معادلات دیفرانسیل

استاد: آقاجانی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

منبع: **www.laag.ir**

انجام پروژه های دانشجویی مهندسی عمران
(کارشناسی و کارشناسی ارشد)

تلفن: ۰۹۳۹ ۳۷۵ ۴۰۰۱

ایمیل: Info@SoftCivil.ir
30vil68@Gmail.com

تلگرام: @SoftCivl.ir

اینستاگرام: @SoftCivil.ir

معادلات دیفرانسیل

استاد: خانم معصومه آقاجانی

معادله دیفرانسیل معمولی: معادلاتی که تنها مشتقات معمولی در آن ها وجود دارد را معادله دیفرانسیل معمولی می نامند

$$L\frac{d^2Q(t)}{d(t)}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t)=R(t)$$ مرتبه ۲

مرتبه معادله دیفرانسیل: بالاترین مرتبه مشتق در معادله را مرتبه معادله دیفرانسیل گویند.

صورت صحیح (وضعی) معادله دیفرانسیل: $y''=2x^2y'y$ ، $y^{(n)}=g(x, f(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$

معادله $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})=0$ صورت ضمنی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n می باشد. اگر بتوان معادله دیفرانسیل را نسبت به بالاترین مرتبه مشتق حل کرده و داشته باشیم: $(y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ در این صورت فرم بالا صورت صحیح معادله دیفرانسیل است.

توجه: برای دوری از ابهام فرم صریح را در معادلات دیفرانسیل به کار می بریم.

$$y'^2+ty'+4y=0 \Rightarrow y'=\frac{-t\pm\sqrt{t^2-16y}}{2}= \Big\langle\; y'_1=-t$$ ابهام وجود در صحت

معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی: معادله دیفرانسیل معمولی $f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$ را خطی گوییم هرگاه

g یک تابع خطی از متغیرهای y و y' و ... و $y^{(n)}$ باشد یعنی:

$$a_0(t)y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_n(t)y=g(t)$$

جواب معادله دیفرانسیل: یک جواب معادله دیفرانسیل به صورت $y^{(n)}=f(t,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$

بر بازه (α,β) تابعی است مانند ϕ به طوریکه ϕ' و ϕ'' و ... و $\phi^{(n)}$ موجود بوده و به ازای هر

$t\in(\alpha,\beta)$ در معادله $\phi^{(n)}(t)=f(t,\phi(t),\phi'(t),\dots,\phi^{(n-1)}(t))$ صدق کند.

مثال ت.م ۲۲:

1) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+t\dfrac{dy}{dt}+2y=\sin t$ خطی از مرتبه ۲

2) $\dfrac{dy}{dt}+ty^2=0$ غیرخطی مرتبه ۱

تمرین ۲۳: تحقیق کنید که تابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل است یا خیر؟

1) $y''-y=0$ $\quad y_1(t)=e^t$, $y_2(t)=\cosh(t)$, $y_3(t)=\cos t$

1) $y_1'=e^t \rightarrow y_1''=e^t$ $\quad y''-y=e^t-e^t=0$ ✓

2) $y_2'(t)=\sinh(t) \rightarrow y_2''=\cosh(t)$ $\quad y''-y=\cosh(t)-\cosh(t)=0$ ✓

3) $y_3'(t)=-\sin t \rightarrow y_3''=-\cos t$ $\quad y''-y=-\cos t-\cos t=-2\cos t$ ✗

Date: ( )

حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول:

$$y' + P(t)y = q(t) \qquad \mu(t) = e^{\int P(t)\,dt}$$

روش فاکتور انتگرال ساز (روش لایب نیتز): حل با این روش مستلزم ضرب معادله دیفرانسیل $y' + P(t)y = q(t)$ در تابعی چون $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$ می باشد. این تابع طوری اختیار شده است که معادله حاصل فوراً قابل انتگرال گیری است. تابع $\mu(t)$ را فاکتور انتگرال می نامند.

مثال: مطلوب است حل معادلات مرتبه اول خطی زیر:

الف) $\frac{dy}{dt} + 2y = 3$ $\qquad \mu(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$

$$e^{2t}\frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y = 3e^{2t} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{d}{dt}(e^{2t}y) = 3e^{2t} \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } t} e^{2t}y = \int 3e^{2t}dt$$

$$e^{2t}y = \frac{3}{2}e^{2t} + C \Rightarrow y = \underbrace{\frac{3}{2} + Ce^{-2t}}_{\text{جواب عمومی}}$$

ب) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = 2 + t$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{2}dt} = e^{\frac{1}{2}t} \qquad e^{\frac{1}{2}t}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}y = 2e^{\frac{t}{2}} + te^{\frac{t}{2}} \rightarrow \frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{2}t}y) = (2+t)e^{\frac{t}{2}}$$

ج) $ty' + 2y = \sin t \qquad t > 0$

انتگرال

$$e^{\frac{1}{2}t}y = \int (2+t)e^{\frac{t}{2}} = 2(2+t)e^{\frac{t}{2}} - 4e^{\frac{t}{2}} + C$$

$2+t$	$e^{\frac{t}{2}}$
1	$2e^{\frac{t}{2}}$
0	$4e^{\frac{t}{2}}$

$$y = 2t + Ce^{-\frac{t}{2}}$$

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin t}{t} \qquad \mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}} = e^{2\ln t} = t^2$$

$t^2\times\left(y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin t}{t}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}(t^2 y) = t\sin t \xrightarrow{\text{انتگرال}} t^2 y = -t\cos t + \sin t + C$

$y = \frac{-\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t} + \frac{C}{t^2}$

حل تمرین ص ۴۶ ۱۲-۱ + ۱۴-۱۰

مثال: حل یک مسئله مقدار اولیه خطی:

مطلوب است حل مسئله های مقدار اولیه زیر:

الف) $ty' + 2y = 4t \quad , \quad y(1) = 2 \qquad \mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln t} = t^2$

$\div t$ دا $\quad y' + \frac{2}{t}y = 4 \xrightarrow{\times t^2} y't^2 + 2ty = 4t^2 \longrightarrow \frac{d}{dt}(t^2 y) = 4t^2 \xrightarrow{\text{انتگرال}}$

$t^2 y = \frac{4t^3}{3} + C \to y = \frac{4t}{3} + \frac{C}{t^2} \xrightarrow{y(1)=2} 2 = \frac{4}{3} + C \to \boxed{C = \frac{2}{3}}$

ب) $t^3y' + 4t^2y = e^{-t} \quad , \quad y(-1) = 0 \qquad \mu(t) = e^{\int \frac{4}{t}} = e^{4\ln t} = t^4$

$\div t^3$ دا $\quad y' + \frac{4}{t}y = \frac{e^{-t}}{t^3} \xrightarrow{\times t^4} y't^4 + 4t^3 y = te^{-t} \longrightarrow \frac{d}{dt}(t^4 y) = te^{-t}$

t	e^{-t}
1	$-e^{-t}$
0	e^{-t}

$\xrightarrow{\text{انتگرال}} t^4 y = -te^{-t} - e^{-t} + C \to y = \frac{-e^{-t}}{t^3} - \frac{e^{-t}}{t^4} + \frac{C}{t^4}$

$\xrightarrow{y(-1)=0} 0 = e^1 - e^1 - C \Rightarrow \boxed{C = 0}$

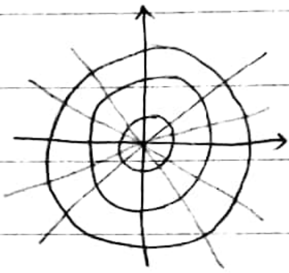
مسیرهای متعامد: برای یافتن مسیرهای عمود بر یک دسته منحنی ابتدا نسبت به x مشتق گیری کرده و

را حذف می کنیم سپس y' را به $-\frac{1}{y'}$ تبدیل می کنیم، معادله حاصل را حل می کنیم، جواب مسیرهای متعامد بر دسته منحنی است.

$x^2+y^2=C^2 \rightarrow 2x+2yy'=0 \quad 2x+2y(-\frac{1}{y'})=0 \rightarrow 2xy'-2y=0$

$\mu=e^{\int -\frac{1}{x}}=e^{-\ln x}$

$y'-\frac{y}{x}=0 \quad \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}y)=0 \Rightarrow \frac{1}{x}y=C \rightarrow y=Cx$



$y=Cx^2 \quad y'=C2x \rightarrow C=\frac{y'}{2x}$

$\Rightarrow y=\frac{y'}{2x}\times x^2 \Rightarrow y'=\frac{2y}{x} \Rightarrow y'-\frac{2y}{x}=0 \quad \mu(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^2}y=C \Rightarrow y=Cx^2$

در بازه‌ها دوبار انتگرال

تمرین ۲۴: مطلوب است تعیین معادله دیفرانسیل دسته جواب های روبرو: $y=C_1\sin(\omega x+C_2)$

$y'=C_1\omega\cos(\omega x+C_2) \rightarrow y''=-\underbrace{C_1\omega^2\sin(\omega x+C_2)}_{y} \rightarrow \boxed{y''=-\omega^2 y}$

$y=C_1x+C_2\sin x \xrightarrow{*\otimes} y=(y'+\frac{y''\cos x}{\sin x})x+\frac{-y''}{\sin x}\sin x \Rightarrow \square$ ت. ۱۰ ص ۲۴

$y'=C_1+C_2\cos x \rightarrow y''=-C_2\sin x \rightarrow C_2=\frac{-y''}{\sin x}$ ★

* یا $y'=C_1+\frac{-y''}{\sin x}\times\cos x \rightarrow C_1=y'+\frac{y''}{\sin x}\cos x \quad C_1=\frac{y+y''}{x}$

نکته: پوش به صورت منحنی هم می توانند باشند

با پیدا کردن پوش ابتدا معادله را ... یک طرف و بقیه طرف دیگر

$(x-c)^2+y^2=1$ جواب دارد

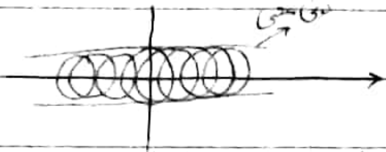
$x-c=\pm\sqrt{1-y^2}$ جواب ندارد ... با ... باشد

Date: ( )

$\square \Rightarrow y = y'x + \frac{y''x}{\sin x} \cos x \times x$

پوش دسته منحنی:

$(x-c)^2+y^2=1$



$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } c} -2(x-c)=0 \Rightarrow x=c \xrightarrow{\text{جایگذاری}} (c-c)^2+y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

منحنی $y=y(x)$ را که بر تمام منحنی های $\phi(x,y,c)=0$ مماس باشد و در هر نقطه‌ی x دیگر خود حداقل بر یک منحنی از دسته منحنی $\phi(x,y,c)=0$ مماس باشد را پوش دسته منحنی می نامند. برای بدست آوردن پوش دسته منحنی نسبت به c مشتق می گیریم c را حذف کرده و جواب ها را می یابیم

مثال: مطلوب است پوش دسته منحنی $(x-c)^2+y^2=1$

$-2(x-c)=0 \Rightarrow x=c \quad (c-c)^2+y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

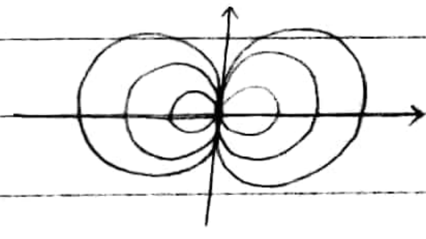
س ۲۴ ص ۲۵

$y=cx+\frac{1}{4}c^4 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } c} 0=x+c^3 \Rightarrow c=\sqrt[3]{-x}$

$y=\sqrt[3]{-x}\times x+\frac{1}{4}\sqrt[3]{(-x)^4}$

مسیرهای متعامد: ۱- مشتق نسبت به x ۲- حذف c ۳- y' را با $-\frac{1}{y'}$ عوض کرده ۴- معادله را حل، جواب مسیر متعامد است

$y^2+(x-c)^2=c^2$



$2yy'+2(x-c)=0 \xrightarrow{y' \to -\frac{1}{y'}} c=yy'+x$

ATLAS NOTEBOOK

$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}$ $y^2+(yy')^2=(x+yy')^2 \rightarrow y^2+(yy')^2 = x^2+2xyy'+(yy')^2$

$y^2=x^2+2xyy' \xrightarrow{y'\to -\frac{1}{y'}} y^2-2xy(-\frac{1}{y'})-x^2=0 \rightarrow y'y^2+2xy-x^2y'=0$

ص ۲۴ سؤال ۱۶-۱۸ حل

ص ۲۴ سؤال ۱۷: مطلوب است مسیرهای متعامد منحنی:

$x^2=4c(y+c) \rightarrow 2x=4cy' \rightarrow c=\frac{2x}{4y'}=\frac{x}{2y'}$

$x^2=\frac{4x}{2y'}(y+\frac{x}{2y'}) \xrightarrow{y'\to -\frac{1}{y'}} x^2=\frac{-4}{2}xy'(y+\frac{-xy'}{2}) \rightarrow$

$x^2+2xyy'-\frac{2xy'xy'}{2}=0 \rightarrow x^2+2xyy'-(xy')^2=0 \xrightarrow{\div x} x+2yy'-xy'^2=0$

$y'=\frac{-2y\pm\sqrt{4y^2+4x^2}}{-2x}=\boxed{\frac{-y\pm\sqrt{y^2+x^2}}{-x}}$ جواب های معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد

سؤال ۱۱: $x^2+y^2=c^2 \rightarrow 2x+2yy'=0 \xrightarrow{y'\to -\frac{1}{y'}} 2x+\frac{2y}{-y'}=0 \rightarrow$

$2xy'=2y \rightarrow xy'=y \rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y}=\frac{1}{x} \rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \rightarrow \ln y=\ln x+\ln c \rightarrow y=cx$

معادلات جدایی پذیر: معادله $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ جدایی پذیر نامیده می شود هرگاه بتوان آن را به شکل

$M(x)dx+N(y)dy=0$ نوشت.

روش حل معادلات جدائی پذیر: برای حل معادله جدائی پذیر اساساً یک روند اجرا می‌شود. فرض کنیم

H_1 و H_2 به ترتیب پادمشتق‌های دلخواه M و N باشند. در این صورت $H_1(x)+H_2(y)=C$

جواب معادله دیفرانسیل است.

مثال. مطلوب است حل معادلات زیر:

الف) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{1-y^2}$ $x^2dx+(y^2-1)dy=0$

↓ انتگرال

$\boxed{\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{y^3}{3}-y=C}$ جواب عمومی

ب) $y'=\dfrac{x^2}{y(1+x^2)}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y(1+x^2)} \rightarrow y\,dy=\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$ $=1-\frac{1}{1+x^2}$

$\dfrac{y^2}{2}=x-\tan^{-1}x+C$

مثال ۲ ص ۴۱ مسئله مقدار اولیه زیر را حل کرده و بازه جواب را تعیین کنید.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$ $y(0)=-1$

$2(y-1)\,dy=(3x^2+4x+2)\,dx$

$y^2-2y=\dfrac{3x^3}{3}+2x^2+2x+C \rightarrow \underbrace{y^2-2y+1}_{(y-1)^2}=x^3+2x^2+2x+1+C$

$y=1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+1+C} \xrightarrow{y(0)=-1} -1=1\pm\sqrt{1+C} \rightarrow -2=-\sqrt{1+C} \Rightarrow C=3$

$y = 1 \pm \sqrt{x^3+2x^2+2x+\cancel{1}4} = 1-\sqrt{x^2(x+2)+2(x+2)} \rightarrow y = 1-\sqrt{\underbrace{(x+2)}_{\geq 0}\underbrace{(x^2+2)}_{\geq 0}}$

$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

مثال: مطلوب است حل معادله دیفرانسیل زیر:

$(1+x^2)(dy-dx) = 2xy\,dx$

$(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}-1\right) = 2xy$ خطی مرتبه اول $\xrightarrow{\div(1+x^2)} \frac{dy}{dx} - 1 = \frac{2x}{1+x^2}y \xrightarrow{\times e^{\int \frac{-2x}{1+x^2}} = e^{-\ln(1+x^2)}}$

$(1+x^2)^{-1}\left(\frac{dy}{dx}-1\right) = \frac{2x}{1+x^2}y(1+x^2)^{-1} \longrightarrow \frac{dy}{dx}(1+x^2)^{-1} - \frac{2x}{1+x^2}(1+x^2)^{-1}y = (1+x^2)^{-1}$

$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{1}{1+x^2}y = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c \longrightarrow y = (1+x^2)(\tan^{-1}x+c)$

معادله برنولی: هر معادله به فرم $y' + P(x)y = q(x)y^n$ که در آن n صفر و یک نباشد به معادله برنولی معروف است. روش حل: طرفین رو تقسیم بر y^n می‌کنیم و سپس تغییر متغیر $y^{1-n} = z$ را می‌دهیم

$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)y}{y^n} = \frac{q(x)y^n}{y^n} \longrightarrow \frac{y'}{y^n} + P(x)y^{1-n} = q(x) \quad *$

$y^{1-n} = z \xrightarrow{\text{مشتق}} (1-n)y'y^{-n} = z' \longrightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n} \xrightarrow{*}$

$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = q(x)$

مثال: مطلوب است حل معادله دیفرانسیل:

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{2y^3}{x^7} \qquad n=3$$

$$\xrightarrow{\div y^3} \frac{y'}{y^3} - \frac{1}{xy^2} = \frac{2}{x^7} \to z = y^{-2} \xrightarrow{\text{مشتق}} z' = -2y^{-3}y' \to \frac{y'}{y^3} = \frac{z'}{-2}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{z'}{-2} - \frac{1}{x}z = \frac{2}{x^7} \xrightarrow{\times -2} z' + \frac{2}{x}z = \frac{-4}{x^7} \longrightarrow e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$x^2 z' + \frac{2x^2}{x} z = \frac{-4}{x^{7}}\cdot x^2 \xrightarrow{\text{انتگرال}} x^2 z = \int \frac{-4}{x^5} \to x^2 z = x^{-4} + c$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{x^6}{1+cx^6} \Rightarrow y = \pm \frac{x^3}{\sqrt{1+cx^6}}$$

تمرین ص ۵۳ ، حل

معادله دیفرانسیل کلرو:

$$y = xy' + f(y')$$

حل: $\boxed{y' = P}$ $\qquad y = xP + f(P) \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \frac{dy}{dx} = P + x\frac{dP}{dx} + f'(P)\cdot\frac{dP}{dx}$

$$P = P + x\frac{dP}{dx} + f'(P)\frac{dP}{dx} \to \left(x + f'(P)\right)\frac{dP}{dx} = 0$$

حالت اول) $\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P = C \Rightarrow \boxed{y = Cx + f(C)}$ جواب عمومی معادله کلرو

حالت دوم) $x + f'(P) = 0$

$$\begin{cases} x + f'(P) = 0 \\ y = xP + f(P) \end{cases}$$

جواب استثنایی (همان پوش کلرو)

نکته: گاهی P حذف می‌شود و یک معادله به صورت x نگاه داریم
P را حذف می‌کنیم و y را برحسب x بدست می‌آوریم که به این جواب خاص استثنایی معادله کلرو می‌گویند

نکته: می توان ثابت کرد که جواب استثنائی معادله کلرو همان پوش دسته جواب عمومی منحنی است.

مثال: مطلوب است حل معادله زیر:

$$y = xy' + \overbrace{y'^2 + 1}^{f(y')}$$

جواب عمومی: $y = cx + c^2 + 1$

جواب استثنائی: $\begin{cases} x + 2p = 0 \Rightarrow p = -\frac{x}{2} \\ y = px + p^2 + 1 \end{cases}$ $\xrightarrow{\downarrow}$ $y = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + 1$ $\Rightarrow$ $y = \frac{-x^2}{4} + 1$

$f(p) = p^2 + 1$

معادله دیفرانسیل لاگرانژ: هر معادله دیفرانسیل مرتبه به صورت $y = x.\, g(y') + f(y')$ را معادله لاگرانژ نامند. برای حل مانند معادله کلرو $p = y'$ فرض می کنیم لذا از طرفین نسبت به x مشتق می گیریم پس از حل x برحسب p محاسبه می شود و با استفاده از معادله بالا ★ و این معادله می توان p را حذف کرد و y را برحسب x یافت.

$$\xrightarrow{y'=p} ★\ y = x.\, g(p) + f(p) \longrightarrow \frac{dy}{dx} = g(p) + x g'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow p = g(p) + (x g'(p) + f'(p))\frac{dp}{dx}$$

توجه: اگر عملاً p قابل حذف نباشد، x و y را برحسب p حساب می کنیم و می گوییم جواب ها را به صورت پارامتری مشخص نمائیم.

Date:

مثال: $y = 2xy' + y'^3 \xrightarrow{y'=p} y = 2xp + p^3 \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dy}{dx} = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}$

$-p = \frac{dp}{dx}(2x + 3p^2) \longrightarrow -p\frac{dx}{dp} = (2x + 3p^2)\,dp \xrightarrow{\times -\frac{1}{p}} \frac{dx}{dp} = \frac{-2x}{p} - 3p$

$\longrightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -3p \xrightarrow{\times e^{\int \frac{2}{p}dp} = p^2} p^2 x' + 2px = -3p^3 \xrightarrow{\text{انتگرال}} p^2 x = -\frac{3}{4}p^4 + C$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{4}p^2 + C \\ y = 2xp + p^3 \end{cases}$$ جواب پارامتری لاگرانژ

مثال ۸:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2} \xrightarrow{\text{جدایی پذیر}} (1+y^2)\,dy = x^2\,dx \xrightarrow{\int} \boxed{y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C}$

مثال: مطلوب است حل معادله زیر: (۳)

$dy = 2x(y-1)\,dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x(y-1)$

صورت / ... $y \neq 1 \xrightarrow{\div y-1} \frac{dy}{y-1} = 2x\,dx \Rightarrow \ln|y-1| = x^2 + C$ جواب عمومی

$y = 1 \Rightarrow y' = 0$ جواب استثنایی

معادله ریکاتی: $y' + P(x)y + q(x)y^2 = R(x)$

روش حل: اگر y_1 یک جواب خصوصی این معادله باشد آنگاه $y = y_1 + \frac{1}{z}$ جواب عمومی معادله است.

Date: ( )

مثال: مطلوب است حل معادله $y' - \frac{1}{x}y + y^2 = x^2$ که $y_1 = x$ یک جواب خصوصی آن است.

معادله ریکاتی است. $y = x + \frac{1}{z}$ ، $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1 - \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{z}\right) + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - x^2 = 1 - \frac{z'}{z^2} - 1 - \frac{1}{xz} + x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} - x^2 = 0$$

$$-\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{x} - 2x\right) + \frac{1}{z^2} = 0 \xrightarrow{\times -z^2} z' + z\left(\frac{1}{x} - 2x\right) - 1 = 0 \quad \xrightarrow{②}$$

$$e^{\int \frac{1}{x} - 2x} = e^{(\ln x - x^2)} = \frac{e^{\ln x}}{e^{x^2}} = xe^{-x^2} \quad ①$$

$$\xrightarrow{①} xe^{-x^2} z' + xe^{-x^2} z\left(\frac{1}{x} - 2x\right) = xe^{-x^2} \xrightarrow{\int} zxe^{-x^2} = \int xe^{-x^2}$$

$u \to du = -2xe^{-x^2}$

$$\int xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}\int du = -\frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}e^{-x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

$$\longrightarrow zxe^{-x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \rightarrow z = -\frac{1}{2x} + \frac{C}{xe^{-x^2}} = \frac{-1 + 2ce^{x^2}}{2x}$$

$$\rightarrow \boxed{y = x + \frac{2x}{-1 + 2ce^{x^2}}}$$

معادلات همگن:

هر معادله به شکل $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ را معادله همگن مرتبه اول می‌نامند.

