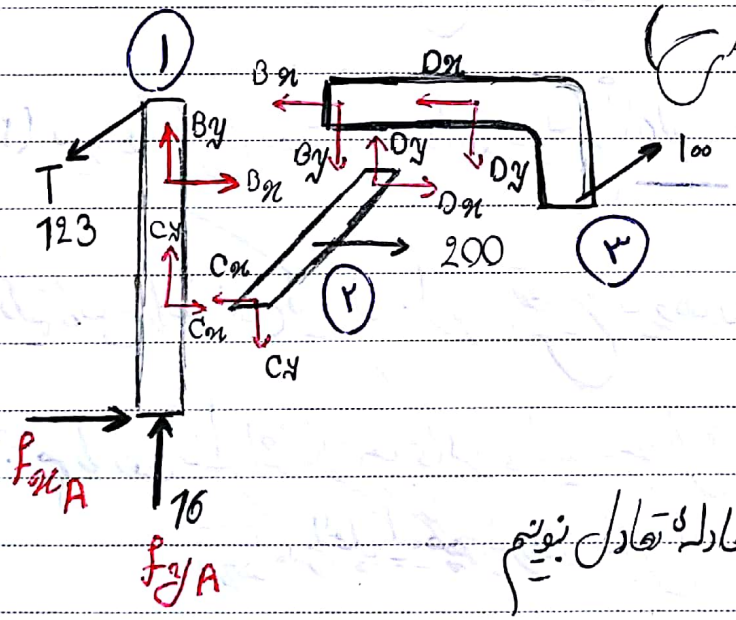
$$+\uparrow \sum f_y = 0 \rightarrow 100 \sin 45^\circ + f_{y_A} - T \cos 45^\circ = 0$$

$$f_{y_A} = T \cos 45^\circ - 100 \sin 45^\circ$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum f_x = 0 \rightarrow 200 - T \sin 45^\circ + 100 \cos 45^\circ + f_{x_A} = 0$$

$$f_{x_A} = T \sin 45^\circ - 100 \cos 45^\circ - 200$$

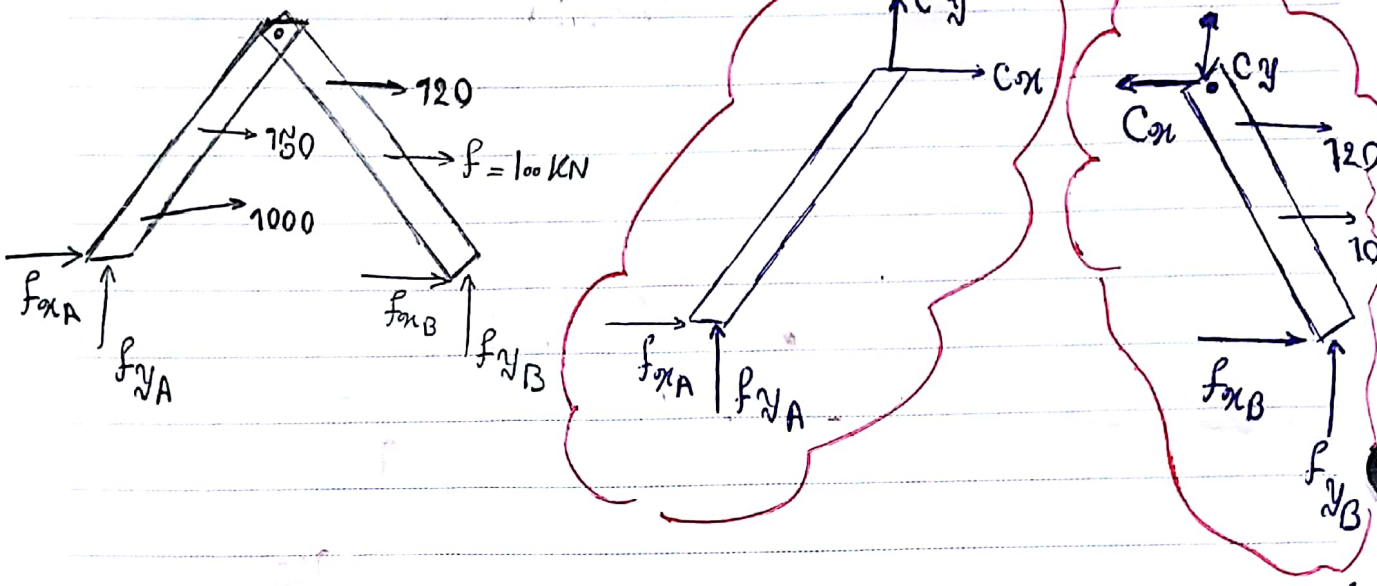
گام دوم: کلیل سازه: (تعیین نیروهای داخلی)

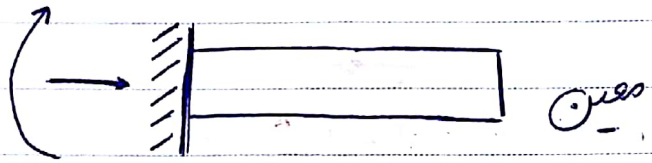


گام سوم: برای تک تک این سه جسم باید ۳ معادله تعادل بنویسیم

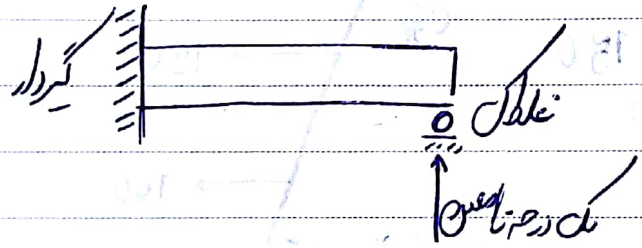
Scanned by CamScanner

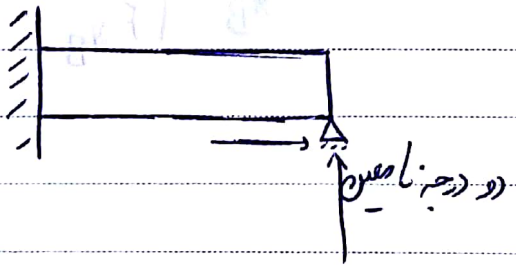
مثال ۲

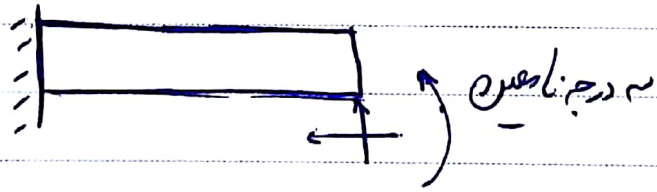



معین

نکته: هر بیش یک درجه نامعین بعد حسم می افزاید.







