

Subject: _____
Date: _____

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

روش اجزای محدود

استاد: سید علی میرفروانی

sa.mirfirohadi@gmail.com

@sa.mirfirohadi

۰۹۱۰۳۲۰۲۷۷۵

مراجع

• Lagan, D.L (2012). A First Course in the Finite Element Method, 5th Edition

• Kossimati, A. (2011). Matrix Analysis of Structures, 2nd Edition.

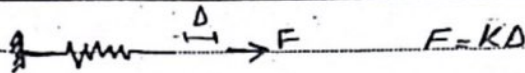
• Kossimati, A. (2005). Structural Analysis, 3rd Edition.

کتاب کتب فنی (۱۳۹۶). نظم و ترتیب بارها

P4PCO

حروف: تکامل یافته از نوع قاب و فن: بارگذاری تکامل یافته

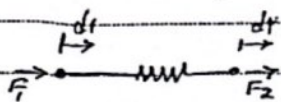
تعیین ماتریس سختی: صرفاً خود فنر:



k: ضریب سختی فنر

$$\Delta = 1 \rightarrow F = k$$

سختی فنر در مورد تغییرات (ایجاد تغییرات) و در حالتی که تغییرات



$$\Delta = d_1 + d_2$$

$$F_2 = k(d_2 - d_1) = -k d_1 + k d_2$$

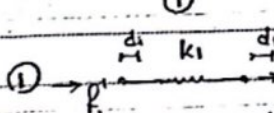
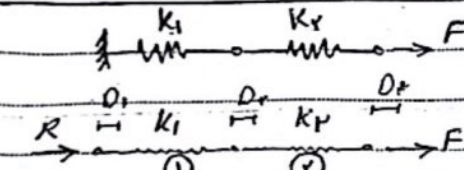
$$F = F_2$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_1 + R_2 = 0 \rightarrow R_1 = -R_2 = k d_1 - k d_2$$

$$\begin{cases} R_1 = k d_1 - k d_2 \\ R_2 = -k d_1 + k d_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = \vec{k} \vec{d}$$

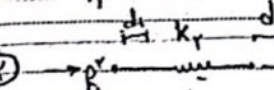
تعیین ماتریس سختی: صرفاً خود فنر و سایر اجزای



$$\begin{cases} R_1' \\ R_2' \end{cases} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1' \\ d_2' \end{bmatrix}$$

$$R_1' = k_1 d_1' - k_1 d_2'$$

$$R_2' = -k_1 d_1' + k_1 d_2'$$



$$\begin{cases} R_1'' \\ R_2'' \end{cases} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1'' \\ d_2'' \end{bmatrix}$$

$$R_1'' = k_2 d_1'' - k_2 d_2''$$

$$R_2'' = -k_2 d_1'' + k_2 d_2''$$

شرایط مرز:

شرایط مرز:

$$R_1' = R$$

$$R_1' + R_2' = 0$$

$$R_2'' = F$$

$$d_1' = 0$$

$$d_1'' = d_1' = D_1$$

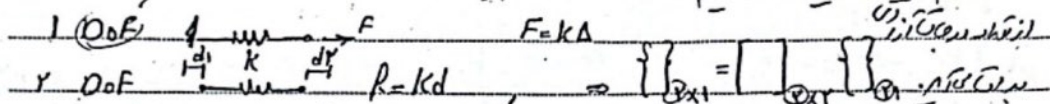
$$d_2'' = D_2$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad R &= R^i \rightarrow R = k_1 d_1^{D_1} - k_1 d_1^{D_2} \\ \textcircled{2} \quad 0 &= p_1^i + p_1^r \rightarrow 0 = -k_1 d_1^{D_1} + k_1 d_1^{D_2} + k_r d_1^{D_2} - k_r d_1^{D_3} \\ \textcircled{3} \quad F &= p_r^r \rightarrow F = -k_2 d_1^{D_2} + k_2 d_2^{D_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -k & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \tilde{F} = \tilde{K} \tilde{D}$$

منی درم ازاد

روشن درم آتین با توین بدقتی منجم غنم :



زنا: نیروی مورد نیاز در برابری درم برابری درم برابری درم برابری درم
فردت ازاد مقدر است

فهرست گزینان مقید باشند

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{1r} & K_{1c} \\ K_{r1} & K_{rr} & K_{rc} \\ K_{c1} & K_{cr} & K_{cc} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Def: $\begin{cases} D_{defj} = 1 \\ D_{other} = 0 \end{cases}$ K_{ij}

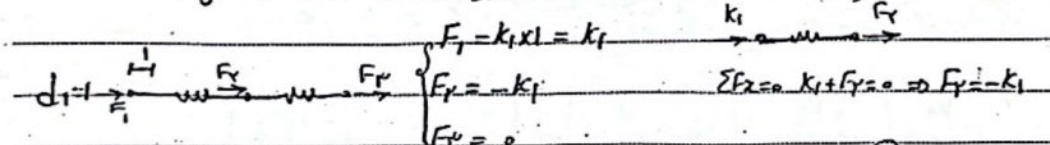
این شرط، زن بودن

K_{rr} به K مربوط می شود زن زن است K_{cc} به K مربوط می شود زن زن است

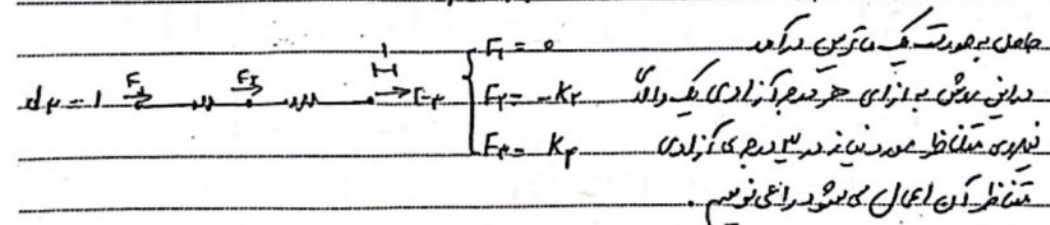
آنچه بر سر خط می کشیم

$k_2 = k_1$ معطای متن اول

K_{12} سے 10 ملٹر فی سیکنڈ دہم لیتا



$d_1 = 1$
 $\left\{ \begin{array}{l} F_1 = -k_1 \\ F_2 = k_1 + k_2 \\ F_3 = -k_2 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$



روش تعیین ماتریس انتقالی سیستم را داریم:
فرا این روش جدول انتقالی درجهت آزادی و غلطی سیستم را می‌نویسیم



چنینی داریم که ماتریس انتقالی را می‌نویسیم و دو به دو به تدریج به چپ می‌رویم.
ماتریس انتقالی را می‌نویسیم و به تدریج به چپ می‌رویم و به تدریج به چپ می‌رویم.

$$K^1 = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix}$$

$$K^2 = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ K_1 & K_1 + K_2 - K_2 \\ -K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

و این ماتریس را به تدریج به چپ می‌رویم و به تدریج به چپ می‌رویم.
ماتریس انتقالی را می‌نویسیم و به تدریج به چپ می‌رویم و به تدریج به چپ می‌رویم.

$$\tilde{F} = K \tilde{D} \Rightarrow \tilde{D} = K^{-1} \tilde{F}$$

ماتریس انتقالی را می‌نویسیم و به تدریج به چپ می‌رویم و به تدریج به چپ می‌رویم.
ماتریس انتقالی را می‌نویسیم و به تدریج به چپ می‌رویم و به تدریج به چپ می‌رویم.

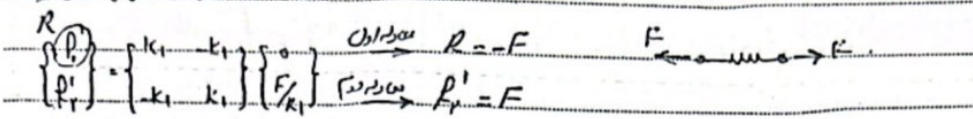


$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 K_1 \\ F_2 K_1 + K_2 \\ K_1 K_2 \end{bmatrix}$$

در این روش، ما به تدریج به چپ می‌رویم و به تدریج به چپ می‌رویم.
در این روش، ما به تدریج به چپ می‌رویم و به تدریج به چپ می‌رویم.

در این روش، ما به تدریج به چپ می‌رویم و به تدریج به چپ می‌رویم.
در این روش، ما به تدریج به چپ می‌رویم و به تدریج به چپ می‌رویم.

$$R_i = R \quad P_i' = P \quad \bar{R} = \bar{K} \bar{d}$$


$$R = F \quad P = F$$

موجود روش تحلیل:

(۱) تعیین ماتریس سختی هر عضو

(۲) تعیین جدول انطباق درجه آزادی عضو سیستم (Elem Dof)

(۳) تعیین ماتریس سختی سیستم (اسمبل کردن) (K)

(۴) نوشتن معادله سختی سیستم $(F = KD)$

(۵) اعمال شرایط مرزی (طرف درجه آزادی مقید دانسته)

(۶) حل معادله سختی سیستم و تعیین جابجایی ها $(D = K^{-1}F)$

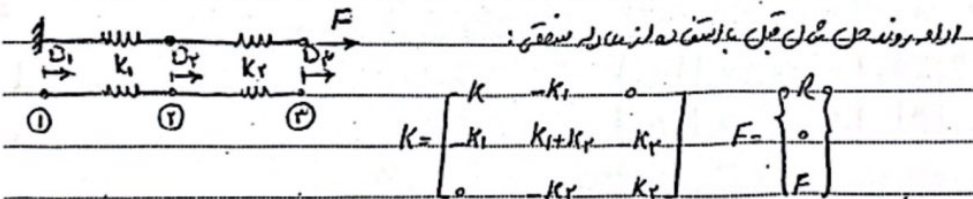
(۷) تعیین جابجایی ها $D \rightarrow d_i$

(۸) حل معادله سختی هر عضو و تعیین نیروها $P_i = K_i d_i$

۱۴، ۱، ۷، ۲۳

روشن افزای محدود

جمله نهم



$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

چون مسئله سه معادله آزادی حرکت

صفحات کنش معادله D_1

برابر اختلاف

$$F = KD \Rightarrow \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \Rightarrow F = KD \Rightarrow D = K^{-1}F \quad \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F/k_1 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F/k_1 \\ F \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \end{bmatrix}$$

در عضو $d_1 = 0$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ F \end{Bmatrix}$$

در تیر $d_2 = D_2 = F/k_1$

در عضو $d_1 = D_1 = F/k_1$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ F \end{Bmatrix}$$

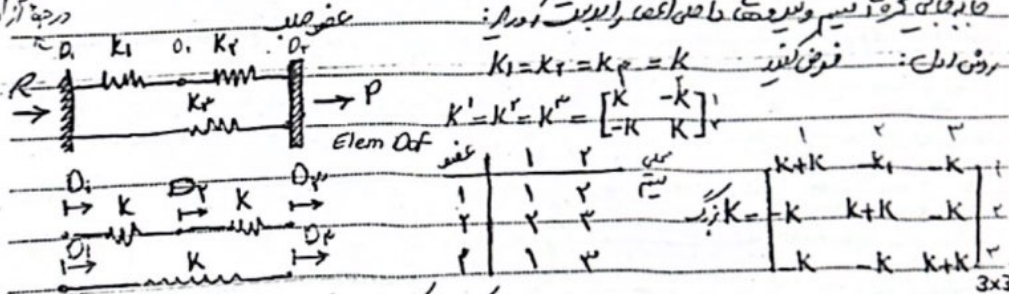
در تیر $d_2 = D_2 = F \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$

طریقه افزودن بار (ن) را در ج

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال:

تیر را به دو تیر و یک عضو تقسیم می‌کنیم و این بار را در ج



F=KD →

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

در عضو $d_1 = 0$

$$d_2 = D_2 = \frac{P}{4K}$$

در تیر $d_3 = D_3 = \frac{P}{4K}$

در تیر $d_3 = D_3 = \frac{2P}{4K}$

$$\{R\} = [K] \{d\} = \begin{Bmatrix} 2P/4 \\ 2P/4 \end{Bmatrix}$$

PAPCO

تیر را به دو تیر و یک عضو تقسیم می‌کنیم و این بار را در ج

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

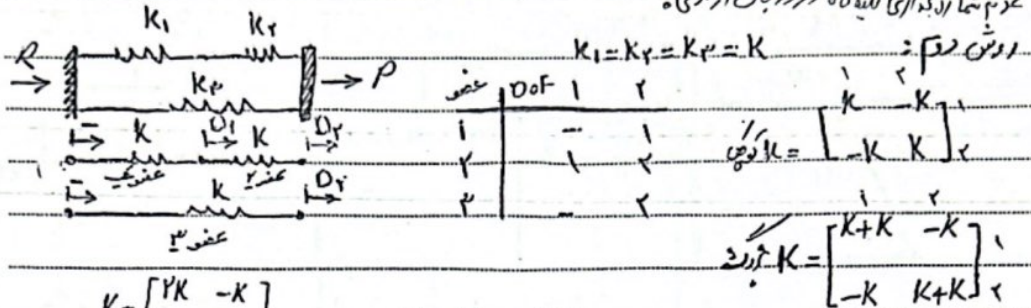
$$K^1 = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad K^2 = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad K^3 = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$K_{11} \quad K_{12} \quad K_{21} \quad K_{22} \rightarrow -k_{11}$$

Subject: Page 7
Date:

روش افزاینده

عزم‌ها را در گره‌های تکیه‌گاه در درجات آزادی:



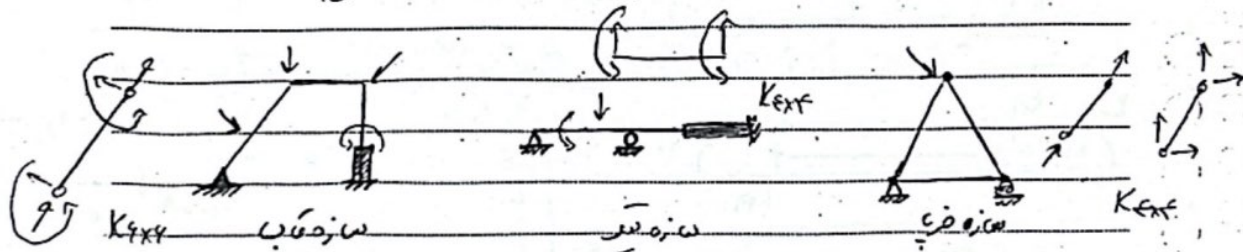
$$K = \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix}$$

به کمک روش حذف ضرایب به روش اول ادامه می‌دهیم:

پایه اول:

برگشتن به روش اول و یک استند می‌کنیم چرا که می‌توان فرض کنیم که در این روش، از بار و عزم‌ها
برای به دست آوردن شکل کلی و در نهایت به دست آوردن معادلات استند می‌کنیم.
و با حذف معادلات به دست آورده می‌شود که معادلات استند می‌کنیم.



دستگاه خیز:

معادلات استند که در گره‌های آن فرض داریم و نیروها فقط در گره‌ها اعمال می‌شوند
و معادلات آن‌ها می‌تواند تنظیم هستند و هیچ نیروی در وسط عضو به آن اعمال نمی‌شود.

دستگاه خیز:

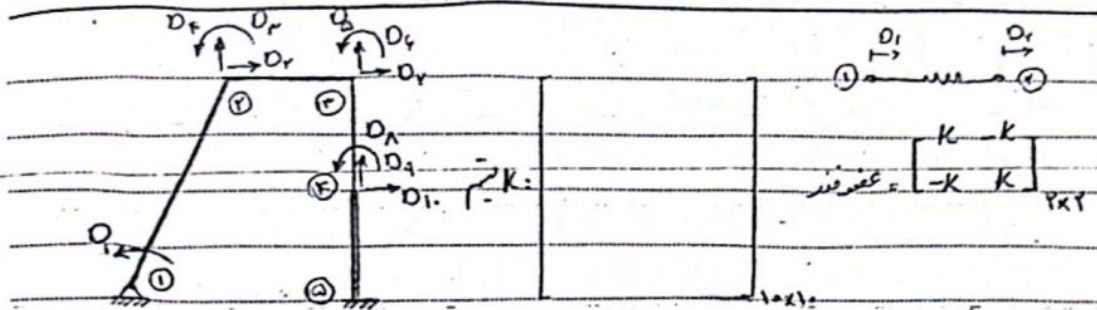
معادلات استند که در گره‌های آن فرض داریم و نیروها فقط در گره‌ها اعمال می‌شوند
و معادلات آن‌ها می‌تواند تنظیم هستند و هیچ نیروی در وسط عضو به آن اعمال نمی‌شود.
این استند می‌تواند نیروها را به هر یک از اعضا اعمال کند و در هر یک از آن‌ها شکل کلی نیروی محوری در آن
استند می‌تواند محوری در آن محوری است و اگر هم نیروی محوری را داشت برای آن کم است.