روش حل: قرار می‌دهیم $\frac{y}{x} = t$ یا $y = xt$ در این صورت $\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t$

مثال: معادله $y' = \frac{x - y}{2x + y}$ یک معادله همگن است؟ می‌توان y' را به صورت تابعی از $\frac{y}{x}$ به دست

$$y' = \frac{\frac{x - y}{x}}{\frac{2x + y}{x}} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{2 + \frac{y}{x}}$$

مثال: مطلوب است حل معادله $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ همگن

$$y' = \frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x-y}{x}} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \xrightarrow[y' = xt'+t]{\frac{y}{x}=t} \Rightarrow \frac{1+t}{1-t} = xt'+t \rightarrow xt' = \frac{1+t-t(1-t)}{1-t} = \frac{1+t^2}{1-t}$$

$$\frac{dt}{dx}x = \frac{1+t^2}{1-t} \rightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{1-t}{1+t^2}dt \xrightarrow{\int} \ln x + c = \int \frac{1}{1+t^2}dt - \int \frac{t}{1+t^2} \rightarrow$$

$$\ln x + c = \tan^{-1} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \rightarrow \ln x + \ln c_1 = \tan^{-1} t - \ln\sqrt{1+t^2} \rightarrow$$

$$\tan^{-1} t = \ln cx\sqrt{1+t^2} \rightarrow cx\sqrt{1+t^2} = e^{\tan^{-1} t} \xrightarrow{t=\frac{y}{x}} cx\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = e^{\tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

$$\rightarrow e^{\tan^{-1}\frac{y}{x}} = c\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}$$

حل معادلات بفرم: $y' = \dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$

برای حل این معادلات سه حالت در نظر می‌گیریم:

<u>حالت اول</u>: اگر $c = c_1 = 0$ آنگاه معادله همگن است و به روش معادله همگن حل می‌کنیم.

<u>حالت دوم</u>: اگر دترمینان ضرایب x و y در صورت و مخرج صفر باشند یعنی $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$

در این صورت داریم: $ab_1 = a_1b \xrightarrow{\div a_1b_1} \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = k \Rightarrow a = ka_1 \,,\, b = kb_1$

سپس قرار می‌دهیم $z = a_1x + b_1y \Rightarrow z' = a_1 + b_1y'$

$$y' = \frac{k(a_1x+b_1y)+c}{a_1x+b_1y+c_1} \Rightarrow \frac{z'-a_1}{b_1} = \frac{kz+c}{z+c_1} \Rightarrow z' = b_1\left(\frac{kz+c}{z+c_1}\right)+c$$

در این حالت معادله جدا پذیر است و با انتگرال گیری از طرفین جواب عمومی را می توان یافت.

حالت سوم : اگر حالت اول و دوم برقرار نباشند در این صورت با انتقال مبدا به نقطه (α , β)

می توان معادله را به یک معادله دیفرانسیل همگن تبدیل کرد

$x = X + \alpha \Rightarrow dx = dX$ ①

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} \times \frac{dX}{dx}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{d(Y+\beta)}{dX} = \frac{dY}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a(X+\alpha) + b(Y+\beta)+c}{a_1(X+\alpha) + b_1(Y+\beta)+c_1} \longrightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + \overbrace{(\alpha a + \beta b + c)}^{=0}}{a_1X + b_1Y + \underbrace{(\alpha a_1 + \beta b_1 + c_1)}_{=0}}$$

$$\begin{cases} \alpha a + \beta b + c = 0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 + c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}$$

جواب معادله همگن است
حل می کنیم

دو معادله دو مجهول α , β

مثال : مطلوب است حل معادله زیر

$$y' = \frac{2x + 2y - 4}{x + y} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x + y = z \rightarrow z' = 1 + y' \rightarrow y' = z' - 1$$

$$y' = \frac{2(x+y) - 4}{z} = \frac{2z - 4}{z} \rightarrow z' - 1 = \frac{2z-4}{z} \rightarrow z' = \frac{3z - 4}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3z-4}{z} \rightarrow \frac{z}{3z-4}\, dz = dx \xrightarrow{\int} \int \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}(3z-4)}{3z-4}\, dz = \int dx$$

$= \frac{1}{3}(3z-4) + \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \int \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3z-4}\right)dz + \int \frac{1}{3}dz = \int dx \Rightarrow \frac{4}{9}\ln|3z-4| + \frac{1}{3}z = x + C \xrightarrow{z=x+y}$$

$$\frac{4}{9}\ln\left|3(x+y)-4\right| + \frac{1}{3}(x+y) = x + C$$

مثال: مطلوب است حل معادله زیر

$$y' = \frac{x+y-2}{x-y}$$

حالت ۳ $\to (\alpha,\beta)$ با

$$\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases} \quad \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y+\alpha+\beta-2}{X-Y+\alpha-\beta} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-2=0 \\ \alpha-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=1$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y} \xrightarrow{\text{حل}} e^{\tan^{-1}\frac{Y}{X}} = C\frac{X}{|X|}\sqrt{X^2+Y^2} \xrightarrow[X=x-1]{Y=y-1} e^{\tan^{-1}\frac{y-1}{x-1}} = C\frac{x-1}{|x-1|}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

مثال: مطلوب است حل معادله زیر

$$y = x(2y'+1) + y'^2 \qquad \text{فرض} \to y' = P$$

$$y = x(2P+1) + P^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} \overset{P}{y'} = (2P+1) + 2xP' + 2PP' \to -P-1 = (2x+2P)\frac{dP}{dx}$$

$$-(P+1)\,dx = (2x+2P)dP \to -(P+1)\frac{dx}{dP} - 2x = 2P \xrightarrow{\div -(P+1)} \frac{dx}{dP} + \frac{2x}{P+1} = \frac{2P}{-(P+1)}$$

$$\xrightarrow{e^{\int \frac{2}{P+1}} = e^{2\ln(P+1)} = (P+1)^2} (P+1)^2\frac{dx}{dP} + (P+1)^2\frac{2x}{P+1} = -2P(P+1) \xrightarrow{\int}$$

$$(P+1)^2 x = -\frac{2}{3}P^3 - P^2 + C \to \begin{cases} x = \dfrac{-\frac{2}{3}P^3 - P^2 + C}{(P+1)^2} \\ y = x(2P+1) + P^2 \longrightarrow y = \left(\dfrac{-\frac{2}{3}P^3 - P^2 + C}{(P+1)^2}\right)(2P+1) + P^2 \end{cases}$$

جواب است P از تعیین بر حسب x با است

معادلات نوع ۴:

$$y' = f(ax+by+c)$$

روش حل: از تغییر متغیر $z = ax+by+c$ استفاده می کنیم و داریم

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dz}{dx}-a}{b}$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}-a}{b}=f(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx}=bf(z)+a$$ جدایی پذیر

این معادله جدایی پذیر را حل می کنیم و جواب z را برحسب x می یابیم سپس بجای z ، $ax+by+c$

تمارین دهم

مثال: مطلوب است حل معادله:

$$y'=(x+y+2)^2 \qquad x+y+2=z \xrightarrow{\text{مشتق}} 1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx} \longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$$

$$\frac{dz}{dx}-1=z^2 \rightarrow dz=dx(z^2+1) \rightarrow \frac{dz}{z^2+1}=dx \xrightarrow{\int}$$

$$\tan^{-1}z=x+c \rightarrow z=\tan(x+c)=x+y+2 \rightarrow \underline{y=\tan(x+c)-x-2}$$

تمرین:

1) $3y^2y'-ay^3-x-1=0$

$e^{\frac{a}{3}x}y^3=\frac{1}{9}\left((x+1)\frac{9}{a}e^{\frac{a}{9}x}-\frac{81}{a^2}e^{\frac{a}{9}x}\right)+c$

2) $(x+2y+1)dx-(2x-3)dy=0$

3) $y=xy'-\frac{1}{y'}$

$y=3\sqrt[3]{-2}\,x^{\frac{2}{3}}$

معادله دیفرانسیل کامل:

در کل $M(x,y)dx+N(x,y)dy$

معادله دیفرانسیل $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ یک معادله دیفرانسیل کامل است اگر بتوان تابعی

مانند ψ یافت که $\begin{cases}\frac{d\psi}{dx}=M(x,y)\\ \frac{d\psi}{dy}=N(x,y)\end{cases}$ در این صورت $\psi(x,y)=c$ جواب ضمنی معادله است.

$$y' = -\frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \longrightarrow M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$$

شناخت معادله دیفرانسیل کامل:

فرض کنیم M و N و M_y و N_x در ناحیه مستطیلی $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ پیوسته باشند در این

صورت معادله کامل است هرگاه: $M_y(x,y) = N_x(x,y)$

مشتق نسبت به y

مثال: مطلوب است حل معادلات زیر:

ص ۵۲ ع ۱

$$1)\ (\overbrace{y\cos x + 2xe^y}^{M(x,y)}) + (\overbrace{\sin x + x^2 e^y - 1}^{N(x,y)})\,y' = 0$$

در توابع $N(x,y)$, $M(x,y)$, مشتقات جزئی آن ها در R^2 پیوسته اند همچنین

y را عدد در نظر بگیریم

$$N_x = \cos x + 2xe^y$$
$$M_y = \cos x + 2xe^y \Rightarrow N_x = M_y$$

بنابراین معادله کامل است

بنابراین می توان ψ ای را یافت که

$$\frac{d\psi}{dx} = M(x,y) \quad , \quad \frac{d\psi}{dy} = N(x,y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{dx} = y\cos x + 2xe^y \xRightarrow{\int dx} \psi(x,y) = y\sin x + x^2 e^y + g(y) & ① \\ \dfrac{d\psi}{dy} = \sin x + x^2 e^y - 1 & ② \end{cases}$$

از ① مشتق می گیریم

$$\frac{d\psi}{dy} = \sin x + x^2 e^y + \underbrace{g'(y)}_{=\frac{dg}{dy}} \Rightarrow \sin x + x^2 e^y - 1 = \sin x + x^2 e^y + g'(y)$$

$$g'(y) = -1 \xrightarrow{\int dy} g(y) = -y$$

$$\psi(x,y) = y \sin x + x^2 e^y - y \qquad \boxed{y \sin x + x^2 e^y - y = c}$$ جواب عمومی

مثال

$$1)\ (2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)\,y' = 0$$

$$M(x,y) = 2xy^2 + 2y \rightarrow M_y = 4xy + 2$$

$$N(x,y) = 2x^2y + 2x \rightarrow N_x = 4xy + 2$$

M و N و مشتقات مرتبه اول آنها M_y و N_x پیوسته و $M_y = N_x$ پس معادله کامل است

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{dx} = 2xy^2 + 2y \Rightarrow \psi(x,y) = x^2y^2 + 2xy + g(y) \quad (*) \\[2ex] \dfrac{d\psi}{dy} = 2x^2y + 2x \quad (1) \end{cases}$$

$$\frac{d\psi}{dy} = 2x^2y + 2x + g'(y) \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 2x^2y + 2x = 2x^2y + 2x + g'(y) \rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = 0$$

$$\psi(x,y) = x^2y^2 + 2xy + 0 \Rightarrow \boxed{x^2y^2 + 2xy = c}$$ جواب عمومی

معادلات غیر کامل:

مثال: $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\,y' = 0 \qquad M_y = 3x + 2y \neq N_x = 2x + y \Rightarrow$ کامل نیست

عامل های انتگرال ساز: گاهی یک معادله دیفرانسیل غیرکامل را می توان با ضرب آن در یک عامل یا فاکتور انتگرال ساز تبدیل به یک معادله کامل کرد.

تعیین عامل های انتگرال ساز:

الف) عامل انتگرال ساز برحسب x:

هرگاه $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ فقط تابعی از x باشد آنگاه یک عامل انتگرال ساز مانند $\mu(x) = e^{\int Q(x) = \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ موجود است که معادله را تبدیل به یک معادله کامل کند.

مثال:

$$(\overbrace{3xy + y^2}^{M(x,y)}) + (\overbrace{x^2 + xy}^{N(x,y)})y' = 0$$

$M_y = 3x + 2y \qquad N_x = 2x + y \Rightarrow M_y \neq N_x$ معادله کامل نیست

$$Q(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x + y}{\cancel{x^2 + xy}\ x(x+y)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}} = x$$

معادله کامل

(با ترتیب جدید)

$$\xrightarrow{\text{ضرب معادله اصلی در } x} x\left((3xy + y^2) + (x^2 + xy)y'\right) = 0 \times x \Rightarrow 3x^2y + xy^2 + x^3y' + x^2yy' = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{dx} = 3x^2y + xy^2 \overset{\int dx}{\Rightarrow} \psi(x,y) = x^3y + \dfrac{x^2}{2}y^2 + g(y) \\ \dfrac{d\psi}{dy} = x^3 + x^2y \end{cases}$$

$$\frac{d\psi}{dy} = x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + x^2y \Rightarrow g'(y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x,y) = x^2y + \frac{x^2y^2}{2} + 0 = C$$

تمرین ۲۲ ص ۲۵ ، وجود پوش دسته منحنی زیر را بررسی کنید.

$xy = C$

نکته: خانواده‌ی $y = F(x,c)$ دارای پوش $y = \varphi(x)$ است اگر و فقط اگر تابعی مانند $C(x)$ موجود باشد که $F_c(x,c)=0$

$\varphi(x) = F(x, c(x))$

$$y = \frac{c}{x} \Rightarrow F_c(x,c) = \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow$$ بنابراین $y = \frac{c}{x}$ دارای پوش نیست

ب) عامل انتگرال ساز برحسب y:

اگر در معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ تابع $\frac{N_x - M_y}{M} = Q(y)$ تابعی از y باشد در این صورت عامل

انتگرال سازی به فرم $e^{\int Q(y)dy}$ خواهیم داشت.

مثال:

$$\overset{M(x,y)}{y}\,dx + (\overset{N(x,y)}{2xy - e^{-2y}})\,dy = 0$$

$M_y = 1 \quad , \quad N_x = 2y - 0 \Rightarrow M_y \neq N_x$ معادله کامل نیست

$Q(x) = \frac{1-2y}{2xy - e^{-2y}}$ برحسب x نیست $\qquad Q(y) = \frac{2y-1}{y}$ ✓

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2y-1}{y}dy = \int 2 - \int \frac{1}{y}dy} = e^{2y - \ln y} = \frac{e^{2y}}{y}$$ عامل انتگرال ساز

$\frac{e^{2y}}{y} \times y\,dx + \frac{e^{2y}}{y}(2xy - e^{-2y})dy = 0 \rightarrow e^{2y}dx + (e^{2y}2x - \frac{1}{y})dy = 0$

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = e^{2y} \xrightarrow{\int dx} xe^{2y} + g(y) = \psi(x,y) \\ \frac{d\psi}{dy} = e^{2y}2x - \frac{1}{y} \xrightarrow{\int dy} 2xe^{2y} - \ln y \end{cases}$$

$\frac{d\psi}{dy} = 2xe^{2y} + g'(y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y} \Rightarrow g'(y) = \frac{-1}{y} \Rightarrow g'(y) = -\frac{1}{y} \Rightarrow g(y) = -\ln y$

$\boxed{\psi(x,y) = xe^{2y} - \ln y = c}$

ج) عامل انتگرال ساز برحسب $z = g(x,y)$

اگر در معادله غیرکامل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کسرهای $\frac{M_y - N_x}{N}$ و $\frac{N_x - M_y}{M}$ به ترتیب توابعی برحسب x و y نباشند در این صورت می توان عامل $x^\alpha y^\beta$ را در طرفین معادله ضرب کرده و در صورت امکان α و β را چنان اختیار کرده که معادله حاصل یک معادله کامل بشود گردد

مثال: مطلوب است حل معادله زیر:

$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$

حل: $M_y \neq N_x$ کامل نیست $\frac{M_y - N_x}{N} \neq Q(x)$, $\frac{N_x - M_y}{M} \neq Q(y)$

طرفین را در $x^\alpha y^\beta$ ضرب می کنیم

$$(2x^{\alpha+1}y^{4+\beta}e^{y}+2x^{1+\alpha}y^{3+\beta}+x^{\alpha}y^{\beta+1})dx+(x^{2+\alpha}y^{4+\beta}e^{y}-x^{2+\alpha}y^{2+\beta}-3x^{\alpha+1}y^{\beta})dy=0$$

$$M'_y=2x^{\alpha+1}\left((4+\beta)y^{3+\beta}e^{y}+e^{y}y^{4+\beta}+(3+\beta)y^{2+\beta}\right)+x^{\alpha}(\beta+1)y^{\beta}$$

$$N'_x=(2+\alpha)x^{1+\alpha}y^{4+\beta}e^{y}-(2+\alpha)x^{1+\alpha}y^{2+\beta}-3(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

$2=2+\alpha \rightarrow \alpha=0$ ①

$2(4+\beta)=0 \rightarrow \beta=-4$ ②

$-(2+\alpha)=2(3+\beta) \xrightarrow{①,②} \checkmark$

$(\beta+1)=-3(\alpha+1) \longrightarrow \checkmark$

$$\left(2xe^{y}+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^{4}}\right)dx+\left(x^{2}e^{y}-x^{2}y^{-2}-3xy^{-4}\right)dy=0$$

$$\psi_x=\frac{d\psi}{dx}=2xe^{y}+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^{4}} \overset{\int dx}{\Longrightarrow} \psi(x,y)=x^{2}e^{y}+\frac{x^{2}}{y}+\frac{x}{y^{4}}+g(y)$$

$$\frac{d\psi}{dy}=x^{2}e^{y}-\frac{x^{2}}{y^{2}}-\frac{4x}{y^{5}}$$

$$\frac{d\psi(x,y)}{dy}=\cancel{x^{2}e^{y}}+\frac{x^{2}}{y}+\frac{x}{y^{4}}+g'(y)=x^{2}e^{y}-\frac{x^{2}}{y^{2}}-\frac{4x}{y^{5}} \rightarrow g'(y)=0 \rightarrow g(y)=0$$

$$\psi(x,y)=x^{2}e^{y}+\frac{x^{2}}{y}+\frac{x}{y^{4}}+0=C$$

مبحث ۱۶: اگر $\overbrace{f(x,y)\,y}^{M}\,dx+\overbrace{g(x,y)\,x}^{N}\,dy=0$ در این صورت $\frac{1}{Mx-Ny}$ یک

عامل انتگرال ساز معادله مطلوب است.

مثال: $(x^2y^2+2)y\,dx+(2-2x^2y^2)x\,dy=0$

$M_x = 2xy^3 \qquad N_y = 4x^3y \Rightarrow \frac{1}{M_x - N_y} = \frac{1}{2xy(y^2+4x^2)}$ در طرفین معادله ضرب می‌کنیم

$\_\_\_\_\_\_\, dx + \frac{1-x^2y^2}{y(2x^2+y^2)}\,dy = 0$

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = \frac{x^2y^2+2}{2x(y^2+2x^2)} \overset{\int dx}{\Rightarrow} \\ \frac{d\psi}{dy} = \frac{1-x^2y^2}{y(2x^2+y^2)} \end{cases}$$

$\int \frac{x^2y^2}{2x(y^2+2x^2)} + \frac{2}{2x(y^2+2x^2)} = \frac{y^2}{2}\int \frac{x^2}{x(y^2+2x^2)} + \int \frac{1}{x(y^2+2x^2)} = \frac{y^2}{4}\ln(y^2+2x^2) +$

$\int \frac{1}{x(y^2+2x^2)}\,dx = \ldots \left[\frac{1}{x(y^2+2x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{y^2+2x^2} \Rightarrow \right.$

y در حکم عدد ثابت

$Ay^2 + 2Ax^2 + Bx^2 + Cx = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{y^2} \quad , (2A+B)=0 \Rightarrow B = \frac{-2}{y^2} \quad , C=0$

$\int \frac{1}{x(y^2+2x^2)}\,dx = \int \frac{1}{xy^2}\,dx + \int \frac{-2x}{y^2(y^2+2x^2)}\,dx \rightarrow$

$= \frac{\ln x}{y^2} - \frac{1}{2y^2}\ln(y^2+2x^2) + g(y) \Rightarrow$

$\psi(x,y) = \frac{y^2}{4}\ln(y^2+2x^2) + \frac{\ln x}{y^2} - \frac{1}{2y^2}\ln(y^2+2x^2) + g(y)$

$\frac{d\psi}{dy} = \ldots = \frac{1-x^2y^2}{y(2x^2+y^2)} \Rightarrow \psi(x,y)=C$

مثال ت۲ ص ۸۷ ، صحیح

$$y=\frac{u}{x}$$

$$xy=u \;\xrightarrow{\;'\;}\; y+xy'=u' \rightarrow y+x\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx} \Rightarrow y\,dx+x\,dy=du$$

$$\rightarrow x\,dy=du-\frac{u}{x}dx \qquad ①$$

$$(u^2+2)\frac{u}{x}\,dx+(2-2u^2)\,x\,dy=0 \;\xrightarrow{①}\; (u^2+2)\frac{u}{x}\,dx+(2-2u^2)\left(du-\frac{u}{x}dx\right)=0$$

$$\rightarrow\left(\frac{u^3}{x}+\frac{2u}{x}-\frac{2u}{x}+\frac{2u^3}{x}\right)dx+(2+2u^2)\,du=0$$

$$\frac{3u^3}{x}dx+2(1-u^2)\,du=0$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{-2}{3}\,\frac{(1-u^2)}{u^3} \;\xrightarrow{\int}\; \ln|x|+\ln c=\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2u^2}-\ln u\right) \rightarrow$$

$$c|x|=\frac{e^{-\frac{1}{3u^2}}}{u^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow c|x|u^{\frac{2}{3}}=e^{-\frac{1}{3u^2}} \rightarrow c|x|\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{-1}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2}}$$

تمرین ۱۹ ص ۸۷ : با استفاده از تغییر متغیر داده شده

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y)^2-(x-y)}{(x-y)+(x+y)^2} \qquad \begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx}&=1+\frac{dy}{dx} \\ \frac{dv}{dx}&=1-\frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{du}{dv}=\frac{1+\frac{dy}{dx}}{1-\frac{dy}{dx}} \Rightarrow \left(1-\frac{dy}{dx}\right)\frac{du}{dv}=1+\frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dv}-1=\frac{dy}{dx}\left(\frac{du}{dv}+1\right) \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dv}-1}{\frac{du}{dv}+1} \Rightarrow$$

در صفحه بعد

$$\Rightarrow \frac{\frac{du}{dv}-1}{\frac{du}{dv}+1}=\frac{u^2-v}{v+u^2} \rightarrow \left(\frac{du}{dv}-1\right)(v+u^2)=\left(\frac{du}{dv}+1\right)(u^2-v) \rightarrow$$

$$\frac{du}{dv}(v+\cancel{u^2}-\cancel{u^2}+v)=\cancel{v}+u^2+u^2-\cancel{v} \rightarrow 2v\,du=2u^2dv \rightarrow$$

$$\frac{1}{\cancel{2}v}dv=\frac{1}{\cancel{2}u^2}du \xrightarrow{\int} -\frac{1}{u}+C=\ln|v| \Rightarrow \frac{-1}{x+y}+C=\ln|x-y|$$