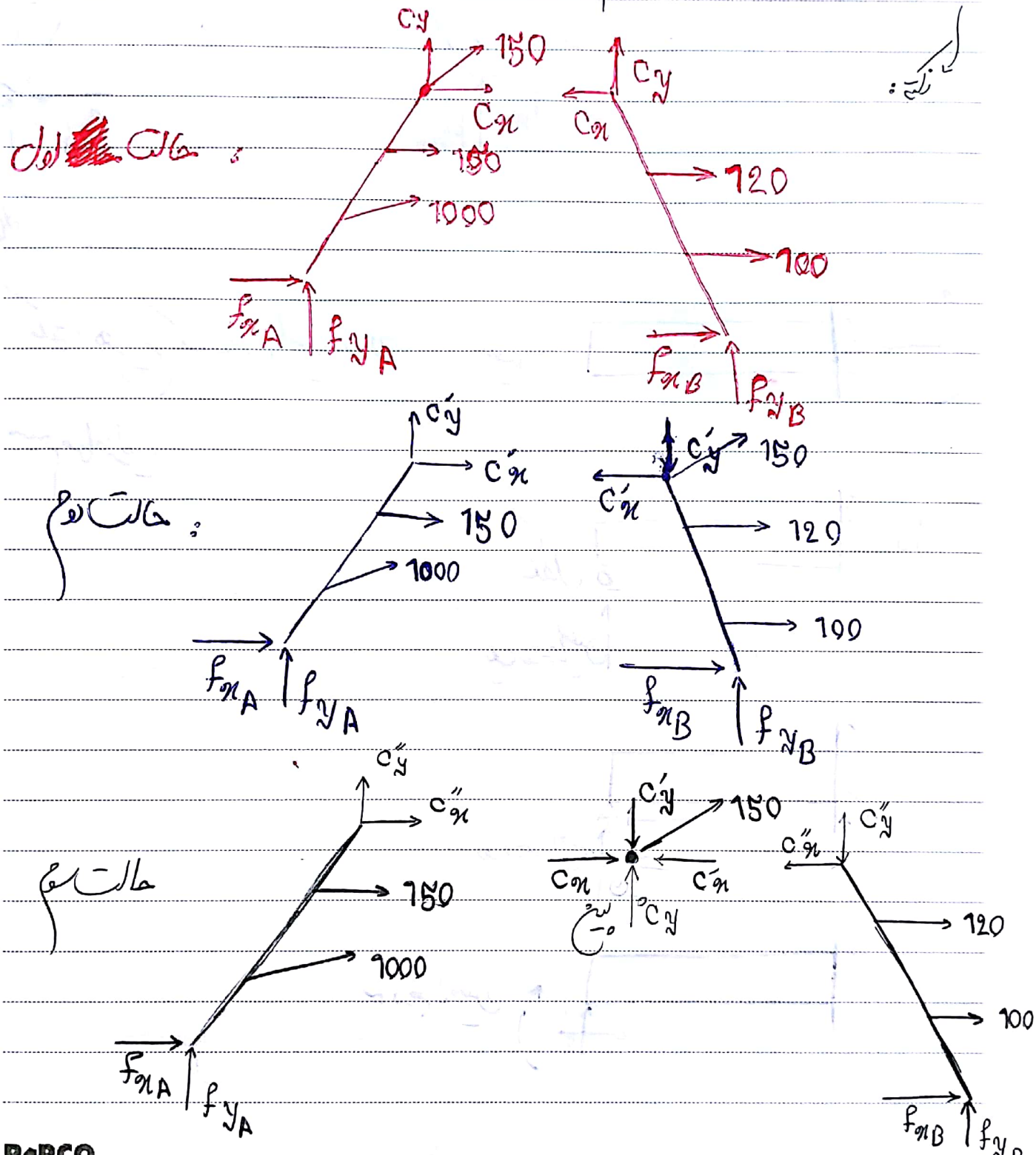
Scanned by CamScanner

Subject:
Date

نکات: دوربا های پین را از جسم خارج میکنیم اما در جا یی خصوص از یکی از اجزاء.

در اجسام غیر صلب اگر نیرو به پین وارد شود هم اثر کرده پس روی کدام جسم عمل کرده.

مثال:



Scanned by CamScanner

نکته: اگر به یک پین n نیرو وارد شود، آن جسمی که پین رویش در نظر گرفته می‌شود $2n$ نیرو به آن وارد می‌شود و به $n-1$ جسم دیگر به هرکدام ۲ نیرو وارد می‌شود.

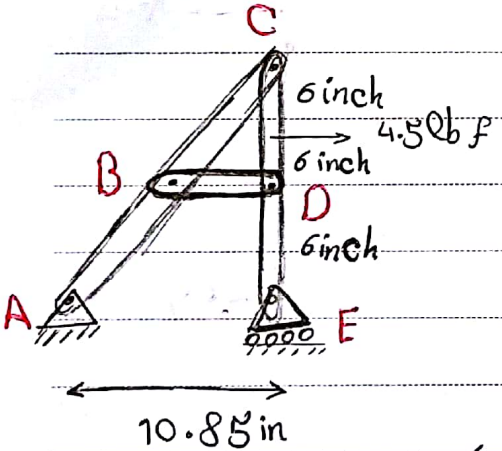
اگر پین را جدا در نظر نگیریم از اجسام

اگر پین را جدا کنیم ۲ مجهول به مجهولات

اضافه می‌شود و این یعنی ۲ معادله اضافی

پس در قاب‌ها بهتر است پین را عضو اول از یکی از اعضای متصل به آن جسم در نظر بگیریم.

تبصره: اگر یک جسم دو نیرویی به یک جسم n نیرویی وصل شود، پین را باید روی جسم n نیرویی در نظر بگیریم



نکته برای حل خرپا:

(۱) تعادل گره‌ها و نیروها بر کل خرپا

(۲) فقط برای پین‌ها معادلات تعادل نیروها را می‌نویسیم

(۳) نیرو پیدا شده چون اعضا دو نیرویی و صاف‌اند از هر پین می‌توان نیرو را به پین دیگر با قوانین خودش انتقال داد.

(۴) با اعضای دو نیرویی سیستم سر و کار داریم.

Scanned by CamScanner

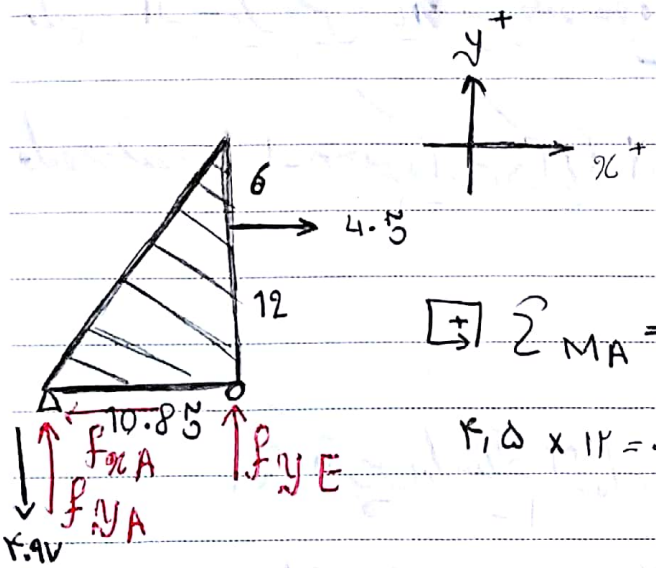
۶۷

Subject:

Date

(۵) تیرها به وسط عضو وارد می شوند

(۶) نیازی نیست تعادل اعضا بررسی شود.



حل مسئله:

$$\boxplus \sum M_A = 0 \longrightarrow f_{yE} \times 10.85 - 4.5 \times 12 = 0 \longrightarrow f_{yE} = 4.97$$

جهت یا باید عوض شود

$$\rightarrow \sum f_x = 0 \longrightarrow f_{xA} = 4.5 \qquad +\uparrow \sum f_y = 0 \qquad f_{yA} = -4.97$$

معیار صلب ← ① کل قاب حل شود (نیروهای خارجی بردارالفزایند) ② قاب لازم باشد می شود

دیگر یکی گاه عضو نیست

③ تمام بی ها را از جسم آزاد یکی گاه

④ مفصلی را دارند مشخص کردن

قاب

نامعین غیرصلب

عضو دونیرویی

$C_x = 2.24$

$C_y = 4.97$

$B_y = 0$

B_x

$D_y = 0$

$D_x = 2.24$

C_x

C_x

C_x

$B_x = 2.24$

$B_y = 0$

دونیرویی (فقط مؤلفه ی افقی دارد)

$D_y = 0$

$D_x = 2.24$

4.5

4.97

4.97

18 inch

6 inch

A

4.5

4.97

4.97

$B_x = 2.24$

$C_x = 2.24$

$C_y = 4.97$

4.97

4.97

⊛ نکته: در قاب ها جسم دونیرویی ۹۰٪ درصد راه را برای ما حل می کند.

$$\boxplus \sum M_A = 0 \qquad -B_x \cdot 6 + C_x \cdot 18 + C_y \times 10.85 = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow \sum f_x = 0 \qquad -4.5 + B_x - C_x = 0 \qquad C_x = B_x - 4.5 \quad (2)$$

PAPCO

$$+\uparrow \sum f_y = 0 \qquad C_y - 4.97 = 0 \longrightarrow C_y = 4.97 \quad (3)$$

⊛ جایگذاری ۳ و ۲ در معادله ی ①

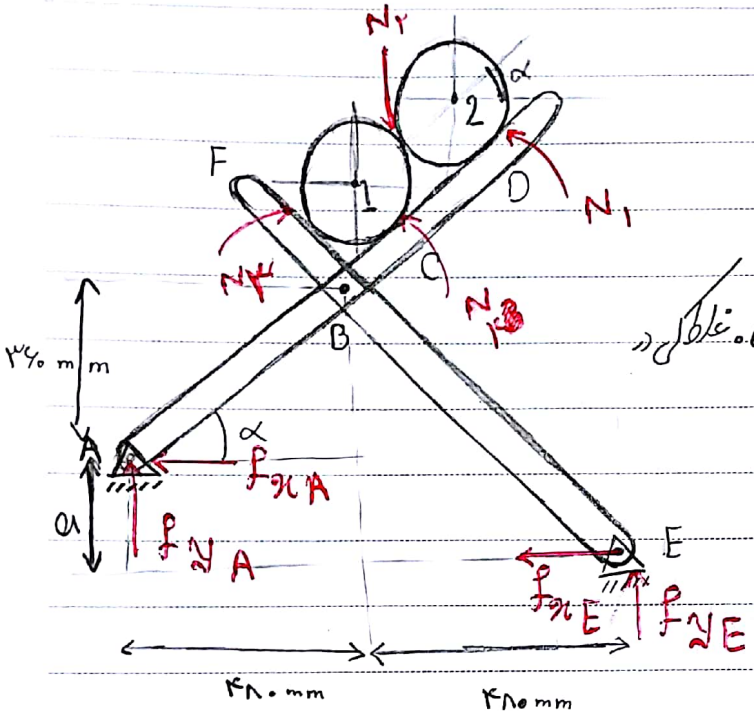
Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$$\xrightarrow{①} \quad -۶B_x + ۱۸\left(B_x - \frac{۹}{۲}\right) + ۱۰,۶۵\,C_y = ۰ \qquad (C_y = ۴,۹۷)$$

$$\rightarrow \quad ۱۲B_x - ۸۱ + ۵۳,۹ = ۰ \rightarrow B_x = \frac{۲۷,۱}{۱۲} = ۲,۲۶$$

