

CHAPTER

4

# VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer  
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:  
J. Walt Oler  
Texas Tech University

تبادل اجسام صلب

- زمانی که یک جسم صلب در حالت تعادل است، نیروهای خارجی و گشتاورهای آن متعادل بوده و هیچ گونه حرکت انتقالی یا دورانی را به جسم تحمیل نخواهند کرد.
- شرایط لازم برای تعادل استاتیکی یک جسم به صورتی است که برآیند نیروها و گشتاورهای حاصل از نیروهای خارجی صفر باشد:

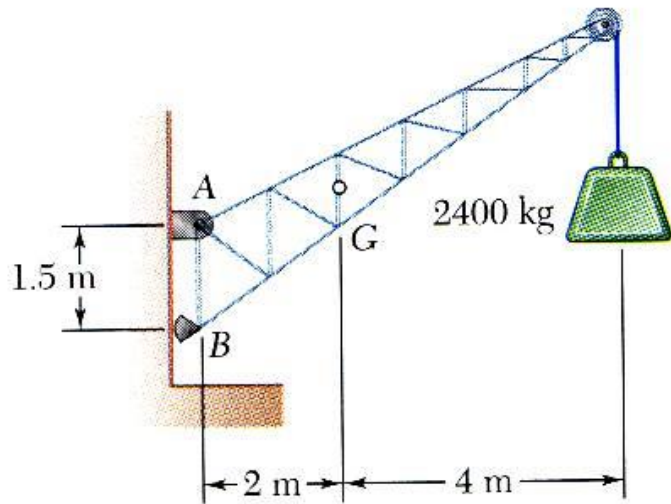
$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$$

- تجزیه نیروها و گشتاورها به مولفه‌های سازنده خود منجر به شش معادله عددی (اسکالر) میشود که شرایط تعادل هر جسم صلب را بیان میکند:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

# Vector Mechanics for Engineers: Statics

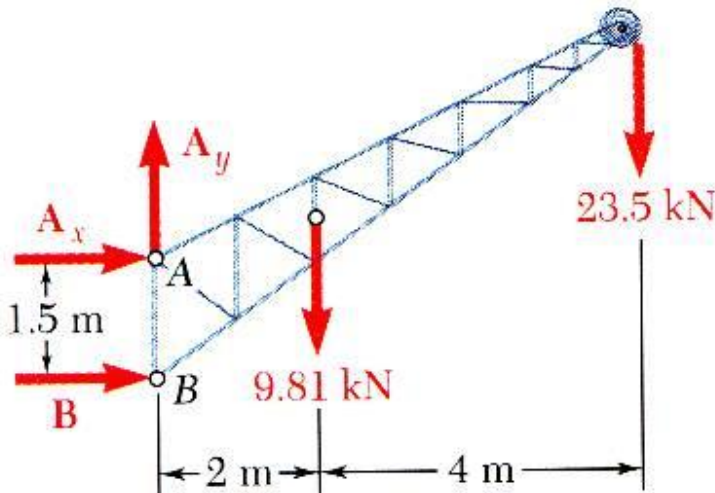
## دیاگرام جسم آزاد



اولین قدم در تحلیل تعادل استاتیکی یک جسم صلب تشخیص کلیه نیروهای خارجی است که بر جسم اثر میکند. این نیروها در نمودار جسم آزاد قابل نمایش است.

- جسم موردنظر جهت تحلیل می بایست از زمین و کلیه اجسام دیگر جدا شود.

- نقطه اعمال بار، اندازه و جهت نیروهای خارجی می بایست تعیین شود. لازم به ذکر است که وزن به عنوان یک نیروی خارجی می بایست در نظر گرفته شود.