تمرین ۲۷:

$$y'=\frac{x}{y}\cdot\frac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8} \qquad \begin{cases} u=x^2 \rightarrow \frac{du}{dx}=2x \\ v=y^2 \rightarrow \frac{dv}{dx}=2y\frac{dy}{dx} \end{cases}$$

$$\frac{du}{dv}=\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}=\frac{2x}{2y\frac{dy}{dx}}=\frac{x}{y}\times\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\times\frac{du}{dv} \rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{u}{v}}\cdot\frac{2u+3v-7}{3u+2v-8}=\sqrt{\frac{v}{u}}\frac{du}{dv} \xrightarrow{\times\sqrt{\frac{u}{v}}} \frac{u}{v}-\frac{\sqrt{u}(2u+3v-7)}{\sqrt{v}(3u+2v-8)}=\frac{du}{dv} \rightarrow$$

$$\frac{(3u^2+2uv-8u)-\sqrt{uv}(2u+3v-7)}{v(3u+2v-8)}=\frac{du}{dv}$$

تمرین ۱۸۷

$$2x^2yy' + 2xy^2 = \tan(x^2y^2) \quad , \quad u = x^2y^2 < \begin{array}{l} \frac{du}{dx} = 2xy^2 \\ \frac{du}{dy} = 2x^2y \end{array}$$

می — جاسازی

$$u = x^2y^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2xy^2 + 2x^2yy' \overset{1}{\Rightarrow} \frac{du}{dx} = \tan u \Rightarrow \cot u\, du = dx$$

$$x = \ln|\sin u| + \ln c \Rightarrow e^x = c|\sin x| \Rightarrow e^x = c|\sin(x^2y^2)|$$

تمرین ۲۳

$$\frac{dy}{dx} = (y - x - 1) + (x - y + 2)^{-1} \quad , \quad u = x - y$$

$$u = x - y \longrightarrow \frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}$$

$$1 - \frac{du}{dx} = (-u-1) + (u+2)^{-1} \rightarrow \frac{du}{dx} = 1 - \frac{1}{u+2} + u + 1 = u + 2 - \frac{1}{u+2} = \frac{(u+2)^2 - 1}{u+2} =$$

$$= \frac{u^2 + 4u + 3}{u+2} \rightarrow du\left(\frac{u+2}{u^2+4u+3}\right) = dx \xrightarrow{\int} \int \frac{u+2}{u^2+4u+3}\, du = x + c \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln|u^2 + 4u + 3| = x + C \rightarrow \ln\sqrt{|u^2+4u+3|} = x + c$$

تمرین ۲۹

$$y' = (x+y)^2 , \quad x + y = u$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 \rightarrow dy$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2 \rightarrow du\left(\frac{1}{1+u^2}\right) = dx \xrightarrow{\int} \tan^{-1}u = x + C \rightarrow \tan^{-1}(x+y) = x + c$$

تمرین

$$y' = (x - 3y)^2 \quad * \quad u = x - 3y \rightarrow y = \frac{x-u}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{du}{dx} \rightarrow \frac{1}{3}\left(1 - \frac{du}{dx}\right) = u^2 \rightarrow \frac{du}{1-3u^2} = dx \xrightarrow{\int}$$

$$\int \frac{1}{1-2u^2}\,du = x + c \qquad \frac{1}{(1-\sqrt{2}u)(1+\sqrt{2}u)} = \frac{A}{1-\sqrt{2}u} + \frac{B}{1+\sqrt{2}u} = \frac{A + A\sqrt{2}u + B - \sqrt{2}Bu}{}$$

$$\begin{cases} A+B=1 & \Rightarrow A=B=\frac{1}{2} \\ \sqrt{2}A-\sqrt{2}B=0 & \Rightarrow A=B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1-2u^2}\,du = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt{2}u}\,du + \int \frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{2}u}\,du = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\ln|1-\sqrt{2}u| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|1+\sqrt{2}u|$$

جایگذاری

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u}\right| = x+c \rightarrow \ln\left|\frac{1+\sqrt{3}(x-2y)}{1-\sqrt{2}(x-2y)}\right| = 2\sqrt{2}(x+C)$$

تمرین ۵۳ :

$$(e^{\sin x}-1)\,dy + (y-1)\cos x\, e^{\sin x}\,dx = 0 \quad *$$

$$u = (y-1)e^{\sin x} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}(e^{\sin x}-1) + \cos x\, e^{\sin x}(y-1) \xrightarrow{\times dx} du = 0$$

$$\frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = c \Rightarrow (y-1)(e^{\sin x}-1) = 0$$

معادلات مرتبه اول قابل حل برحسب y : $y = f(x, y')$

برای حل معادلاتی به صورت $y = f(x,y')$ قرار می دهیم $y' = p$ سپس با مشتق گیری نسبت به x یک معادله مرتبه اول برحسب y به صورت $p = f_x + f_p \cdot p'$ حاصل می شود که با حذف p از بین این معادله و معادله اصلی جواب حاصل می شود.

تمرین ۵۴ :

$$y = y'^2 + x(y'-1)$$

$$y = p^2 + x(p-1) \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} y' = 2pp' + p - 1 + p'x \rightarrow 2pp' = 1 - p'x \rightarrow p = \frac{1}{2p'} - \frac{x}{2}$$

$$p + \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{dx}{dp} \rightarrow 2pp' + 2\times\frac{x}{2}p' = 1 \rightarrow 2pp' + xp' = 1 \rightarrow (2p+x)\,dp - dx = 0$$

$$\underbrace{\left(p+\frac{x}{2}\right)}_{M(p,x)}dp - \underbrace{\frac{1}{2}}_{N(p,x)}dx = 0$$

$Q(p) = \frac{M_x - N_p}{N} = \frac{1-0}{1} = 1$ $\quad e^{\int 1 dp} = e^p \xrightarrow{\text{ضرب در معادله}} e^p(2p+x)\,dp - e^p\,dx = 0$

$\psi(x,p) = \int N(x,p)\,dx = e^p x + g(p) \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } p} e^p x + g'(p) = e^p x + 2pe^p$

$x = e^{y'}(y'-1) \xRightarrow{y'=p} y = e^p(p-1)$ $\quad g(p) = 2\int pe^p = 2(pe^p - e^p)$

تمرین ۲۸: حل

$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} y' = \left(e^p(p-1) + e^p\right)\frac{dp}{dx}$

$\Rightarrow p = e^p(p-1+1)\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = e^p(p)\frac{dp}{dx}$

$dx = e^p dp$

$c + x = e^p \Rightarrow \begin{cases} x = e^p - c \\ y = e^p(p-1) \end{cases} \xrightarrow{p = \ln(c+x)} y = (c+x)\left[\ln(c+x) - 1\right]$

معادلات مرتبه اول قابل حل برحسب x ($x = f(y, y')$)

برای حل با مشتق گیری از طرفین نسبت به y به معادله $\frac{1}{p} = f_y + f_p \cdot p'$ با $p' = \frac{dp}{dy}$ می رسیم با حل این

معادله و حذف p از جواب این و معادله اصلی جواب عمومی معادله را می یابیم

مثال صفحه ۸۸ $\quad x = y'^2 + \frac{y}{y'} \xrightarrow{y'=p} x = p^2 + \frac{y}{p} \xrightarrow{\text{مشتق گیری نسبت به } y} \frac{dx}{dy} = 2p\frac{dp}{dy} + \frac{p - y\frac{dp}{dy}}{p^2} \xrightarrow{\times p^2}$

$\to p = 2p^3\frac{dp}{dy} + p - y\frac{dp}{dy} \to 0 = (2p^3 - y)\frac{dp}{dy} \xRightarrow{①} (2p^3 - y) = 0 \to$

$p^3 = \frac{y}{2} \xRightarrow{\text{جواب استثنایی}} \begin{cases} p = \sqrt[3]{\frac{y}{2}} \\ x = p^2 + \frac{y}{p} \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y^2}{4}} + \frac{y}{\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}$

① $(2p^3 - x) \neq 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow \left\{ x = c^2 + \frac{y}{c} \right.$ جواب عمومی

روش حل معادلات مرتبه دوم در حالات خاص :

الف) $f(x, y'') = 0$ روش حل : با دوبار انتگرال گیری حل می شود (نسبت به x)

$y'' - 6x = 0 \xrightarrow{\int} y' - \frac{6x^2}{2} = c_1 \xrightarrow{f} y' = c_1 + 3x^2 \xrightarrow{\int} y = c_1 x + x^3 + c_2$

ب) معادلات مرتبه دوم فاقد y :

$y'' = f(x, y')$: در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم شکل $y'' = f(x, y')$ با جایگذاری $y' = v$ ، $y'' = \frac{dv}{dx}$ به معادله

مرتبه اول می رسیم. هرگاه این معادله را بتوان نسبت به v حل کرد، آنگاه y را می توان با انتگرال گیری از

$v = \frac{dy}{dx}$ بدست آورد.

تست ۴۹ : حل

$t^2 y'' + 2t y' - 1 = 0 \qquad t > 0$

$y' = v \qquad y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{dv}{dt}$

$t^2 \frac{dv}{dt} + 2t v - 1 = 0 \xrightarrow{\div t^2} \frac{dv}{dt} + \frac{2}{t} v = \frac{1}{t^2} \xrightarrow{e^{\int \frac{2}{t}} = t^2} t^2 \frac{dv}{dt} + 2t v = 1$

$\frac{d}{dt}(t^2 \times v) = 1 \rightarrow t^2 v = t + C \rightarrow y' = \frac{1}{t} + \frac{C}{t^2} \xrightarrow{\int dt} y = \ln t - \frac{C}{t} + C_1$

ج) معادلات مرتبه دوم بدون متغیر مستقل t : $y'' = f(y, y')$

هرگاه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به شکل $y'' = f(y, y')$ باشد آنگاه قرار می دهیم $y' = v$ در این صورت

بنابر قاعده زنجیره ای داریم $y'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$

معادله حاصل یک معادله درجه اول است با حل آن v و سپس y را می یابیم

ت ۵۷ ص ۶۹ . $yy'' + (y')^2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} y' &= v \\ y'' &= v\frac{dv}{dy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y \cdot v\frac{dv}{dy} + v^2 = 0$$

$v\frac{dv}{dy} = -\frac{v^2}{y} \longrightarrow$ اگر $v = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = c$

$v \neq 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \xrightarrow{\int \cdot dy} \ln v = -\ln y + \ln c \Rightarrow v = \frac{c}{y} \Rightarrow y' = \frac{c}{y}$

$\ln\frac{c}{y}$

$\xrightarrow{\int \cdot dt} y\frac{dy}{dt} = c \qquad \frac{y^2}{2} = ct + c_1$ جواب عمومی

تمرین ص ۶۹ (۶۳-۶۶) $y'y'' = 2 \qquad y(0) = 1 , \; y'(0) = 2$

$$\left.\begin{aligned} y' &= v \\ y'' &= v\frac{dv}{dy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v^2\frac{dv}{dy} = 2 \longrightarrow v^2\,dv = 2\,dy \xrightarrow{\int} \frac{v^3}{3} = 2y + c \xrightarrow{v = y'}$$

$y'^3 = 6y + 3c \xrightarrow{y' = p} p^3 = 6y + 3c \xrightarrow{'} 3p^2p' = 6y' \xrightarrow{y' = p} pp' = 2$

$p\frac{dp}{dt} = 2 \rightarrow p\,dp = 2\,dt \xrightarrow{\int} \frac{p^2}{2} = 2t + C_1 \rightarrow y'^2 = 4t + 2C_1 \rightarrow$

$y' = 2\sqrt{t + \frac{C_2}{4}} \xrightarrow{\int dt} y = 2\int\sqrt{t + \frac{C_2}{4}}\,dt \xrightarrow[dt = C_2 \tan t(1+\tan^2 t)]{t = \frac{C_2}{4}\tan^2 t}$

د) معادلات مرتبه دوم که نسبت به y و y' و y'' همگن هستند:

اگر یک معادله به فرم $f(x, y, y', y'') = 0$ نسبت به متغیرهای y و y' و y'' همگن مرتبه دوم باشند یعنی:

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^n F(x, y, y', y'')$$

روش حل: با انتخاب $y = e^{\int z\,dx}$ به معادله مرتبه اول تبدیل می‌شود.

ت ۶۹ و ۶۹:

$$\overbrace{yy'' - y'^2 - 6xy^2}^{f(x,y,y',y'')} = 0$$

$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda y \cdot \lambda y'' + \lambda^2 y'^2 + 6x\lambda^2 y^2 = 0 = \lambda^2(yy'' - y'^2 - 6xy^2)$

$\lambda^2 F(x, y, y', y'')$

تغییر متغیر $y = e^{\int z\,dx} \rightarrow y' = z e^{\int z\,dx} \rightarrow y'' = z' e^{\int z\,dx} + z^2 e^{\int z\,dx} = (z' + z^2) e^{\int z\,dx}$

جایگذاری $\rightarrow e^{\int z\,dx}(z' + z^2) e^{\int z\,dx} - z^2 e^{2\int z\,dx} - 6x e^{2\int z\,dx} = 0$

$\Rightarrow e^{\int 2z\,dx}(z' + \cancel{z^2} - \cancel{z^2} - 6x) = 0 \Rightarrow \underset{e^{\int 2z\,dx} \neq 0}{(z' - 6x) = 0} \rightarrow z' = 6x \xrightarrow{\int} z =$

$y = e^{\int 2x \, dx + c} \rightarrow y = e^{x^2 + cx + c_1}$ جواب عمومی

وجود و یکتایی جواب (مسأله مقدار اولیه خطی)

هرگاه توابع p و q در بازه $\alpha < t < \beta$ شامل نقطه $t = t_0$ پیوسته باشند آنگاه تابع منحصر به فرد پیوسته ای مانند $y = \Phi(t)$ موجود است در معادله دیفرانسیل $y' + p(t)y = q(t)$ صدق می کند و همچنین $y(t_0) = y_0$

مثال: مطلوب است تعیین بازه یکتایی جواب معادله

$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

حل: $\rightarrow y' + \frac{2}{t}y = 4t$

$D_p = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_q = \mathbb{R} \underset{\text{دامنه جواب}}{\overset{\text{بازه وجود جواب}}{\Rightarrow}} : (0, +\infty)$

وجود و یکتایی مسأله مقدار اولیه غیر خطی:

فرض کنیم $y' = f(t, y)$ و توابع f و $\frac{df}{dy}$ در مستطیلی چون $\alpha < t < \beta$ و $\gamma < y < \delta$ ، R شامل نقطه (t_0, y_0) پیوسته باشند در این صورت بازه ای چون $t_0 - h < t < t_0 + h$ مشمول $\alpha < t < \beta$ جواب منحصر به فردی مانند $y = \Phi(t)$ از مسأله مقدار اولیه $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ دارد. دامنه جواب فرضا (α, β) است

$\Phi(0) = 1$

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \qquad x \in R \qquad y: R - \{1\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2(3x^2 + 4x + 2)}{4(y - 1)^2}$$

تابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ همه جا بجز $y = 1$ پیوسته

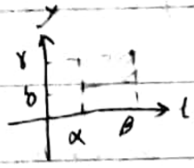
بنابراین معادله را دارای جوابی منحصر به فرد مانند $y = \Phi(t)$ است A مستطیل $\begin{cases} f & \text{پیوسته} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \text{پیوسته} \end{cases}$ & $(t_0, y_0) \in A$

که دامنه $y = \Phi(t)$ زیر مجموعه ای (α, β) است.

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty & \text{کلی و احتمالی} \\ -\infty < y < \frac{1}{2} & \text{بازه جواب} \end{cases}$$

اگر بازه جواب خواست باید معادله دیفرانسیل را حل کرد

نکته: $A: \begin{cases} \alpha < t < \beta \\ \delta < y < \gamma \end{cases}$ مستطیل که f روی آن پیوسته است در این صورت معادله دارای جواب است



بازه وجود یکتایی معادلات خطی:

$y' + p(t)y = q(t) \qquad y(t_0) = y_0$

اگر p و q روی (α, β) بازه‌های پیوستگی باشند معادله دارای جواب است

بنابراین جواب منحصربه‌فرد مانند $\varphi(t) = y$ وجود دارد که
$\begin{cases} \varphi'(t) + p(t)\varphi(t) = q(t) \\ \varphi(t_0) = y_0 \end{cases}$
و دامنه جواب $\varphi(t)$ همان (α, β) است

مثال تمرین ۲۱:

$(t-3)y' + \ln t \, y = 2t \qquad y(1) = 2$

$$y' + \frac{\ln t}{t-3} y = \frac{2t}{t-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} D_{p(t)}: \; t-3 \neq 0 \Rightarrow t \neq 3 \\ \ln t: \; t > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D_p = (0,3) \cup (3, +\infty)$$

$$\Rightarrow 1 \in (0, 3)$$

$$D_{q(t)}: \; t-3 \neq 0 \Rightarrow t \neq 3 \Rightarrow D_q: \mathbb{R} - \{3\}$$

بنابراین معادله دارای جواب یکتاست که از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد و دامنه جواب بازه $(0, 3)$ است

مثال: مثال بعدی ۵۶ مطلوب است بررسی بازه وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1$$

حل قبلاً +

حل معادله: جداشدنی $2(y-1)\,dy = (3x^2+4x+2)\,dx$

$\downarrow \int$

$y^2-2y = x^3+2x^2+2x+C \xrightarrow{y(0)=-1} 1-(-2) = 0+0+0+C \to \boxed{C=3}$

$\downarrow +1$

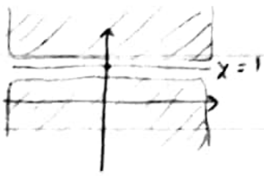
$y^2-2y+1 = x^2(x+2)+2(x+2) \to (y-1)^2 = (x+2)(x^2+2)$

$y = 1 \underset{y(0)=-1}{\pm} \sqrt{(x+2)(x^2+2)}$, $\geq \Rightarrow x>-2$ روی بازه $(-2, +\infty) \ni 0$ جواب یکتا با این دامنه موجود است.

حل: مطلوب است بررسی وجود و یکتایی مسأله مقدار اولیه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \qquad y(0)=+1$$

وجود:



f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ پیوسته‌اند روی $\Rightarrow \{ (-\infty,+\infty) \times [(-\infty,1)\cup(1,+\infty)]$

یکتایی: چون هر مستطیل شامل نقاط (۱,۰) قسمتی از خط $y=1$ را شامل است بنابراین نمی‌توان مستطیلی یافت که f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ روی آن پیوسته باشند و در ضمن شامل نقطه (۱,۰) باشند.

لذا با استفاده از قضیه چیزی در مورد وجود و یکتایی مسأله مقدار اولیه نمی‌توان گفت. باید مسئله را حل کرد تا در مورد جواب و حتی یکتایی آن بحث کرد.

$y^2-2y = x^3+2x^2+2x+C \xrightarrow{y(0)=1} 1^2-2 = 0+C \Rightarrow C=-1$

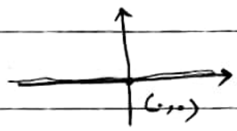
$y^2-2y+1 = x^3+2x^2+2x \Rightarrow \boxed{y = 1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x}}$

حداقل دو جواب وجود دارد که در معادله صدق می کند و شرط $x(0)=1$ را دارد

دامنه جواب $[0,+\infty)$ است $\qquad x^3+2x^2+2x \geq 0 \rightarrow x(x^2+2x+2) \geq 0 \rightarrow x \geq 0$

مثال: بررسی یکتایی جواب مسئله اولیه غیرخطی: $\qquad x' = x^{\frac{1}{3}} \qquad x(0)=0$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t,x) = x^{\frac{1}{3}} \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{array} \right\} \quad x \neq 0$$



خط $x=0$ خط ناپیوستگی $\frac{\partial f}{\partial x}$ است

چون هر مستطیل شامل نقطه $(0,0)$ خط $x=0$ را شامل است بنابراین نمی توان مستطیلی پیدا کرد که f و $\frac{\partial f}{\partial x}$ روی آن پیوسته باشند در حین این که شامل نقطه $(0,0)$ باشند.

* لذا چیزی در مورد وجود و یکتایی جواب نمی توان گفت پس باید مسئله را حل کرد.

$$x' = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = dt \rightarrow \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} = t + c \xrightarrow{x(0)=0 \rightarrow c=0} x = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^3}$$

یک جواب دیگر معادله $x=0$ است

ت) مطلوب است بررسی بازه وجود و یکتایی جواب در معادلات مقدار اولیه زیر:

$$x' = x^2 \qquad x(0)=1$$

حل تمرین: دو کلاس پایانی ص ۶۱ و ۶۲ ۱ـ۱۲

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ : $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$

توجه: اگر $g(t)=0$ در این صورت معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ خطی همگن نامیده می‌شود.

$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ (همگن)

به تابع $g(t)$ تابع بار یا غیرهمگن می‌گویند.

معادلات همگنی که در آن ضرایب y'' ، y' و y اعداد ثابتی هستند می‌پردازیم:

$ay'' + by' + cy = 0$

$y''=r^2 \quad y'=r \quad y=1$

روش حل: معادله مشخصه معادله دیفرانسیل را تشکیل می‌دهیم اگر r_1 و r_2 دو ریشه متمایز و حقیقی معادله باشند در

این صورت $y_1 = e^{r_1 t}$ و $y_2 = e^{r_2 t}$ جواب‌های معادله دیفرانسیل هستند.

جواب عمومی $= c_1 y_1 + c_2 y_2$

مثال: مطلوب است حل معادلات زیر:

$y'' + 3y' + 2y = 0 \qquad r^2 + 3r + 2 = 0 \rightarrow (r+2)(r+1) = 0 \begin{cases} r=-2 \\ r=-1 \end{cases}$

$y_1 = e^{-t} \quad y_2 = e^{-2t} \qquad$ جواب عمومی : $y_g = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

روش حل ②: اگر معادله مشخصه یک ریشه مضاعف r داشته باشد در این صورت $y_1 = e^{rt}$, $y_2 = te^{rt}$

مثال: مطلوبست حل معادله زیر:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \rightarrow (r+2)^2 = 0 \rightarrow r = -2 \text{ (ریشه مضاعف)} \begin{cases} y_1 = e^{-2t} \\ y_2 = t e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow y_g = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

نکته: اگر y_1 و y_2 جواب های معادله دیفرانسیل خطی (مرتبه ۲ خطی) باشند در این صورت ترکیب خطی آن ها یعنی

$C_1 y_1 + C_2 y_2$ نیز جواب معادله دیفرانسیل است.