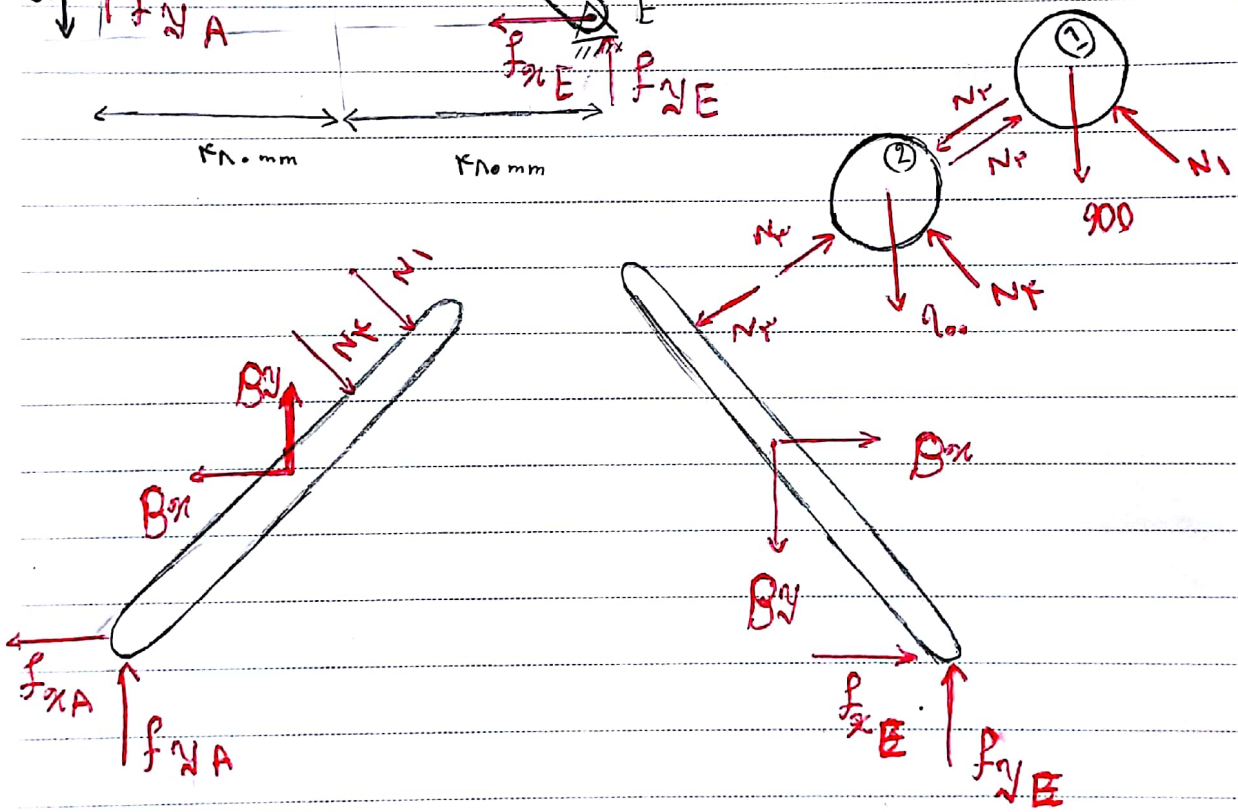
$$\rightarrow C_x = ۲,۲۶ - ۴,۵ = -۲,۲۴ \rightarrow \text{جهت باید عوض شود}$$



۶-۸۹ ترجمه دکتر انتظاری:

نکته: اجسام گرد همچون گوی، کره و ... را باید یکپارچه و غلطکی در نظر گرفت.

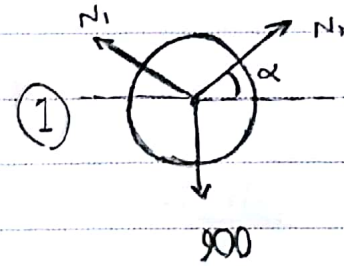
تصاویر را با دقت در نظر گرفت.



Scanned by CamScanner

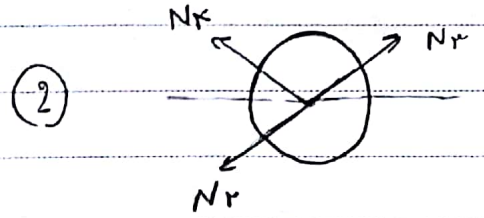
Subject:
Date

ب) برای حل گره ها از بیرونی ترین گره شروع کنید



$\sum f_{gx} = 0$

$\sum f_y = 0$ → N_1 و N_2



تعادلات → N_3 و N_4

فصل ۷: نیرو در تیرها و کابل ها

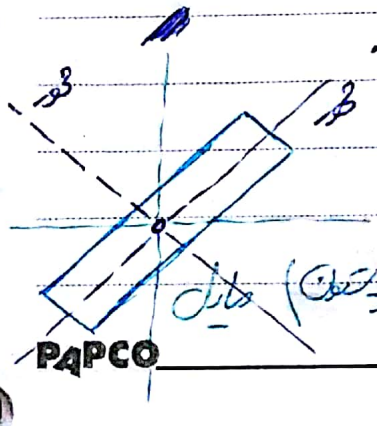
بررسی طرز کار

نیروها ← داخلی ← وارد بر بدنه (تکیه گاهی و مفصلی)
داخل کابلها (تکیه گاهی و کابلی)
داخل اعضای صلب (تکیه گاهی و گیردار هستند)

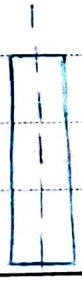
ستون: بارگذاری هایی که بر محور خود عمود شده اند

تیر: بارگذاری هایی که با محور خود عمود شده اند

تیر-ستون: بارگذاری هایی که عمود و مماس بر محور خود هستند.





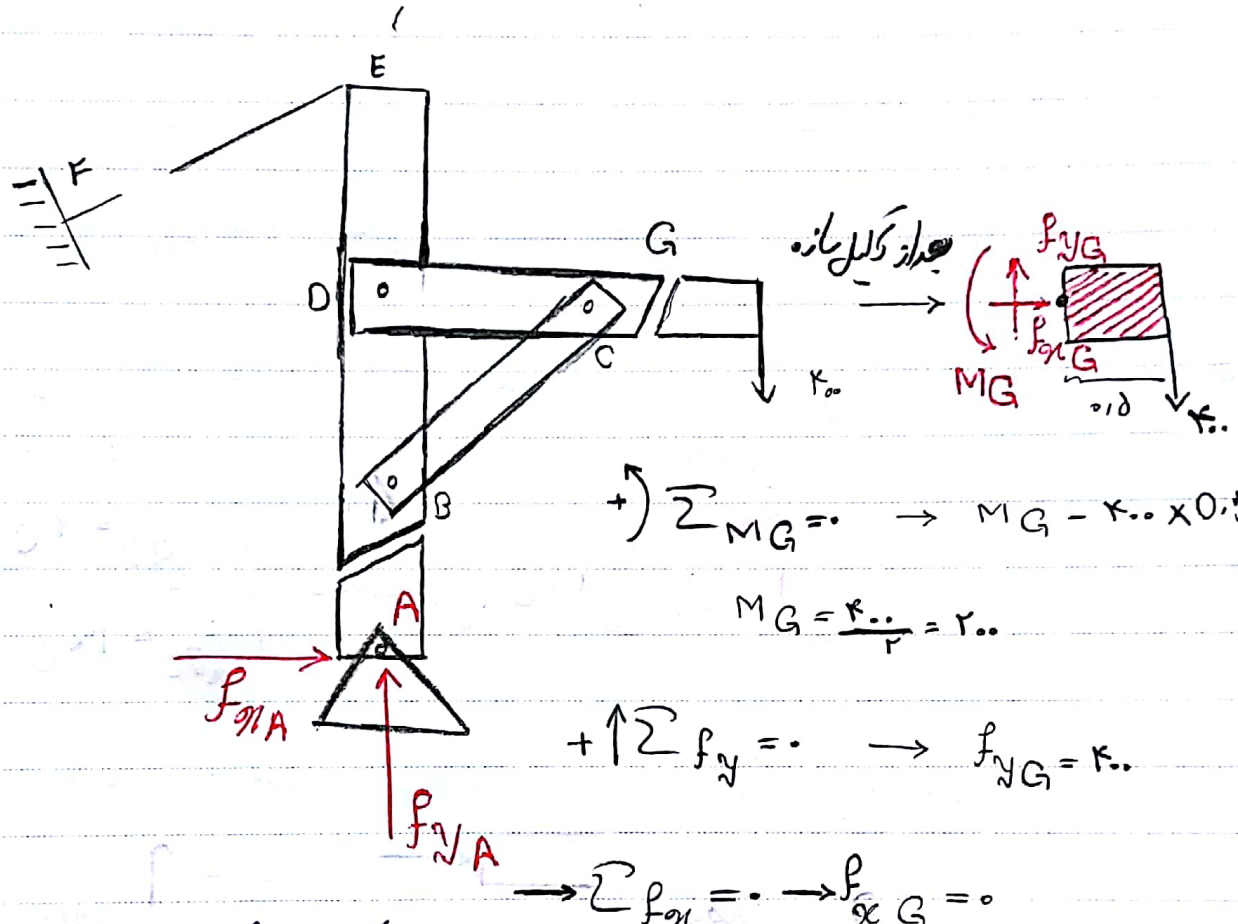


P4PCO

Scanned by CamScanner

نکته: هرگاه قسمتی از جسم صلب را قطع کنیم، یکی از ۳ گیردار است.