دستگاه خیز:

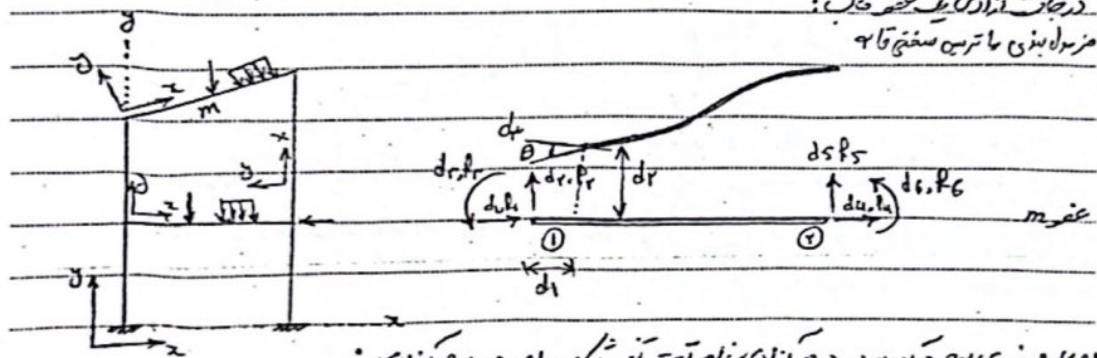
دستگاه خیز که در گره‌های آن فرض داریم و نیروها فقط در گره‌ها اعمال می‌شوند
و معادلات آن‌ها می‌تواند تنظیم هستند و هیچ نیروی در وسط عضو به آن اعمال نمی‌شود.
این استند می‌تواند محوری در آن محوری است و اگر هم نیروی محوری را داشت برای آن کم است.

P4PCO

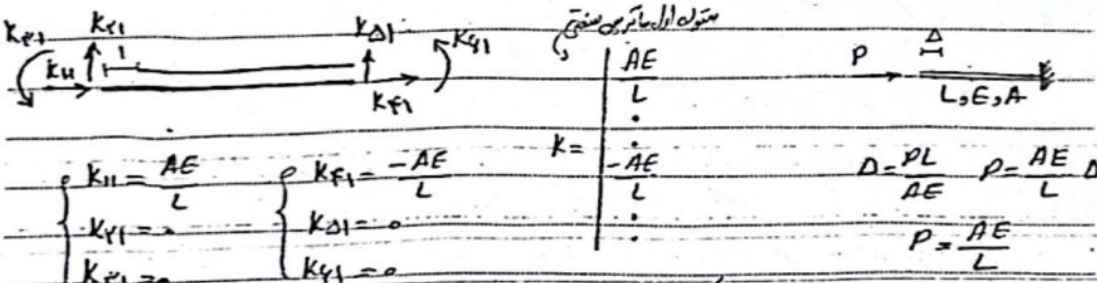
تقریب درجه آزادی: عبارت است از جابجایی مستقیم (انتقال یا دورانی) که می‌توان تغییر شکل کل سازه را بر حسب آنجا به دست آورد.



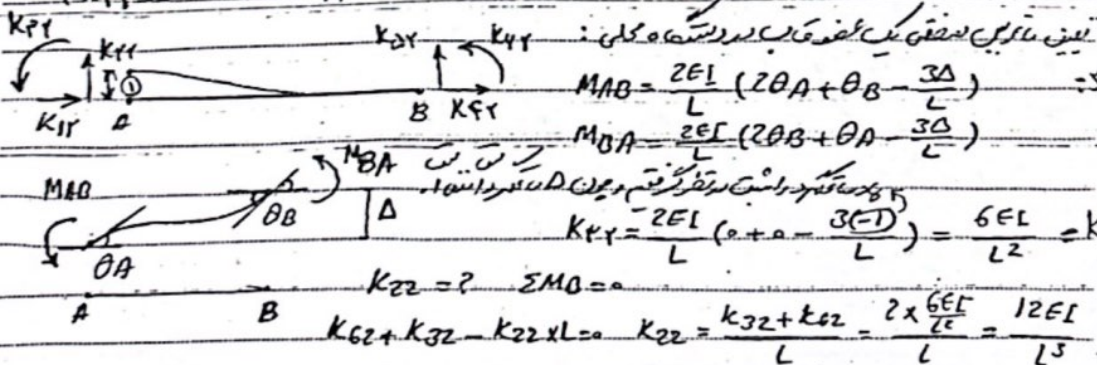
درجه آزادی یک عضو قلاب:
مزدول بندی ماتریس سختی 4×4



نکته: نیروی پیوسته در درجه آزادی نام تحت تغییر شکل واحد در درجه آزادی n



درجه آزادی 1:



تعیین ماتریس سختی یک عضو قلاب در درجه آزادی کلی:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} (2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{L})$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} (2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{L})$$

$$K_{42} = \frac{2EI}{L} (0 + 0 - \frac{3(-1)}{L}) = \frac{6EI}{L^2} = K_{42}$$

$$K_{22} = ? \quad \sum M_O = 0$$

$$K_{62} + K_{32} - K_{22} \times L = 0 \quad K_{22} = \frac{K_{32} + K_{62}}{L} = \frac{2 \times \frac{6EI}{L^2}}{L} = \frac{12EI}{L^3}$$

PAPCO

قرارداد مثبت: $G^+ \uparrow$

شکل دوم: ترسیم شده است

$$\begin{cases}
 K_{11} = 0 \\
 K_{12} = \frac{6EI}{L^2} \\
 K_{21} = \frac{4EI}{L} \\
 K_{22} = 0
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 K_{11} = 0 \\
 K_{12} = -\frac{6EI}{L^2} \\
 K_{21} = \frac{2EI}{L} \\
 K_{22} = 0
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 K_{11} = 0 \\
 K_{12} = \frac{12EI}{L^3} \\
 K_{21} = -\frac{6EI}{L^2} \\
 K_{22} = 0
 \end{cases}$$

۱۴. تعیین ماتریس سختی یک عضو در دستگاه مختصات (۱-۲) (شماره گذاری تکلیف داده ها)

$$K_{21} = \frac{2EI}{L} (1 + 3(-1)) = -\frac{6EI}{L^2}$$

در نقشه یک (۱-۲) علامت منفی به علت جرفش برعکس جهت به نظر می آید.
نمی توانی بپوشد چرا که جهت را عکس جهت قرار داری اصل خود داریم.

باید روند عمل را در حالت تغییر ببیند انحنای ثابت می باشد.

۱۵. تعیین ماتریس سختی یک عضو خنثی در دستگاه مختصات (۱-۲) (شماره گذاری تکلیف داده ها)

$$\begin{cases}
 K_{11} = \frac{AE}{L} \\
 K_{12} = -\frac{AE}{L}
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 K_{21} = -\frac{AE}{L} \\
 K_{22} = \frac{AE}{L}
 \end{cases}$$

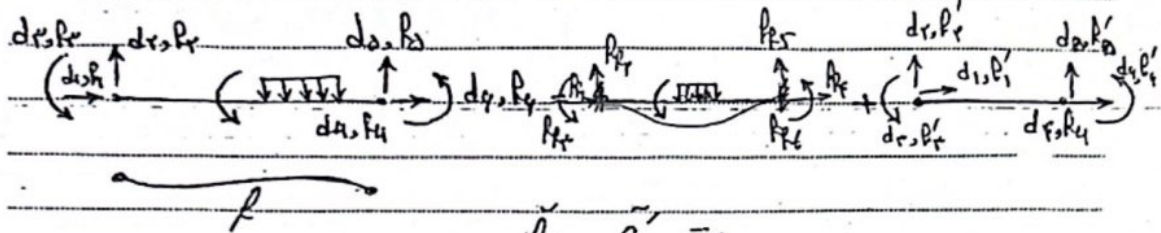
درجه آزادی ۱

مثال: $K = \frac{AE}{L}$ نشان بدهد

$$K = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}$$

محافظ نیروها خارجی بر یک گره در یک درجه آزادی (ببینید) (مساوی است):

$$\{R_i\} = [k_{ij}] \{d_j\}$$



$$\bar{P} + P = Kd$$

$$P = P + Kd$$

رابطه حاکم بر تیر و تیر

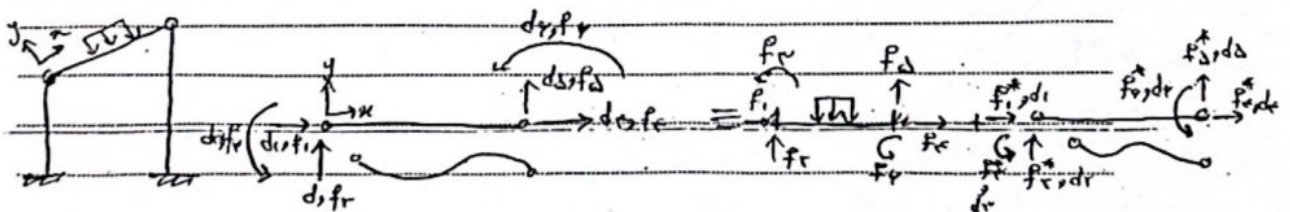
$$\bar{P} - P = Kd$$

به عنوان مثال، در یک تیر و تیر، در طول آن یک نیروی خارجی اعمال می شود. در این صورت، در هر دو انتهای تیر، نیروهای خارجی اعمال می شود. در این صورت، در هر دو انتهای تیر، نیروهای خارجی اعمال می شود.

در این صورت، در هر دو انتهای تیر، نیروهای خارجی اعمال می شود. در این صورت، در هر دو انتهای تیر، نیروهای خارجی اعمال می شود.

در این صورت، در هر دو انتهای تیر، نیروهای خارجی اعمال می شود. در این صورت، در هر دو انتهای تیر، نیروهای خارجی اعمال می شود.

در این صورت، در هر دو انتهای تیر، نیروهای خارجی اعمال می شود. در این صورت، در هر دو انتهای تیر، نیروهای خارجی اعمال می شود.



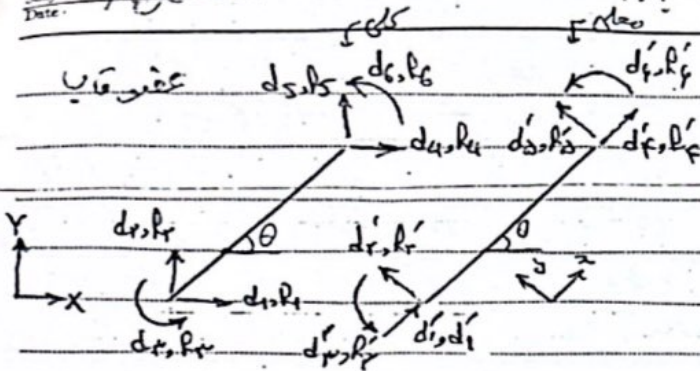
$$\Phi = \Phi_f + \Phi^* \quad \Phi^* = Kd$$

$$\Phi - \Phi_f = Kd$$

$\frac{AE}{L}$			$\frac{AE}{L}$			ماتریس انعطاف پذیری
	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$		$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	شماره اعضا و قواب
	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$		$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	درجه حرارت کلی
$\frac{AE}{L}$			$\frac{AE}{L}$			
	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$		$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	
	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$		$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	

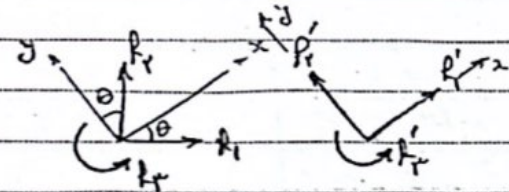
$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	ماتریس انعطاف پذیری
$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	شماره اعضا و قواب
$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	درجه حرارت کلی
$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	

$\frac{AE}{L}$	$-\frac{AE}{L}$	ماتریس انعطاف پذیری
$\frac{AE}{L}$	$\frac{AE}{L}$	درجه حرارت کلی



تبدیل دستگاه مختصات: $P' = K' d'$

- $P' \leftrightarrow P$
- $R' \leftrightarrow R$
- $d' \leftrightarrow d$
- $K' \leftrightarrow K$



$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= P'_x = P_x \cos \theta + P_y \sin \theta \\ \Sigma F_y &= P'_y = -P_x \sin \theta + P_y \cos \theta \\ \Sigma M &= P'_z = P_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R'_{11} &= P_x \cos \theta + P_y \sin \theta \\ R'_{12} &= -P_x \sin \theta + P_y \cos \theta \\ R'_{13} &= P_z \end{aligned}$$

در اینجا P'_x, P'_y, P'_z را به صورت P_x, P_y, P_z می‌نویسیم.

$$\begin{pmatrix} R'_{11} \\ R'_{12} \\ R'_{13} \\ R'_{21} \\ R'_{22} \\ R'_{23} \\ R'_{31} \\ R'_{32} \\ R'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{P' = T P}$$

معادله:

$$d' = T d$$

اگر ناخواسته، بردارها را به صورت R بنویسیم، داریم:

$$R = \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

$\rightarrow P = T^T K' T d \rightarrow P = K d$

$P = F_P = K d$

با توجه به این که d و P در یک راستا هستند

افزایش طول

Subject: Page 13
Date:

$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_x = P_x \cos \theta - P_y \sin \theta$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_y = P_y \sin \theta + P_x \cos \theta$

$\sum M = 0 \Rightarrow R_x = P_x$

$R_y = P_y \cos \theta - P_x \sin \theta$

$R_x = P_x \sin \theta + P_y \cos \theta$

$R_y = P_y$

R_x	C	S	C	R'_x
R_y	S	C	S	R'_y
R_x	S	C	S	R'_x
R_y	C	S	C	R'_y
R_x	S	C	S	R'_x
R_y	C	S	C	R'_y

$\Rightarrow P = T^T P'$

$d = T^T d'$

$T^T(P' P' = K' d')$

$T^T P' = T^T K' d' \Rightarrow P = K d$

$P = K d$

$K = T^T K' T$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_x = P_x \cos \theta + P_y \sin \theta$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_y = P_y \sin \theta + P_x \cos \theta$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_x = P_x \cos \theta + P_y \sin \theta$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_y = P_y \sin \theta + P_x \cos \theta$

$$\begin{Bmatrix} R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{Bmatrix}_{x'1} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}_{x'2} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix}_{x1}$$

$$T = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

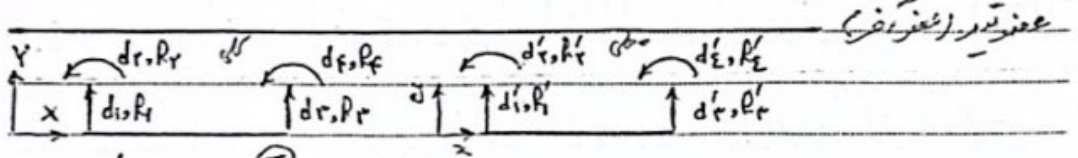
$$T^T = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & S & 0 \end{bmatrix}$$

$P' \quad T \quad P$

برای عضو خراب داریم:

$$K = T^T K' T = \begin{bmatrix} C & 0 \\ S & 0 \\ 0 & C \\ 0 & S \end{bmatrix}_{x'2} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}_{x'2} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}_{x'2} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix}_{x'2}$$