حل: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $y'' + P(t)y' + q(t)y = 0$ باشند نشان می دهیم $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

نیز جواب معادله است

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \qquad y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + P(t)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(t)(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$C_1(\overbrace{y_1'' + P(t)y_1' + q(t)y_1}^{0}) + C_2(\overbrace{y_2'' + P(t)y_2' + q(t)y_2}^{0}) = C_1 \times 0 + C_2 \times 0 = 0$$

روش حل (۲):

اگر معادله مشخصه دارای ریشه های مختلط r_1 و r_2 باشند در این صورت $e^{r_1 t}$ و $e^{r_2 t}$ جواب های معادله دیفرانسیل

هستند

$$ar^2 + br + c = 0 \rightarrow \Delta < 0 \; ; \; r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}^{\,-\Delta \times (-1)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta} \times i}{2a} = \alpha \pm i\beta$$

($\Delta < 0$, $i^2 = -1$)

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \sin\beta t)$$

$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \rightarrow ay'' + by' + cy = 0$

متمایز: r_1, r_2 ، $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = e^{r_2 t}$

تکراری: $r_1 = r_2$ ، $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = t e^{r_1 t}$

مختلط: $r_1, r_2 = \alpha \pm \beta$ ، $y_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t$, $y_2 = e^{\alpha t}\sin\beta t$

Date: ( )

$$y_1 + y_2 = e^{\alpha t}(2\cos\beta t) \rightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$\rightarrow \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha t}\sin\beta t$$

$$\rightarrow z_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad z_2 = e^{\alpha t}\sin\beta t$$

جواب عمومی

$$y_c = c_1 z_1 + c_2 z_2$$

تمرین ۱۸ ص ۱۳۷

مثال: مطلوب است حل معادله:

الف) $y'' + 9y = 0$

ب) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

الف) $r^2 + 9 = 0 \rightarrow r^2 = -9 = 9i^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$

$r_1, r_2 \rightarrow \alpha = 0, \beta = 3$ ، $y_1 = e^{0t}\cos 3t$, $y_2 = e^{0t}\sin 3t$

$$y_c = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t$$

ب) $r^2 + 4r + 5 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 20 = -4$ ، $r_1, r_2 = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$r_1 = -2 + i$ ، $r_2 = -2 - i$

$$\begin{cases} y_1 = e^{(i-2)t} \\ y_2 = e^{(-i-2)t} \end{cases}$$

$$y = c_1 e^{(i-2)t} + c_2 e^{(-i-2)t} \;\text{یا}\; = c_1 e^{-2t}\cos t + c_2 e^{-2t}\sin t$$

$y(0) = 1 \rightarrow y(0) = c_1 + c_2 = 1$ (1)

$$y' = c_1(i-2)e^{(i-2)t} + c_2(-i-2)e^{(-i-2)t} \xrightarrow{y'(0)=0} 0 = c_1(i-2) + c_2(-i-2) = \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = i(c_1 - c_2) + \underbrace{(-2c_1 - 2c_2)}_{-2(c_1+c_2) = -2} \rightarrow i(c_1 - c_2) = 2 \rightarrow -1 + 2c_1 = \frac{2}{i}$$

$2C_1 = \frac{2}{i} + 1 = \frac{2+i}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{2i-1}{-1}$ $\qquad C_1 = +\frac{1}{2} - i$

$C_2 = 1 - C_1 = \frac{1}{2} + i$

$x_p = (+\frac{1}{2} - i)x_1 + (\frac{1}{2} + i)x_2$

مثال: مطلوب است تعیین نقطه ماکزیمم مسئله مقدار اولیه:

$x'' + x = 0 \qquad x'(0) = 3 \;,\; x(0) = 2$

$r^2 + 1 = 0 \rightarrow r^2 = -1 \rightarrow r = \pm i \qquad z_1 = \cos t \;,\; z_2 = \sin t$

$x_c = C_1 \cos t + C_2 \sin t \qquad x(0) = 2 \rightarrow C_1 = 2$

جواب خصوصی $x_p = 2\cos t + 3\sin t$

$x'_c = -C_1 \sin t + C_2 \cos t \qquad x'(0) = 3 \rightarrow C_2 = 3$

$x' = -2\sin t + 3\cos t = 0 \rightarrow \tan t = \frac{3}{2} \rightarrow t = \tan^{-1}\frac{3}{2} \qquad [0, \frac{\pi}{2}]$

وجود یکتایی مسئله مقدار اولیه: $x'' + p(t)x' + q(t)x = g(t) \qquad x(x_0) = x_0 \qquad x'(x_0) = x'_0$

فرض کنیم $p(t)$ ، $q(t)$ و $g(t)$ روی بازه I پیوسته باشند و $x_0 \in I$ در این صورت معادله دیفرانسیل

مقدار اولیه دارای جواب منحصر به فرد است با دامنه I

مثال: $x'' + \frac{2\sin t}{t}x' + \ln t\, x = 0 \qquad x'(1) = 1 \;,\; x(1) = 0$

Date: ( )

نقاط پیوستگی : $R - \{0\} \cup (0, +\infty) = (0, +\infty)$

لذا بنابه قضیه معادله دیفرانسیل دارای جواب یکتا روی $(0, +\infty)$ است

مسئله مقدار اولیه مرتبه دوم :

یک مسئله مقدار اولیه مرتبه دوم خطی عبارت است از یک معادله دیفرانسیل به فرم $y'' + P(t)y' + q(t)y = g(t)$

همراه با یک جفت شرط : $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$

مثال - معادلات روبرو را حل کنید.

$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y'(0) = 3 \quad y(0) = 2$

$r^2 + 5r + 6 = 0 \qquad (r+2)(r+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = -2 \rightarrow y_1 = e^{-2t} \\ r_2 = -3 \rightarrow y_2 = e^{-3t} \end{cases}$

$y_c = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \xrightarrow{y(0)=2} 2 = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2$

$y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \xrightarrow{y'(0)=3} 3 = -2C_1 - 3C_2$

$\rightarrow C_2 = -7, C_1 = 9$

$\Rightarrow y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$

$4y'' - y = 0 \qquad y(-2) = 1 \qquad y'(-2) = -1$

$4r^2 - 1 = 0 \rightarrow r = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\frac{1}{2}t} \\ y_2 = e^{-\frac{1}{2}t} \end{cases} \qquad y_c = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

$y_c = C_1 e^{\frac{3}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} \xrightarrow{y(-2)=1} 1 = \frac{C_1}{e} + C_2 e \to \frac{C_1}{e} = 1 - C_2 e$ ①

$y' = \frac{3}{2} C_1 e^{\frac{3}{2}t} + (-\frac{1}{2} C_2) e^{-\frac{1}{2}t} \xrightarrow{y'(-2)=-1} -1 = \frac{C_1}{2e} - \frac{C_2 e}{2} \xrightarrow{①} -2 = 1 - C_2 e - C_2 e = 1 - 2C_2 e$

$\to -3 = -2C_2 e \to C_2 = \frac{3}{2e}$ | $C_1 = -\frac{1}{2} e$ | $y = -\frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}t} + \frac{3}{2e} e^{-\frac{1}{2}t}$

جواب خصوصی

مثال: مطلوب است تعیین نقطه ماکزیمم مسئله مقدار اولیه زیر:

$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad y'(0) = 3 \quad y(0) = 2$

$r^2 + 5r + 6 = 0$ حل معادله قبل $\to$ جواب خصوصی: $y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$

$y' = -18e^{-2t} + 21e^{-3t} \xrightarrow{y'=0} 18e^{-2t} = 21e^{-3t} \to e^{t} = \frac{21}{18} \xrightarrow{Ln} t = \ln(\frac{21}{18}) \simeq 0{,}15$

$\to y_p = 2{,}2$ مقدار Max

مثال: معادله دیفرانسیل $y'' + 4y' + 4y = 0$ را حل کنید.

$r^2 + 4r + 4 = 0 \to (r+2)^2 = 0 \to r = -2$ | ریشه مضاعف $\quad y_1 = e^{-2t} \quad y_2 = e^{-2t}$

$y_c = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-2t}$

مثال: تعیین جواب مسأله مقدار اولیه زیر؟

$y'' - y' + 0{,}25 y = 0 \qquad y'(0) = \frac{1}{3}, \; y(0) = 2$

$r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \qquad \Delta = 1 - 1 = 0 \qquad r_1, r_2 = \frac{1}{2} \qquad y_1 = e^{\frac{1}{2}t}, \; y_2 = t e^{\frac{1}{2}t}$

$y_c = c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 t e^{\frac{1}{2}t}$ جواب عمومی $\rightarrow y'_c = \frac{1}{2}c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}c_2 t e^{\frac{1}{2}t}$

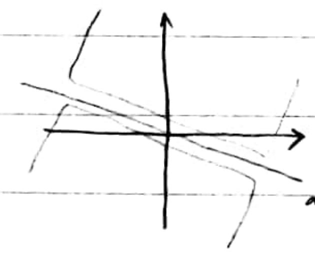
$y(0)=2 \rightarrow c_1 = 2$ $\quad$ $\xrightarrow{y'(0)=\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times 2 + c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{2}{3}$

$$y = 2e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{3}te^{\frac{1}{2}t}$$

ص ۶۲ تمرین ۷:

$y' = \frac{t-7}{2t+5y} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{t-7}{2t+5y} \; f(t,y)$

$2t+5y=0 \rightarrow 5y=-2t \rightarrow y = \frac{-2t}{5}$ خط ناپیوستگی f و $\frac{\partial f}{\partial y}$



چون در هر مستطیل بالا یا پایین این خط $f(t,y)$ پیوسته است، پس هر مسئله‌ی

مقدار اولیه که روی این خط نباشد، یک جواب منحصر بفرد است.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-5\times(t-7)}{(2t+5y)^2}$$

ص ۶۱ تمرین ۲: بازه وجود جواب؟

$t(t-4)y'' + (t-2)y' + y = 0 \qquad y(2)=1$

$$y'' + \frac{t-2}{t(t-4)}y' + \frac{y}{t(t-4)} = 0$$

بازه وجود جواب: $P(t), q(t)$ نقاط ناپیوستگی = بازه وجود جواب $= R - \{0, 4\}$

ص ۲۳ س ۱۴:

یادآوری: $\int_{f(t)}^{g(t)} h(x)\,dx = h(g(t))\cdot g'(t) - h(f(t))\cdot f'(t)$

$y' - 2te^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds + e^{t^2} = 1 \rightarrow y' + e^{t^2} - 2te^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds - 1 = 0$

$$y' = 2t\,e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds + \left(e^{-t^2}\times 1 - e^{0}\times 0\right)e^{t^2}$$

$$y' - 2ty = 1 \rightarrow 2te^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds + 1 + 2te^{t^2} - 2te^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds - 2te^{-t^2} = 1 \Rightarrow$$

بنابراین y جواب معادله دیفرانسیل فوق است

ص ۲۵ س ۱۵: پارامتر r را طوری تعیین کنید که معادله داده شده جواب هایی بصورت $y=e^{rt}$ داشته باشند.

$$y' + 2y = 0 \rightarrow re^{rt} + 2e^{rt} = 0 \rightarrow e^{rt}(r+2) = 0 \Rightarrow r+2=0 \rightarrow \underline{r=-2} \Rightarrow y = e^{-2t}$$

ص ۲۳ س ۱۸: $y = t^r$ ، r

$$y' = rt^{r-1} \qquad y'' = r(r-1)t^{r-2}$$

$$t^2y'' + 4ty' + 2y = 0 \longrightarrow t^2\left(r(r-1)t^{r-2}\right) + 4t\left(rt^{r-1}\right) + 2t^r = 0 \longrightarrow$$

$$t^r\left(r^2 - r + 4r + 2\right) = 0 \Rightarrow r^2 + 3r + 2 = 0 \rightarrow (r+2)(r+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} r=-2 \\ r=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = t^{-1} \\ y_2 = t^{-2} \end{cases}$$

ص ۱۴ س ۷: مسیرهای متعامد دایره های $x^2 + (y-c)^2 = c^2$ را بیابید.

مشتق نسبت به x: $2x + 2(y-c)y' = 0 \rightarrow x + (y-c)y' = 0 \rightarrow c = \dfrac{x + yy'}{y'}$

جایگذاری در معادله اصلی
$$x^2 + \left(-\frac{x+yy'}{y'} + y\right)^2 = \left(\frac{x+yy'}{y'}\right)^2 \rightarrow$$

$$x^2 + \frac{x^2}{y'^2} = \frac{x^2}{y'^2} + \frac{2xyy'}{y'^2} + y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 - \frac{2xy}{y'} = 0 \xrightarrow{y' \to -\frac{1}{y'}}$$

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0 \longrightarrow \underbrace{(x^2-y^2)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{2xy}_{N(x,y)}dy = 0$$

$$M_y = -2y \qquad N_x = 2y$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2y - 2y}{2xy} = \frac{-2}{x} = Q(x)$$

تابعی از x است. پس عامل انتگرال ساز به صورت $e^{\int \frac{-2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$ می باشد

ضرب طرفین معادله در $\frac{1}{x^2}$ $\rightarrow \frac{1}{x^2}.A \rightarrow \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0 \rightarrow$ معادله کامل

$$\psi_x = M \rightarrow \psi_x = 1 - \frac{y^2}{x^2} \xrightarrow{\int dx} \psi_{(x,y)} = x + \frac{y^2}{x} + g(y) \quad ①$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi_y = N \rightarrow \psi_y = \dfrac{2y}{x} \\ \overset{①}{\Rightarrow} \psi_y = 0 + \dfrac{2y}{x} + g'(y) \end{array}\right\} \Rightarrow g'(y) = 0 \rightarrow g(y) = 0$$

جواب $\rightarrow \psi_{(x,y)} = C \rightarrow \boxed{x + \frac{y^2}{x} = C}$ مسیرهای متعامد

ص ۳۶ س ۲۱ ، معادله روبرو را حل کنید. حل مرتبه اول $y' + \frac{1}{2}y = 2\cos t \quad , y(0) = -1$

عامل انتگرال ساز: $e^{\int \frac{1}{2}dt} = e^{\frac{t}{2}}$

$$e^{\frac{t}{2}} y' + \frac{1}{2} y e^{\frac{t}{2}} = 2e^{\frac{t}{2}} \cos t \rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{2}} y\right) = 2e^{\frac{t}{2}} \cos t \xrightarrow{\int dt} ②$$

$$*, 2\int e^{\frac{t}{2}} \cos t\, dt \rightarrow \begin{cases} u = \cos t \rightarrow du = -\sin t\, dt \\ dv = e^{\frac{t}{2}} dt \xrightarrow{\int} v = 2e^{\frac{t}{2}} \end{cases} \rightarrow 2\left[\cos t \times 2e^{\frac{t}{2}} + \int 2e^{\frac{t}{2}} \sin t\, dt\right]$$

$$*, 2\int e^{\frac{t}{2}} \sin t\, dt \rightarrow \begin{cases} u = \sin t \rightarrow du = \cos t\, dt \\ dv = e^{\frac{t}{2}} dt \xrightarrow{\int} v = 2e^{\frac{t}{2}} \end{cases} \rightarrow 2 \times \left[\sin t \times 2e^{\frac{t}{2}} - \int 2e^{\frac{t}{2}} \cos t\, dt\right]$$

$$2\int e^{\frac{t}{2}} \cos t\, dt = 4\cos t\, e^{\frac{t}{2}} + 8\sin t\, e^{\frac{t}{2}} - 8\int e^{\frac{t}{2}} \cos t\, dt \rightarrow \int e^{\frac{t}{2}} \cos t\, dt = +\frac{2}{5} \cos t\, e^{\frac{t}{2}} + \frac{4}{5} \sin t\, e^{\frac{t}{2}} + C$$

Date:

$\ominus \to \cancel{e^{\frac{t}{2}}}\, x = \cancel{e^{\frac{t}{2}}}\left(\frac{2}{5}\cos t + \frac{4}{5}\sin t\right) + c \qquad \boxed{x = \frac{+2}{5}\cos t + \frac{4}{5}\sin t + c e^{-\frac{t}{2}}}$ جواب عمومی

$\xrightarrow{x(0) = -1} \quad -1 = \frac{+2}{5} + c e^{-\frac{t}{2}} \longrightarrow c e^{-\frac{t}{2}} = -\frac{7}{5} \Rightarrow \boxed{c = -\frac{7}{5}}$

$\Rightarrow x = \frac{2\cos t + 4\sin t - 7e^{-\frac{t}{2}}}{5}$

نقاط بحرانی $= ? \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow \frac{-2\sin t + 4\cos t + \frac{7}{2}e^{-\frac{t}{2}}}{5} = 0 \xrightarrow{\times e^{\frac{t}{2}}} \underbrace{-2e^{\frac{t}{2}}\sin t + 4e^{\frac{t}{2}}\cos t + \frac{7}{2}}_{f(t)} =$

$f(0) = 4 + \frac{7}{2} > 0$

$f'(t) = -e^{\frac{t}{2}}\sin t - \cancel{2e^{\frac{t}{2}}\cos t} + \cancel{2e^{\frac{t}{2}}\cos t} - 4e^{\frac{t}{2}}\sin t = -5e^{\frac{t}{2}}\sin t \xrightarrow{0<t<\frac{\pi}{2}} -5e^{\frac{t}{2}}\sin t < 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{4}} + 4e^{\frac{\pi}{4}} \times 0 + \frac{7}{2} < 0$

چون f پیوسته است، بنابه قضیه مقدار میانی دارای یک ریشه بین $(0, \frac{\pi}{2})$ است. لذا دارای یک ماکزیمم بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ است.

صفحه ۸۸ سوال ۴: معادلات قابل حل برحسب x

$x = 2x'n + \tan^{-1}(nx'^2) \xrightarrow{x' = p} x = 2pn + \tan^{-1}(np^2)$

$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } n} \quad \overset{p}{x'} = 2p + 2p'n + \frac{p^2 + 2pp'n}{1 + n^2p^4} \Rightarrow 0 = p + 2p'n + \frac{p^2 + 2pp'n}{1 + n^2p^4} \longrightarrow$

$p'\left(2n + \frac{2pn}{1+n^2p^4}\right) + \left(p + \frac{p^2}{1+n^2p^4}\right) = 0 \to p'\big(\underbrace{2n(1+n^2p^4) + 2pn}_{N(n,p)}\big) + \big(\underbrace{p(1+n^2p^4) + p^2}_{M(n,p)}\big) =$

① $\frac{M_p - N_n}{N} = \frac{1 + 5n^2p^4 + \cancel{2p} - (2 + 6p^4n^2 + \cancel{2p})}{2n(1+n^2p^4+p)} = \frac{-1 - p^4n^2}{2n(1+n^2p^4+p)}$ فقط برحسب n نیست

② $\frac{N_n - M_p}{M} = \frac{+1 + p^4n^2}{p(1+n^2p^4) + p^2}$ فقط برحسب p نیست

Date: ( )

$$\overset{N(x,p)}{} \qquad\qquad \overset{M(x,p)}{}$$

$$③ \xrightarrow{\text{معادله} \times x^\alpha p^\beta} p'\left(2x^{(\alpha+1)}p^\beta + \frac{2x^{(\alpha+1)}p^{(\beta+1)}}{1+x^2p^4}\right) + \left(x^\alpha p^{(\beta+1)} + \frac{x^\alpha p^{(\beta+2)}}{1+x^2p^4}\right) = 0$$

$$M_p = (\beta+1)x^\alpha p^\beta + (\beta+5)x^{(\alpha+2)}p^{(\beta+4)} + (\beta+2)x^\alpha p^{(\beta+1)}$$

$$N_x = 2(\alpha+1)p^\beta x^\alpha + 2(\alpha+3)p^{(\beta+4)}x^{(\alpha+2)} + 2(\alpha+1)x^\alpha p^{(\beta+1)}$$

$\beta+1 = 2\alpha+2$

$\beta+5 = 2\alpha+6$

β

۹ کارگاه ماشین ابزار

مثال. مطلوب است جواب منحصر به فرد مسأله: $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

که در آن $y(t_0) = 0$ و $y'(t_0) = 0$ و p و q در بازه I شامل t_0 پیوسته اند.

با توجه به قضیه تنها جواب مسئله $y=0$ است زیرا p و q روی I پیوسته اند و نیز $t_0 \in I$ است

دترمینان رونسکی یا رونسکین:

فرض کنیم y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ باشند. در این صورت

رونسکین y_1 و y_2 در نقطه t_0 به صورت زیر است:

$$W = \omega(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}$$

مثال. مطلوب است تعیین رونسکین جواب های معادله $y''+y'-2y=0$ در $t_0=0$.

$$r^2+r-2=0 \rightarrow (r-1)(r+2)=0 \rightarrow \begin{matrix} y_1=e^{t} \\ y_2=e^{-2t} \end{matrix}$$

$$W(y_1,y_2)(0)=\begin{vmatrix} e^{t} & e^{-2t} \\ e^{t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -2e^{-t}-e^{-t}=-3e^{-t}=-3$$

قضیه: فرض کنید y_1 و y_2 جواب های معادله $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ (☺) باشند و W رونسکین y_1 و y_2 در نقطه‌ای مانند t_0 ناصفر باشد در این صورت خانواده جواب های $y=c_1y_1+c_2y_2$ با ضرایب دلخواه c_1 و c_2 شامل هر جواب معادله فوق است.

نکته. وقتی رونسکین y_1 و y_2 هرجا صفر نباشد ترکیب خطی $c_1y_1+c_2y_2$ شامل هر جواب های معادله ☺ است و y_1 و y_2 را جواب های پایه می نامند.

مثال. فرض کنید y_1 و y_2 جواب های معادله $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ باشند و اگر $r_1\neq r_2$ نشان دهید y_1 و y_2 جواب های پایه‌ای هستند.

$$y_1=e^{r_1t}\ ,\ y_2=e^{r_2t}$$

$$W(y_1,y_2)(t_0)=\begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = r_2e^{(r_1+r_2)t}-r_1e^{(r_1+r_2)t}=(r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)t}\neq 0$$

y_1 و y_2 جواب پایه‌ای هستند $\Leftarrow$ $W(y_1,y_2)\neq 0$ چون

مثال: y_1 و y_2 جواب های پایه‌ای معادله $2t^2y''+3ty'-y=0$ می باشند $(t>0)$.

$y_1 = t^{\frac{1}{2}} \quad , y_2 = t^{-1}$

$$w = \begin{vmatrix} t^{\frac{1}{2}} & t^{-1} \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & \frac{-1}{t^2} \end{vmatrix} = -t^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} = t^{-\frac{3}{2}}(-1-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} t^{-\frac{3}{2}} \neq 0$$

$w(y_1, y_2) \neq 0 \longrightarrow$ y_1 و y_2 جواب‌های پایه‌ای هستند.

وابستگی و استقلال خطی: گوییم دو تابع f و g بر بازه I وابسته خطی اند، اگر دو ثابت k_1 و k_2 که هر دو باهم صفر نیستند (حداقل یکی ناصفر است)، چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $t \in I$ ؛ $k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0$ گوییم

f و g بر بازه I مستقل خطی اند اگر وابسته خطی نباشند.

برای مثال توابع $\sin t$ و $\cos(\frac{\pi}{2} - t)$ بر بازه دلخواه I وابسته خطی اند.

$1 \times \sin t + (-1)\cos(\frac{\pi}{2} - t) = 0$

نکته: هرگاه دو تابع f و g مشتق پذیر بر بازه I باشند و به ازای نقطه‌ای مانند $t_0 \in I$، $w(f,g)(t_0) \neq 0$ لذا (آنگاه) f و g بر I مستقل خطی هستند و هرگاه f و g وابسته خطی باشند آنگاه به ازای هر t، $w(f,g) = 0$

نکته: وقتی رونسکین y_1 و y_2 همه جا صفر نباشد ترکیب خطی $c_1 y_1 + c_2 y_2$ شامل همه جواب‌های معادله $y'' + p(t) y' + q(t) y = 0$ است و y_1 و y_2 را جواب‌های پایه‌ای می‌نامند.

کاهش مرتبه: فرض کنید $y_1(t)$ جوابی از معادله $y'' + p(t) y' + q(t) y = 0$ که همه جا صفر نیست، برای یافتن

جواب دیگر قرار می دهیم $y_2 = v(t) y_1$ در این صورت با جایگذاری $y' = v'(t) y_1 + v(t) y_1'$ و

$y'' = v''(t) y_1 + 2v' y_1' + v(t) y_1''$ در معادله فوق به معادله خطی مرتبه اول برحسب v' می رسیم که با حل آن v' به دست می آید

و با انتگرال گیری v را می یابیم.