نکته: اگر جسم صلب را حل کنیم (تحلیل سازه)، امکان ندارد قسمت های داخلی جسم نامعین باشد.



$+\circlearrowleft \sum M_G = 0 \rightarrow M_G - 400 \times 0.5 = 0$

$M_G = \frac{400}{2} = 200$

$+\uparrow \sum f_y = 0 \rightarrow f_{yG} = 400$

$\rightarrow \sum f_x = 0 \rightarrow f_{xG} = 0$

برای تحلیل داخلی تیر باید ابتدا تکیه گاه ها را با قوانین تعادل بررسی کنید (حل کردن).

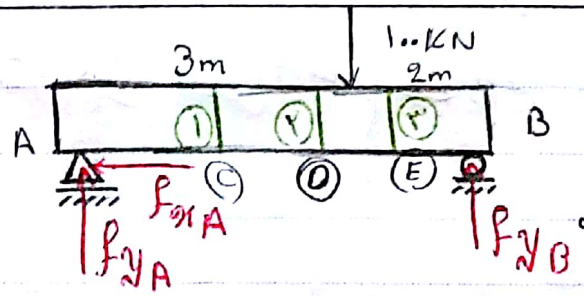
در تیرها تیرهای افقی صفر می شوند.

در تیرها قانون عکس فاصله برقرار است (در تیرهای ساده)

Scanned by CamScanner

Subject
Date

فرض این است که بار در تکیه‌گاه‌ها باز نشده



راه اول ← $f_{xA} = 0$

قانون عکس فاصله : $f_{yA} = \frac{2}{2+3} \times 100 = 40\,kN$

$f_{yB} : \frac{3}{2+3} \times 100 = 60\,kN$

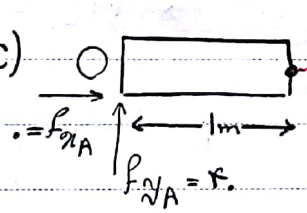
راه دوم ← روابط تعادل $\sum M_A = 0 \longrightarrow -100 \times 2 + f_{yB} \times 5 = 0$

$f_{yB} = 40\,kN$ $\quad \sum f_x = 0 \longrightarrow -f_{xA} = 0 \longrightarrow f_{xA} = 0$

$\sum f_y = 0 \longrightarrow f_{yA} + f_{yB} = 100\,kN \longrightarrow f_{yA} = 40\,kN$

نیروی برشی

① برای مقطع (C)



نامگذاری : $f_{yC} = V_C$ ، $f_{xC} = N_C$

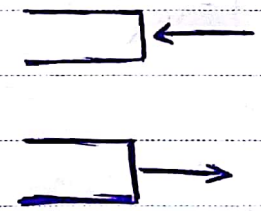
$\sum M_O = 0 \longrightarrow +MC - f_{yC} \times 1m = 0 \longrightarrow MC = 40\,kN \cdot m$ ($f_{yC} = \frac{2}{5} \times 100$)

Normal

$+\uparrow \sum f_y = 0 \longrightarrow f_{yA} - f_{yC} = 0$

$\longrightarrow f_{xC} = f_{yA} = 40\,kN \downarrow$

نرمال



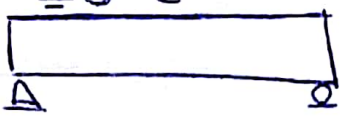
فشاری یا کششی : N_C ، در جهت افق

V_C : مولفه‌هایی که در راستای عمود بر تیر عمل می‌کنند.

نیروی برشی

Scanned by CamScanner

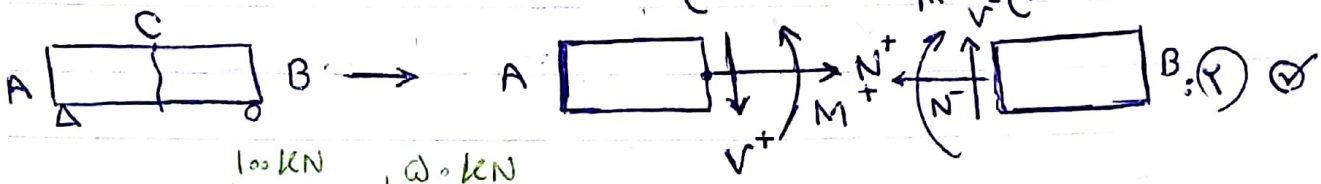
مقطع طولی (تیر) مقاطع عرضی

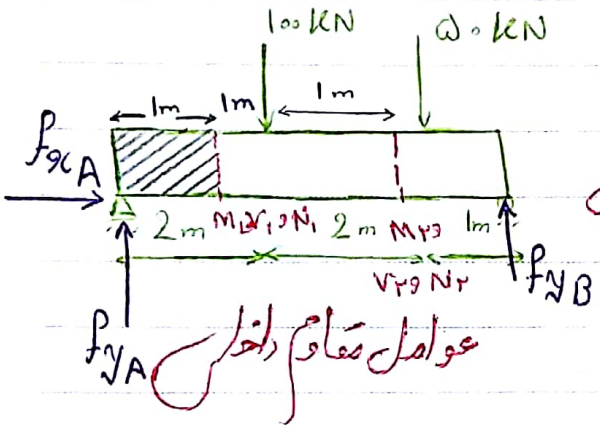




ب) تعادل گشتاور برای نقطه‌ای برش حوزه حول مرکز هندسی مقاطع عرضی است.

۲ نکته: ① اگر M، V، N را برای نیروهای داخلی تیر مانند کردید و فهمیدید، دیگر جهت را اصلاً نمی‌کنم و این قاعده برای تعادل نیروهای داخلی اجسام صلب برقرار است.





نکته: جسم اگر در نقطه‌ای دچار شکستگی شده، تحت عوامل مقاوم داخلی شکسته است.

پیدا کردن عوامل مقاوم داخلی:

(۱): ابتدا کل تیر یا سازه حل می‌شود و نیروهای خارجی و نکیه‌گاهی یا متصل وارد بر تیر را می‌یابیم.

$$\xrightarrow{+} \sum f_x = 0 \rightarrow f_{xA} = 0$$

قانون عکس $\rightarrow$ $f_{yA} = 100 \times \frac{3}{5} + 50 \times \frac{1}{5} = 60 + 10 = 70\,kN$

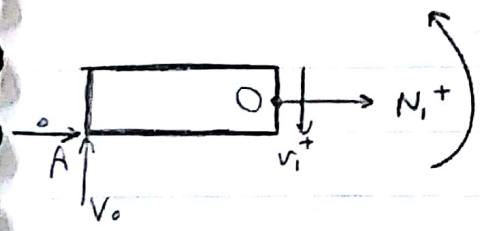
$$f_{yB} = 100 \times \frac{2}{5} + 50 \times \frac{4}{5} = 40 + 40 = 80\,kN$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

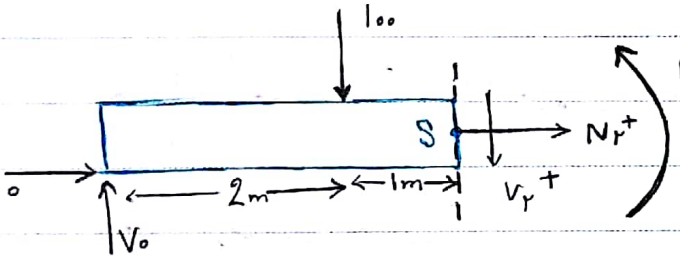
(۲) تقاطع قطعه سمت راست از کل مقطع جدا شده و به صورت یک جسم با در نظر گرفتن علامتهای قراردادی مثبت ترسیم می‌شود.



(۳) برای قطعه‌ی فوق معادلات تعادل نوشته شده و مقادیر N، V و M محاسبه می‌شوند.