ماتریس سختی
عضو خراب در
دفعات کلی



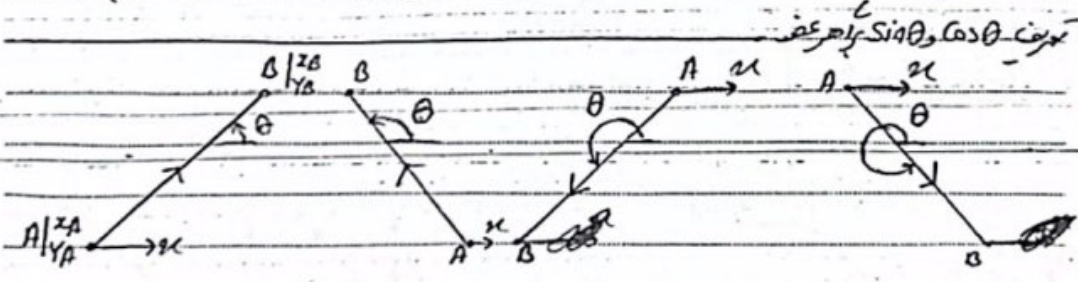
تبدیل مقادیر
عضو

$$\begin{Bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{T} = I$$

یعنی همان I

$$\begin{matrix} P' = P \\ K' = K \\ d' = d \end{matrix}$$



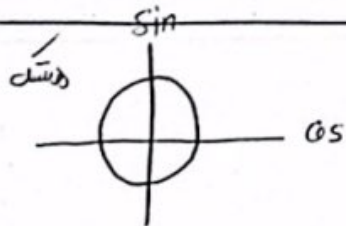
$$\cos \theta = \frac{x_B - x_A}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\sin \theta = \frac{y_B - y_A}{L}$$

تبدیل داده: θ با علامت مثبت به سمت عقربه‌های ساعت

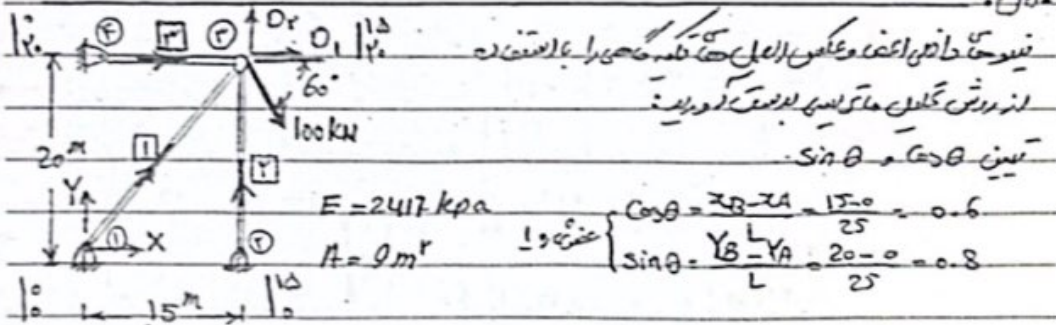
PAPCO



مردود روند تحلیل:

- ۱) $K = T^T K' T$ (۱) تعیین ماتریس stiffness هر عضو در مختصات کلی
- ۲) Elem DoF (۲) تعیین جبرول انطباق در جهت دارای عضویتیم
- ۳) K (۳) تعیین ماتریس stiffness سیستم (التمبل کردن)
- ۴) $\bar{F} = \bar{R} \bar{D}$ (۴) نوشتن معادله stiffness سیستم
- ۵) $\bar{D} = K^{-1} \bar{F}$ (۵) اعمال شرایط مرزی (حذف درجهت آزاد شده و یافتن)
- ۶) $D = K^{-1} F$ (۶) حل معادله stiffness سیستم و تعیین جبرول جابجایی که در آن سیستم
- ۷) $D = d_i$ (۷) تعیین جبرول جابجایی که در آن عضو
- ۸) $K^i P_i = k^i d^i$ (۸) حل معادله stiffness هر عضو و تعیین نیروی که در آن عضو
- ۹) $d^i = TR$ (۹) محاسبه جبرول جابجایی که در آن عضو
- ۱۰) $d^i = T d$ (۱۰) محاسبه جبرول جابجایی که در آن عضو

مثال:



$E = 2417 \text{ kpa}$
 $A = 9 \text{ m}^2$
 $\cos \theta = \frac{x_B - x_A}{L} = \frac{15 - 0}{25} = 0.6$
 $\sin \theta = \frac{y_B - y_A}{L} = \frac{20 - 0}{25} = 0.8$
 $\cos \theta = \frac{x_C - x_A}{L} = \frac{15 - 15}{20} = 0$
 $\sin \theta = \frac{y_C - y_A}{L} = \frac{20 - 0}{20} = 1$
 $\cos \theta = \frac{x_D - x_A}{L} = \frac{0 - 15}{25} = -0.6$
 $\sin \theta = \frac{y_D - y_A}{L} = \frac{0 - 20}{25} = -0.8$
 $\cos \theta = \frac{x_E - x_A}{L} = \frac{0 - 15}{15} = -1$
 $\sin \theta = \frac{y_E - y_A}{L} = \frac{20 - 20}{15} = 0$

برای اطمینان از علامت $\sin$ و $\cos$ که فنیق فراموش $\sin$ و $\cos$ را در نماش k گانه (سه) و فنیقات بنابر دانسته باشیم.

PAPCO

$$= \frac{(h-y)}{b} \cdot \frac{1-y}{b}$$

$$K = T^T K' T$$

مرحله اول:

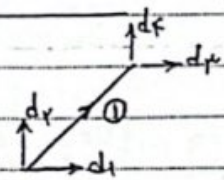
$$K_1 = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^T & C^T & C^T & C^T \\ C^T & S^T & C^T & S^T \\ C^T & C^T & C^T & C^T \\ C^T & S^T & C^T & S^T \end{bmatrix} = \frac{9 \times 2417}{25} \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & 0.36 & 0.48 \\ 0.48 & 0.64 & 0.48 & 0.64 \\ 0.36 & 0.48 & 0.36 & 0.48 \\ 0.48 & 0.64 & 0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{9 \times 2417}{20} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K_3 = \frac{9 \times 2417}{15} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elem DoF

مرحله دوم:

عقد	1	2	3	4	عقد
1	-	-	1	2	سیستم
2	-	-	1	2	
3	-	-	1	2	



تین K سیستم

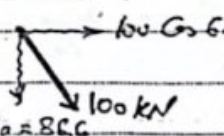
مرحله سوم:

$$K = 2417 \times 9 \begin{bmatrix} 0.36 + \frac{1}{25} + \frac{1}{15} & 0.48 + \frac{1}{25} + \frac{1}{15} \\ 0.48 + \frac{1}{25} + \frac{1}{15} & 0.64 + \frac{1}{25} + \frac{1}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1763.2 & 417.6 \\ 417.6 & 1644.3 \end{bmatrix}$$

$$F = KD$$

مرحله چهارم:

$$F = KD \Rightarrow F = \begin{bmatrix} 50 \\ -86.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$



مرحله پنجم: این مرحله به کمک از برابری بین بارها و واکنش ها انجام می شود. در اینجا این مرحله را در اینجا به کمک از برابری بین بارها و واکنش ها انجام می دهیم.

$$D = K^{-1}F$$

در صورتی که

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1763.2 & 117.6 \\ 417.6 & 1644.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 50 \\ -86.6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0434 \\ -0.0632 \end{Bmatrix} m$$

$$D = d_i$$

در صورتی که

$$d_i = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0434 \\ -0.0632 \end{Bmatrix}$$

همین روش را برای عضو ۲ و ۳ نیز حین مقدار می‌باشد
 $d_2 = d_3 = d_1$

$$R_i - R_j = K d_i$$

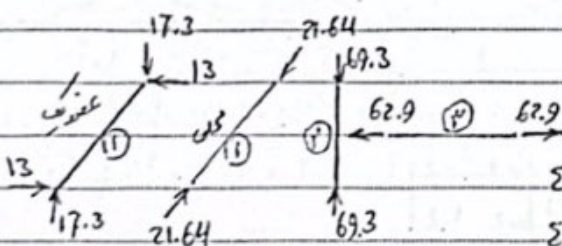
در صورتی که

$$R_i = K_{11} d_1 + R_f = \frac{2417 \times 9}{25} \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.36 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0434 \\ -0.0632 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 13.0 \\ 17.3 \\ 13 \\ -17.3 \end{Bmatrix}$$

$$R_i = T R = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 13 \\ 17.3 \\ -13 \\ 17.3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21.64 \\ -21.64 \end{Bmatrix} KN$$

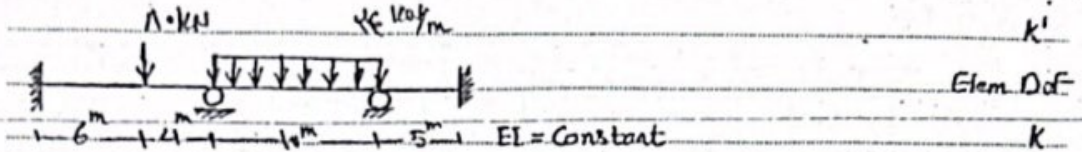
$$\text{عضو ۲: } R_i = \begin{Bmatrix} 69.3 \\ 0 \\ 0 \\ -69.3 \end{Bmatrix}, R_j = \begin{Bmatrix} 69.3 \\ -69.3 \end{Bmatrix} \quad \text{عضو ۳: } R_i = \begin{Bmatrix} 62.9 \\ 0 \\ 0 \\ 62.9 \end{Bmatrix}, R_j = \begin{Bmatrix} -62.9 \\ 62.9 \end{Bmatrix}$$

$$d' = T d = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.04 \\ 0.06 \end{Bmatrix}$$



$$\sum F_x = 0 \quad -62.9 + 50 + 13 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 69.3 - 86.6 + 17.3 = 0$$



Elem Dof

$F = P_p = KD$

$D = K^{-1}(F - P_p)$

$D = d'$

$K' = K d' d' P_p$

$P_p' = T P_p$

$d' = T d$

$K_1 = EI$

$12EI$	$6EI$	$-12EI$	$6EI$
L^3	L^2	L^3	L^2
$6EI$	$4EI$	$-6EI$	$2EI$
L^2	L	L^2	L
$-12EI$	$-6EI$	$12EI$	$-6EI$
L^2	L	L^2	L
$6EI$	$2EI$	$-6EI$	$4EI$
L^2	L	L^2	L

12	6	-12	6
1.2	1.2	1.2	1.2
6	4	-6	2
1.2	1	1.2	1
-12	-6	12	-6
1.2	1.2	1.2	1.2
6	2	-6	4
1.2	1	1.2	1

$K_1 = EI$

0.012	0.06	-0.012	0.06
0.06	0.4	-0.06	0.2
-0.012	-0.06	0.012	-0.06
0.06	0.2	-0.06	0.4

$K_2 = EI$

0.012	0.06	-0.012	0.06
0.06	0.4	-0.06	0.2
-0.012	-0.06	0.012	-0.06
0.06	0.2	-0.06	0.4

در این مرحله ماتریس انتقالی را تشکیل می‌دهیم:

$K_3 = EI$

0.096	0.24	-0.096	0.24
0.24	0.8	-0.24	0.4
-0.096	-0.24	0.096	-0.24
0.24	0.4	-0.24	0.8

ماتریس انتقالی را با استفاده از جدول زیر تشکیل می‌دهیم:

Elem Dof

عضو	1	2	3	4	محل
1	-	-	-	1	چپ
2	-	1	-	2	چپ
3	-	2	-	-	چپ

باقی‌مانده ماتریس انتقالی را با استفاده از جدول زیر تشکیل می‌دهیم:

این ماتریس با ماتریس ۲x۲:

$K = EI$

$0.4 + 0.4$	0.2
0.2	$0.4 + 0.8$

$K = EI$

0.8	0.2
0.2	1.2

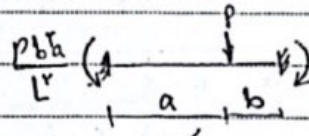
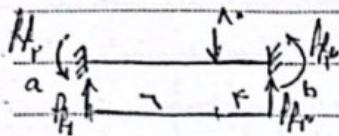
$$F - P_F = 100$$

بسته آورده ایم

که با انقضات قبل بسته آورده ایم

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای بسته آوردن بردار F چون یک مقدار فیزیکی ندارد که در دست آورده
بسته به جهت در آن دارد نشده است و آن فیزیک را به جهت گرفت



معمولی P_F : P_{R1} و P_{R2}

چون جهت را قبل و دست گرفته ایم متوجه می شویم که

$$P_{R1} = \frac{(10)(2)(7)}{1.2} = 74.18$$

$$P_{R2} = \frac{(10)(7)(4)}{1.2} = -115.2$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -P_{R1} \times 10 + P_{R2} + P_F \times 4 = 0 \rightarrow -10 P_{R1} + 74.18 - 115.2 + 10 \times 4 = 0 \rightarrow -10 P_{R1} = 28.14$$

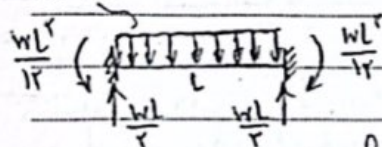
$$\rightarrow P_{R1} = 28.14$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -115.2 - 10 \times 4 + 74.18 + P_{R2} \times 10 = 0$$

$$P_{R1} = \begin{Bmatrix} 28.14 \\ 74.18 \\ 51.82 \\ -115.2 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow 10 P_{R2} = 51.82 \rightarrow P_{R2} = 51.82$$

۲۴ کN/m



$$P_{R1} = \frac{24 \times 10}{2} = 120$$

$$P_{R2} = \frac{24 \times 10}{2} = 120$$

$$P_{R1} = \frac{24 \times 10}{12} = 200$$

$$P_{R2} = \frac{24 \times 10}{12} = -200$$

$$P_{R1} = \begin{Bmatrix} 120 \\ 200 \\ 120 \\ -200 \end{Bmatrix}$$

همه چیز را از بیرونی P_F اضافه می کنیم P_F بسته می کنیم

P_F بسته می کنیم و در آن ۲۴۱ را به دلایل داشتن ۲ درجه آزادی و چون از بخش فیزیک است یک نمونه

$$P_F = \begin{Bmatrix} -115.2 + 200 = 84.8 \\ -200 = -200 \end{Bmatrix}$$

$$F - P_F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 84.8 \\ -200 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -84.8 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

$$D = K^{-1}(F - P_f)$$

$$D = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -84.8 \\ -200 \end{bmatrix} = D = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -154.1 \\ 192.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(0.8)(1.2) - (0.2)(0.2)} \begin{bmatrix} 1.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Elem. DoF	1	2	3	4
1	-	-	-	1
2	-	1	-	2
3	-	2	-	-

$$d^i = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -154.1 \end{Bmatrix}$$

$$d_2 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ -154.1 \\ 192.5 \end{Bmatrix}$$

$$d_3 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 192.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k^i = k^i d^i + P_f^i$$

$$k^i = EI \begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -154.1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 28.14 \\ 14.18 \\ 21.12 \\ -115.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18.91 \\ 50.91 \\ 71.9 \\ -115.2 \end{Bmatrix}$$

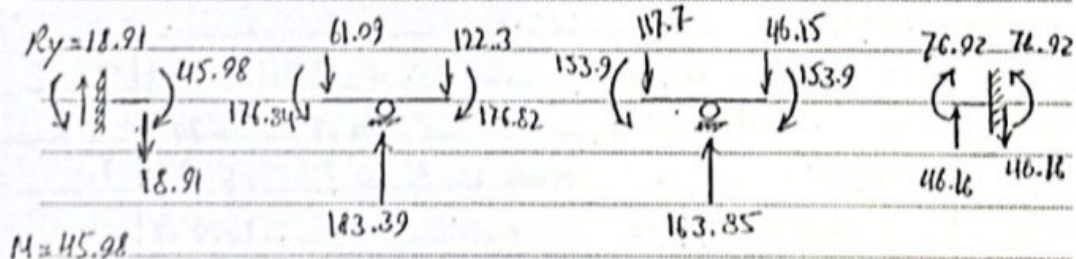
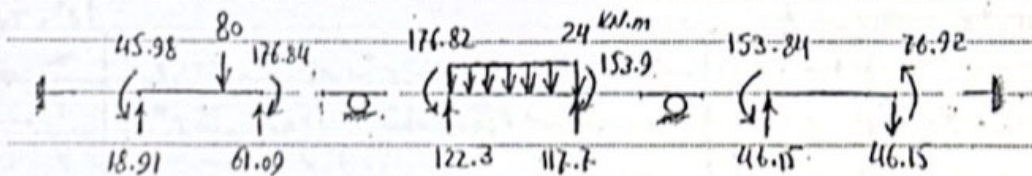
معاملات المصفوفة