مثال: فرض کنید $y_1(t) = t^{-1}$ جواب معادله $2t^2 y'' + 3t y' - y = 0$ که $t > 0$ باشد. مطلوب است

جواب مستقل خطی دیگر؟

$$y_2(t) = v(t) y_1 = \frac{v(t)}{t} \qquad y_2'(t) = \frac{v'(t)}{t} - \frac{v(t)}{t^2}$$

$$y_2''(t) = \frac{v''(t)}{t} - \frac{2v'(t)}{t^2} + \frac{2v(t)}{t^3}$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} 2t^2\left(\frac{v''}{t} - \frac{2v'}{t^2} + \frac{2v}{t^3}\right) + 3t\left(\frac{v'}{t} - \frac{v}{t^2}\right) - \frac{v(t)}{t} = 2t v'' - 4v' + \frac{4}{t} v$$

$$+ 3v' - \frac{3}{t} v - \frac{v}{t} = v''(2t) + v'(\cancel{-4} + \cancel{3}) + v\left(\frac{-3}{t} - \frac{1}{t} + \frac{4}{t}\right) = 2t v'' - v' = 0$$

$$\rightarrow \frac{v''}{v'} = \frac{1}{2t} \xrightarrow{\int} \ln v' = \frac{1}{2} \ln t \rightarrow v' = \sqrt{t} \xrightarrow{\int dt} v = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}$$

$$y_2(t) = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \times t^{-1} = \frac{2}{3}\sqrt{t} \qquad y_c = c_1 t^{-1} + c_2 \times \frac{2}{3}\sqrt{t}$$

مثال: ازمعین کاهش حل کنید:

$$y_1(x) = \sin x^2 \qquad x y'' - y' + 4x^3 y = 0$$

معادله کوشی-اویلر: $t^2y''+aty'+by=0$

برای حل معادلاتی به فرم بالا از تغییر متغیر $t=e^u$ ($u=\ln t$) استفاده می کنیم. در این صورت معادله تبدیل به یک معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت می گردد.

مثال: مطلوب است حل معادله: $2t^2y''+8ty'-8y=0$

$$t^2y''+4ty'-4y=0 \xrightarrow{t\to e^u}$$

نکات: $t=e^u \to u=\ln t$

$$1)\ \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dt}=\frac{dy}{du}\times\frac{1}{t} \quad (1)$$

مشتق زنجیره ای $\quad \frac{d^2y}{du^2}\times\frac{du}{dt}:\frac{1}{t}$

$$2)\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\overset{(1)}{=}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{du}\times\frac{1}{t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{du}\right)\times\frac{1}{t}+\frac{-1}{t^2}\times\frac{dy}{du}=\frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{معادله اصلی}]{\text{جایگذاری در}}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)+4\frac{dy}{du}-4y=0 \to \frac{d^2y}{du^2}+3\frac{dy}{du}-4y=0 \to$$

$$r^2+3r-4=0 \to (r-1)(r+4)=0 \quad \begin{cases} r=1 \\ r=-4 \end{cases}$$

$$y_1=e^{-4u} \xrightarrow{u=\ln t} y_1=e^{-4\ln t}$$
$$y_2=e^{u} \qquad\qquad y_2=e^{\ln t}$$

$$t^2y''+3ty'+y=0 \qquad t=e^u \to u=\ln t$$

حل:

$$1)\ \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{du}\times\frac{1}{t} \qquad 2)\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)$$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)+2\left(\frac{dy}{du}\right)+y=0 \rightarrow \frac{d^2y}{du^2}+\frac{dy}{du}+y=0$

$r^2+2r+1=0 \rightarrow (r+1)^2=0 \begin{cases} y_1=e^{u} \\ y_2=ue^{u} \end{cases} \xrightarrow{u=\ln t} \begin{array}{l} y_1=e^{-\ln t}=\frac{1}{t} \\ y_2=\ln t\, e^{-\ln t}=\frac{\ln t}{t} \end{array}$

نکته: هرگاه Y_1 و Y_2 دو جواب معادله غیرهمگن $y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ باشند، آنگاه تفاضل آن ها یعنی Y_1-Y_2 یک جواب معادله همگن متناظر $(g(t)=0)$ است.

اگر y_1 و y_2 دو جواب پایه ای معادله همگن متناظر باشند در این صورت C_1 و C_2 ای موجودند که:

$Y_1-Y_2=C_1y_1+C_2y_2 \Rightarrow \boxed{Y_1=\overbrace{C_1y_1+C_2y_2}^{\text{جواب عمومی مبحث همگن}}+Y_2}$

روش ضرایب نامعین:

در این روش را جب به شکل کلی جواب خصوصی $Y(t)$ را یک فرض اولیه می کنیم ولی ضرایب آن را نامشخص در نظر می گیریم سپس عبارت فرض شده را در معادله $y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ جایگذاری کرده و ضرایب را طوری تعیین می کنیم که در آن معادله صدق کند.

۱) هرگاه جمله غیرهمگن $g(t)$ یک تابع نمایی به فرم $e^{\alpha t}$ باشد آنگاه فرض می کنیم $Y(t)=Ae^{\alpha t}$

۲) هرگاه $g(t)$ مساوی $\sin\beta t$ یا $\cos\beta t$ یا مجموع از این دو باشد فرض می کنیم $Y(t)=A\sin\beta t+B\cos\beta t$

۳) هرگاه $g(t)$ یک چندجمله ای باشد، $Y(t)$ را چندجمله ای از همان درجه درنظر می گیریم:

مثال: مطلوب است حل معادله زیر:

الف) $x'' - 3x' - 4x = 3e^{2t}$

$Y(t) = Ae^{2t} \rightarrow Y' = 2Ae^{2t} \rightarrow Y'' = 4Ae^{2t}$

$\xrightarrow[\text{معادله اصلی}]{\text{جایگذاری در}} \cancel{4Ae^{2t}} - 3\times 2\times Ae^{2t} - \cancel{4Ae^{2t}} = 3e^{2t} \rightarrow A = -\frac{1}{2} \Rightarrow Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$

$x'' - 3x' - 4x = 0 \rightarrow r^2 - 3r - 4 = 0 \rightarrow (r-4)(r+1) = 0 \rightarrow x_1 = e^{4t},\ x_2 = e^{-t}$

جواب عمومی معادله غیرهمگن $Y = c_1e^{4t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}$

ب) $x'' - 3x' - 4x = 2\sin t$

$Y(t) = A\sin t + B\cos t \rightarrow Y'(t) = A\cos t - B\sin t \rightarrow Y''(t) = -A\sin t - B\cos t$

$\Rightarrow -A\sin t - B\cos t - 3A\cos t + 3B\sin t - 4A\sin t - 4B\cos t = (3B - 5A)\sin t$

$+ (-3A - 5B)\cos t = 2\sin t \Rightarrow \begin{cases} 3B - 5A = 2 \\ -5B - 3A = 0 \end{cases} \rightarrow A = -\frac{5}{17} \quad B = \frac{3}{17}$

$Y(t) = -\frac{5}{17}\sin t + \frac{3}{17}\cos t$ جواب خصوصی غیرهمگن

همگن $x'' - 3x' - 4x = 0 \rightarrow r^2 - 3r - 4 = 0 \rightarrow (r-4)(r+1) = 0 \rightarrow x_1 = e^{4t},\ x_2 = e^{-t}$

جواب کلی $Y(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t} + \left(-\frac{5}{17}\sin t + \frac{3}{17}\cos t\right)$

c) $y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1$

$Y(t) = A t^2 + bt + C \rightarrow Y'(t) = 2a_1 t + a_2 \rightarrow Y''(t) = 2a_1$

جایگذاری در معادله اصلی $\Rightarrow$ $2a_1 - 6a_1 t - 3a_2 - 4a_1 t^2 - 4a_2 t - 4a_3 = 4t^2 - 1 \rightarrow$

$\rightarrow -4a_1 t^2 + (-6a_1 - 4a_2)t + (2a_1 - 3a_2 - 4a_3) = 4t^2 - 1$

$$\begin{cases} -4a_1 = 4 \rightarrow \boxed{a_1 = -1} \\ -6a_1 - 4a_2 = 0 \rightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}} \\ 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 = -1 \rightarrow \boxed{a_3 = \frac{-11}{8}} \end{cases}$$

$Y(t) = -t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{11}{8}$ جواب خصوصی غیرهمگن

$y'' - 3y' - 4y = 0 \rightarrow r^2 - 3r - 4 = 0 \rightarrow (r-4)(r+1) = 0 \rightarrow y_1 = e^{4t},\ y_2 = e^{-t}$

$Y_0(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} + (-t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{11}{8})$

یافتن جواب خصوصی مجموع دو جمله غیرهمگن

فرض کنید $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$ و Y_1 و Y_2 به ترتیب جواب خصوصی معادله‌های $y'' + p(t)y' + q(t)y = g_1(t)$

و $y'' + p(t)y' + q(t)y = g_2(t)$ باشند در این صورت $Y_1 + Y_2$ یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن

$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ است.

مثال: مطلوب است جواب عمومی معادله غیرهمگن:

$$y''-3y'-4y=\overbrace{3e^{2t}}^{g_1(t)}+\overbrace{2\sin t}^{g_2(t)}-\overbrace{8e^{t}\cos 2t}^{g_3(t)}$$

$$\begin{cases} y''-3y'-4y=3e^{2t} \Rightarrow Y_1=\frac{1}{2}e^{2t} \\ y''-3y'-4y=2\sin t \Rightarrow Y_2=-\frac{5}{17}\sin t+\frac{3}{17}\cos t \\ y''-3y'-4y=-8e^{t}\cos 2t \Rightarrow Y_3(t)=e^{t}(A\sin 2t+B\cos 2t) \end{cases}$$

$$Y_3'(t)=e^{t}(A\sin 2t+B\cos 2t)+e^{t}(2A\cos 2t-2B\sin t)$$

$$Y_3'(t)=e^{t}\left((A-2B)\sin 2t+(B+2A)\cos 2t\right)$$

$$Y_3''(t)=e^{t}\left((A-2B)\sin 2t+(B+2A)\cos 2t\right)+e^{t}\left((2A-4B)\cos 2t-(2B+4A)\sin 2t\right)$$

$$=e^{t}\left((\overbrace{A-2B-2B-4A}^{-3A-4B})\sin 2t+(\overbrace{B+2A+2A-4B}^{-3B+4A})\cos 2t\right)\Rightarrow$$

$$Y_3''(t)=e^{t}\left((-3A-4B)\sin 2t+(-3B+4A)\cos 2t\right)$$

جایگذاری در معادله اصلی

$$\Rightarrow \cancel{e^{t}}\left[(-3A-4B)\sin 2t+(-3B+4A)\cos 2t\right]-3\cancel{e^{t}}\left[(A-2B)\sin 2t+(B+2A)\cos 2t\right]$$

$$-4\cancel{e^{t}}(A\sin 2t+B\cos 2t)=-8\cancel{e^{t}}\cos 2t$$

$B=\frac{40}{52}=\frac{10}{13}$ $\quad A=\frac{2}{13}$

$$Y(t)=Y_1+Y_2+Y_3=-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{5}{17}\sin t+\frac{3}{17}\cos t$$

$y'' + P(t)y' + q(t)y = g(t)$

$\rightarrow g(t) = e^{\alpha t} \Rightarrow Y(t) = Ae^{\alpha t}$

$\rightarrow g(t) = \sin\beta t$ یا $\cos\beta t \Rightarrow Y(t) = A\cos\beta t + B\sin\beta t$

$\rightarrow g(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n \Rightarrow$ Date: $Y(t) = A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_{n-1}t + A_n$

$+ e^t(\frac{2}{13}\sin 2t + \frac{1}{13}\cos 2t)$ جواب عمومی $Y(t) = C_1e^{4t} + C_2e^{-t} + Y(t)$

مثال: مطلوب است حل معادلات:

$y'' + 4y = 3\cos 2t$

معادله مشخصه: $r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i$

$y_1 = \cos 2t$

$y_2 = \sin 2t$

یکی از جوابهای همگن با تابع بارگذاری است پس باید جواب اصلاح شود (با توجه به تابع بارگذاری باید در t یا t^2 یا t^3 یا ... ضرب شود)

$Y(t) = t(A\cos 2t + B\sin 2t)$

$Y'(t) = (-2A\sin 2t + 2B\cos 2t)t + (A\cos 2t + B\sin 2t) = (-2At + B)\sin 2t + (2Bt + A)\cos 2t$

$Y''(t) = -2A\sin 2t + 2\cos 2t \times (-2At + B) + 2B\cos 2t - 2\sin 2t(2Bt + A) =$

$-4A\sin 2t + 4B\cos 2t - 4At\cos 2t - 4Bt\sin 2t$

جایگذاری در معادله اصلی $\Rightarrow -4A\sin 2t + 4B\cos 2t - 4At\cos 2t - 4Bt\sin 2t + 4At\cos 2t + 4Bt\sin 2t = 3\cos 2t$

$\rightarrow -4A\sin 2t + 4B\cos 2t = 3\cos 2t \Rightarrow$ $4B = 3 \rightarrow B = \frac{3}{4}$, $A = 0$

$Y(t) = \frac{3}{4}t\sin 2t$

حدس جواب:

$ay'' + by' + cy = g(t)$

اگر تابع $g(t)$ به صورت $P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n$ باشد برای اصلاح جواب $Y(t)$ را به صورت:

میان‌ترم ۹۴/۹/۸ تا ص ۹۰ کتاب شمار

۸-۱۰ صبح

Date: ( )

$t^s(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\dots+A_n)$

می باشد. اگر $g(t)=P_n(t).e^{\alpha t}$ باشد برای اصلاح جواب $Y(t)$ را به صورت :

$t^s(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\dots+A_n)e^{\alpha t}$

در نظر می گیریم. و اگر $g(t)=P_n(t)\times e^{\alpha t}\times\left\{\begin{matrix}\sin\beta t\\ \text{یا}\\ \cos\beta t\end{matrix}\right.$ باشد برای اصلاح جواب $Y(t)$ را به صورت :

$t^s\left[(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\dots+A_n)e^{\alpha t}\cos\beta t+(B_0t^n+B_1t^{n-1}+\dots+B_n)e^{\alpha t}\sin\beta t\right.$

مثال : $y''+3y'=2t^4+t^2e^{-3t}+\sin 3t$ همگن : $r^2+3r=0 \Rightarrow r=0,-3$ $\left\{\begin{matrix}y_1=1\\ y_2=e^{-3t}\end{matrix}\right.$

1) $y''+3y'=2t^4$

2) $y''+3y'=t^2e^{-3t}$

3) $y''+3y'=\sin 3t$

1) $Y_1(t)=t(A_0t^4+A_1t^3+A_2t^2+A_3t+A_4)$

$Y_1'(t)=5A_0t^4+4A_1t^3+3A_2t^2+2A_3t+A_4$

$Y_1''(t)=20A_0t^3+12A_1t^2+6A_2t+2A_3+0$

جایگذاری در معادله (۱) → $20A_0t^3+12A_1t^2+6A_2t+2A_3+15A_0t^4+12A_1t^3+9A_2t^2+6A_3t+3A_4=2t^4$

$\rightarrow 15A_0t^4+(20A_0+12A_1)t^3+(12A_1+9A_2)t^2+(6A_2+6A_3)t+(2A_3+3A_4)=2t^4$

$A_0=\frac{2}{15}$ $A_1=\frac{-2}{9}$ $A_2=\frac{8}{27}$ $A_3=\frac{-8}{27}$ $A_4=\frac{16}{81}$

$Y_1(t)=\frac{2}{15}t^5-\frac{2}{9}t^4+\frac{8}{27}t^3-\frac{8}{27}t^2+\frac{16}{81}t$

2) $Y_2(t) = t(A_0 t^2 + A_1 t + A_2) e^{-3t} \xrightarrow{\text{اصلاح}} \times t$

$Y_2'(t) = (3A_0 t^2 + 2A_1 t + A_2) e^{-3t} - 3e^{-3t}(A_0 t^3 + A_1 t^2 + A_2 t)$

$Y_2''(t) = (6A_0 t + 2A_1) e^{-3t} - 3e^{-3t}(3A_0 t^2 + 2A_1 t + A_2) + 9e^{-3t}(A_0 t^3 + A_1 t^2 + A_2 t)$
$- 3e^{-3t}(3A_0 t^2 + 2A_1 t + A_2)$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} e^{-3t}(6A_0 t + 2A_1 - 9A_0 t^2 - 6A_1 t - 3A_2 + 9A_0 t^3 + 9A_1 t^2 + 9A_2 t - 9A_0 t^2 - 6A_1 t - 3A_2)$

$+ e^{-3t}(9A_0 t^2 + 6A_1 t + 3A_2 - 9A_0 t^2 - 9A_1 t^2 - 9A_2 t) = t^2 e^{-3t} \Rightarrow A_0 = -\frac{1}{9},\ A_1 = -\frac{1}{9},\ A_2 = -\frac{2}{27}$

$$\boxed{Y_2(t) = \left(-\frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{27}t\right) e^{-3t}}$$

3) $Y_3(t) = A\cos 3t + B\sin 3t$

$Y_3' = -3A\sin 3t + 3B\cos 3t$

$Y_3'' = -9A\cos 3t - 9B\sin 3t$

$\Rightarrow -9A\cos 3t - 9B\sin 3t - 9A\sin 3t + 9B\cos 3t = \sin 3t \Rightarrow A = \frac{-1}{18},\ B = \frac{-1}{18}$

$$\boxed{Y_3(t) = \frac{-1}{18}\cos 3t - \frac{1}{18}\sin 3t}$$

$$\boxed{Y_c = c_1 + c_2 e^{-3t} + Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

روش کلی تغییر پارامتر

هرگاه p، q و g در بازه I پیوسته باشند و y_1 و y_2 جواب های مستقل خطی معادله همگن $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ باشند آنگاه یک جواب خصوصی معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ عبارت است از:

$$Y(t) = -\chi_1(t)\int \frac{\chi_2(t)\cdot g(t)}{w(\chi_1,\chi_2)}\,dt + \chi_2(t)\int \frac{\chi_1(t)\cdot g(t)}{w(\chi_1,\chi_2)}\,dt$$

مثال: اگر $x=y_1$ و $x^3=y_2$ جواب های همگن متناظر با معادله $x^2y''-3xy'+3y=2x^4e^x$ باشند مطلوب است

تعیین جواب خصوصی غیرهمگن

$$w(\chi_1,\chi_2) = \begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1' & \chi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^3 - x^3 = 2x^3$$

$$Y(t) = -x\int \frac{x^3 \times 2x^2e^x}{2x^3} + x^3\int \frac{x \times 2x^2e^x}{2x^3} = \ldots$$

روش حل معادلات مرتبه ۲ با ضرایب غیرثابت:

$$\chi'' + P(t)\chi' + q(t)\chi = g(t)$$

$$Y(t) = -\chi_1(t)\int \frac{\chi_2(t)g(t)}{w(\chi_1,\chi_2)}\,dt + \chi_2(t)\int \frac{\chi_1 g(t)}{w(\chi_1,\chi_2)}\,dt$$

مثال: مطلوب است حل معادله غیرهمگن $\chi''+4\chi'+4\chi=e^{-2x}\ln x$

$$w(\chi_1,\chi_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}-2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}$$

$$r^2+4r+4=0 \Rightarrow (r+2)^2=0 \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} r=-2 < \begin{matrix} \chi_1 = e^{-2x} \\ \chi_2 = xe^{-2x} \end{matrix}$$

$$Y(x) = -e^{-2x}\int \frac{xe^{-2x}(e^{-2x}\ln x)}{e^{-4x}} + xe^{-2x}\int \frac{e^{-2x}e^{-2x}\ln x}{e^{-4x}}$$

$uv - \int v\,du$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$uv - \int v\,du$

$$\int x\ln x\,dx = x^2\ln x - x^2 - \int (x\ln x - x)\,dx$$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \ln x\,dx \Rightarrow x\ln x - x = V$

$\int x\ln x\,dx = x^2\ln x - x^2 - \int x\ln x\,dx + \frac{x^2}{2} \Rightarrow 2\int x\ln x\,dx = x^2\ln x - \frac{x}{2} \Rightarrow$

$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2})$

معادلات خطی کامل مرتبه دوم: معادله روبرو را

$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$

را کامل گوییم هرگاه بتوان آنرا بشکل $G(x) = \left(P(x)y' + k(x)y\right)'$ نوشت که در آن $k(x)$ برحسب $P(x)$ ، $Q(x)$

و $R(x)$ معین می شود. معادله دیفرانسیل توان فوراً انتگرال گیری کرد و یک معادله خطی مرتبه اول بدست

آورد.

توجه: یک شرط لازم برای کامل بودن عبارت است از:

داری شرط کافی نیز باشد:

$P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$

مثال:

$y'' + xy' + y = 0$

$P(x) = 1 \rightarrow P''(x) = 0$

$Q(x) = x \rightarrow Q'(x) = 1 \qquad \Rightarrow P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$ معادله کامل است

$R(x) = 1$

$\underbrace{y'' + xy' + y}$ $= (y' + k(x)y)' = (y' + xy)'$

$y'' + \underbrace{k'(x)y + k(x)y'} \Rightarrow k(x) = x$

$y'' + xy' + y = 0 \Rightarrow (y' + (xy))' = 0 \Rightarrow y' + xy = C_1 \Rightarrow e^{\int x\,dx}(y' + xy = C)$

$$e^{\frac{x^2}{2}}y' + xe^{\frac{x^2}{2}}y = e^{\frac{x^2}{2}}c_1 \Rightarrow (e^{\frac{x^2}{2}}y)' = e^{\frac{x^2}{2}}c_1 \Rightarrow e^{\frac{x^2}{2}}y = \int e^{\frac{x^2}{2}}c_1 + c_2$$

$$\Rightarrow y = c_1e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{\frac{x^2}{2}}dx + c_2e^{-\frac{x^2}{2}}$$

حل تمرین ۱۷۸، ۱۸)

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

$$P(x) = x^2 \longrightarrow P'(x) = 2x \longrightarrow P''(x) = 2$$

$$Q(x) = x \longrightarrow Q'(x) = 1 \qquad \Rightarrow P''(x) - Q'(x) + R(x) = 2 - 1 - 1 = 0 \quad \text{معادله کامل است}$$

$$R(x) = -1$$

$$x^2y'' + xy' - y = (x^2y' + k(x)y)' \Rightarrow x^2y'' + \underbrace{(2x + k(x))}_{x}y' + \underbrace{k'(x)}_{-1}y = 0 \Rightarrow k(x) = -x$$

$$(x^2y' - xy)' = 0 \xrightarrow{\int} x^2y' - xy = c_1 \xrightarrow{\times\frac{1}{x^2}} y' - \frac{1}{x}y = \frac{c_1}{x^2} \xrightarrow{\times e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}y\right)' = \frac{c_1}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x}y = \frac{c_1}{-2x^2} + c_2 \Rightarrow y = \frac{c_1}{-2x} + c_2x$$

حل تمرین ۱۷۸، ۱۶ و ۱۷)

16) $y'' + 3x^2y' + xy = 0$ 17) $xy'' - \cos x\, y' + \sin x\, y = 0$

$0 - 6x + x = -5x \neq 0$ کامل نیست $\qquad 0 - \sin x + \sin x = 0$ کامل است

17) $xy'' - \cos x\, y' + \sin x\, y = (xy' + k(x)y)' = y' + xy'' + k'(x)y + k(x)y'$

$$\Rightarrow \begin{cases} k(x) + 1 = -\cos x \Rightarrow \boxed{k(x) = -\cos x - 1} \\ k'(x) = \sin x \end{cases}$$

$$(xy' + (-\cos x - 1)y)' = 0 \xrightarrow{\int dx} xy' + (-\cos x - 1)y = c \xrightarrow{e^{\int \frac{-\cos x - 1}{x}dx}}$$

معادلات خطی مراتب بالاتر با ضرایب ثابت:

برای حل معادلات به صورت $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ کافیست معادله مشخصه آنرا حل کنیم اگر $r_1, r_2, \dots, r_n$ ریشه‌های آن باشند جواب های معادله به صورت $y_i = e^{r_i x}$ $i=1,\dots,n$ می باشد.