$+\uparrow \sum f_y = 0 \rightarrow V_1^+ = V_0\ KN \qquad \overset{+}{\rightarrow} \sum f_{gx} = 0 \rightarrow N_1^+ = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_O = 0 \rightarrow M_1^+ - V_0 \times 1 = 0 \rightarrow M_1^+ = V_0\ KN.m$

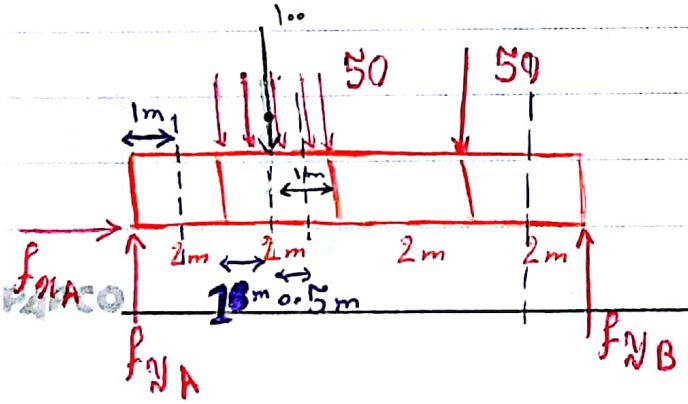


$\overset{+}{\rightarrow} \sum f_{gx} = 0 \rightarrow N_2^+ = 0$

$+\uparrow \sum f_y = 0 \rightarrow V_0 - 100 - V_2^+ = 0$

$\rightarrow V_2^+ = -20\ KN \qquad +\circlearrowleft \sum M_S = 0 \rightarrow M_2^+ + 100 \times 1 - V_0 \times 3 = 0$

$\rightarrow M_2^+ = 110\ KN.m$

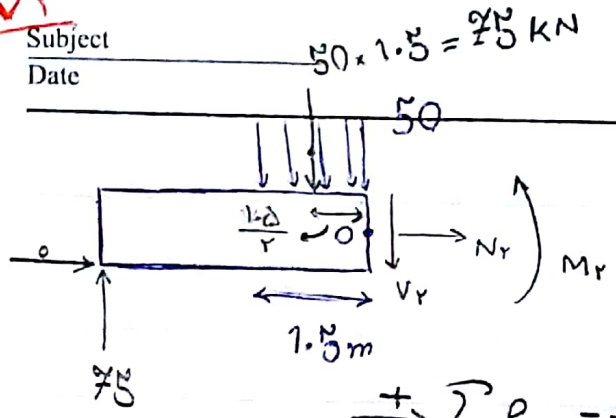


$f_{yA} = 50 \times \frac{2}{8} + 100 \times \frac{5}{8} = \frac{600}{8} = 75\ KN$

$f_{yB} = 50 \times \frac{6}{8} + 100 \times \frac{3}{8} = \frac{600}{8} = 75\ KN$

Scanned by CamScanner

Subject
Date



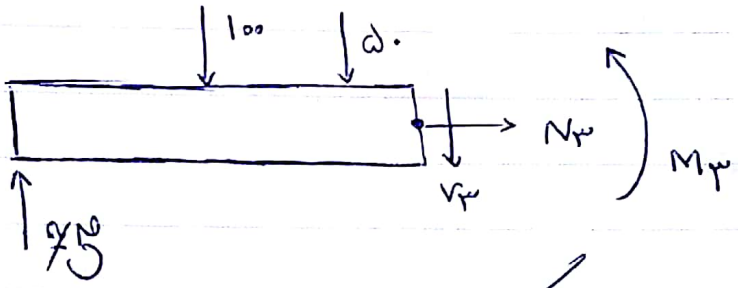
$+\uparrow \sum f_y = 0 \rightarrow V_\Delta - V_\Delta + V_2 = 0$

$V_2 = 0$

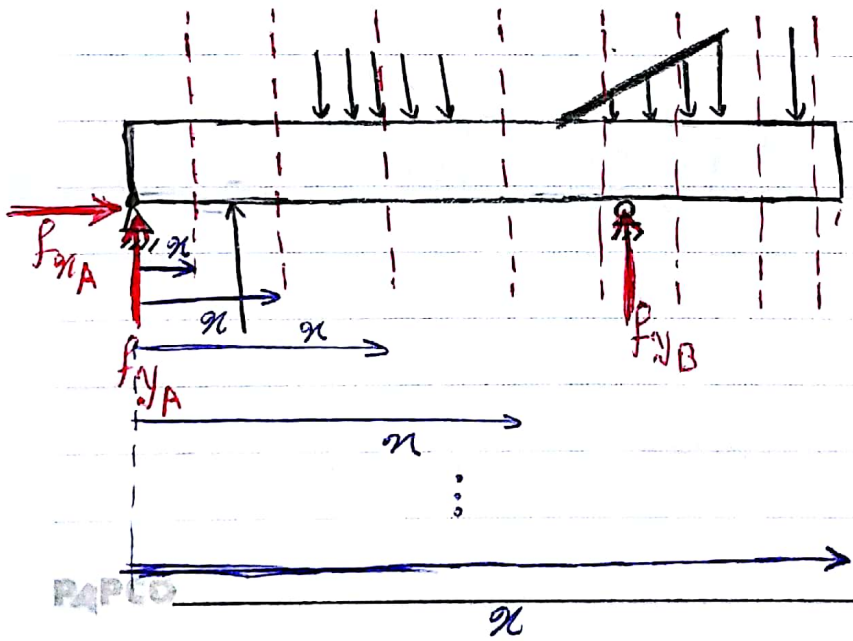
$\xrightarrow{+} \sum f_x = 0 \rightarrow N_2 = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_O = 0 \rightarrow M_2 + V_\Delta \times 0{,}V_\Delta - V_\Delta \times 3{,}\Delta = 0 \rightarrow$

$M_2 = V_\Delta \times 2{,}V_\Delta = \frac{2V_\Delta \times 3}{4} = \frac{\Lambda 2\Delta}{4} = 204{,}25\ kN.m$



نکته: تیر در جایی می شکند که N، V و M ماکس مقدار خود هستند. پس برای ما مکان های max ها و محضورشون اهم است. ← زیرا: اگر تیر در ماکس ها سالم بماند، در سایر نقاط نیز در امان است.



Scanned by CamScanner

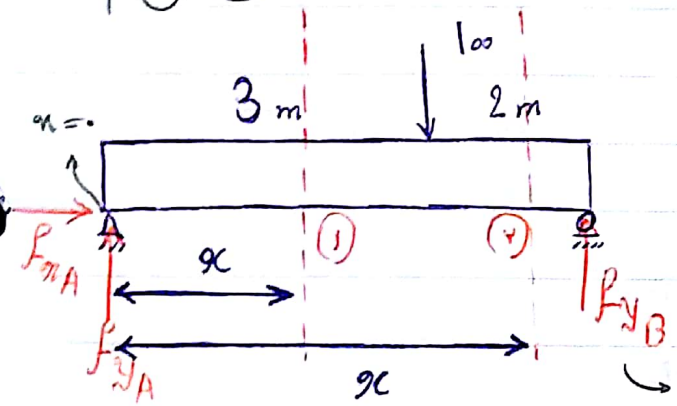
Subject

Date

برای مقطع دلخواه

اگر بار متمرکز داده شد ← بعد از یک مقطع می‌زنیم.

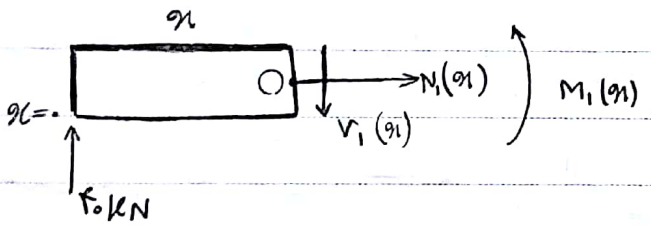
اگر بار گسترده داده شد ← در زیر بار گسترده و بعد از یک مقطع می‌زنیم.



$$f_{yB} = \frac{100 \times 3}{5} = 60\ kN$$

$$f_{yA} = \frac{100 \times 2}{5} = 40\ kN$$

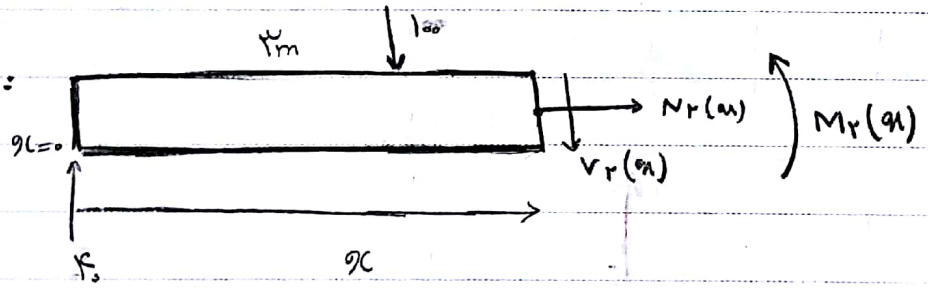
(۱) :



$$+\circlearrowleft \sum M_O = 0 \rightarrow M_1(x) = 40x$$

$$+\uparrow \sum f_y = 0 \rightarrow V_1(x) = 40\ kN$$

(۲) :



$$+\uparrow \sum f_y = 0 \qquad 40 - 100 - V_2(x) = 0 \qquad V_2(x) = -60\ kN$$

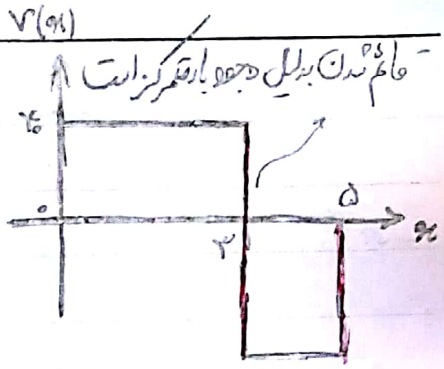
$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \qquad M_2(x) + 100(x-3) - 40x = 0 \rightarrow M_2(x) = -60x + 300$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