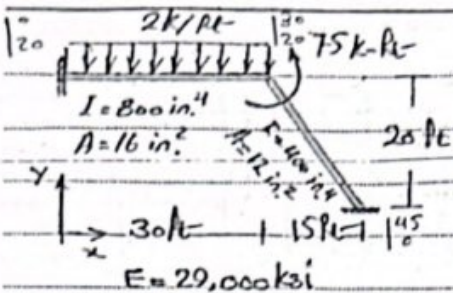
$$k^i = EI \begin{bmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 192.5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ -12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12.12 \\ 114.12 \\ 114.12 \\ -12.12 \end{Bmatrix}$$

$$K_f = EI \begin{bmatrix} 0.096 & 0.24 & -0.096 & 0.24 \\ 0.24 & 0.8 & -0.24 & 0.4 \\ -0.096 & -0.24 & 0.096 & -0.24 \\ 0.024 & 0.4 & -0.24 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \\ \theta \\ \Delta \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46.15 \\ 153.84 \\ -46.15 \\ 76.92 \end{Bmatrix}$$

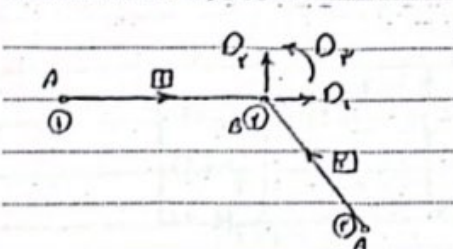
$$P_1 = \begin{Bmatrix} 18.91 \\ 45.98 \\ 61.09 \\ -176.84 \end{Bmatrix} \quad P_2 = \begin{Bmatrix} 122.3 \\ 176.82 \\ 117.7 \\ -153.9 \end{Bmatrix} \quad P_3 = \begin{Bmatrix} 46.15 \\ 153.84 \\ -46.15 \\ 76.92 \end{Bmatrix}$$

مخطط القوى الداخلية





این روش تحلیل ماتریس به روش آدوانس
به فرجه در ۱۱ اعضا و ۱۱ نود و ۱۱ عضو را با استفاده از



$$K_{rel} = T_{rel}^T K'_{rel} T_{rel}$$

۱) $\bar{K} = T^T K' T$

۲) Elem DoF

۳) K

۴) $F = KD + F_f$

۵) اول شرایط مرزی

۶) $D = K^{-1}(F - F_f)$

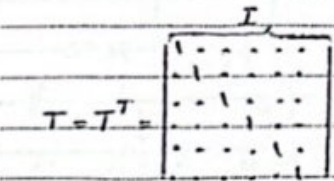
۷) $D \rightarrow d'$

۸) $p' = k d' + p_f$

$p' = T r$

$d' = T d$

$$\cos \theta = \frac{x_B - x_A}{L} = \frac{30 - 0}{30} = 1 \quad \sin \theta = \frac{y_B - y_A}{L} = \frac{20 - 0}{30} = \frac{2}{3}$$



از اینجا که T برابر با T ترانسپوز
یعنی برابر با فرض است و $k_1 = k_1'$ می باشد.

	15,466.67	0	0	-15,466.67	0	0
	0	71.6	1,074.07	0	-71.6	-1,074.07
	0	1,074.07	21,481.48	0	-1,074.07	1,074.07
$K + K_1$	-15,466.67	0	0	15,466.67	0	0
عقدی	0	-71.6	-1,074.07	0	71.6	1,074.07
	0	1,074.07	1,074.07	0	-1,074.07	21,481.48

	-0.6	0.2	0	0	0	0
	0.2	-0.6	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	-0.6	0.2	0
	0	0	0	0.2	-0.6	0
	0	0	0	0	0	1

	13920	0	0	-13920	0	0
	0	61.87	733.33	0	-61.87	773.33
	0	773.33	12888.89	0	-773.33	64444.44
$K_y =$	-13920	0	0	13920	0	0
r_{fixed}	0	-61.87	733.33	0	61.87	-773.33
	0	773.33	64444.44	0	-773.33	12888.89

	5050.8	-6651.9	-618.67	-5050.8	6651.9	-418.07
	-6651.9	8931.07	-464	6651.9	-8931.07	-464
	-618.67	-464	12888.89	618.67	464	-64444.44
$K = [T]^T [k'] [T] =$	5050.8	6651.9	618.67	-5050.8	-6651.9	618.67
	6651.9	-8931.07	-464	-6651.9	8931.07	-464
	-618.67	-464	64444.44	618.67	-464	12888.89

عنصر	1	2	3	F	d	7	در
1	-	-	-	1	2	3	در
2	-	-	-	1	2	3	

ice	1	2	3	F	d	7
1	1	2	3	F	d	7
2	7	8	9	F	d	7

1	2	3	Elem/Node
1	2	3	
2	4	5	
3	6	7	
j	3j-2	3j-1	3j

P4PCO

حال از ماتریس K نقطه ای انتگرال شده ای عضو K و عضو K درایه $3, 4, 5, 6$ را استخراج کرده و به هم دران این درایه ها را به سیستم انتقال می شود.

$$K_{system} = \begin{bmatrix} (15466.67 + 5050.2) & -6651.9 & 618.67 \\ -6651.9 & (71.6 + 8931.07) & (-1074.07 + 464) \\ 618.67 & (-1074.07 + 464) & (21421.48 + 12888.89) \end{bmatrix}$$

$$K_{system} = \begin{bmatrix} 20517.47 & -6651.9 & 618.67 \\ -6651.9 & 9002.67 & -610.07 \\ 618.67 & -610.07 & 34370.37 \end{bmatrix}$$

این شکل نشان می دهد که این سیستم را می توان به صورت زیر نوشت:

F : بردار نیروها یا گره ای است: (نیروها متمرکز)

R_p : بردار نیروها یا گره ای است که از به وجود آمدن گره ای است

$$F = KD + R_p$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$R_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$R_p = \begin{bmatrix} \frac{WL}{12} \\ \frac{WL^2}{12} \\ \frac{WL}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$D = K^{-1}(F - R_p)$$

این معادله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$D = \begin{bmatrix} 20517.47 & -6651.9 & 618.67 \\ -6651.9 & 9002.67 & -610.07 \\ 618.67 & -610.07 & 34370.37 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -15 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.00149 R_p \\ -0.00399 R_p \\ 0.0065 R_p \end{bmatrix}$$

$$D \rightarrow d_i$$

$$d_i = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00149 \\ -0.00399 \\ +0.0065 \end{bmatrix}$$

PAPCO

$$f_1 = K_{id1} + P_{f1} = \begin{bmatrix} 15466.67 & 0 & 0 & -15466.67 & 0 & 0 \\ 0 & 71.6 & 1074.07 & 0 & -71.6 & 1074.07 \\ 0 & 1074.07 & 21481.48 & 0 & -1074.07 & 10740.74 \\ -15466.67 & 0 & 0 & 15466.67 & 0 & 0 \\ 0 & -71.6 & -1074.07 & 0 & 71.6 & -1074.07 \\ 0 & 1074.07 & 10740.74 & 0 & -1074.07 & 21481.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.00149 \\ 0.00393 \\ 0.0065 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 150 \\ 0 \\ 30 \\ -150 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 23.05k \\ 37.27k \\ 224.1k-ft \\ -23.05k \\ 22.73k \\ -6.08k-ft \end{bmatrix}$$

$$f_2 = K_{id2} + P_{f2} = \begin{bmatrix} 5050.8 & -6651.9 & 618.67 & -5050.8 & 6651.9 & -618.67 \\ -6651.9 & 8931.07 & -464 & 6651.9 & -8931.07 & 464 \\ -618.67 & -464 & 12888.89 & 618.67 & 464 & -6444.44 \\ -5050.8 & 6651.9 & 618.67 & 5050.8 & -6651.9 & 618.67 \\ 6651.9 & -8931.07 & 464 & -6651.9 & 8931.07 & -464 \\ -618.67 & 464 & -6444.44 & 618.67 & -464 & 12888.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.00149 \\ 0.00393 \\ 0.0065 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} -23.04k \\ 22.71k \\ 39.12k-ft \\ 23.04k \\ -22.71k \\ 81k-ft \end{bmatrix}$$

20/10/21

مركز ثقل العنصر

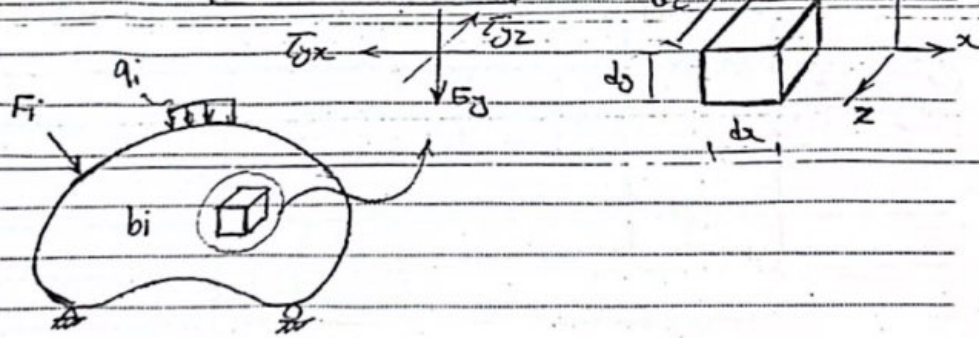
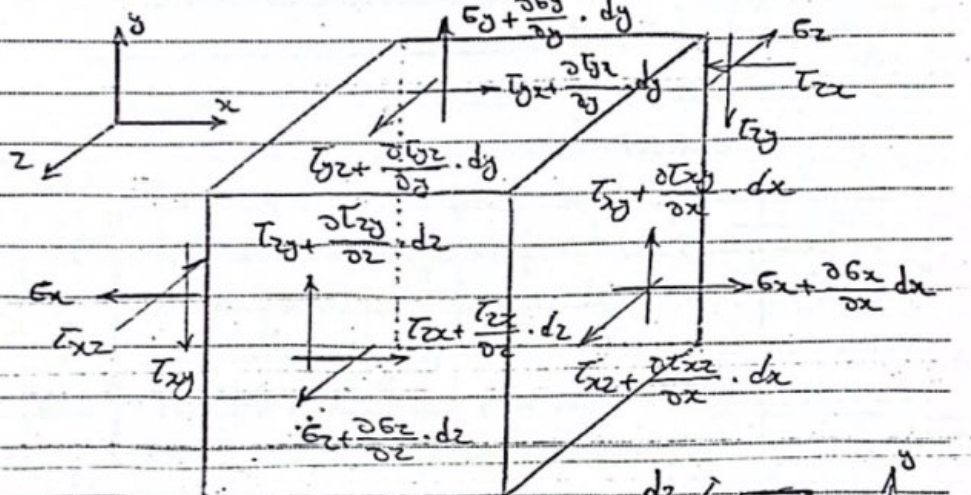
$R' = TR$

$d' = Td$

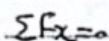
	-0.6	0.8	0	0	0	0	23.04	31.99 k	
	-0.8	-0.6	0	0	0	0	22.71	4.81 k	
مركز ثقل العنصر	0	0	1	0	0	0	39.12	39.12 k-ft	
	0	0	0	-0.6	0.8	0	23.04	= 31.99 k	
	0	0	0	-0.8	-0.6	0	-22.71	-4.81 k	
	0	0	0	0	0	1	81	81 k-ft	

12-1, 1, 2

20/10/21



PAPCO



$$+ \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial z} \cdot dz - T_x \right) dx dy + b_x dy dz = 0$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + b_x \right) dx = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + b_2 = 0$$

ۛ ڪٿي به ڏلت نه ٿي رستم محمدي پيو ٿي.

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial \sigma x}{\partial y} + \frac{\partial \tau x}{\partial z} + bx = 0 \quad \Sigma f_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + by = 0 \quad \text{--- } z_y =$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \quad \Sigma M = 0$$

$$x \rightarrow 1 \quad \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial x_1} + b_1 = 0 \quad \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial x_j} + b_1 = 0$$

$\delta \rightarrow y$
 $z \rightarrow x$

$$\frac{\partial \phi_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0$$

معادلات تعادل را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\text{افزای تنش } \sigma: \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_i \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{cases}$$

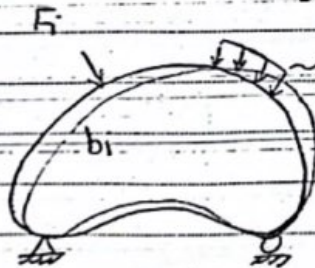
$$\begin{cases} \tau_{yx} = \tau_{xy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} \end{cases}$$

$$\text{افزای کرنش } \epsilon: \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \rightarrow \epsilon_i \begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{cases}$$

* استخوان اندام در تنش انحرافی در فرمول انحرافی افزای گسرد:

اصل کارایی

اصل انرژی پتانسیل = تنش رالیه الاستیک = انرژی پتانسیل



اصل انرژی پتانسیل:

$$u_i \rightarrow \text{جابجایی پتانسیل}$$

$$\Delta u_i = \begin{cases} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{cases} \rightarrow \text{جابجایی های انحرافی}$$

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{int}$$

رابطه اصل کارایی، برای هر صمم در حال تبدیل کارگرکن منیصه خارج صمم کارگرکن منیصه داخل تحت هر صمم خارج صمم انحرافی در نظر، به روش انیگم که صمم برابر است.

$$\Delta W_{ext} = ?$$

$$\Delta W_{ext} = \int_S F_i \Delta u_i + \int_V q_i \Delta u_i ds + \int_V b_i \Delta u_i dv$$

s: Surface

v: Volume

$$\int_S t_i \Delta u_i ds$$

$$\Delta W_{ext} = \int_S t_i \Delta u_i ds + \int_V b_i \Delta u_i dv$$

$$t_i = \{F_i, a_i\}$$

$$= \int_S (t_x \Delta u_x + t_y \Delta u_y + t_z \Delta u_z) ds +$$

$$\int_V (b_x \Delta u_x + b_y \Delta u_y + b_z \Delta u_z) dv$$

$$\Delta W_{int} = \int_V \epsilon_{ij} \Delta \epsilon_{ij} dv$$

$$\int_V [\epsilon_x \Delta \epsilon_x + \epsilon_y \Delta \epsilon_y + \epsilon_z \Delta \epsilon_z + \gamma_{xy} \Delta \gamma_{xy} + \gamma_{yz} \Delta \gamma_{yz} + \gamma_{zx} \Delta \gamma_{zx}] dv$$

$$dW = F \delta \quad \frac{dW}{dv} = \frac{F \delta}{dy dz dx} = \begin{matrix} \epsilon_x & \epsilon_z \\ F & \delta \end{matrix}$$

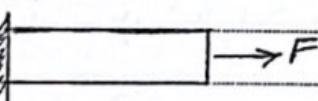
$$dW = \epsilon_x \epsilon_z dv \rightarrow W = \int_V \epsilon_x \epsilon_z dv$$

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{int}$$

$$\int_S t_i \Delta u_i ds + \int_V b_i \Delta u_i dv = \int_V \epsilon_{ij} \Delta \epsilon_{ij} dv$$

شکل: برای عضو محوری شکل مقابل تحت بار مرکز F مطلوبیت بر حسب تغییر جابجایی مجازی

$x \rightarrow$



x from L to x

در حرکت از ۳ حالت زیر:

(۱) میدان جابجایی مجازی خطی

(۲) میدان جابجایی مجازی مربعی

(۳) میدان جابجایی مجازی سینوسی

$\Delta u(x) = \left(\frac{x}{L}\right) \Delta s$

$\Delta u(x) = \left(\frac{x^2}{L^2}\right) \Delta s$

$\Delta u(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \Delta s$

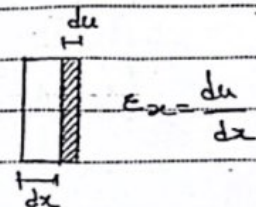
$\sin(\pi) = 1 \rightarrow \pi = \frac{\pi}{L} \rightarrow 0 = \frac{\pi}{L}$

$\Delta W_{ext} = \Delta W_{int}$

$\Delta W_{ext}(\bar{u}_{x=0}) = F \Delta s$

$\Delta W_{int} = \int_V \epsilon_{ij} \Delta \epsilon_{ij} dV = \int_L A G_x \Delta \epsilon_x dx$

$\downarrow$
 $\frac{d}{dx}(\Delta u)$ $\downarrow$ $\Delta\left(\frac{du}{dx}\right)$



$= \int_L F \Delta\left(\frac{du}{dx}\right) dx = \int_L F \frac{d}{dx}(\Delta u) dx$

for $\bar{u}_0$: $\Delta W_{int} = \int_0^L \frac{F}{L} \Delta s dx = \frac{F}{L} \Delta s x \Big|_0^L = F \Delta s$

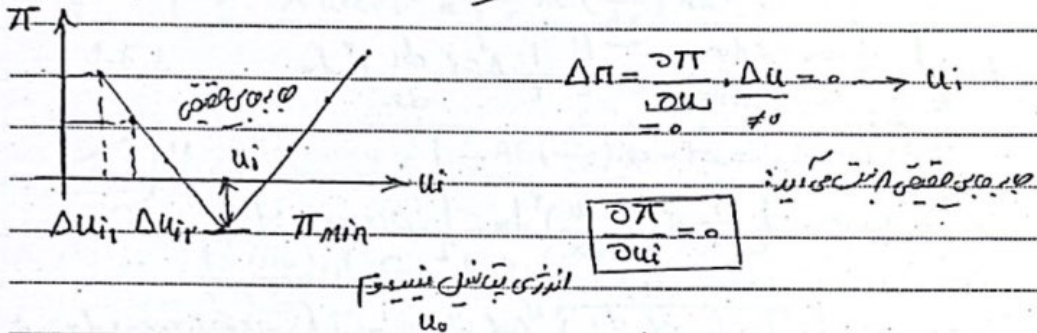
for $\bar{u}_x$: $\Delta W_{int} = \int_0^L F \frac{x}{L} \Delta s dx = F \frac{x}{L} \Delta s \Big|_0^L = F \Delta s$

for $\bar{u}_\sin$: $\Delta W_{int} = \int_0^L F \frac{\pi}{2L} \cos\left(\frac{\pi}{2L} x\right) \Delta s dx = F \frac{\pi}{2L} \Delta s \frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2L} x\right) \Big|_0^L$

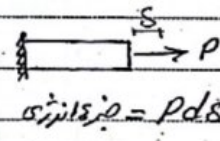
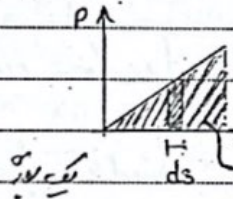
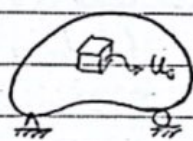
$= F \Delta s$

اصل انرژی پتانسیل مینیمم:

$\Pi(u_i) = U(u_i) + V(u_i)$
 که انرژی پتانسیل کل
 انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی
 انرژی پتانسیل داخلی سیستم



$U = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_V u_0 dA, u_0 = \frac{1}{r} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}$



جزء انرژی = $p ds$
 $\int_0^h \frac{1}{r} p ds = \frac{1}{r} p s$

برای عضو محوری
 $U = \frac{1}{2} \frac{p s}{AL} = \frac{1}{2} \epsilon_x \epsilon_x$

انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی: $V = -W_{ext} = -(\int_V t_i u_i dV + \int_V b_i u_i dV)$

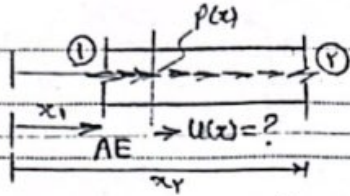
مثال: برای یک عضو محوری تحت بار گسترده محوری $p(x)$ در حال تعادل است. با استفاده از اصل

انرژی پتانسیل مینیمم، می توانیم بر مقدار بار گسترده $p(x)$ جوابی را بدست آوریم:

PAPCO

کتاب و ...
 $\Pi = U + V$

کتاب و ...
 $\Pi = U + V$



$$U = -W_{ext} = -\left(F_1 u_1 + \int_1^2 q_1 u_1 dx + \int_1^2 b_1 u_1 dx \right)$$

$$= -\int_1^2 q x u_x dx - \int_1^2 p(x) u(x) dx$$

انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی

$$U = \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{E_x E_x dx}{E E} = \int_1^2 \frac{1}{2} A E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

$$\Pi = U + V = \int_1^2 \frac{1}{2} A E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_1^2 p(x) u(x) dx$$

$$\Delta \Pi = 0 \rightarrow \int_1^2 \frac{1}{2} A E \cdot \gamma \left(\frac{du}{dx} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) dx - \int_1^2 p(x) \Delta u(x) dx = 0$$

$\frac{d}{dx} (\Delta u)$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad , \quad \int u dv = uv - \int v du$$

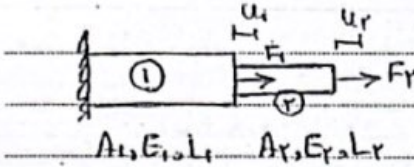
$$= A E \frac{du}{dx} \Delta u \Big|_1^2 - \int_1^2 A E \frac{d^2 u}{dx^2} \Delta u dx - \int_1^2 p(x) \Delta u dx = 0$$

$$\frac{E E_x}{A E_x} = F_2 \Delta u_2 - F_1 \Delta u_1 - \left(\int_1^2 A E \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) dx \right) \Delta u = 0$$

$$= \left(\int_1^2 \left[A E \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) \right] dx \right) \Delta u = 0 \quad \left(A E \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) = 0 \right)$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر عضو محوری: Δu تغییرات در جابجایی عضو است و این تغییرات در هر دو انتهای عضو برابر است.
دانش آن را بر مبنای اصل
(مثال) زیرا بر عضو محوری متصل بهم در شکل زیر بر مبنای اصل که در مبحث این باب به آن اشاره شد

از اصل انرژی پتانسیل می‌توانیم:



$$\pi = u + v = \int_L \frac{1}{2} AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_L p(x) u(x) dx$$

$$u \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{L} \quad \Rightarrow \quad \int_L \frac{1}{2} AE \left(\frac{u^2}{L^2} \right) dx - F u = \frac{1}{2} AE \frac{u^2}{L^2} \cdot L - F u$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{AE}{L} \right) u^2 - F u = \frac{1}{2} K u^2 - F u$$

K = \frac{AE}{L}

$$\pi = \frac{1}{2} K_1 u_1^2 - F_1 u_1 + \frac{1}{2} K_2 (u_2 - u_1)^2 - F_2 u_2$$

$$\pi(u_1, u_2) \rightarrow \Delta \pi = \frac{\partial \pi}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial \pi}{\partial u_2} \Delta u_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_1} = K_1 u_1 - F_1 + K_2 u_1 - K_2 u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (K_1 + K_2) u_1 - K_2 u_2 = F_1$$

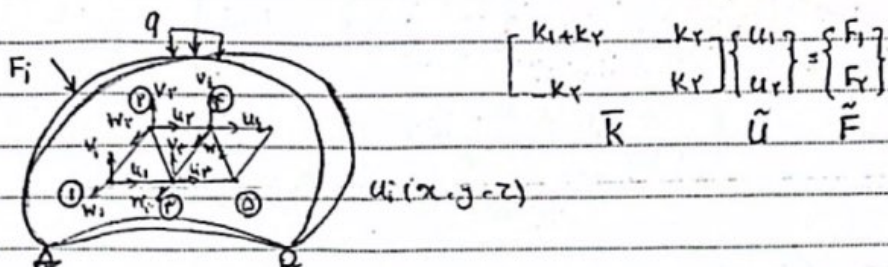
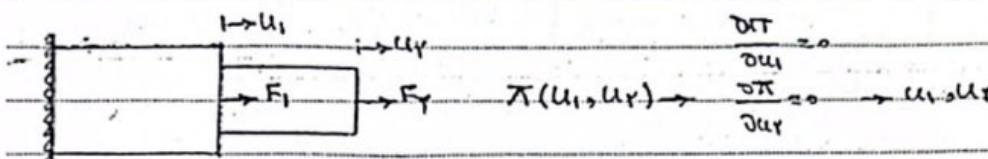
$$\frac{\partial \pi}{\partial u_2} = K_2 u_2 - K_2 u_1 - F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -K_2 u_1 + K_2 u_2 = F_2$$

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{F} = \tilde{K} \tilde{u}$$

$$\text{ماتريك } K: \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\pi = u + v$$

$$\Delta \pi = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial u_i} \Delta u_i = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial u_i} = 0 \rightarrow u_i \text{ بدست می آید}$$



$$\pi(u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3)$$

$$\Delta \pi = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial v_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial w_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_2} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial v_2} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial w_2} = 0 \\ \vdots \end{cases} \rightarrow K \bar{U} = \bar{F} \rightarrow \begin{cases} u_1, v_1, w_1 \\ u_2, v_2, w_2 \\ u_3, v_3, w_3 \end{cases} \text{ بدست می آید}$$

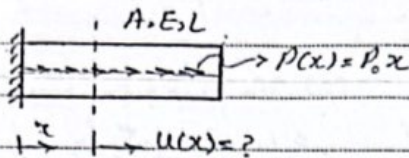
روش درایه رانندگی

$$u(x, y, z) \rightarrow u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x, y, z)$$

$$\Delta \pi = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial a_i} \Delta a_i = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial a_i} = 0$$

$$a_i \phi_i \rightarrow u(x, y, z) \text{ بدست می آید}$$

مثال: یک عضو شعاعی شکل زیر تحت بار گسترده $P(x) = P_0 x$ قرار دارد. با فرض اینکه انتهای چپ آن به اندازه $u=0$ از حرکت بازمانده است، رابطه بین بار و اصل انحراف را تعیین کنید.



از توزیع بار به بار متمرکز $P_0 L/2$ و $L/2$ تبدیل کنیم
پایه را به سمت راست انحراف دهیم:

روشن و دقیق که تکیه نقطه شده $\Rightarrow AE \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) + P(x) = 0$ برای حالت استاتیکی می شود

روش تقریبی رایج: $u(x) = a_0 + a_1 x$ حالت اول (درجه اول)

$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ حالت دوم (درجه دوم)

$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ حالت سوم (درجه سوم)

$$\left. \begin{aligned} u &= \int \frac{1}{r} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} dv = \int \frac{1}{r} AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \\ \pi &= u + v \\ v &= -W_{ext} = - \int_0^L P(x) u(x) dx \end{aligned} \right\}$$

حالت اول $\pi = u(x) = a_0 + a_1 x$

$$\left. \begin{aligned} & \text{شرایط مرزی در نقطه چپ: } x=0 \rightarrow u=0 \rightarrow a_0=0 \\ & \text{در نقطه راست: } x=L \rightarrow u=a_1 L \end{aligned} \right\} \pi = \int_0^L \frac{1}{2} AE (a_1)^2 dx - \int_0^L P_0 x (a_1 x) dx = 0$$

$$\int_0^L P_0 a_1 x^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AE a_1^2 L - P_0 a_1 \frac{L^2}{2} = 0 \quad P_0 a_1 \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L = P_0 a_1 \frac{L^3}{3}$$

معمولاً $\Delta \pi = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 0 \rightarrow AE a_1 L - P_0 \frac{L^2}{2} = 0 \quad a_1 = \frac{P_0 L^2}{2AE}$

$$\rightarrow u(x) = a_1 x = \frac{P_0 L^2}{2AE} x \quad \boxed{u(x) = \frac{P_0 L^2}{2AE} x}$$

فرض $u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

ب.ع $\begin{cases} x=0 \rightarrow a_0=0 \\ u=0 \end{cases}$

$$\pi = u + v = \int_0^L \frac{1}{Y} AE (a_1 + 2a_2 x)^2 dx - \int_0^L P_0 x (a_1 x + a_2 x^2) dx$$

یا $a_1^2 + 2a_1 a_2 x + a_2^2 x^2$ $P_0 (a_1 x^2 + a_2 x^3)$

$$= \frac{1}{Y} AE (a_1^2 L + 2a_1 a_2 L^2 + \frac{2}{3} a_2^2 L^3) - P_0 (a_1 \frac{L^3}{3} + a_2 \frac{L^4}{4})$$

$$\Delta \pi = 0 \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 0 \rightarrow \frac{1}{Y} AE (2a_1 L + 2a_2 L^2) - P_0 \frac{L^3}{3} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial a_2} = 0 \rightarrow \frac{1}{Y} AE (2a_1 L^2 + \frac{4}{3} a_2 L^3) - P_0 (\frac{L^4}{4}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{VPL^2}{YAE} & \left\{ \begin{aligned} AE a_1 L + AE a_2 L^2 &= P_0 \frac{L^3}{3} \\ AE a_1 L^2 + \frac{4}{3} AE a_2 L^3 &= P_0 \frac{L^4}{4} \end{aligned} \right.$$

$$a_2 = \frac{-PL}{FAE}$$

فرض $u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

فرض $u(x) = \frac{VPL^2}{YAE} x - \frac{P_0 L}{FAE} x^2$

$$\begin{cases} AE a_1 L + AE a_2 L^2 = P_0 \frac{L^3}{3} \\ AE a_1 L^2 + \frac{4}{3} AE a_2 L^3 = P_0 \frac{L^4}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} AE a_2 L^3 = -\frac{P_0 L^4}{12}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{-3P_0 L^4}{12AE L^3} \Rightarrow a_2 = \frac{-P_0 L}{4EA}$$

$$AE a_1 L + \frac{1}{3} AE \left(\frac{-P_0 L}{4EA} \right) L^2 = P_0 \frac{L^3}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{7P_0 L^2}{12EA}$$

F4PCO

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ u=0 \end{array} \right\} \rightarrow a_0 = 0$$

$$\pi = u + v = \int_0^L \frac{1}{Y} AE (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2)^2 dx - \int_0^L (p_0 x) (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx$$

$$(x^2) \text{ في } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \quad \left| \int_0^L p_0 (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx \right.$$

$$\int_0^L \frac{1}{Y} AE (a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 6a_1 a_3 x^2 + 4a_2^2 x^2 + 6a_2 a_3 x^3 + 3a_3^2 x^4) dx - \int_0^L (p_0 x) (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx$$

$$a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 6a_1 a_3 x^2 + 4a_2^2 x^2 + 6a_2 a_3 x^3 + 3a_3^2 x^4$$

$$\int_0^L \frac{1}{Y} AE (a_1^2 + 4a_1 a_2 x + 6a_1 a_3 x^2 + 4a_2^2 x^2 + 6a_2 a_3 x^3 + 3a_3^2 x^4) dx - \int_0^L p_0 (a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4) dx$$

$$= \frac{1}{Y} AE \left(a_1^2 x + 4a_1 a_2 \frac{x^2}{2} + 6a_1 a_3 \frac{x^3}{3} + 4a_2^2 \frac{x^3}{3} + 6a_2 a_3 \frac{x^4}{4} + 3a_3^2 \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^L - p_0 \left(a_1 \frac{x^3}{3} + a_2 \frac{x^4}{4} + a_3 \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^L$$

$$= \frac{1}{Y} AE \left(a_1^2 L + \frac{2}{Y} a_1 a_2 L^2 + 2a_1 a_3 L^3 + \frac{4}{3} a_2^2 L^3 + \frac{3}{2} a_2 a_3 L^4 + \frac{3}{5} a_3^2 L^5 \right) - p_0 \left(\frac{1}{3} a_1 L^3 + \frac{1}{4} a_2 L^4 + \frac{1}{5} a_3 L^5 \right)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{Y} AE (2a_1 L + 2a_2 L^2 + 2a_3 L^3) - p_0 \left(\frac{1}{Y} L^3 \right)$$

$$\Delta \pi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{Y} AE \left(\frac{4}{Y} a_1 L^2 + 2a_2 L^3 + 2a_3 L^4 \right) - p_0 \left(\frac{1}{Y} L^4 \right)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{Y} AE \left(\frac{6}{5} a_1 L^3 + 2a_2 L^4 + 2a_3 L^5 \right) - p_0 \left(\frac{1}{5} L^5 \right)$$

$$a_1 = \frac{p_0 L^3}{YAE} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{p_0}{4YAE}$$