مثال: مطلوب است جواب عمومی معادله: $y'''' + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0$

مجموع ضرایب صفر است در نتیجه یکی از ریشه‌ها ۱ است $\longrightarrow$ $r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6 = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6 & r-1 \\ \hline
-r^4 \mp r^3 & r^3 + 2r^2 - 5r - 6 \\ \hline
2r^3 - 7r^2 - r + 6 & \\
-2r^3 \mp 2r^2 & \\ \hline
-5r^2 - r + 6 & \\
\pm 5r^2 \mp 5r & \\ \hline
-6r + 6 & \\
\pm 6r \mp 6 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6 = (r-1)(r^3 + 2r^2 - 5r - 6)$

درجه فرد یکی است لذا (۱-) یکی از ریشه‌هاست

مجموع ضرایب جملات با درجه زوج با مجموع ضرایب جملات با : $r^3 + 2r^2 - 5r - 6$

$$
\begin{array}{l|l}
r^3 + 2r^2 - 5r - 6 & r+1 \\ \hline
 & r^2 + r - 6
\end{array}
$$

$$r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6 = 0 \Rightarrow (r-1)(r+1)(r-2)(r+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} r=1 \rightarrow x_1 = e^{x} \\ r=-1 \rightarrow x_2 = e^{-x} \\ r=2 \rightarrow x_3 = e^{2x} \\ r=-3 \rightarrow x_4 = e^{-3x} \end{cases}$$

$$x_c = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 \rightarrow x_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-3x}$$

مثال: مطلوب است حل معادله زیر:

$$x^{iv} + x = 0$$

$$r^4 + 1 = 0 \rightarrow r^4 = -1 = i^2$$

یادآوری: $\sqrt[n]{z}$, $z = x + iy$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$-1 = -1 + 0i \rightarrow |-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 \qquad \theta = \pi$$

$$\omega_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_2 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi}{4}\right)\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_3 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi + 4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 4\pi}{4}\right)\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$ مزدوج

$$\omega_4 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi + 6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 6\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x \\ x_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ x_2 = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ x_4 = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

معادلات مراتب بالاتر:

روش ضرایب نامعین: ص ۱۹۶ - مثال ۲

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t$$

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \longrightarrow (r-1)^3 = 0 \Rightarrow r = 1 \begin{cases} y_1 = e^t \\ y_2 = te^t \\ y_3 = t^2 e^t \end{cases} \qquad Y(t) = At^3 e^t$$

$$Y' = 3At^2e^t + At^3e^t = Ae^t(3t^2 + t^3)$$

$$Y'' = Ae^t(3t^2 + t^3) + Ae^t(6t + 3t^2) = Ae^t(6t + 6t^2 + t^3)$$

$$Y''' = Ae^t(6t + 6t^2 + t^3) + Ae^t(6 + 12t + 3t^2) = Ae^t(t^3 + 9t^2 + 18t + 6)$$

$$\xRightarrow{\text{جایگذاری}} Ae^t(t^3 + 9t^2 + 18t + 6 - 3t^3 - 18t^2 - 18t + 9t^2 + 3t^3 - t^3) = 4e^t$$

$$\Rightarrow 6A\cancel{e^t} = 4\cancel{e^t} \Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{3}}$$

$$Y(t) = \frac{2}{3}t^3 e^t \qquad y_G = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + \frac{2}{3} t^3 e^t$$

$$y''' - 4y' = t + 3\cos t + e^{-2t}$$ ص ۱۹۶ مثال ۲

$$r^3 - 4r = 0 \quad \begin{matrix} r = 0 \\ r = \pm 2 \end{matrix} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = e^{-2t} \\ y_3 = e^{2t} \end{cases}$$

$$y''' - 4y' = t \Rightarrow Y_1(t) = A + Bt \xrightarrow{\text{اصلاح} \times t} Y_1(t) = At + Bt^2$$

$$y''' - 4y' = 3\cos t \Rightarrow Y_2(t) = C\cos t + D\sin t$$

$$y''' - 4y' = e^{-2t} \Rightarrow Y_3(t) = Ee^{-2t} \xrightarrow{\text{اصلاح}} Y_3(t) = Ete^{-2t}$$

اگر Y_1 را در معادله ① و Y_2 را در معادله ② و Y_3 را در معادله ③ جایگذاری کنیم

① $A=-\frac{1}{8}, B=0$

② $C=0, D=-\frac{2}{5}$ $\Rightarrow x_c = c_1 + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{2t} - \frac{1}{8}t - \frac{2}{5}\sin t + \frac{t}{8}e^{-2t}$

③ $E=\frac{1}{8}$

معادلات مراتب بالاتر (روش تغییر پارامتر)

اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $w(t)=W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و W_m $(m=1,\dots,n)$ دترمینان حاصل از W با تعویض ستون mام با $(0,0,\dots,0,1)$ در این صورت

$$Y(t)=\sum x_m \int \frac{g(s)\,W_m(s)}{W(s)}$$

$$W(x_1,x_2,\dots,x_n) = W(s) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$W_m(s) = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & 0 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & 0 & \cdots & x_n' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & 1 & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

تمرین ٣

مثال: مطلوب است حل معادله $y''' - y'' - y' + y = g(t)$

$$r^3 - r^2 - r + 1 = 0 \rightarrow (r-1)(r^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1(t) = 1 \rightarrow y_1 = e^t \\ r_2 = 1 \rightarrow y_2 = te^t \\ r_3 = -1 \rightarrow y_3 = e^{-t} \end{cases}$$

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (1+t)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (2+t)e^t & e^{t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -2e^{-t} \\ 0 & 2e^t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= e^t(e^t \times 0 + 4e^0) - te^t(0\times 0 - 0\times(-2e^{-t})) + e^{-t}(0\times 2e^t - 0\times e^t) = +4e^t$$

$$W_1(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (1+t)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (2+t)e^t & e^t \end{vmatrix} = (-1)^2 \times 0 \times \begin{vmatrix} (1+t)e^t & -e^{-t} \\ (2+t)e^t & e^{-t} \end{vmatrix} + (-1)^3 \times 0 \times \begin{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^4 \begin{vmatrix} \end{vmatrix} = -t - (1+t) = -2t - 1$$

$$W_2(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = 2$$

$$W_3(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ & & 1 \end{vmatrix} = e^{2t}$$

$$Y(t) = y_1 \int \frac{(-1-2t)\,g(t)}{4e^t}\,dt + y_2 \int \frac{2g(t)}{4e^t} + y_3 \int \frac{e^{2t} g(t)}{4e^t}$$

$$y_c = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 e^{-t} + Y(t)$$

م ل

سری های توانی:

سری به صورت $\sum_{n}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ را سری توانی حول x_0 می نامیم

$S_0 = a_0(x-x_0)^0 = a_0$

$S_1 = a_1(x-x_0)^1 + a_0$

$S_2 = a_2(x-x_0)^2 + a_1(x-x_0) + a_0$

بین سری ها - $S_n = a_n(x-x_0)^n + \cdots + a_1(x-x_0)^1 + a_0$

همگرایی سری ها: سری $\sum_{n}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ همگراست هرگاه دنباله مجموع های جزئی آن همگرا باشد

یعنی $\lim_{n\to\infty} S_n = L < \infty$ که L را با نماد $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ نمایش می دهیم

آزمون همگرایی (آزمون نسبت) $\sum_{n}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

اگر $L<1$ سری همگراست.

اگر $L>1$ سری واگراست.

اگر $L=1$ چیزی نمی توان گفت

مثال: مطلوب است تعیین حد $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n n}_{a_n}(x-2)^n$

$\lim \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(-1)^n n}\right| = 1$ چیزی نمی توان گفت

نکته: به ازای هر x که $|x-x_0| < \frac{1}{L}$ سری همگراست.

به ازای هر x که $|x-x_0| > \frac{1}{L}$ سری واگراست.

به ازای هر x که $|x-x_0| = \frac{1}{L}$ چیزی نمی‌توان گفت.

$-1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3$

در مثال قبل به ازای هر x که $|x-2|<\frac{1}{1}$ سری همگراست. $(1<x<3)$

" " $|x-2|>\frac{1}{1}$ " واگراست. $(x>3 , x<1)$

" " $|x-2|=1$ چیزی نمی‌توان گفت. $(x=1 , x=3)$

$$x=1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . n(1-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

سری واگراست زیرا حد جمله عمومی به صفر میل نمی‌کند. $\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$

$$x=3 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . n(3-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \rightarrow$$ سری واگراست

سری:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$f'(x)$
$f''(x)$
$\vdots$
$f^{n}(x)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

$\sin x =$

سری جواب معادلات با ضرایب چندجمله‌ای حول نقطه‌ی عادی:

برای حل معادلات خطی مرتبه‌ی دو که ضرایبشان چندجمله‌ای از یک متغیر مستقل است کافی است ابتدا معادله همگن متناظر با آن را در نظر بگیریم، روند حل برای معادله غیرهمگن مشابه است.

$$* \quad P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

که در این معادله P، Q و R چندجمله‌ای هستند.

تعریف: نقاط عادی و منفرد معادله *

در معادله‌ی * نقطه x_0 که $P(x_0) \neq 0$ یک نقطه عادی ~~...~~ یا معمولی معادله * نامیده می‌شود. از طرف دیگر اگر $P(x_0) = 0$ آنگاه x_0 یک نقطه منفرد معادله (*) است.

حل معادله به کمک سری: در این جواب های به شکل روبه‌رو هستیم

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

یا

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

مثال: مطلوب است حل معادله روبه‌رو به کمک سری‌ها: $y'' + y = 0 \quad (-\infty < x < +\infty)$

نقاط عادی $= R$

هر عددی می‌توان انتخاب کرد اما صفر راحت‌تر است.

جواب را به صورت سری حول نقطه عادی $x=0$ در نظر می‌گیریم:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots \rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x)^{n-1}$$

$$y''=2a_2+6a_3x \rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$y''+y=0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در}} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-0)^n=0 \rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)^n=0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\big((n+1)(n+2)a_{n+2}+a_n\big)x^n=0$$

$n\geq 0$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+a_n=0 \Rightarrow a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \quad n\geq 0$$

$$a_0,\quad a_2=-\frac{a_0}{1\times 2},\quad a_4=-\frac{a_2}{3\times 4}=\left(\frac{-a_0}{1\times 2}\right)\times\frac{1}{3\times 4}=\frac{a_0}{4!},\quad a_6=-\frac{a_4}{6\times 5}=-\frac{a_0}{4!\times 5\times 6}=\frac{-a_0}{6!}$$

$n=2k$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{(2k)!}$$

$$a_1,\quad a_3=-\frac{a_1}{2\times 3},\quad a_5=\frac{-a_3}{4\times 5}=-\frac{-a_1}{5\times 4\times 3\times 2}=\frac{a_1}{5!}$$

$$a_7=\frac{-a_1}{7!} \Rightarrow a_{2k+1}=(-1)^k\frac{a_1}{(2k+1)!}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\Big(a_0+\overset{-a_0/2!}{a_2x^2}+\overset{-a_0/4!}{a_4x^4}+\dots\Big)+\Big(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\dots\Big)=a_0\Big(1-\frac{1}{2!}x^2$$

$$+\dots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\dots\Big)+a_1\Big(x-\frac{1}{3!}x^3+\dots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\dots\Big)=a_0\cos x+a_1\sin x$$

$$\begin{cases}\sin x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\[2ex] \cos x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!}\end{cases}$$

مثال:

$y'' - xy = 0 \qquad (-\infty < x < +\infty) \qquad x=1$

(نقاط عادی :$\mathbb{R}$ $\Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\cancel{x_0})^n$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

شل هم کردن توان x ها و اندیس ∑ ها

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \longrightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \rightarrow 2\times 1\times a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n -$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0 \Rightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1} \right) x^n = 0 \Rightarrow$

$2a_2 = 0 \quad , \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$

$n = 0, 3, 6, \ldots$

جملات صفرها . $a_0 \,,\, a_3 = \dfrac{a_0}{2\times 3} \,,\, a_6 = \dfrac{a_3}{5\times 6} = \dfrac{a_0}{5\times 6\times 3\times 2} \,,\, a_9 = \dfrac{a_6}{9\times 8} = \dfrac{a_0}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}$

$a_{3k} = \dfrac{a_0}{(3k)(3k-1)\times((3k-1))\left(3(k-1)-1\right)\times 4\cdots\times 3\times 2}$

جملات یک ها : $a_1 \,,\, a_4 = \dfrac{a_1}{3\times 4} \,,\, a_7 = \dfrac{a_4}{7\times 6} = \dfrac{a_1}{7\times 6\times 4\times 3} \,,\, a_{10} = \dfrac{a_1}{10\times 9\times 7\times 6\times 4\times 3}$

$a_{3k+1} = \dfrac{a_1}{(3k+1)(3k)\times(3(k-1)+1)\times 4\cdots\times 4\times 3}$

جملات دوها : $a_2 = 0 \,,\, a_5 = 0 \,,\, a_8 = 0 \,,\, \cdots$

$a_{3k+2} = 0$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=(a_0+a_3x^3+a_6x^6+\dots+a_{3k}x^{3k}+\dots)+(a_1x+a_4x^4+a_7x^7+\dots+a_{3k+1}x^{3k+1}+\dots)$$

$$+(a_2x^2+a_5x^5+a_8x^8+\dots+a_{3k+2}x^{3k+2}+\dots)=$$

$$=a_0\left(1+\frac{1}{3\times 2}x^3+\dots+\frac{1}{3k(3k-1)\times\dots\times 3\times 2}x^{3k}+\dots\right)+a_1\left(x+\frac{1}{4\times 3}x^4+\dots+\frac{1}{(3k+1)3k\times\dots\times 4\times 3}x^{3k+1}+\dots\right)$$

$$=a_0y_1+a_1y_2$$

مثال مطلوب است حل معادله $y''-xy=0$ حول نقطه عادی $x=1$ ، $x-x_0 \leftarrow$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n \rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-1)^{n-1} \rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x-1)^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x-1)^{n-2}-\overset{x+1-1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n=0\rightarrow\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x-1)^{n-2}-(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$$

$$\rightarrow\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x-1)^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n-\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n=0$$

$$(2\times 1)a_2-a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1}-a_n\right)(x-1)^n=0$$

$$2a_2-a_0=0 \Rightarrow a_2=\frac{a_0}{2} \qquad (n+2)(n+1)a_{n+2}=a_n+a_{n-1} \quad n\geq 1$$

$$a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad n\geq 1$$

$$a_3=\frac{a_1+a_0}{2\times 3}=\frac{a_1}{6}+\frac{a_0}{6}$$

$$a_4 = \frac{a_2 + a_1}{3 \times 4} = \frac{a_0}{2 \times 3 \times 4} + \frac{a_1}{3 \times 4}$$

$$a_5 = \frac{a_3 + a_2}{4 \times 5} = \frac{\frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{6} + \frac{a_0}{2}}{4 \times 5} = \frac{a_1}{3 \times 5 \times 4} + \frac{4a_0}{4 \times 5 \times 6}$$

$\vdots$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = a_0 + a_1 (x-1) + a_2 (x-1)^2 + a_3 (x-1)^3 + a_4 (x-1)^4 + a_5 (x-1)^5 + \dots =$$

$$\left(a_0 + \frac{a_0}{2}(x-1)^2 + \frac{a_0}{6}(x-1)^3 + \frac{a_0}{24}(x-1)^4 + \dots\right) + \left(a_1 (x-1) + \frac{a_1}{6}(x-1)^3 + \frac{a_1}{12}(x-1)^4 + \dots\right)$$

$$y = a_0 \left(1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \dots\right) + a_1 \left((x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \dots\right) = a_0 y_1 + a_1 y_2$$

مثال:

$$y'' + xy' - y = 0 \qquad x_0 = 1$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0 \qquad x_0 = 1$ مثال ۹ (۱۸)

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-1}$

$\xRightarrow{\text{جایگذاری}} \overbrace{(1+x^2)}^{(x-1)(x+1)+2}\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-1}\right) - 4x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}\right) + 6\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n\right) = 0$

$2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + (\overset{x-1+1}{x+1})\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-1)^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n -$

$4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$

$2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-1)^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-1)^{n-1}$

$-4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$

$2\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-1)^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n(x-1)^n$

$-4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-1)^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$

$(4a_2 + 12a_3(x-1)) + (4a_2(x-1)) + (-4a_1(x-1)) + (-4a_1 - 8a_2(x-1)) +$

$(6a_0 + 6a_1(x-1)) + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(2a_{n+2}(n+1)(n+2) + n(n-1)a_n + 2n(n+1)a_{n+1} -$

$4na_n - 4(n+1)a_{n+1} + 6a_n\Big)(x-1)^n = 0$

$4a_2 - 4a_1 + 6a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = a_1 - \frac{3}{2}a_0$

$$12a_3 + 4a_2 - 4a_1 - 8a_2 + 6a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{4a_2 - 2a_1}{12} = \frac{a_1}{3} - \frac{a_0}{2} - \frac{a_1}{6} = \frac{a_1}{6} - \frac{a_0}{2}$$

$$2a_{n+2}(n+1)(n+2) + n(n-1)a_n + 2n(n+1)a_{n+1} - 4(n+1)a_{n+1} + 6a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{-(n^2-5n+6)a_n - (2n^2-2n-4)a_{n+1}}{2(n+1)(n+2)} \qquad n \geqslant 2$$

$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{-0\,a_2 \times 0}{6\times 4} = 0$

$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{-2}{10}a_4 = -\frac{a_4}{5} = 0$

$n=4 \Rightarrow a_6 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = a_0 + a_1(x-1) + \left(a_1 - \frac{3}{2}a_0\right)(x-1)^2 + \left(\frac{a_1}{6} - \frac{a_0}{2}\right)(x-1)^3 =$$

$$a_0\left[1 - \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3\right] + a_1\left((x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3\right) = a_0 y_1 + a_1 y_2$$

نکته: هرگاه فرض کنیم همه‌ی عوامل مشترک P و Q حذف شده باشند آنگاه شعاع همگرایی سری توانی $\frac{Q}{P}$ حول نقطه x_0 درست مساوی با فاصله x_0 تا نزدیکترین صفر P است در تعیین این فاصله باید به خاطر داشت که $P(x)=0$ ممکن است ریشه‌های مختلط داشته باشد و این ریشه‌ها باید در نظر گرفته شوند.

آزمون نسبت $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}} = l \to R = \frac{1}{l}$

مثال: $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

شعاع همگرایی سری تیلور $(1+x^2)^{-1}$ حول $x=0$ بیابید. قبلاً از راه جمله‌ی عمومی می‌رفتیم

$(1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1+x^2} \qquad 1+x^2 = 0 \to x^2 = -1 = i^2 \to x = \pm i$

$(x=0\ ,\ x=i) \xrightarrow{\text{فاصله}} \sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2} = 1$

$(x=0\ ,\ x=-i) \longrightarrow \sqrt{\qquad} = 1$

شعاع همگرایی سری تیلور $(1+x^2)^{-1}$ حول صفر برابر ۱ است

مثال: برای شعاع همگرایی جواب های معادله $(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0$ یک سری حول نقطه $x=0$ و حول نقطه $x=-\frac{1}{2}$ کران پایین بیابید.

برای یافتن شعاع همگرایی جواب معادله حول نقطه $x=0$ داریم

$$1+x^2=0 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=\pm i$$

شعاع همگرایی جواب حول $x=0$ برابر است با:

$$|x-0|=|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$$

شعاع همگرایی

بنابراین بازای هر x که $|x|<1$ آنگاه سری جواب همگراست

شعاع همگرایی حول $x=-\frac{1}{2}$

$$(1+x^2)=0 \rightarrow x=\pm i$$

$$|x-x_0|=|i+\tfrac{1}{2}|=\sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|x-x_0|=|-i+\tfrac{1}{2}|=\sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

سری همگرایی جواب $=\frac{\sqrt{5}}{2}$

بازای هر x که $|x+\frac{1}{2}|<\frac{\sqrt{5}}{2}$ سری جواب حول $x=-\frac{1}{2}$ ($y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+\frac{1}{2})^n$) همگراست

حل معادله‌ی لژاندر: معادله‌ی $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ به معادله‌ی لژاندر با ثابت صحیح نامنفی n معروف است.

مثال. مطلوب است حل معادله‌ی لژاندر حول $x=0$، سری جواب به صورت $y=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ است.

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$$

$$2\times a_2 + 3\times 2 a_3 x - 2a_1 x + n(n+1)a_0 + n(n+1)a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \big((k+2)(k+1) a_{k+2} - k(k-1)a_k$$

$$- 2k a_k + n(n+1)a_k\big) x^k = 0$$

$$2a_2 + n(n+1)a_0 = 0 \rightarrow a_2 = \frac{-n(n+1)}{2} a_0$$

$$(6a_3 - 2a_1 + n(n+1)a_1) \rightarrow a_3 = \frac{-(n+2)(n-1)}{6} a_1$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2k a_k + n(n+1)a_k = 0$$

$$a_{k+2} = \frac{-k^2-k+n^2+n}{(k+2)(k+1)} a_k = \frac{(n-k)\left[(n+k)+1\right]}{(k+2)(k+1)} a_k \quad , k \geqslant 2$$

$$a_4 = \frac{(n-2)(n+4)}{4\times 3} a_2 = -\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4\times 3\times 2}$$

$$a_5 = \frac{(n-3)(n+4)}{5\times 4} a_3 = -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5\times 4\times 3\times 2} \qquad a_6 = ? \quad a_7 = ?$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = a_0\left(1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \dots\right)$$

$$+ a_1\left(x - \frac{(n+2)(n-1)}{3!}x^3 - \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \dots\right)$$

بسته به این که n زوج باشد یا فرد ضرایب یکی از جواب های y_1 یا y_2 از جایی به بعد صفر است لذا y_1 یا y_2 چندجمله‌ای

می‌شود. به جوابی که چندجمله‌ای باشد، چندجمله‌ای لژاندر گوییم.

نقاط تکین منظم: هرگاه توابع $p=\frac{Q}{R}$ و $q=\frac{R}{P}$ در $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ در نقطه x_0 تحلیلی باشند (

یعنی سری تیلورشان موجود باشند)، گوییم x_0 نقطه عادی معادله‌ی دیفرانسیل فوق است در غیر این صورت یک نقطه منفرد است.

نقاط تکین منظم: نقطه‌ی $x=x_0$ را یک نقطه‌ی تکین منظم معادله $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ گوییم هرگاه دو تابع $(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$

و $(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ در $x=x_0$ تحلیلی باشند، یعنی دارای سری تیلور همگرا حول $x=x_0$ باشند.