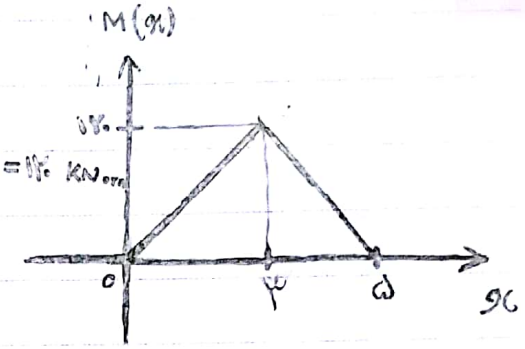
$$V(x) = \begin{cases} 40 & , \ 0 < x < 3 \\ -40 & , \ 3 < x < 5 \end{cases}$$

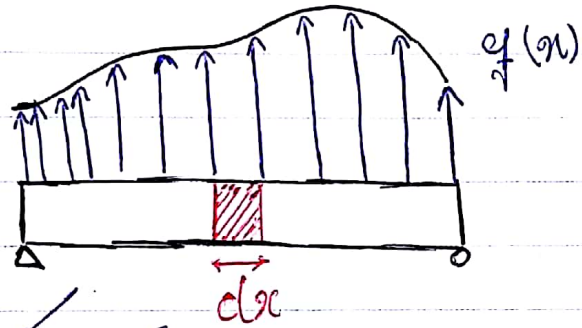


تا قائم شدن بردار جمع با تغییر علامت

$$\max V(x) = 40\,kN \longleftarrow$$

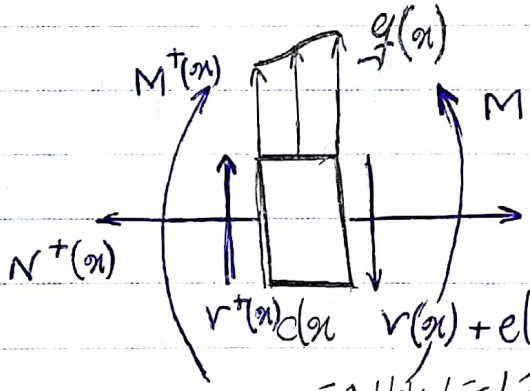
$$M(x) = \begin{cases} 40x & , \ 0 < x \leq 3 \\ -40x + 300 & , \ 3 < x < 5 \end{cases} \longrightarrow M(3) = 120\ kN.m$$





تغییرات بزرگ

تغییرات کوچک Δx یا dx



$$M(x) + e|M(x) = M'(x)$$

$$N(x) + e|N(x) = N'(x)$$

$$V(x) + e|V(x) = V'(x)$$

✓ مشتق نشده = مقادیر تمایز کز اولیه هستند.

$$+\uparrow \sum f_y = 0 \longrightarrow V(x) + q(x)\,e|x - V(x) - e|V(x) = 0$$

$$\longrightarrow q(x)\,e|x = e|V(x) \qquad \frac{e|V(x)}{e|x} = q(x) \longrightarrow$$

$$V'(x) = q(x) \longrightarrow V(x) = \int q(x)$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$\frac{(dx)^2}{2} \simeq 0$

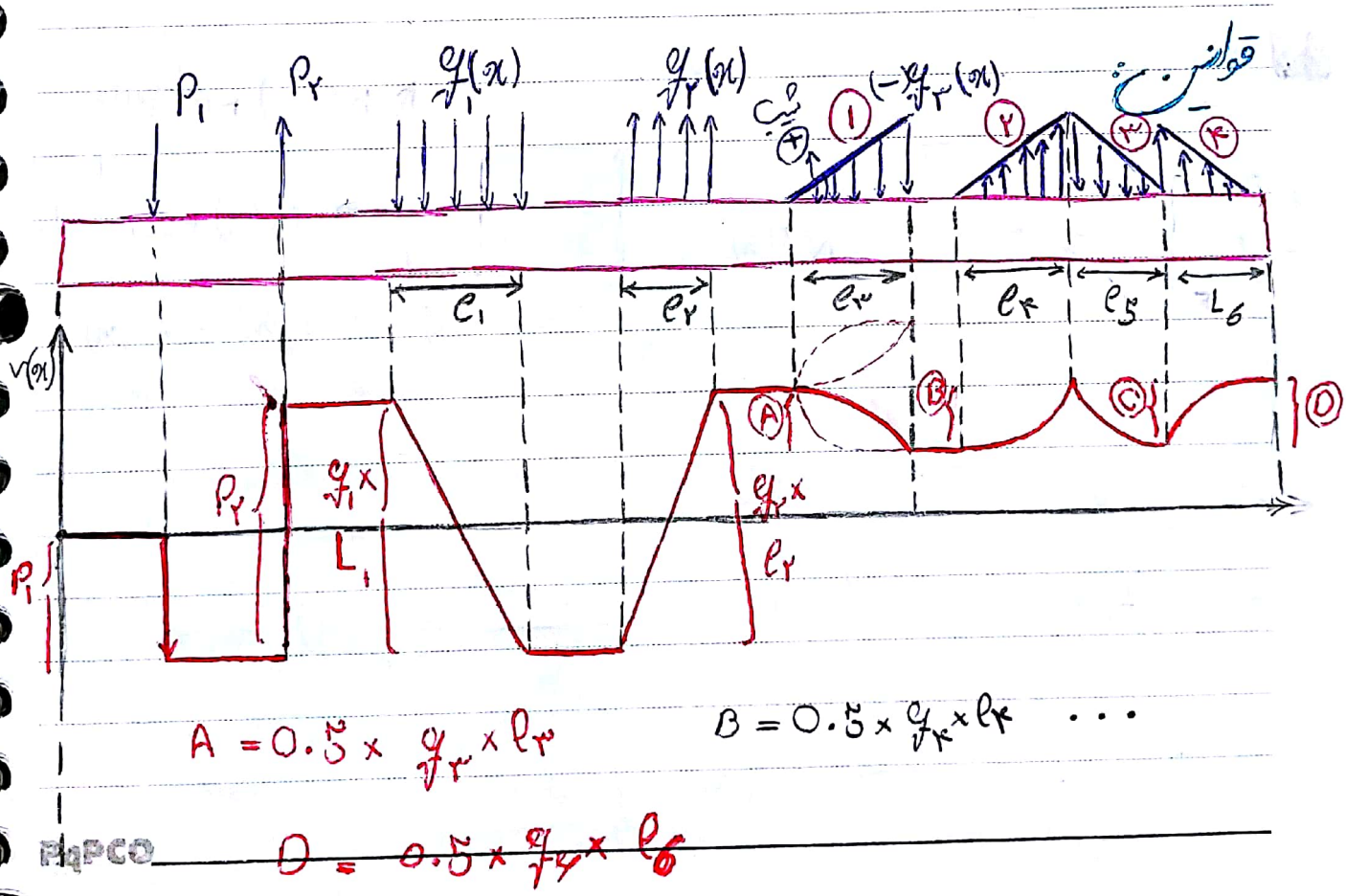
$+\circlearrowleft \sum M_0 = 0 \longrightarrow M(x) + dM(x) - q(x)\frac{dx \cdot dx}{2} - V(x)dx - M(x) = 0 \longrightarrow dM(x) = V(x)dx$

$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \longrightarrow M'(x) = V(x) \longrightarrow M(x) = \int V(x)$

$V(x) = \int q(x)dx \longrightarrow M(x) = \iint q(x)dx$

$\frac{dV}{dx} = q(x) \qquad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$

اگر بار متمرکز نباشد.