PAPCO

$$U(x) = \frac{P_0 L^2}{2AE} x^2 + \frac{P_0}{4AE} x^3$$

$$AE \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) + p(x) = 0 \quad \text{نموذج حل$$

$$AE \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) = -p(x) \rightarrow AE \left(\frac{du}{dx} \right) = - \int P_0 x dx = -\frac{P_0}{2} x^2 + C_1 \quad \text{انتگرال اول}$$

$$AE u(x) = \int -\frac{P_0}{2} x^2 + C_1 dx = -\frac{P_0}{6} x^3 + C_1 x + C_2 \quad \text{انتگرال دوم}$$

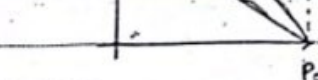
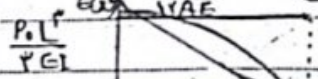
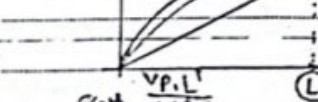
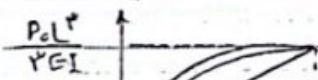
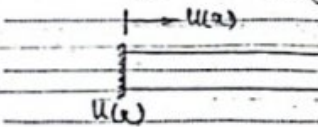
$$B.C. \begin{cases} x=0 \\ u=0 \end{cases} \rightarrow C_2=0 \rightarrow u(x) = \frac{1}{AE} \left(-\frac{P_0 x^3}{6} \right) + \frac{C_1 x}{AE} + \frac{C_2}{AE}$$

$$u(x) = \frac{1}{AE} \left(-\frac{P_0 x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right)$$

$$\begin{cases} x=L \\ G=0 \end{cases} \rightarrow G = E \epsilon = E \frac{du}{dx} \bigg|_{x=L} = 0$$

$$-\frac{P_0}{2} L^2 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = \frac{P_0 L^2}{2}$$

$$u(x) = -\frac{P_0 x^3}{6AE} + \frac{P_0 L^2 x}{2AE} \quad \text{پس جواب بدو دقیق}$$



$$u(x) = \frac{P_0 L^2}{2AE} x - \frac{P_0 x^3}{6AE}$$

$$u(x) = \frac{VP_0 L^2}{12AE} x - \frac{P_0 L^2}{4AE} x^2$$

$$G = E \left[\frac{VP_0 L}{12AE} - \frac{P_0 L^2}{2AE} x \right]$$

فرض کنید افرا محمد در سازه یک پیرامون
در ارتعاشات مدیانه و مدیانه آن کرنش و جابجایی صورت گیرد.

$$u(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i k_i(x, y, z)$$

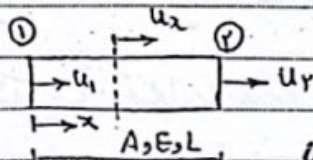
از روش رابلی و ریتز:

به علاوه داریم: α_i از u_i است و u_i (مثلاً جابجایی گره در عضو)

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^N u_i N_i(x, y, z)$$

توانج و پیر توانج شکل

یک (مثلاً) محوری در نظر بگیریم:



$$u(x) \approx a_0 + a_1 x$$

روش رابلی و ریتز مرتبه اول

$$u(x=0) = u_1 \quad a_0 + 0 = u_1 \rightarrow a_0 = u_1$$

$$u(x=L) = u_2 \quad a_0 + a_1 L = u_2 \rightarrow a_1 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$\rightarrow u(x) = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) x = u_1 + \frac{u_2}{L} x - \frac{u_1}{L} x = \left(1 - \frac{x}{L} \right) u_1 + \left(\frac{x}{L} \right) u_2$$

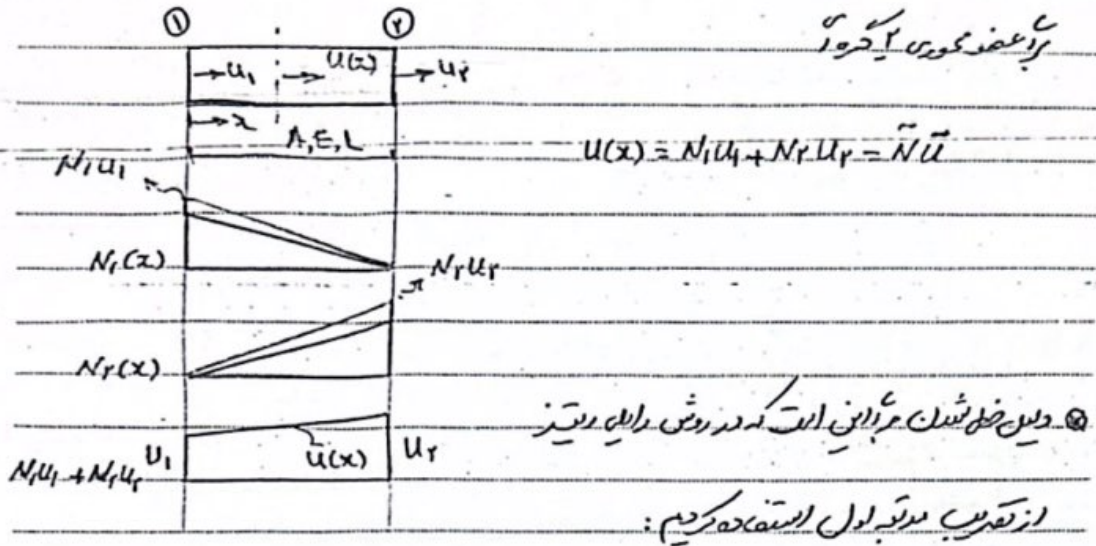
$$\rightarrow u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(x) u_i = \langle N_1(x) \ N_2(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}$$

$$\text{میدان کرنش} \quad \epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2$$

$$= \left\langle \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \langle B_1 \ B_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

$$\text{باز عضو محوری آفرود} \quad \mathbf{B} = \left\langle \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle$$

$$\text{توانج شکل} \quad \mathbf{N}(x) = \left\langle 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\rangle \quad \mathbf{B}(x) = \left\langle -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle$$



$$u(x, z) = \sum_{i=1}^N N_i(x, z) u_i^e$$

(رابطه ای که همان صفت صفت بود)

$$E(x, z) = \sum_{i=1}^N B_i(x, z) u_i^e$$

معمولاً در این روش از دو دسته از این رابطه استفاده می‌کنیم:

1. رابطه ای که در آن u و E را به صورت یک تابع از x و z می‌دانیم: $u(x, z) = N u$
 2. رابطه ای که در آن u و E را به صورت یک تابع از x و z می‌دانیم: $E(x, z) = B u$

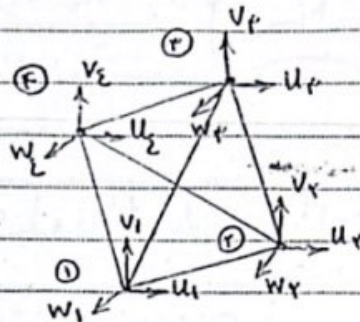
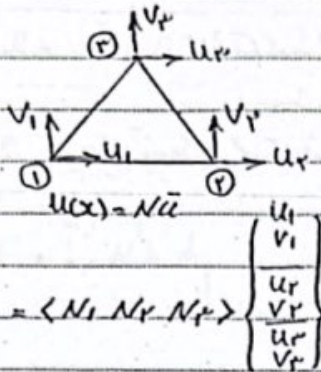
در این روش از دو دسته از این رابطه استفاده می‌کنیم:

1. رابطه ای که در آن u و E را به صورت یک تابع از x و z می‌دانیم: $u(x, z) = N u$
 2. رابطه ای که در آن u و E را به صورت یک تابع از x و z می‌دانیم: $E(x, z) = B u$

$u(x) = N u$
 $u(x) = N u$

$u(x) = N u$
 $u(x) = N u$

$u(x) = N u$
 $u(x) = N u$

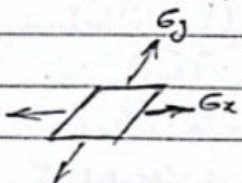


ارتباط بین تنش و کرنش در اجسام محصور بیست:

در فضای یک بعدی: $\sigma_x = E \epsilon_x$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = [D]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{3 \times 1}$$

سازگار D:



$$\sigma_z = 0 \quad \epsilon_z \neq 0$$

حالت تنش صفحه:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{vmatrix}$$

حالت کرنش صفحه:

$$\epsilon_z = 0 \quad \sigma_z \neq 0$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{vmatrix}$$

معادله کرنش صفحه به شکل دیگر:

$$\nu^* = \frac{\nu}{1-\nu}$$

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \quad D = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} \begin{vmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^*}{2} \end{vmatrix}$$



به عنوان مثال اگر یک عضو را در نظر بگیریم:

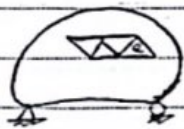
از اصل انرژی پتانسیل می‌توانیم بنویسیم:
 $F = k u$
 کت بقیه

$$\pi = U + V = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_{ij} dv - \left\{ F_i u_i + \int_S q_i u_i ds + \int_V b_i u_i dv \right\}$$

$$\Delta \pi = 0 \rightarrow \int_V \epsilon_{ij} \Delta E_{ij} dv - F_i \Delta u_i - \int_S q_i \Delta u_i ds - \int_V b_i \Delta u_i dv = 0$$

از اصل انرژی پتانسیل می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2} \epsilon_x E_x = \frac{1}{2} E \epsilon_x^2 = \frac{1}{2} E \epsilon_x \Delta \epsilon_x = \epsilon_x \Delta \epsilon_x$$



انرژی پتانسیل می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta \pi = 0 \rightarrow \sum_{e=1}^N \left(\int_V \epsilon_{ij}^e \Delta E_{ij}^e dv \right) - \sum_{e=1}^N (F_i^e \Delta u_i^e) - \sum_{e=1}^N \left(\int_S q_i^e \Delta u_i^e ds \right) - \sum_{e=1}^N \left(\int_V b_i^e \Delta u_i^e dv \right) = 0$$

$$(\Delta \epsilon)^T E = \Delta u^T F \quad \Delta u^T q \quad \Delta u^T b$$

$$(B \Delta u)^T = \Delta u^T B^T \quad \Delta u^T = (N \Delta u^T) = \Delta u^T N^T$$

$$E = D E \rightarrow D B u$$

$$\sum_{e=1}^N \left(\int_V \Delta u^T B^T D B u dv \right) - \sum_{e=1}^N (\Delta u^T F) - \sum_{e=1}^N \left(\int_S \Delta u^T N^T q ds \right) - \sum_{e=1}^N \left(\int_V \Delta u^T N^T b dv \right) = 0$$

از Δu^T می‌توانیم بنویسیم:

$$\sum \Delta u^T (\quad) - \sum \Delta u^T (\quad) - \sum \Delta u^T (\quad) - \sum \Delta u^T (\quad) = 0$$

$$\Delta u^T (\quad) = 0$$

PAPCO

$$K = \int_V B^T D B dV$$

$$\Rightarrow \Delta \pi = 0 \quad \frac{\sum K^e \bar{u}^e - F_c^e - F_q^e - F_b^e}{K \quad u \quad F_c \quad F_q \quad F_b} = 0$$

$$F_q = \int_S N^T q dS$$

$$F_b = \int_V N^T b dV$$

$$K \bar{u} = F_c + F_q + F_b \rightarrow K \bar{u} = F$$

یعنی

K ← ماتریس انجیل شده سیستم

F_q ← نیروهای توزیع شده از فشار و نیروهای متمرکز سیستم

u ← جابجایی گره‌ها سیستم

F_b ← نیروهای ثابت از فشار و نیروهای متمرکز

F_c ← نیروهای متمرکز

$$K^e = \int_V B^T D B \, dv \quad , \quad F_q^e = \int_S N^T q \, ds$$

$$F_c = F_c + F_q + F_b \quad | \quad F_b = \int_v N^T b \, dv$$

از نیت صبر گروه
از نیت شکر گروه
از نیت گسترده گروه

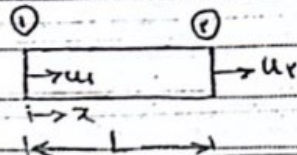
$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

$$\begin{Bmatrix} G_x \\ G_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

تعريف:
$$\begin{cases} u(x, y, z) : H(x, y, z) \cdot \bar{u} \\ E(x, y, z) : B(x, y, z) \cdot \bar{u} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = N \cdot \bar{u} \\ E = B \cdot \bar{u} \end{cases}$$

البيان حاشي على يد:

الحال نحوین دو گز ایا :



$$u(x) \approx a_0 + a_1 x : \text{روش رانج-کوتن}$$

$$\begin{cases} u(x=0) = u_l \rightarrow a_0 + 0 = u_l \rightarrow a_0 = u_l \\ u(x=L) = u_r \rightarrow a_0 + a_1 L = u_r \rightarrow a_1 = \frac{u_r - u_l}{L} \end{cases}$$

$$u(x) = u_l + \frac{u_r - u_l}{L} x = \left\langle 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} u_l \\ u_r \end{Bmatrix} = \tilde{N} \cdot \tilde{u}$$

$$E_x = \frac{d\psi}{dz} = \left\langle \frac{-1}{L} \mid \frac{1}{L} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = B \cdot \bar{u}$$

$$K^e = \int_V B^T D B dv = \int_V \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix} E \begin{Bmatrix} -1/L & 1/L \end{Bmatrix} dv \quad \text{دما در تمام طول عضو E یکسان است}$$

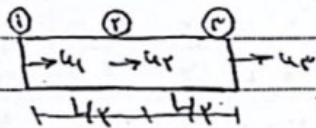
$$= \int_0^L AE \begin{bmatrix} 1/L & -1/L \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} AE/L & -AE/L \\ -AE/L & AE/L \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

دما در تمام طول عضو E یکسان است $P(x) = P_0$ / اگر $P(x)$ متغیر باشد

$$\textcircled{1} \quad K^e = \int_V N^T q ds = \int_0^L \begin{bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{bmatrix} P_0 dx$$

$$= P_0 \left\{ \frac{x - \frac{x^2}{2L}}{\frac{x^2}{2L}} \right\} \bigg|_0^L = \begin{Bmatrix} \frac{P_0 L}{2} \\ \frac{P_0 L}{2} \end{Bmatrix}$$

چون دما در تمام طول عضو یکسان است
نیست این کار را
انگشت اول می کشیم



المان بصورت سه گانه:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\begin{cases} u(x=0) = u_1 & a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = u_1 \\ u(x=L/2) = u_2 & a_0 + a_1 \frac{L}{2} + a_2 \frac{L^2}{4} = u_2 \\ u(x=L) = u_3 & a_0 + a_1 L + a_2 L^2 = u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L/2 & L^2/4 \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$C \bar{a} = \bar{u} \Rightarrow \bar{a} = C^{-1} \bar{u}$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = P(x) \cdot \bar{a} = P(x) C^{-1} \bar{u}$$

$N(x)$

$$u(x) = P(x) C^{-1} \bar{u} \Rightarrow u(x) = N(x) \bar{u}, \quad N(x) = P(x) C^{-1}$$