نکته: برای حالتی که P و Q و R چندجمله‌ای هستند x_0 یک نقطه‌ی تکین منظم معادله $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$

است هرگاه دو حد (متناهی) $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ موجود باشند.

مثال: نقاط تکین معادله‌ی لژاندر را رده‌بندی کنید. $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$

نقاط تکین $1-x^2=0 \rightarrow x=\pm1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to1}(x-1)\frac{-2x}{(1-x^2)}=\lim\frac{(1-x)2x}{(1-x)(1+x)}=1\\ \lim_{x\to1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}=\lim\frac{-(x-1)\alpha(\alpha+1)}{1+x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$ لذا نقطه $x=1$ نقطه تکین منظم است

مثال: نقاط تکین $(x-\frac{\pi}{2})^2y''+\cos x\,y'+\sin x\,y=0$ را تعیین کنید و به صورت منظم یا غیرمنظم رده‌بندی کنید.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}\\ \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$ هر نقطه به جز $x=\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی غیرتکین معادله است. (نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ تکین است)

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}=\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=$ ✗ $\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})^2\frac{\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}=\sin x$ ✓

سری تیلور حول $x=\frac{\pi}{2}$: $\cos x=\sum\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{2})}{n!}(x-\frac{\pi}{2})^n=\cos(\frac{\pi}{2})+\frac{(-1)\times(x-\frac{\pi}{2})^1}{1!}+\frac{0}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3+\dots$

$\rightarrow$ لذا $\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ در $x=\frac{\pi}{2}$ تحلیلی است

$\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1+\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^2+\dots$

✓ به وضوح $y=\sin x$ در $x=\frac{\pi}{2}$ تحلیلی است (زیرا دارای سری تیلور همگرا در $x=\frac{\pi}{2}$ است). لذا نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ تکین منظم است

روش فروبنیوس: برای حل معادله $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ که $x=0$ نقطه تکین منظم آن است معادله $x^2y''+xp(x)y'+x^2q(x)y=0$ که در آن $xp(x)=\frac{xQ(x)}{P(x)}$ و $x^2q(x)=\frac{x^2R(x)}{P(x)}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم r_1 و r_2 ریشه‌های معادله مشخصه $F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0$ باشند:

$\lim_{x\to0} xp(x)=p_0$ ، $\lim_{x\to0} x^2q(x)=q_0$

① در صورت حقیقی بودن r_1 و r_2، $r_1\geq r_2$ جواب به صورت زیر است:

$$y_1=|x|^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right)$$

① هرگاه r_1-r_2 صفر یا عدد صحیح مثبت نباشد ($\neq z$) جواب دوم به صورت زیر است:

$$y_2=|x|^{r_2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_2)x^n\right)$$

③ هرگاه $r_1=r_2$ جواب دوم به صورت

$$y_2(x)=y_1\ln|x|+|x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(r_1)x^n$$

④ هرگاه $r_1-r_2=N$ (عدد صحیح مثبت) آنگاه

$$y_2(x)=ay_1(x)\ln|x|+|x|^{r_2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(r_2)x^n\right)$$

رابطه بازگشتی برای حالت ۱:

$$F(n+r)a_n+\sum_{k=0}^{n-1}\left(p_{n-k}(r+k)+q_{n-k}\right)=0\ ,\quad n\geq1$$

مثال: معادله دیفرانسیل روبرو را حل کنید.

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$$

حل: نقطه $x=0$ نقطه تکین می باشد

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{-x}{2x^2} = -\frac{1}{2} = p_0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1+x}{2x^2} = \frac{1}{2} = q_0$$

$\Rightarrow$ نقطه $x=0$ تکین منظم است

$$F(r):\quad r(r-1) - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2r^2 - 2r - r + 1 = 0 \Rightarrow (2r-1)(r-1) = 0 \to r=1,\ r=\frac{1}{2}$$

$$xP(x) = \frac{x(-x)}{2x^2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \underset{x^0\text{ ضریب}}{p_0 = -\frac{1}{2}},\ \underset{x^1}{p_1 = 0},\ \underset{x^2}{p_2 = 0},\ \dots,\ p_n = 0,\ \dots$$

$$x^2q(x) = x^2\cdot\frac{1+x}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \Rightarrow q_0 = \frac{1}{2},\ q_1 = \frac{1}{2},\ q_2 = 0,\ q_3 = 0,\ \dots,\ q_n = 0,\ \dots$$

$$F(n+r)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left(p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}(2(n+r)-1)(n+r-1)\times a_n + a_{n-1}(p_1(r+n-1)+q_1) + a_{n-2}(p_2(r+n-2)+q_2 +$$

$$\dots + a_0(p_n(r+0) + q_n) = 0$$

$$\frac{1}{2}(2n+2r-1)(n+r-1)a_n + \frac{a_{n-1}}{2} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{(2n+2r-1)(n+r-1)} \quad n\geq 1$$

$$r_1 = 1 \Rightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{(2n+1)\times n}$$

$$a_1 = \frac{-a_0}{3\times 1} = \frac{-a_0}{3}$$

$$a_2 = \frac{-a_1}{5\times 2} = \frac{a_0}{5\times 3\times 2}$$

$$a_3 = \frac{-a_2}{7\times 3} = \frac{-a_0}{7\times 5\times 3\times 3\times 2}$$

$$a_4 = \frac{-a_3}{9\times 4} = \frac{a_0}{9\times 7\times 5\times 3\times 4\times 3\times 2}$$

$$a_n = (-1)^n\frac{a_0}{(2n+1)(2n-1)\times\dots\times 3\times 1\times n!}$$

$$y_1=|x|^1\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)\times\cdots\times 5\times 3\times n!}\times x^n\right)$$

$$a_1=\frac{-a_0}{1\times 1}$$

$$a_2=\frac{-a_1}{2\times 3}=\frac{a_0}{1\times 3}$$

$$\bullet\ r_2=\frac{1}{2}\rightarrow a_n=\frac{-a_{n-1}}{2n\times(n-\frac{1}{2})}=\frac{-a_{n-1}}{n(2n-1)}$$

$$a_3=-\frac{a_2}{3\times 5}=\frac{-a_0}{2\times 3\times 5\times 3}$$

$$a_4=-\frac{a_3}{4\times 7}=\frac{a_0}{2\times 3\times 4\times 7\times 5\times 3}$$

$$a_n=(-1)^n\frac{a_0}{n!\,(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 3}$$

$$y_2=|x|^{\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n-1)\times\cdots\times 3}x^n\right)$$

تبدیلات لاپلاس:

تبدیلات انتگرالی: در انتگرال به صورت $F(s)=\int_\alpha^\beta k(s,t)\,f(t)\,dt$ که در آن $k(s,t)$ تابع داده شده‌ای است به نام هسته تبدیل و α و β حدود انتگرال‌گیری می‌باشند، را تبدیل انتگرالی نامند.

تبدیل لاپلاس: فرض کنید $f(t)$ به ازای $t\geq 0$ داده شده باشد و f در چند شرط (که بعداً بیان می‌شود) صدق کند، در این صورت تبدیل لاپلاس f که $L(f(t))$ یا $F(s)$ نشان داده می‌شود به صورت $L(f(t))=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ تعریف می‌شود.

مثال: فرض کنید $f(t)=e^{ct}$، $t\geq 0$ در این صورت:

$(s>c)$

$$L(\overset{f(t)}{e^{ct}})=\int_0^\infty e^{-st}\times e^{ct}\,dt=\int_0^\infty e^{(c-s)t}\,dt=\frac{e^{(c-s)t}}{(c-s)}\Big]_0^\infty=\frac{0}{c-s}-\frac{1}{c-s}=\frac{1}{s-c}$$

$$\boxed{L(e^{ct})=\frac{1}{s-c}}$$

مثال. مطلوب است $L(\{1\})$ $F(s)=L(\{1\})=\int_0^\infty e^{-st}\times 1\,dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{e^{-st}}{-s}\Big]_0^\infty=\frac{e^{-\infty}}{-s}-\frac{1}{-s}=\frac{1}{s}$ $(s>0)$

تابع تکه تکه پیوسته:

تعداد ها متناهی باید باشند

گوییم تابع f بر بازه $a\leq t\leq b$ تکه تکه پیوسته است اگر بازه را بتوان به تعداد متناهی نقطه $a<c_1<\dots<c_{n-2}<c_{n-1}<b$ ($c_0=a$, $c_n=b$)

چنان افراز کرد که:

۱) f بر هر زیر بازه باز $c_{i-1}<t<c_i$ پیوسته باشد $i=1,\dots,n$

۲) وقتی از داخل هر زیر بازه به نقاط انتهایی نزدیک می شویم، f به یک حد متناهی نزدیک شود.

قضیه آزمون مقایسه: هرگاه f به ازای $t\geq a$ تکه تکه پیوسته باشد و وقتی به ازای ثابت مثبتی چون M و هر $t\geq M$، $|f(t)|\leq g(t)$ و $\int_M^\infty g(t)dt$ همگرا باشد آنگاه $\int_0^\infty f(t)dt$ همگراست و همچنین اگر به ازای $t\geq M$، $f(t)\geq g(t)\geq 0$ و $\int_M^\infty g(t)dt$ واگرا باشد $\int_0^\infty f(t)dt$ نیز واگرا است.

شرط کافی وجود تبدیل لاپلاس:

فرض کنید: ① f بر بازه $0\leq t\leq A$ به ازای هر A مثبت دلخواه تکه تکه پیوسته باشد

② وقتی $t\geq M$، $|f(t)|\leq ke^{at}$ که k، a و M ثابت های حقیقی بوده، k و M لزوماً مثبت اند در این صورت

تبدیل لاپلاس $L(f(t))=F(s)$ با رابطه $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ به ازای $s>a$ موجود است.

مثال: مطلوب است تحقیق وجود لاپلاس توابع زیر

۱) $f(t)=1 \longrightarrow |1| \leq ke^{at} \quad t \geq M \quad \boxed{s>a=0}$

۲) $f(t)=\sin t \longrightarrow |\sin t| \leq 1 e^{0t} \quad t \geq 0 \quad \boxed{s>0}$

۳) $f(t)=e^{ct} \longrightarrow |e^{ct}| \leq 1 \times e^{ct} \quad \boxed{s>c}$

مثال: مطلوب است تبدیل لاپلاس توابع زیر

① $L(\sin at) = \frac{a}{a^2+s^2}$ ② $L(\cos at) = \frac{s}{a^2+s^2}$ ③ $L(\cosh bt) = \frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2} = \frac{s}{s^2-b^2}$ ④ $L(\sinh bt) = \frac{e^{bt}-e^{-bt}}{2} \Rightarrow \frac{b}{s^2-b^2}$

⑤ $L(e^{at}\cos bt) = \frac{s-a}{b^2+(s-a)^2}$ ⑥ $L(e^{at}\sin bt) = \frac{b}{b^2+(s-a)^2}$ ⑦ $L(e^{at}\sinh bt) = \frac{b}{(s-a)^2-b^2}$ ⑧ $L(e^{at}\cosh bt) = \frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$

۱) $L(\sin at) = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\, dt = \frac{a}{a^2+s^2}$

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin at\, dt = \xrightarrow[dv=\sin at\,dt \to v=\frac{-\cos at}{a}]{u=e^{-st} \to du=-se^{-st}dt} = e^{-st}\times\frac{-\cos at}{a}\Big]_0^\infty - \int \frac{-\cos at}{a}(-se^{-st})\,dt$$

$$= 0-\left(-\frac{1}{a}\right) - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\, dt = \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left(\frac{e^{-st}\times\sin at}{a}\Big]_0^\infty + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\, dt\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\times 0 - \frac{s^2}{a^2}F(s) \longrightarrow F(s) = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{a^2+s^2}{a^2}} = \frac{a}{a^2+s^2}$$

۲) $\cosh bt = \frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2} \quad s>b \rightarrow L(\cosh bt) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2}\right)dt =$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(s-b)t}+e^{-(s+b)t}}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(s-b)t}}{-(s-b)} + \frac{e^{-(s+b)t}}{-(s+b)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\left[\left(0-\frac{1}{-(s-b)}\right)+\left(0-\frac{1}{-(s+b)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s+b}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2s}{s^2-b^2} = \frac{s}{s^2-b^2}$$

نکته: تبدیل لاپلاس یک عملگر خطی است.

$$L(c_1f_1+c_2f_2)=\int_0^\infty e^{-st}(c_1f_1(t)+c_2f_2(t))\,dt=c_1\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)+c_2\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)=$$

$$c_1L(f_1(t))+c_2L(f_2(t))$$

مثال. $L(2\sin t)=2\times\frac{1}{1+s^2}$

تابع گاما: Γ

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx\qquad(p>0)$$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}x^0\,dx=\frac{e^{-x}}{-1}\Big]_0^\infty=0-\left(\frac{1}{-1}\right)=1$$

$$\begin{cases}u=e^{-x}\rightarrow du=-e^{-x}\\ dv=x^{p-1}dx\rightarrow v=\frac{x^p}{p}\end{cases}$$

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx=e^{-x}\cdot\frac{x^p}{p}\Big]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{x^p}{p}e^{-x}\,dx=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}\Rightarrow\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

$$\frac{e^{-x}x^p}{p}\Big]_0^\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}x^p}{p}-\frac{e^{-0}\times0^p}{p}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^x}\overset{Hop}{=}\lim\frac{px^{p-1}}{e^x}\overset{Hop}{=}\cdots=0$$

$*\ \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ $\qquad$ $*\ \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!$

$*\ \Gamma(1)=1$ $\qquad$ $*\ \Gamma(4)=4!$

$*\ \Gamma(2)=1\Gamma(1)=1!$ $\qquad$ $*\ \Gamma(n+1)=n!$

$\sqrt{x}=u\rightarrow x=u^2$

$\frac{dx}{2\sqrt{x}}=du$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}\,dx=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\int_0^\infty e^{-u^2}\times2\,du=2\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

$u = r\cos\theta$

$$(\Gamma(\tfrac{1}{2}))^2 = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du \times 2\int_0^\infty e^{-v^2}dv = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}du\,dv = 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr$$

$$= 4\times\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\,d\theta\,dr = -\pi e^{-r^2}\Big]_0^\infty = -\pi(0-1) = \pi \Rightarrow \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$\star\ \Gamma(n+1) = n!$

$st = x \rightarrow t = \frac{x}{s}$, $s\,dt = dx$

$$\star L(t^\alpha) = \int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{s}\right)^\alpha \frac{dx}{s} = \int_0^\infty e^{-x}x^\alpha \frac{dx}{s^{\alpha+1}} = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha dx$$

$$\Rightarrow L(t^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

$$\star\ L(t^1) = \frac{\Gamma(2)}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

$$\star\ L(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

قضیه: تبدیل لاپلاس مشتق:

فرض کنید f بر بازه‌ی دلخواه $0 \leq t \leq A$ پیوسته باشد و f' تکه‌تکه پیوسته باشد همچنین ثابت‌های k، a و M موجود باشند که به ازای $t \geq M$، $|f(t)| \leq ke^{at}$ در این صورت به ازای $s > a$، $L(f'(t))$ وجود دارد و داریم:

$$\underline{L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0)}$$

نکته: لاپلاس مشتقات مرتبه دوم و بالاتر:

فرض کنید f و f'، ...، و $f^{(n-1)}$ بر بازه $0 \leq t \leq A$ پیوسته و $f^{(n)}(t)$ بر این بازه تکه تکه پیوسته باشد و ثابت‌های

k، a، M موجود باشند که به ازای $t \geq M$ ، $|f(t)| \leq ke^{at}$ ، $|f'(t)| \leq ke^{at}$ ، ... ، $|f^{(n-1)}(t)| \leq ke^{at}$

آنگاه $L(f^{(n)}(t))$ موجود است و داریم

$$L(f^{(n)}(t)) = s^n L(f(t)) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$ «بسیار مهم»

حل مسائل مقدار اولیه:

عکس تبدیل لاپلاس. تعیین تابع $f(t) = y$ نظیر تبدیل $F(s)$ را مسئله عکس تبدیل لاپلاس گوییم، $f(t)$ لاپلاس معکوس نظیر $F(s)$ است. که معمولاً آن را با نماد $L^{-1}(F(s)) = f(t)$ نمایش می‌دهند.

$L^{-1}(\frac{1}{s-1}) = e^t$, $L^{-1}(\frac{1}{s}) = e^{0t} = 1$

مثال: مطلوب است حل مسئله مقدار اولیه زیر: $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

حل: لاپلاس از طرفین

$L(y'') - L(y') - 2L(y) = 0$

$\to (s^2 L(y) - s y(0) - y'(0)) - (s L(y) - y(0)) - 2\overbrace{L(y)}^{Y(s)} = 0$

$Y(s)(s^2 - s - 2) + (-s + 1) = 0$

$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{cases}$

$Y(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+1}$ $\quad L^{-1}(Y(s)) = y(t) = \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}$

توجه: اگر $F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s)$ آنگاه

$$L^{-1}(F(s)) = L^{-1}(F_1(s)) + L^{-1}(F_2(s)) + \dots + L^{-1}(F_n(s))$$

مثال:

$$y'' + y = \sin 2t \quad , \quad y'(0) = 1 \ , \ y(0) = 2$$

$$L(y'') + L(y) = L(\sin 2t) \to \left(s^2 L(y) - s\cancel{y(0)}^{2} - \cancel{y'(0)}^{1}\right) + \overbrace{L(y)}^{Y(s)} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\to Y(s)(s^2+1) = \frac{2}{s^2+4} + 2s + 1 \to Y(s) = \frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} + \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)}\right) + 2\cos t + \sin t$$

$$\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+a}{s^2+1} + \frac{Bs+b}{s^2+4} = \frac{As^3 + 4As}{}$$

$$= \frac{s^3(A+B) + s^2(a+b) + s(4A+B) + 4a+b}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \to A=-B \\ a+b=0 \\ 4A+B=0 \to -3B=0 \to B=0 \\ 4a+b=2 \to b=-\frac{2}{3} \ , \ a=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = L^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}\right) = \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$$

تمرین ۳۴ ص ۹۷:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \Rightarrow \frac{dF}{ds}(s) = F'(s) = ?$$

$$F'(s) = \int_0^\infty -t\,e^{-st} \times f(t)\,dt = L(-t\,f(t))$$

$$L(-t\sin t) = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} \qquad L(t\sin t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

نکته:

$$F^{(n)}(s) = L((-t)^n f(t))$$

تمرین ۲۰-۲۵ ص ۹۸

$$L((1+t)^2 e^{2t}) = ? \quad 6(s-2)^{-4}$$

$$F(s) = L(e^{2t}) = \frac{1}{s-2}$$

$$F'(s) = -(s-2)^{-2} \to F''(s) = 2(s-2)^{-3} \to F'''(s) = -6(s-2)^{-4} = L((-t)^3 e^{2t})$$

مثال: جواب معادلات دیفرانسیل $y^{(iv)} - y = 0$ ، $y(0)=0 \,,\, y'(0)=1 \,,\, y''(0)=0 \,,\, y'''(0)=0$

حل: $L(y^{(iv)}) - L(y) = 0 \rightarrow s^4 \overbrace{L(y)}^{Y(s)} - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - 1 y'''(0) - \overbrace{L(y)}^{Y(s)} = 0$

$Y(s)(s^4-1) = s^2 \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2}{s^4-1}$

$\underset{(s-1)(s+1)(s^2+1)}{\frac{s^2}{s^4-1}} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \longrightarrow \frac{s^2}{s^4-1} = \frac{As^3+As^2+As+A+Bs^3-Bs^2+Bs-B+Cs^3-Cs+Ds^2-D}{(s^2-1)(s^2+1)}$

$\frac{s^2}{s^4-1} = \frac{s^3(A+B+C)+s^2(A-B+D)+s(A+B-D)+A-B-D}{}$

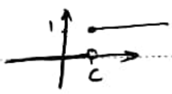
$A+B+C=0$, $A-B+D=1$, $A+B-C=0$, $A-B-D=0$

$C=0$, $D=\frac{1}{2}$, $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$

$Y(s) = \frac{\frac{1}{4}}{s-1} - \frac{\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}$ $\quad y(t) = \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t$

تابع پله‌ای (هوی ساید):

$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t<c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$



مثال: $h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t) \qquad t \geq 0$

$h(t) = \begin{cases} 0 & t<\pi \\ 1 & t \geq \pi \end{cases} - \begin{cases} 0 & t<2\pi \\ 1 & t \geq 2\pi \end{cases} = \begin{cases} 0 & t<\pi \\ 1 & \pi \leq t < 2\pi \\ 1 & 2\pi \leq t \end{cases} - \begin{cases} 0 & t<\pi \\ 0 & \pi \leq t < 2\pi \\ 1 & 2\pi \leq t \end{cases} = \begin{cases} 0 & t<\pi \\ 1 & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & 2\pi \leq t \end{cases}$

لاپلاس تابع پله‌ای:

$s>0$

$L(u_c(t)) = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\,dt = \int_0^c e^{-st} \cancel{u_c(t)}\,dt + \int_c^\infty e^{-st} u_c(t)\,dt =$

$= \int_c^\infty e^{-st} \overset{1}{\cancel{u_c(t)}}\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big]_c^\infty = 0 - \frac{e^{-sc}}{-s} = \boxed{\frac{e^{-sc}}{s}}$

مثال: $L(u_1(t)) = \frac{e^{-s}}{s}$

تبدیل لاپلاس انتگرال:

فرض کنید $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$ اگر $F(s)$ و $G(s)$ تبدیلات لاپلاس $f(t)$ ، $G(t)$ باشند داریم: $G(s) = \frac{F(s)}{s}$

مثال: مطلوب است تعیین لاپلاس $g(t)=\int_0^t re^{ar}dr$.

$$L(e^{ar})=\frac{1}{s-a} \qquad L(-re^{ar})=\left(\frac{1}{s-a}\right)'=\frac{-1}{(s-a)^2} \rightarrow L(re^{ar})=\frac{1}{(s-a)^2}$$

$$G(s)=\frac{\frac{1}{(s-a)^2}}{s}=\frac{1}{s(s-a)^2}$$

نکته: اگر $g(t)=\begin{cases}0 & t<c\\ f(t-c) & t\geq c\end{cases}$ که آنگاه $g(t)=u_c(t).f(t-c)$.

$$g(t)=f(t-c)\times\begin{cases}0 & t<c\\ 1 & t\geq c\end{cases}=f(t-c)u_c(t)$$

قضیه انتقال اول:

هرگاه $F(s)=L(f(t))$ به ازای $s>a\geq0$ موجود باشد و c یک عدد مثبت باشد آنگاه:

$$L(u_c(t)f(t-c))=e^{-cs}F(s)=e^{-cs}L(f(t))$$

به عکس هرگاه $f(t)=L^{-1}(F(s))$ باشد آنگاه.

$$L^{-1}(e^{-cs}F(s))=u_c(t)f(t-c)$$

مثال: اگر $f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\leq t<\frac{\pi}{4}\\ \sin t+\cos(t+\frac{\pi}{4}) & t\geq\frac{\pi}{4}\end{cases}$ ، $L(f(t))$ را بیابید.

$$f(t)=\sin t+\begin{cases}0 & 0\leq t<\frac{\pi}{4}\\ \cos(t+\frac{\pi}{4}) & t\geq\frac{\pi}{4}\end{cases} \rightarrow L(f(t))=\frac{1}{1+s^2}+e^{-\frac{\pi}{4}s}\times\frac{s}{1+s^2}=\frac{1+e^{-\frac{\pi}{4}s}}{1+s^2}$$

مثال: مطلوب است تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1-e^{-2s}}{s^2}$.