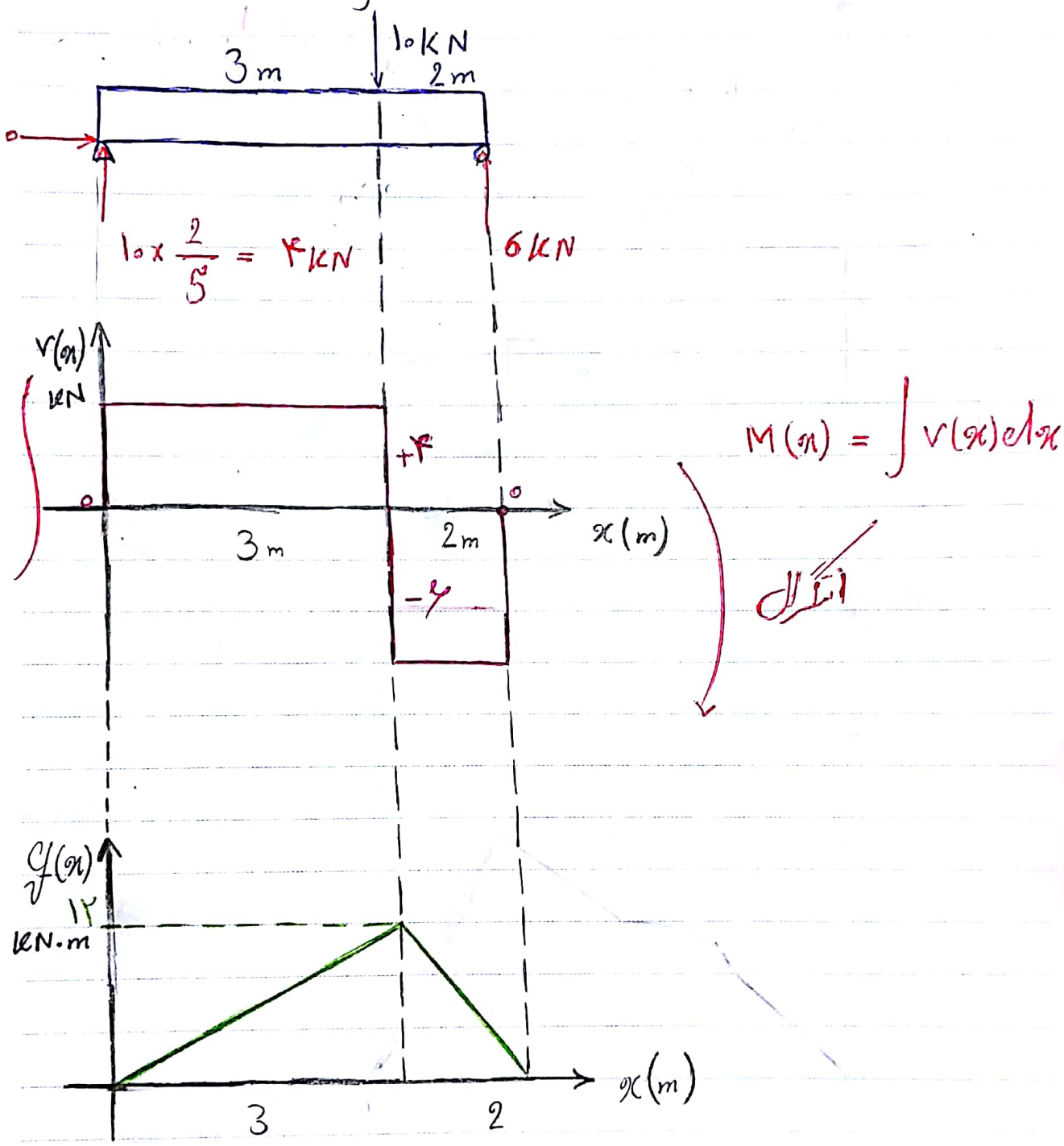
$A = 0.5 \times q_2 \times l_2$

$B = 0.5 \times q_2 \times l_4 \cdots$

$D = 0.5 \times q_4 \times l_6$

Scanned by CamScanner

نکته: نمودار های M و V همواره از صفر شروع و به صفر ختم می شوند.