P4PCO

$$N(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4/L & L^2/L^3 \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1/L & 4/L & -1/L \\ 1/L & -4/L & 1/L \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$N(x) = \left\langle 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \quad \frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \right\rangle^*$$

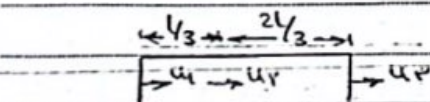
$$B(x) = \frac{dN(x)}{dx} = \left\langle -\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2} \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \quad \frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2} \right\rangle$$

$$K = \int_V B^T D B \, dV = \int_0^L AE \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/L + 4x/L^2 \\ 4/L - 8x/L^2 \\ 1/L + 4x/L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/L + 4x/L^2 & 4/L - 8x/L^2 & 1/L + 4x/L^2 \end{bmatrix} dx$$

$$K = \int_0^L AE \begin{bmatrix} B_1^T & B_1 B_2 & B_1 B_3 \\ B_2^T & B_2 B_1 & B_2 B_2 \\ B_3^T & B_3 B_1 & B_3 B_2 & B_3 B_3 \end{bmatrix} dx = \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

مصفوفة التصلب B في المصفوفة

نقطة التصلب: $x=0 \quad x=L/2 \quad x=L$

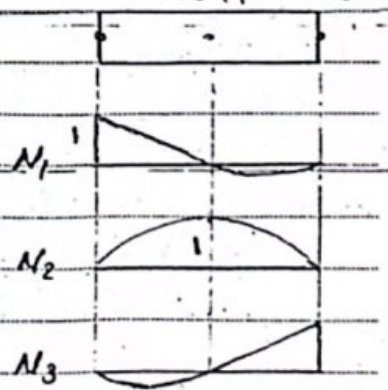


الشكل: $P(x) = P_0$

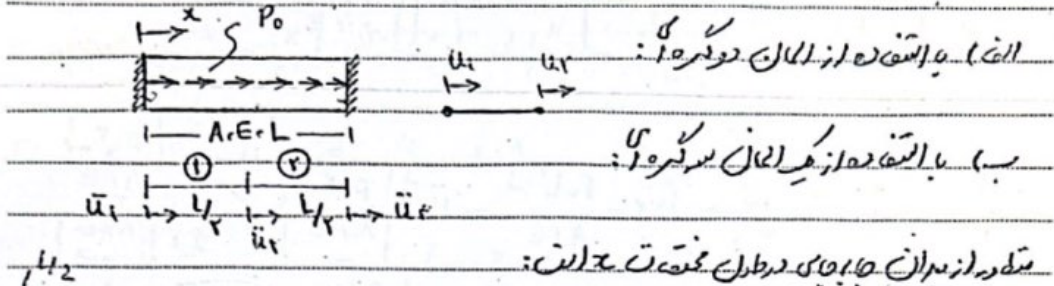
$$P_0 = \int_0^L N^T q \, dx$$

$$\int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \\ \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \\ \frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \end{bmatrix} P_0 \, dx = \begin{bmatrix} \frac{P_0 L}{4} \\ \frac{P_0 L}{4} \\ \frac{P_0 L}{4} \end{bmatrix}$$

PAPCO



مسئله: در صورت تعیین میدان جابجایی $u(x)$ و میدان تنش بر اعضاء محوری شکل زیر بر روش افزایش محروم:



$$K = \int_{L/2}^L B^T D B dx = \int_{L/2}^L A \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix} E \begin{Bmatrix} -1/L & 1/L \end{Bmatrix} dx$$

Elem DoF

K

$K^1 = K^2 = \frac{AE}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$F = K \bar{u}$

اعمال شرایط مرزی

$\bar{u} = K^{-1} F$

$(\bar{u} \rightarrow \bar{u}_i) D \rightarrow d_i$

Elem DoF	1	2	3
1	1	2	
2	2	3	

$F = K \bar{u}$

$F = F_c + F_q + F_b$

$F_c = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_2 \end{Bmatrix} + 0$

$F_q = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{2AE}{L} \\ 0 \end{Bmatrix}$

از این میدان تنش بر این بار جابجایی محقق است

$F_q + F_b = \int_0^L N^T q ds = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{Bmatrix} P_0 dx = \begin{Bmatrix} P_0 L/4 \\ P_0 L/4 \end{Bmatrix}$

قطعه یک جابجایی محقق است

$F_q \cdot \begin{Bmatrix} P_0 L/4 \\ P_0 L/4 + P_0 L/4 \\ P_0 L/4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 L/4 \\ P_0 L/2 \\ P_0 L/4 \end{Bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_0 L / 4 \\ P_0 L / 2 \\ P_0 L / 4 \end{bmatrix} = \frac{\gamma A E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}$$

درجه‌های حرکتی داریم

برای حل معادلات

$$\frac{P_0 L}{\gamma} = \frac{\gamma A E}{L} \cdot \gamma \cdot \bar{u}_2 \rightarrow \bar{u}_2 = \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \rightarrow \bar{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \end{Bmatrix}$$

این بردار را در بردارهای $\begin{Bmatrix} PL^2 \\ \gamma A E \\ PL^2 \\ \gamma A E \end{Bmatrix}$ ضرب می‌کنیم

$$u(x) = N(x) \cdot \bar{u}$$

برای هر یک از اعضای عضو

$$E(x) = B(x) \cdot \bar{u}$$

$$\text{عضو 1: } u'(x) = \langle 1 - x/L, x/L \rangle \begin{Bmatrix} \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \\ \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \end{Bmatrix} = \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \cdot \frac{\gamma x}{L}$$

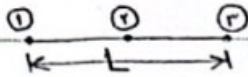
$$\text{عضو 2: } u'(x) = \langle 1 - 2x/L, x/L \rangle \begin{Bmatrix} \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \\ \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \end{Bmatrix} = \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \cdot \left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$

$$\text{عضو 3: } E'(x) = \langle -1/L, 1/L \rangle \begin{Bmatrix} \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \\ \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \end{Bmatrix} = \frac{P_0 L}{\gamma A E}$$

$$\text{عضو 4: } E'(x) = \langle -1/L, 1/L \rangle \begin{Bmatrix} \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \\ \frac{P_0 L^2}{\gamma A E} \end{Bmatrix} = \frac{-P_0 L}{\gamma A E}$$

$$\sigma(x) = E E'(x)$$

$$\sigma'(x) = E E'' = \frac{P_0 L}{\gamma A} \quad \sigma''(x) = E E''' = \frac{-P_0 L}{\gamma A}$$



عضو ۲ گره ۱

$$N(x) = \left\langle 1 - 3\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \quad 4\frac{x}{L} - 4\frac{x^2}{L^2} \quad -\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \right\rangle$$

$$B(x) = \left\langle -\frac{3}{L} + 4\frac{x}{L^2} \quad \frac{4}{L} - 8\frac{x}{L^2} \quad -\frac{1}{L} + 4\frac{x}{L^2} \right\rangle$$

$$K = \int_V B^T D B dV = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

چون یک عضو داریم: یک افودش الت
Elem. Dof یعنی خواهد، چون یک عضو است
کاستیم هم افودش الت

$$F_c = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_3 \end{bmatrix} \quad F_q = \int_S N^T q ds$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - 3x/L + 2x^2/L^2 \\ 4x/L - 4x^2/L^2 \\ -x/L + 2x^2/L^2 \end{bmatrix} p_0 dx = \frac{p_0 L}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_3 \end{bmatrix} + \frac{p_0 L}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{p_0 L}{6} \cdot 4 = \frac{2EA}{L} \cdot 16 \cdot \bar{u}_2$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 = \bar{u}_3 = \frac{p_0 L^2}{8EA} \Rightarrow \bar{u} = \begin{bmatrix} \frac{p_0 L^2}{8EA} \\ \bar{u}_2 \\ \frac{p_0 L^2}{8EA} \end{bmatrix}$$

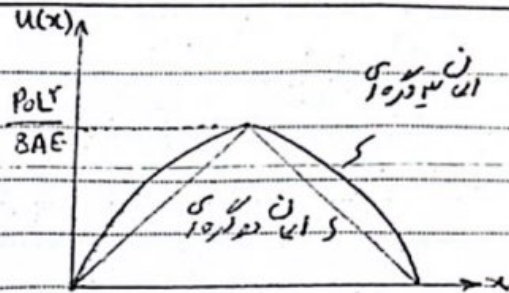
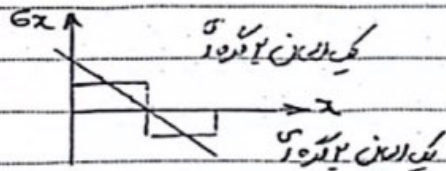
$$u(x) = N(x) \cdot \bar{u} = \left\langle N_1 \quad \frac{Fx}{L} - \frac{Fx^2}{L^2} \quad N_3 \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{p_0 L^2}{8EA} \\ \bar{u}_2 \\ \frac{p_0 L^2}{8EA} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{P_0 L^2}{8AE} \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right)$$

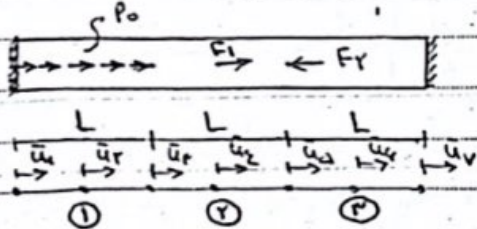
$$E(x) = B(x) \cdot \bar{u} = \frac{P_0 L^2}{8AE} \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \right)$$

$$f(x) = E E(x) = \frac{P_0 L^2}{8A} \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \right)$$

$$\frac{P_0 L^2}{8AE} \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right) \rightarrow \frac{4L/2}{L} - \frac{4L^2/2}{L^2} = 2 - 1 = 1$$

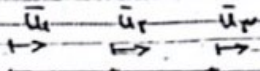


مطلوبت تعیین معادله نقطه برای عضو شکل زیر با استفاده از سه اصل استوار:



$$K^1 = K^2 = K^3 = \frac{2AE}{L}$$

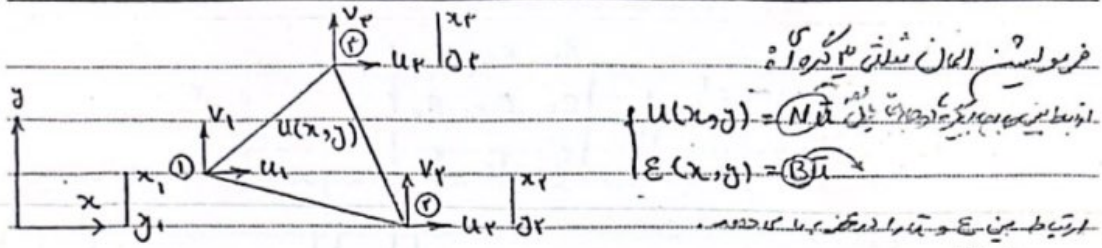
7	-8	1
-8	16	-8
1	-8	7



$$F^1 q = \int_0^L N^T q ds = \begin{Bmatrix} P_0 L / 4 \\ 2 P_0 L / 4 \\ P_0 L / 4 \end{Bmatrix}$$

از قبل می‌توانستیم بدست آوریم

Elem Of F	1	2	3
1	1	2	3
2	3	4	5
3	5	6	7



$$P(x, y) = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad v(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 y$$

$$\text{B.C.} \begin{cases} u(x_1, y_1) = u_1 \\ u(x_2, y_2) = u_2 \\ u(x_3, y_3) = u_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 = u_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 = u_2 \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 = u_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(x_1, y_1) = v_1 \\ v(x_2, y_2) = v_2 \\ v(x_3, y_3) = v_3 \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 + b_1 x_1 + b_2 y_1 = v_1 \\ b_0 + b_1 x_2 + b_2 y_2 = v_2 \\ b_0 + b_1 x_3 + b_2 y_3 = v_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ca = u \\ Cb = v \end{cases} \quad \begin{cases} a = C^{-1} \bar{u} \\ b = C^{-1} \bar{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$u(x, y) = N \bar{u}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_r & y_r \\ 1 & x_r & y_r \end{vmatrix} \rightarrow \bar{C} = \frac{1}{|C|} \begin{vmatrix} d_1 & d_r & d_r \\ B_1 & B_r & B_r \\ \gamma_1 & \gamma_r & \gamma_r \end{vmatrix} \quad C^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_r & x_r \\ y_1 & y_r & y_r \end{vmatrix}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} x_r & x_r \\ y_r & y_r \end{vmatrix} = x_r y_r - y_r x_r \quad B_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_r & y_r \end{vmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_r & x_r \end{vmatrix}$$

$$d_r = \begin{vmatrix} x_1 & x_r \\ y_1 & y_r \end{vmatrix} = x_1 y_r - x_r y_1 \quad B_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_r \end{vmatrix} \quad \gamma_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_r \end{vmatrix}$$

$$d_{rr} = \begin{vmatrix} x_1 & x_r \\ y_1 & y_r \end{vmatrix} = x_1 y_r - x_r y_1 \quad B_{rr} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_r \end{vmatrix} \quad \gamma_{rr} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_r \end{vmatrix}$$

$$\det(C) = |C| = 1(x_r y_r - y_r x_r) - x_1(y_r - y_r) + y_1(x_r - x_r) = \gamma_A$$

$$\bar{C}^{-1} = \frac{1}{\gamma_A} \begin{vmatrix} d_1 & d_r & d_r \\ B_1 & B_r & B_r \\ \gamma_1 & \gamma_r & \gamma_r \end{vmatrix} = \frac{1}{\gamma_A} \begin{vmatrix} x_r y_r - x_r y_r & x_r y_1 - x_1 y_r & x_1 y_r - x_r y_1 \\ y_r - y_r & y_r - y_1 & y_1 - y_r \\ x_r - x_r & x_r - x_1 & x_r - x_1 \end{vmatrix}$$

$$H(x, y) = p(x, y) \cdot \bar{C}^{-1} = \langle 1 \ x \ y \rangle \frac{1}{\gamma_A} \begin{vmatrix} d_1 & d_r & d_r \\ B_1 & B_r & B_r \\ \gamma_1 & \gamma_r & \gamma_r \end{vmatrix}$$

$$H(x, y) = \langle N_1 \ N_r \ N_{rr} \rangle = \frac{1}{\gamma_A} \langle d_1 + B_1 x + \gamma_1 y \quad d_r + B_r x + \gamma_r y \quad d_{rr} + B_{rr} x + \gamma_{rr} y \rangle$$

$$\gamma_A = 1(x_r y_r - y_r x_r) - x_1(y_r - y_r) + y_1(x_r - x_r)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_r & \alpha_p \\ \beta_1 & \beta_r & \beta_p \\ \gamma_1 & \gamma_r & \gamma_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r \partial_r - x_r \partial_r & x_r \partial_1 - x_1 \partial_r & x_1 \partial_r - x_r \partial_1 \\ \partial_r - \partial_r & \partial_r - \partial_1 & \partial_1 - \partial_r \\ x_r - x_r & x_1 - x_r & x_r - x_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} E(x,y) \\ B \\ \bar{u} \end{matrix} \quad \begin{matrix} E(x,y) \\ E_y \\ \bar{v} \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix} \quad \begin{matrix} u(x,y) = N_1 u_1 + N_r u_r + N_p u_p \\ v(x,y) = N_1 v_1 + N_r v_r + N_p v_p \end{matrix}$$