$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2} \Rightarrow L^{-1}(F(s))=f(t)=t-u_2(t)(t-2)$

قضیه انتقال دوم: هرگاه $F(s)=L(f(t))$ به ازای $s>a\geq 0$ موجود باشد و c عدد مثبتی باشد آنگاه:

$L(e^{ct}f(t))=F(s-c) \qquad s>a+c$

به عکس هرگاه $f(t)=L^{-1}(F(s))$ آنگاه:

$e^{ct}f(t)=L^{-1}(F(s-c))$

مثال: مطلوبست تعیین لاپلاس معکوس:

$G(s)=\frac{1}{s^2-4s+5}=\frac{1}{(s-2)^2+1} \qquad L^{-1}(G(s))=e^{2t}\times \sin t$

تمرین ۳ ص: لاپلاس معکوس

$F(s)=\frac{24}{(s-2)^4} \qquad L^{-1}(F(s))=e^{2t}\times t^3$

تمرین ۱۲ ص ۱۰۴. نکته: $\underline{L(u_c(t)f(t-c))=e^{-cs}F(s)}$, $\underline{L(e^{ct}f(t))=F(s-c)}$

$F(s)=\frac{e^{-2s}}{s^2+(s-2)}$ $G(s)$

$G(s)=\frac{1}{s^2+(s-2)}=\frac{1}{(s+2)(s-1)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-1} \Rightarrow A=-\frac{1}{3}, B=\frac{1}{3}$

$g(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s-2}\right)=-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}$

$L^{-1}(e^{-2s}\times G(s))=u_2(t)\times g(t-2)=u_2(t)\left(-\frac{1}{3}e^{-2(t-2)}+\frac{1}{3}e^{t-2}\right)$

تمرین ۱۵ ص ۱۰۴:

$F(s)=\frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}=\frac{2(s-1)e^{-2s}}{(s-1)^2+1}$ $\qquad G(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1} \Rightarrow g(t)=2e^t\cos t$

$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=u_2(t)\,g(t-2)=u_2(t)\,2e^{t-2}\cos(t-2)$

تمرین ۱۷ ص ۱۰۴

$F(s)=\frac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}=\frac{(s-2)e^{-s}}{(s-2)^2-1}$ $\qquad G(s)=\frac{s-2}{(s-2)^2-1} \Rightarrow g(t)=e^{2t}\sinh t$

$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=u$

$G(s)=\frac{s-2}{(s-1)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-3} \Rightarrow A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}$

$G(s)=\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{1}{2}}{s-3}$ $\qquad g(t)=\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{3t}$ $\qquad \mathcal{L}^{-1}(e^{-s}G(s))=u_1(t)\,g(t-1)=$

$u_1(t)\left[\frac{1}{2}e^{t-1}+\frac{1}{2}e^{3(t-1)}\right]$

تمرین ۱۸ ص ۱۰۴:

$F(s)=\frac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$

$F(s)=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}-\frac{e^{-4s}}{s} \longrightarrow f(t)=u_1(t)+u_2(t)-u_3(t)-u_4(t)$

س ۱۹ فرض کنید $F(s)=\mathcal{L}f(t)$ به ازای $s>a\geq 0$ آنگاه:

الف) $\mathcal{L}(f(ct))=\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$ $\qquad s>ca$

ب) $\mathcal{L}^{-1}(F(ks))=\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$

ج) $\mathcal{L}^{-1}(F(as+b))=\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}t}f\left(\frac{t}{a}\right)$

تمرین ۲۰:
$$F(s)=\frac{2^{n+1}n!}{s^{n+1}}=\frac{n!}{\left(\frac{s}{2}\right)^{n+1}} \rightarrow L^{-1}(F(s))=\frac{1}{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{\frac{1}{2}}\right)^{n}=2(2t)^{n}.t^{n}$$

تمرین ۲۱:
$$F(s)=\frac{2s+1}{4s^2+4s+5}=\frac{2s+1}{(2s+1)^2+4} \rightarrow L^{-1}(F(s))=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{2t}{2}\right)$$

تمرین ۲۴:
$$F(s)=\frac{e^{2}e^{-4s}}{2s-1}=\frac{e^{2-4s}}{2s-1}=\frac{e^{-2(-1+2s)}}{2s-1} \longrightarrow L^{-1}(F(s))=\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}u_2\left(\frac{t}{2}\right)$$

تمرین: مطلوب است لاپلاس معکوس توابع زیر:

مخرج‌ها - صورت ln

1) $F(s)=\dfrac{s+2}{s(s^2+2s+1)}+\dfrac{s}{(s-2)^3}$

2) $F(s)=\ln\dfrac{s^2+2s+3}{s^2-4s+4}+\dfrac{e^{-2s}}{s^2-2s+5}$

3) $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s+5}\times e^{-s}$

4) $F(s)=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)$

5) $F(s)=\ln\dfrac{s^2+2}{s^2}$

6) $F(s)=\dfrac{s^2+2}{s(s+5)}+\dfrac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$

1) $f(t)=e^{-t}u_1(t)\cos 3t$

قانون اول: $\begin{cases} L(u_c(t) f(t-c)) = e^{-cs} \\ L(e^{ct} f(t)) = F(s-c) \end{cases}$

مثال ص ۲۰۷

$$2x'' + x' + 2y = g(t) \qquad x(0)=0\ ,\ x'(0)=0 \qquad g(t)=\begin{cases} 1 & 5\le t<20 \\ 0 & t\ge 20\ ,\ t<5 \end{cases}$$

$$g(t) = u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 0 & t<5 \\ 1 & t\ge 5 \end{cases} - \begin{cases} 0 & t<20 \\ 1 & t\ge 20 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t<5 \\ 1 & 5\le t<20 \\ 1 & t\ge 20 \end{cases} - \begin{cases} 0 & t<5 \\ 0 & 5\le t<20 \\ 1 & t\ge 20 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t<5\ ,\ t\ge 20 \\ 1 & 5\le t<20 \end{cases} \Rightarrow 2x'' + x' + 2y = u_5 - u_{20} \xrightarrow{\text{لاپلاس}}$$

$$2(s^2 L(y) - s y(0) - y'(0)) + sL(y) - x_0 + 2L(y) = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s} \rightarrow$$

$$L(y)(2s^2+s+2) = \frac{e^{-5s}-e^{-20s}}{s} \rightarrow Y(s) = L(y) = \frac{e^{-5s}-e^{-20s}}{s(2s^2+s+2)} = \frac{e^{-5s}}{\underbrace{s(\quad)}_{H(s)}} - \frac{e^{-20s}}{s(\quad)}$$

$$H(s) = \frac{1}{\underbrace{s(2s^2+s+2)}_{2(s^2+\frac{s}{2}+(\frac{1}{4})^2-(\frac{1}{4})^2+1)}} \longrightarrow H(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}}{2s^2+s+2} \longrightarrow H(s) = \frac{-(s+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})}{2\left[(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}\right]} + \frac{\frac{1}{2}}{s}$$

$$= -\frac{s+\frac{1}{4}}{2\left((s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}\right)} - \frac{1}{\sqrt{15}}\frac{\frac{1}{4}\times\sqrt{15}}{2\left((s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}\right)} + \frac{\frac{1}{2}}{s} \Rightarrow h(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{15}}{4}t - \frac{1}{2\sqrt{15}}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t + \frac{1}{2}$$

$$x(t) = u_{(5)}(t)\,h(t-5) - u_{20}(t)\,h(t-20)$$

$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & -\tau<t<\tau \\ 0 & t\le -\tau\ ,\ \tau\le t \end{cases} \qquad \lim_{\tau\to 0} \delta_\tau(t) = \underbrace{\delta(t)}_{\text{تابع ضربه}}$$

تابع ضربه:

نکته:

$$\begin{cases} L(\delta(t)) = 1 \\ L^{-1}(1) = \delta(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} L(1) = \frac{1}{s} \\ L^{-1}(\frac{1}{s}) = 1 \end{cases}$$

سوال. مطلوب است لاپلاس معکوس $H(s) = 1 + \dfrac{2e^{2s}}{s^2+2}$

$$h(t) = \delta(t) + \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}(t+2))\,u_{-2}(t)$$

نکته:

$$\delta_\tau(t-t_0)=\begin{cases}\frac{1}{2\tau} & -\tau<t-t_0<\tau\\ 0 & t-t_0\geq\tau \text{ یا } t-t_0\leq-\tau\end{cases}$$

$$\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t-t_0)=\delta(t-t_0) \qquad L(\delta(t-t_0))=e^{-st_0}$$

نکته:

$$\begin{cases}L^{-1}(e^{-st_0})=\delta(t-t_0)\\ L(\delta(t-t_0))=e^{-st_0}\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}L^{-1}\left(\frac{e^{-cs}}{s}\right)=u_c(t)\\ L(u_c(t))=\frac{e^{-cs}}{s}\end{cases}$$

انتگرال پیچشی:

هرگاه $F(s)=L(f(t))$ و $G(s)=L(g(t))$ هر دو به ازای $s>a\geq 0$ موجود باشند، آنگاه:

$$F(s)\,G(s)=L(h(t)) \qquad (s>a)$$

که در آن:

$$h(t)=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

تابع h به پیچش f و g معروف است. انتگرال مذکور در تساوی را نیز انتگرال پیچشی می‌نامند.

مثال. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید:

$$y''+4y=g(t) \qquad y(0)=3,\quad y'(0)=-1$$

حل:

$$s^2Y(s)-s\overset{3}{y(0)}-\overset{-1}{y'(0)}+4Y(s)=\overset{G(s)}{L(g(t))} \Rightarrow Y(s)(s^2+4)=G(s)+3s-1 \Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{G(s)+3s-1}{s^2+4}=\frac{G(s)}{s^2+4}+\frac{3s-1}{s^2+4}$$

$$\begin{Bmatrix}f(t)=\frac{1}{2}\sin t\\ g(t)\end{Bmatrix}\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s^2+4}\right)=$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2(t-r)\, g(r)\, dr = \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2r\, g(t-r)\, dr \Rightarrow y(t) = h(t) + 3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$$

نکته. اگر $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه: $L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(s)\,ds$

مثال: $L\left(\frac{e^t - e^{-2t}}{t}\right) = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right) ds = \ln(s-1) - \ln(s+2) \Big]_s^\infty = \ln \frac{s-1}{s+2} \Big]_s^\infty =$

$$0 - \ln\left|\frac{s-1}{s+2}\right| = \ln\left|\frac{s+2}{s-1}\right|$$

مثال: ① $y'(t) = e^t + \cos t \int_0^t y(x)\cos x\, dx + \sin t \int_0^t y(x)\sin x\, dx \qquad y(0)=0$

$$\int_0^t y(x)\,(\cos t\cos x + \sin t \sin x)\, dx \qquad \cos(t-x)$$

② $f(t) = 2t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(x)\, e^{t-x}\, dx$

③ $y' + y - 2\int_0^t (t-x)\, y''(x)\, dx = 2t + 2 \rightarrow y(0) = y'(0) = 1$

① ; $sY(s) - y(0) = \frac{1}{s-1} + Y(s)\cdot\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow Y(s) \times \left(s - \frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s-1}$ $\qquad \frac{s^3}{s^2+1}$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s^3} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ -C+D=0 \\ -D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=2 \\ B=-2 \\ C=-1 \\ D=-1 \end{matrix}$$

$$y(t) = 2e^t - 2 - t - \frac{1}{2}t^2$$

③ $sY(s) - y(0) + Y(s) - 2\frac{1}{s^2}\left(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)\right) = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s}$

$$Y(s)(s+1-2) = 1 - \cancel{\frac{2}{s}} - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^2} + \cancel{\frac{2}{s}} = 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow y(t) = e^t$$

تمرین: مطلوب است محاسبه لاپلاس عبارات مقابل

① $f(t) = \overbrace{\cosh t}^{\frac{e^t+e^{-t}}{2}} \int_0^t \frac{e^{2r}-e^{r}}{r}\,dr$

② $f(t) = \overbrace{\sinh t}^{\frac{e^t-e^{-t}}{2}} \int_0^t \frac{e^{2r}-e^{r}}{r}\,dr$

③ $f(t) = e^{4t}\int_0^t e^{-3r}\left(\frac{1-e^{-3r}}{r}\right)dr$

③: $e^{4t}\int_0^t e^{-3r}\left(\frac{1-e^{-3r}}{r}\right)dr \rightarrow f(t) = \int_0^t \underbrace{e^{4t}\, e^{-3r}}_{e^{4(t-r)}} \times \frac{e^{r}}{e^{r}}\left(\frac{1-e^{-3r}}{r}\right)dr = \int_0^t \overbrace{e^{4(t-r)}}^{f(t-r)}\overbrace{\left(\frac{e^{r}-e^{-2r}}{r}\right)}^{g(r)}dr$

$L(f(t)) = \frac{1}{s-4} \times \int_s^{+\infty} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\,ds \rightarrow F(s) = \frac{1}{s-4} \times \ln\left|\frac{s+2}{s-1}\right|$

حل

$(D^2+2D+2)(D^3+D)y = 0$

مشخصه

$(r^2+2r+2)(r^3+r) = 0$

$$\begin{cases} r_1 = -1+i \\ r_2 = -1-i \end{cases} \qquad \begin{cases} r_3 = 0 \\ r_4 = i \\ r_5 = -i \end{cases}$$

$y = C_1\left(e^{-x}\cos x\right) + C_2 e^{-x}\sin x + C_3 \times 1 + C_4\cos x + C_5 \sin x$

حل

$F(s) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

$F'(s) = \frac{-\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2}} = \frac{-1}{1+s^2} \rightarrow (-t)^1 f(t) = L^{-1}(F'(s)) = -\sin t \rightarrow -t\,f(t) = -\sin t$

$\Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{\sin t}{t}}$

دستگاه معادلات خطی:

روش های حل:
① حذفی
② روش دترمینان (اسلوب عملگری)
③ روش تبدیل لاپلاس

① روش حذفی: مشابه با حل دستگاه های از معادلات جبری، دستگاه را حل می کنیم

مثال: دستگاه خطی را حل کنید:
$$\begin{cases} 2x - Dy = 0 \\ Dx - 3y = 0 \end{cases}$$

حل:
$$\begin{array}{l} D \\ 2 \end{array}\begin{cases} 2x - Dy = 0 \\ Dx - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2Dx - D^2y = 0 \\ 2Dx - 6y = 0 \end{cases}$$

$$-D^2y + 6y = 0 \Rightarrow D^2y - 6y = 0 \rightarrow r^2 - 6 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{6} \rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\sqrt{6}t} \\ y_2 = e^{-\sqrt{6}t} \end{cases}$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

$$\begin{array}{l} 3 \\ D \end{array}\begin{cases} 2x - Dy = 0 \\ Dx - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ominus\begin{cases} 6x - 3Dy = 0 \\ D^2x - 3Dy = 0 \end{cases}$$

دیفرانسیل

$$6x - D^2x = 0 \Rightarrow 6 - r^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{6} \quad \begin{cases} x_1 = e^{\sqrt{6}t} \\ x_2 = e^{-\sqrt{6}t} \end{cases}$$

$$x = c_3 e^{\sqrt{6}t} + c_4 e^{-\sqrt{6}t}$$

جایگذاری x و y در معادله ①

$$\Rightarrow 2c_3 e^{\sqrt{6}t} + 2c_4 e^{-\sqrt{6}t} - \sqrt{6}c_1 e^{\sqrt{6}t} + \sqrt{6}c_2 e^{-\sqrt{6}t} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{\sqrt{6}t}(2c_3 - \sqrt{6}c_1) + e^{-\sqrt{6}t}(2c_4 + \sqrt{6}c_2) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} c_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1 \\ c_4 = -\frac{\sqrt{6}}{2}c_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1 e^{\sqrt{6}t} - \frac{\sqrt{6}}{2}c_2 e^{-\sqrt{6}t} \\ y = c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t} \end{cases}$$

حل

$$\begin{cases} x' - 4x + y'' = t^2 \\ x' + x + y' = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (D-4)x + D^2 y = t^2 \\ (D+1)x + Dy = 0 \end{cases}$$

$$(D-4)x - D(D+1)x = t^2 \longrightarrow (\cancel{D} - 4 - D^2 - \cancel{D})x = t^2 \rightarrow (D^2+4)x = -t^2 \Rightarrow$$

$$(D^2+4)x = 0 \Rightarrow r^2 + 4 = 0 \begin{cases} r = 2i \\ r = -2i \end{cases}$$

$x_1 = \cos 2t \quad , \quad x_2 = \sin 2t$

$x_c = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

$$x_p = At^2 + Bt + C \overset{\text{جایگذاری}}{\Longrightarrow} 2A + 4At^2 + 4Bt + 4C = -t^2 \rightarrow 4At^2 + 4Bt + 2A + 4C = -t^2$$

$x'_p = 2At + B$

$x''_p = 2A$

$$\longrightarrow \begin{cases} 4A = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4} \\ B = 0 \\ 2A + 4C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \times A = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$C = -\frac{1}{2}A = \frac{1}{8}$

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$$

$$\begin{array}{l} (D+1) \\ (D-4) \end{array} \begin{cases} (D-4)x + D^2 y = t^2 \\ (D+1)x + Dy = 0 \end{cases}$$

$$(D^3 + D^2)y - (D^2 - 4D)y = 2t + t^2$$

$$(D^3 + 4D)y = 2t + t^2 \rightarrow r^3 + 4r = 0 \rightarrow r(r^2+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \rightarrow y_1 = 1 \\ r_2 = 2i \rightarrow y_2 = \cos 2t \\ r_3 = -2i \rightarrow y_3 = \sin 2t \end{cases}$$

$$y_c = C_3 + C_4 \cos 2t + C_5 \sin 2t \qquad y_p = (At^2 + Bt + C)t = At^3 + Bt^2 + Ct$$

$$\overset{y_p}{\Longrightarrow} 6A + 12At^2 + 8Bt + 4C = 2t + t^2 \qquad \begin{cases} y'_p = 3At^2 + 2Bt + C \\ y''_p = 6At + 2B \\ y'''_p = 6A \end{cases} \qquad \begin{cases} 12A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{12} \\ 8B = 2 \rightarrow B = \frac{1}{4} \\ 6A + 4C = 0 \rightarrow C = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

جایگذاری

$$y = C_3 + \underbrace{C_4}_{= -C_1 + \frac{C_2}{2}} \cos 2t + \underbrace{C_5}_{= \frac{C_1}{2} - C_2} \sin 2t + \frac{1}{12} t^3 + \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{8} t$$

با جایگذاری x و y در یکی از معادلات دو تا از پارامترها را برحسب سه تای دیگر بدست می آوریم.

$$-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t - \frac{1}{2} t + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{8} - 2C_4 \sin 2t + 2C_5 \cos 2t +$$

$$\frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} = 0$$

$$\begin{cases} (C_1 + 2C_2 + 2C_5) = 0 \Rightarrow C_5 = -\frac{1}{2} C_1 - C_2 \\ -2C_1 + C_2 - 2C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = \frac{2C_1 - C_2}{-2} \end{cases}$$

② روش دترمینان: برای حل دستگاه $\begin{cases} L_1 x + L_2 y = g_1(t) \\ L_3 x + L_4 y = g_2(t) \end{cases}$ مشابه قاعده کرامر می توان نوشت:

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} g_1 & L_2 \\ g_2 & L_4 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} L_1 & g_1 \\ L_3 & g_2 \end{vmatrix}$$

مثال: مطلوب است حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases} x' = 3x - y - 12 \\ y' = x + y + 4e^t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (D-3)x + y = -12 \\ (D-1)y - x = 4e^t \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -12 & 1 \\ 4e^t & D-1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$(D^2 - 4D + 3 + 1) x = \overbrace{\left((D-1)(-12) - 4e^t \right)}^{12 - 4e^t} \rightarrow D^2 - 4D + 4 = 12 - 4e^t$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \begin{cases} x_1 = e^{2t} \\ x_2 = te^{-2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D^2 - 4D + 4) x = 12 \xRightarrow{x_p = A} 4A = 12 \Rightarrow A = 3 \rightarrow x_p = 3 \\ (D^2 - 4D + 4) x = -4e^t \xRightarrow{x_p = Be^t} Be^t - 4Be^t + 4Be^t = -4e^t \Rightarrow B = -4 \rightarrow x_p = -4e^t \end{cases}$$

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + 3 - 4e^{t}$$

$$\begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D-3 & -12 \\ -1 & 4e^{t} \end{vmatrix}$$

$$4e^{t} - 12e^{t} = -8e^{t}$$

$$(D^2 - 4D + 4)y = (D-3)(4e^{t}) - 12 \rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \begin{cases} y_1 = e^{2t} \\ y_2 = te^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D^2 - 4D + 4)y = -8e^{t} \overset{y_p = Ae^{t}}{\Longrightarrow} Ae^{t} - 4Ae^{t} + 4Ae^{t} = -8e^{t} \rightarrow A = -8 \ , \ y_p = -8e^{t} \\ (D^2 - 4D + 4)y = -12 \overset{y_p = B}{\Longrightarrow} 4B = -12 \rightarrow B = -3 \ , \ y_p = -3 \end{cases}$$

$$y = C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t} - 8e^{t} - 3$$

با جایگذاری x و y در معادله ① می توان ۲ تا از پارامترها را برحسب ۲ پارامتر دیگر نوشت. (ارزش)

③ روش تبدیل لاپلاس :

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y' + 2y + 6\int_0^t z(r)\,dr = -2u_0(t) \\ y' + z' + z = 0 \qquad z(0) = 6 \ , \ y(0) = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sY(s) - y(0) + 2Y(s) + 6\dfrac{Z(s)}{s} = \dfrac{-2}{s} \\ sY(s) - y(0) + sZ(s) - z(0) + Z(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (s+2)Y(s) + \frac{6}{s}Z(s) = -\frac{2}{s} - 5 \\ sY(s) + (s+1)Z(s) = -2 - 5s - s - 2 \end{cases} \rightarrow (-s^2 - 3s + 4)Z(s) = -6s - 4$$

$$Z(s) = \frac{6s + 4}{s^2 + 3s - 4} = \frac{4}{s+4} + \frac{2}{s-1} \rightarrow z(t) = 4e^{-4t} + 2e^{t}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری } Z(s) \text{ در ۲}} sY(s) = 1 - (s+1)\left(\frac{4}{s+4} + \frac{2}{s-1}\right) \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{4(s+1)}{s(s+4)} - \frac{2(s+1)}{s(s-1)}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s}{s(s-1)(s+4)} \quad \frac{-5s^2 - 7s - 8}{s(s-1)(s+4)} = \frac{2}{s} + \frac{-4}{s-1} + \frac{-3}{s+4}$$

$$y(t) = 2 - 4e^{t} - 3e^{-4t}$$

تمرین : مطلوب است حل دستگاه‌های زیر :

1) $\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} + 50\, i_1 = 60 \\ 5 \times 10^{-3} \dfrac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \end{cases} \qquad i_1(0) = i_2(0) = 0$

2) $\begin{cases} x_1'' + 10x_1 - 4x_2 = 0 & x_1(0) = 0,\ x_1'(0) = 1 \\ -4x_1 + x_2'' + 4x_2 = 0 & x_2(0) = 0,\ x_2'(0) = -1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x'' + x' + x + y'' + y = e^{t} \\ x'' + x' + y'' = e^{-t} \end{cases}$