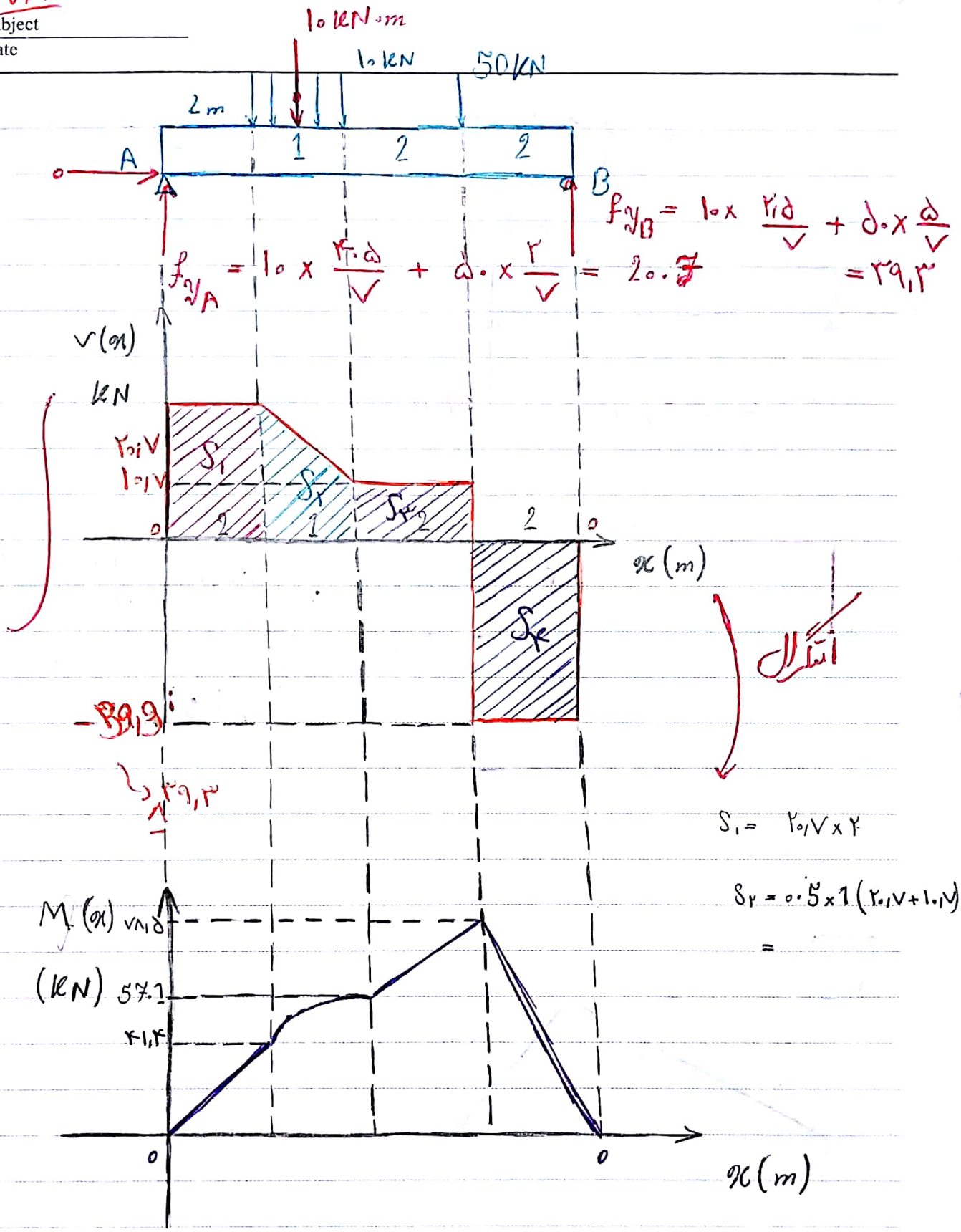


Scanned by CamScanner

VA

Subject

Date



PAPCO

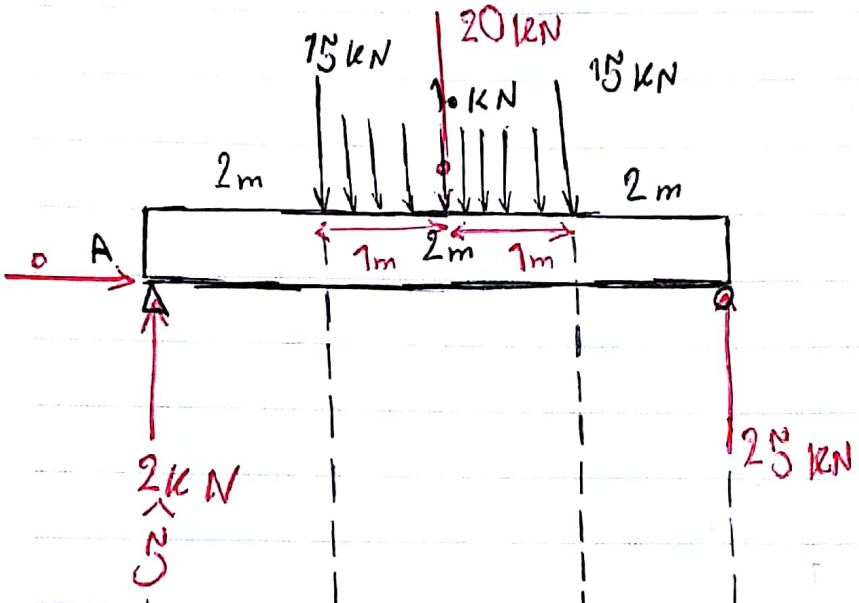
Scanned by CamScanner

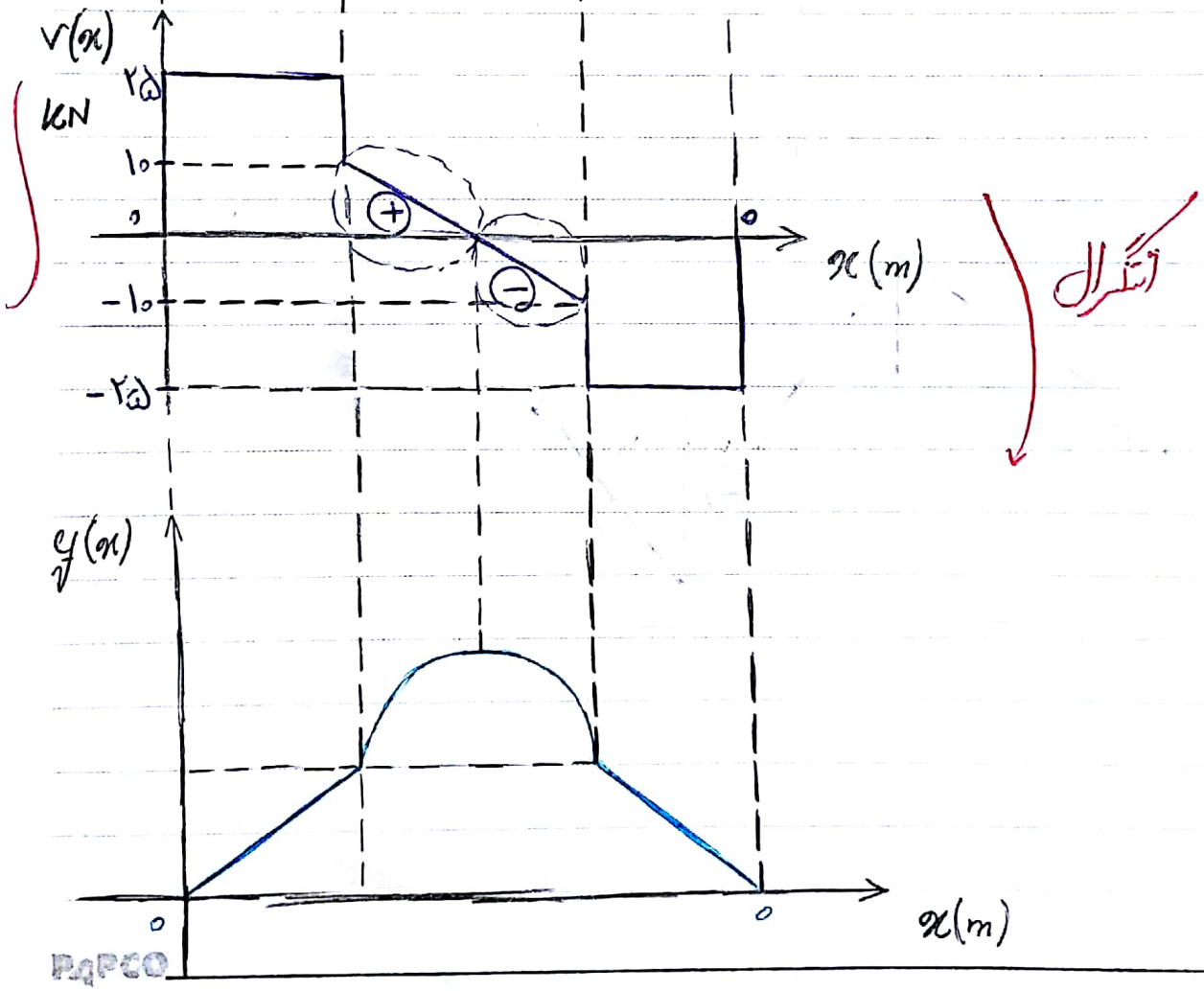
Subject

Date

نکته: وقتی تیر متقارن است و نیرو در دو تکیه گاه مساوی و برابر است بافت بار بالا

تیر

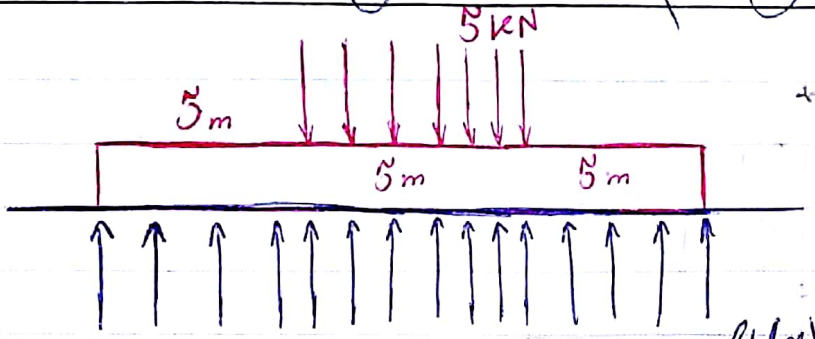




Scanned by CamScanner

Subject
Date

✓ نکته: کوپل ها هیچ تأثیری در رسم نمودارها ال برشی ندارند.



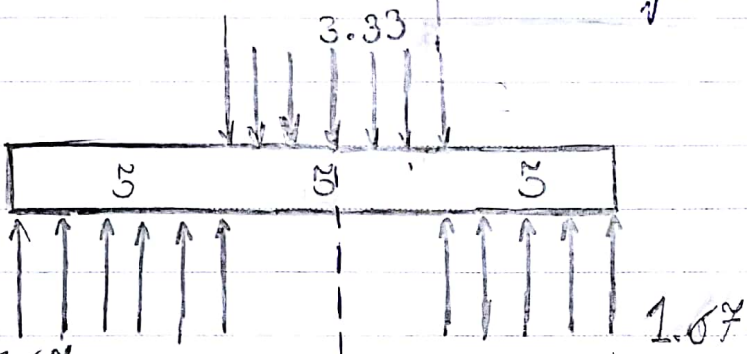
$+\uparrow \sum f_y = 0 \quad q \times 15 = 5 \times 5$

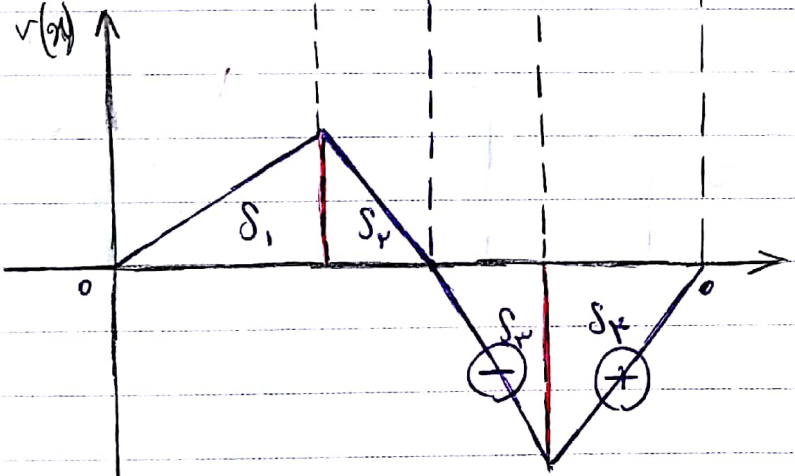
$q = \frac{5}{3} = 1.67$ kN

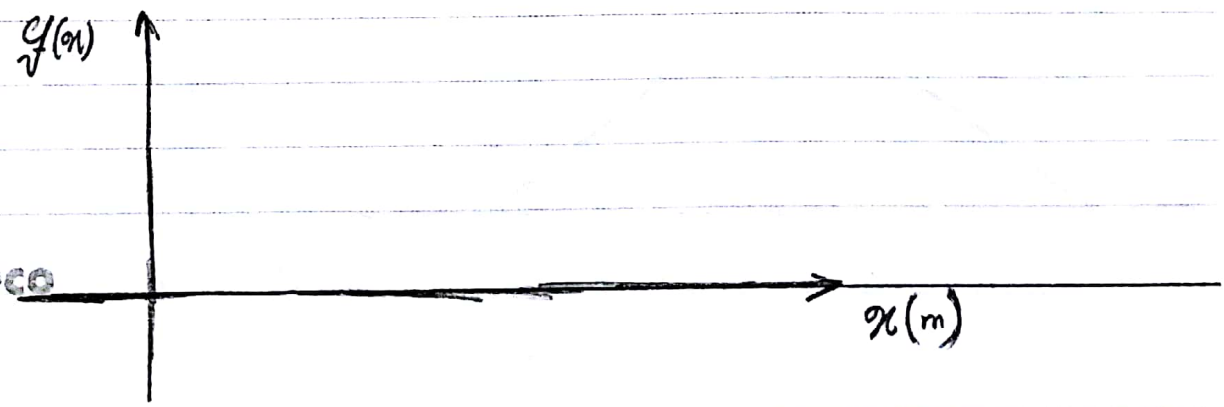
معادل

$q(x)$

تبدیل به







FAPCO

Scanned by CamScanner