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_r}{\partial x} u_r + \frac{\partial N_p}{\partial x} u_p$$

$$= \frac{1}{r_A} (B_1 u_1 + B_r u_r + B_p u_p)$$

$$E_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_r}{\partial y} v_r + \frac{\partial N_p}{\partial y} v_p$$

$$= \frac{1}{r_A} (Y_1 v_1 + Y_r v_r + Y_p v_p)$$

$$\partial_x \partial_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_r}{\partial y} u_r + \frac{\partial N_p}{\partial y} u_p \right)$$

$$+ \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_r}{\partial x} v_r + \frac{\partial N_p}{\partial x} v_p \right)$$

$$= \frac{1}{r_A} (Y_1 u_1 + Y_r u_r + Y_p u_p + B_1 v_1 + B_r v_r + B_p v_p)$$

$$\begin{matrix} E_x \\ E_y \\ \partial_x \partial_y \end{matrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_r}{\partial x} & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_r}{\partial y} & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial N_r}{\partial x} & \frac{\partial N_r}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial x} & \frac{\partial N_p}{\partial y} + \frac{\partial N_r}{\partial x} \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_r \\ v_r \\ u_p \\ v_p \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \\ E_{z1} \end{bmatrix} = \frac{1}{YA} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_r & 0 & B_p & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_r & 0 & \gamma_p \\ \gamma_1 & B_1 & \gamma_r & B_r & \gamma_p & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_r \\ v_r \\ u_p \\ v_p \end{bmatrix}$$

$E(3 \times 1) \quad B \quad 3 \times 6 \quad U(6 \times 1)$

* محاسبه ماتریس سختی:

$$K = \int_V B^T D B dV = B^T D B \left(\int_V dV \right) = B^T D B A t$$

تقسیم در ضلع

$$K = B^T D B A t = \frac{1}{YA} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_1 & B_1 \\ B_r & 0 & \gamma_r \\ 0 & \gamma_r & B_r \\ B_p & 0 & \gamma_p \\ 0 & \gamma_p & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_r & 0 & B_p & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_r & 0 & \gamma_p \\ \gamma_1 & B_1 & \gamma_r & B_r & \gamma_p & B_p \end{bmatrix} \frac{1}{YA} A t$$

$6 \times 6 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 6$

اگر در استخوان یک نیروی افقی این ۳ عدد را می نویسیم و جابجایی نیز می کنیم و می توانیم به صورت زیر ساده تر بنویسیم:

$$[K] = [K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{1r} & K_{1p} \\ K_{r1} & K_{rr} & K_{rp} \\ K_{p1} & K_{pr} & K_{pp} \end{bmatrix}$$

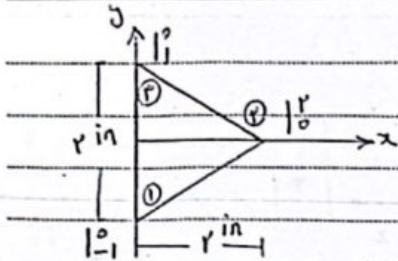
$6 \times 6 \quad 2 \times 2$

$$K_{ij} = \frac{Et}{4A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} B_i B_j + \frac{1-\nu}{2} \gamma_i \gamma_j & \nu B_i \gamma_j + \frac{1-\nu}{2} \gamma_i B_j \\ \nu \gamma_i B_j + \frac{1-\nu}{2} B_i \gamma_j & \gamma_i \gamma_j + \frac{1-\nu}{2} B_i B_j \end{bmatrix}$$

2×2

وقتی یک سطح را می بینیم و می خواهیم از آن عدد را بنویسیم و اگر یک سطح را می بینیم و می خواهیم از آن عدد را بنویسیم:

آنجا که یک سطح را می بینیم و می خواهیم از آن عدد را بنویسیم:



مثال: با فرض شرایط تنش صاف:

الف) ماتریس سختی المان شکل مقابل را بدست آورید.

$$I = 0.25 \quad t = 1 \text{ in} \quad E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

مدل الاستیک خطی

ب) با فرض جابجایی گره 5 به صورت زیر، مولفه تنش در این المان را بدست آورید:

$$U_1 = 0.00 \quad U_2 = 0.0025 \text{ in}$$

$$U_3 = 0.0012 \text{ in} \quad V_3 = 0.00 \quad K = B^T D B \cdot t \cdot A$$

$$U_4 = 0.00 \quad V_4 = 0.0025 \text{ in}$$

از طرفی:

$$B = \frac{1}{tA} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \end{bmatrix}$$

این روابط را در شکل زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} B_1 &= y_2 - y_1 = 0 - 1 = -1 & \delta_1 &= x_2 - x_1 = 0 - 2 = -2 & A &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \text{ in}^2 \\ B_2 &= y_3 - y_1 = 1 - (-1) = 2 & \delta_2 &= x_3 - x_1 = 0 - 0 = 0 \\ B_3 &= y_4 - y_1 = -1 - 0 = -1 & \delta_3 &= x_4 - x_1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

برای محاسبه A، مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر می‌گیریم و در این مثلث از این فرمول استفاده می‌کنیم و در نتیجه این روابط را بدست می‌آوریم:

$$B = \frac{1}{tA} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

گردد است که این صاف برد 0 مافوقی کرد:

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} = \frac{30 \times 10^6}{1 - 0.25^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 0.25 \end{bmatrix}$$

نادر من مکتب بروجرد نزد الموت می آید:

$$K = B^T D B + A = 4 \times 10^6$$

6.2

$$1.6 = 0.8$$

$$\varepsilon \rightarrow \beta \bar{u} \rightarrow \bar{b} = 0 \beta \bar{u}$$

$$E = \frac{30 \times 10^6}{1 - 0.25}$$

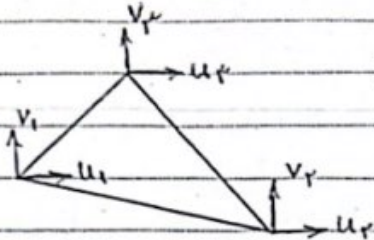
$$G = 4800$$

$$G_y = 4800 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = -15042 \text{ psi}$$

P4FCO.

با نیروهای مادل گره ای: (این قسمت مربوط به نیروهای مادل گره ای است)



$$k = k_c + k_q + k_b$$

$$k_b = \int_V N^T b \, dv \quad k_q = \int_S N^T q \, ds$$

برای مثال: نیروهای ناشی از وزن المان:
b در راستای y- اعمال می شود:

$t \cdot dA = t \cdot dx \cdot dy$

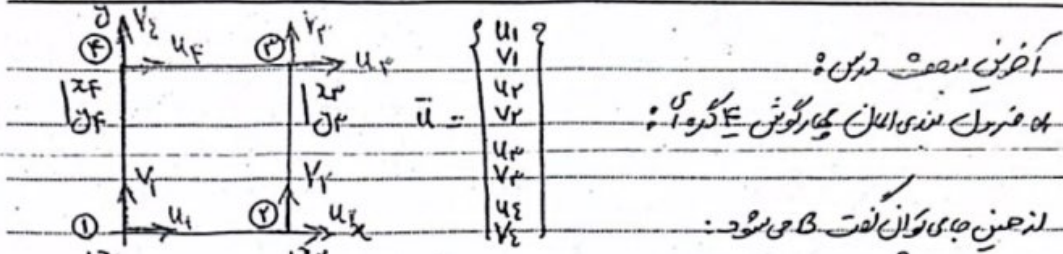
N_1	N_1	$\int \int \omega \, dx \, dy =$	$-\frac{\omega A t}{3}$
N_2	N_2		0
N_3	N_3		$-\frac{\omega A t}{3}$
N_4	N_4		0
N_5	N_5		$-\frac{\omega A t}{3}$

برای مثال:
نیروهای گره ای ناشی از بار سطحی:
 $q_y = q \sin \theta$
 $q_x = q \cos \theta$

گره ۱ را در نظر بگیرید:

N_1	N_1	$\int \int q_x \, dx \, dy =$	$q_x \frac{A}{2}$
N_2	N_2		$q_x \frac{A}{2}$
N_3	N_3		$q_x \frac{A}{2}$
N_4	N_4		$q_x \frac{A}{2}$

ماتریس گره ها منفی می شود
مخرداقتضای می دهند



$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$v(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

روش رانج-رانی

$$u(x_1, y_1) = u_1 \quad a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 x_1 y_1 = u_1$$

$$u(x_2, y_2) = u_2 \quad a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 x_2 y_2 = u_2$$

$$u(x_3, y_3) = u_3 \quad a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 x_3 y_3 = u_3$$

$$u(x_4, y_4) = u_4 \quad a_0 + a_1 x_4 + a_2 y_4 + a_3 x_4 y_4 = u_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot a = \bar{u}$$

$$\Rightarrow b = C^{-1} \bar{u}$$

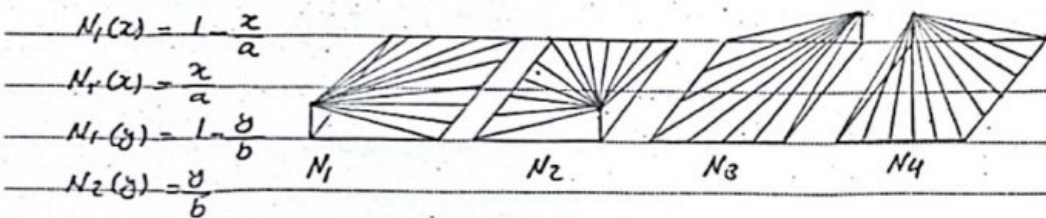
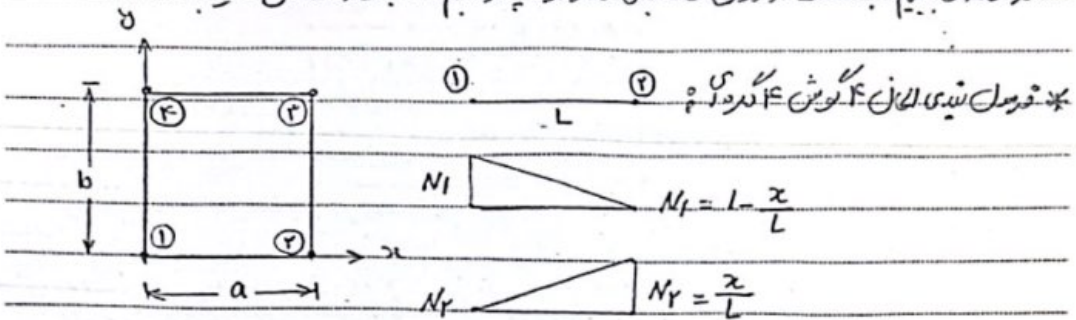
$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$u(x, y) = P(x, y) \cdot C^{-1} \bar{u}$$

$$v(x, y) = P(x, y) \cdot C^{-1} \bar{u}$$

از این جایی که این قسمت B می شود:

در ادامه می بینیم با استفاده از روش همساناتی، لاگرانژ چگونه می توان به یک بخش میانی:



$$N_i(x, y) = N_i(x) \cdot N_i(y)$$

$$N_1(x, y) = N_1(x) \cdot N_1(y) = (1 - x/a)(1 - y/b)$$

$$N_2(x, y) = N_2(x) \cdot N_2(y) = (x/a)(1 - y/b)$$

$$N_3(x, y) = N_2(x) \cdot N_2(y) = (x/a)(y/b)$$

$$N_4(x, y) = N_1(x) \cdot N_4(y) = (1 - x/a)(y/b)$$

$$N_1 = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}) = (\frac{a-x}{a}) \times (\frac{b-y}{b}) = (\frac{x-a}{a-0})(\frac{y-b}{b-0}) = (\frac{x-a}{0-a})(\frac{y-b}{0-b})$$

$$N_2 = (\frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}) = (\frac{x-0}{a-0})(\frac{y-b}{0-b})$$

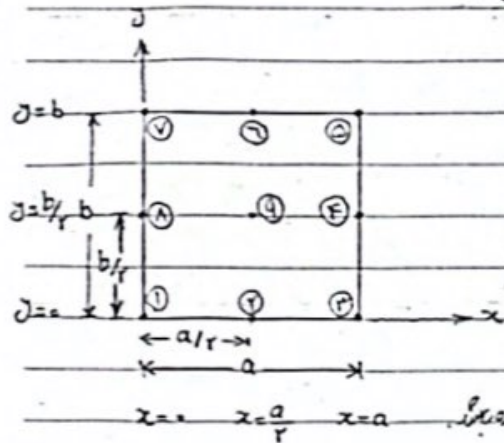
$$N_3 = (\frac{x}{a})(\frac{y}{b}) = (\frac{x-0}{a-0})(\frac{y-0}{b-0})$$

$$N_4 = (1 - \frac{x}{a})(\frac{y}{b}) = (\frac{x-a}{0-a})(\frac{y-0}{b-0})$$

$$N_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^m (x - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (x_i - x_j)}$$

$$N_i(x_j) = N_i(x) \cdot N_i(j)$$

$$N_i(j) = \frac{\prod_{j=1}^m (j - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (j_i - x_j)}$$



توابع شکل در این مجموعه گره ها:

حیث این داده می شود و به وقت گره آن

جای بی شود گره 2, 4, 6, 8, 9 جای بی شود:

در این شکل نشان داده در هر یک از این گره ها و این گره ها:

$$N_1(x) = N_8(x) = N_7(x) = \frac{(x - a/2)(x - a)}{(0 - a/2)(0 - a)}$$

$$N_2(x) = N_9(x) = N_6(x) = \frac{(x - 0)(x - a)}{(a/2 - 0)(a/2 - a)}$$

$$N_3(x) = N_4(x) = N_5(x) = \frac{(x - 0)(x - a/2)}{(a - 0)(a - a/2)}$$



$$N_1(y) = N_4(y) = N_6(y) = \frac{(y - b/2)(y - b)}{(0 - b/2)(0 - b)}$$

$$N_8(y) = N_9(y) = N_4(y) = \frac{(y - 0)(y - b)}{(b/2 - 0)(b/2 - b)}$$

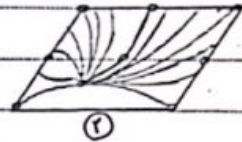
$$N_7(y) = N_6(y) = N_5(y) = \frac{(y - 0)(y - b/2)}{(b - 0)(b - b/2)}$$

$$N_i(x, y) = N_i(x) \cdot N_i(y)$$

$$N_r(x, y) = \frac{(x - a/r)(x - a)(y - b/r)(y - b)}{(0 - a/r)(0 - a)(0 - b/r)(0 - b)} = \frac{4}{a^r b^r} (x - \frac{a}{r})(x - a)(y - \frac{b}{r})(y - b)$$

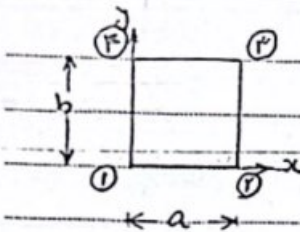
$$N_r(x, y) = \frac{(x - 0)(x - a)(y - b/r)(y - b)}{(a/r - 0)(a/r - a)(0 - b/r)(0 - b)} = \frac{-8}{a^r b^r} (x)(x - a)(y - \frac{b}{r})(y - b)$$

$$N_g(x, y) = \frac{(x - 0)(x - a)(y - 0)(y - b)}{(a/r - 0)(a/r - a)(b/r - 0)(b/r - b)} = \frac{16}{a^r b^r} (x)(y)(x - a)(y - b)$$



فردی، رقیبی، و... این شکل را

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 xy^2 + a_7 x^2 y + a_8 x^2 y^2$$



* انعام فریل ہنس لائن کا ٹوش کا دوا:

$$N_1, N_2, N_3, N_4$$

$$u(x, y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$$

$$v(x, y) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

نہ ہندا

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \\ 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = N \cdot \bar{u}$$

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = B \cdot \bar{u}$$

$N_1 = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})$	$\frac{\partial N_1}{\partial x}$	$\frac{\partial N_1}{\partial y}$
$N_2 = (\frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})$	$-\frac{1}{a}(1 - \frac{y}{b})$	$-\frac{1}{b}(1 - \frac{x}{a})$
$N_3 = (\frac{x}{a})(\frac{y}{b})$	$\frac{1}{a}(1 - \frac{y}{b})$	$-\frac{1}{b}(\frac{x}{a})$
$N_4 = (1 - \frac{x}{a})(\frac{y}{b})$	$\frac{1}{a}(\frac{y}{b})$	$\frac{1}{b}(\frac{x}{a})$
	$-\frac{1}{a}(\frac{y}{b})$	$\frac{1}{b}(1 - \frac{x}{a})$

P4PCO