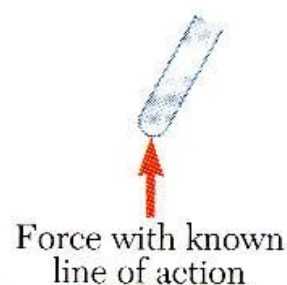
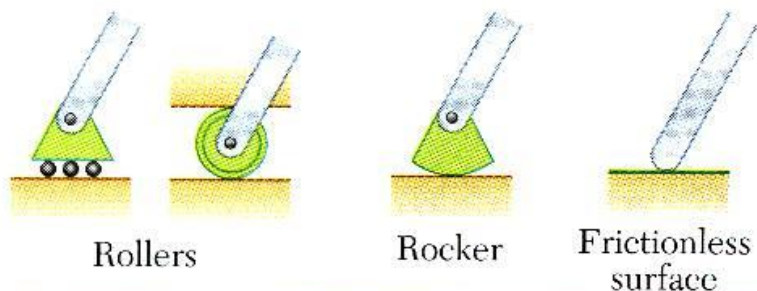


- در خصوص نیروهای مجهول، نقطه اعمال بار و جهت فرضی می بایست در نظر گرفته شود. نیروهای مجهول معمولاً عکس العمل های تکیه گاهی هستند که سایر اجسام مانند زمین در جهت حرکتهای احتمالی اجسام صلب وارد می کنند.

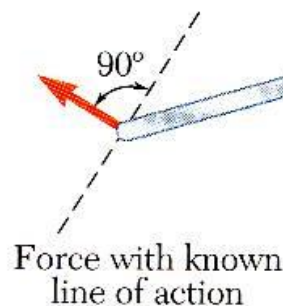
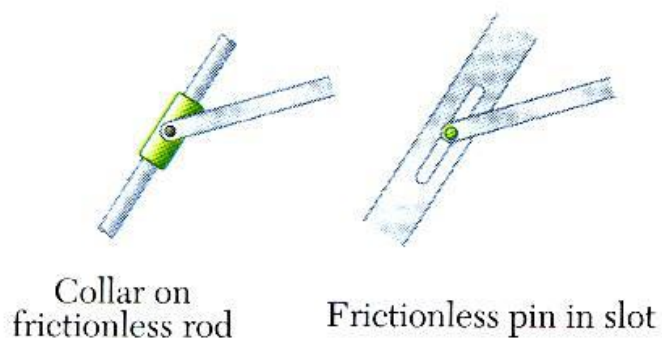
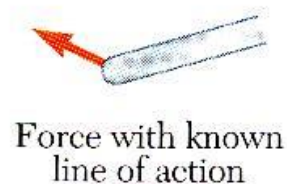
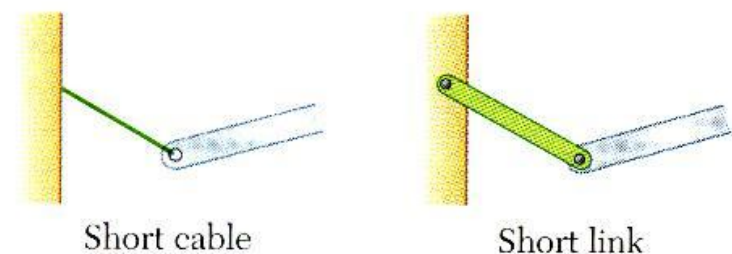
- دیاگرام جسم آزاد می بایست شامل اندازه های لازم نیز باشد تا محاسبه گشتاور نیروها و تجزیه نیروها مقدور باشد.

# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## عکس العمل‌های تکیه‌گاهی و اتصالات در سازه‌های دوبعدی



• عکس العمل‌های مربوط به نیروهای با خط تأثیر مشخص



# Vector Mechanics for Engineers: Statics

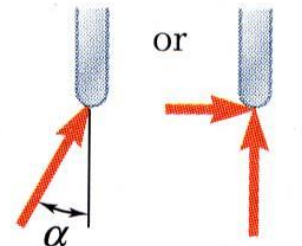
## عکس العمل‌های تکیه‌گاهی و اتصالات در سازه‌های دوبعدی



Frictionless pin  
or hinge

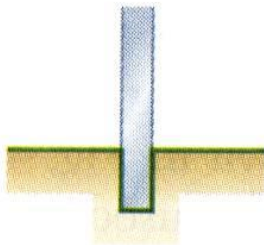


Rough surface

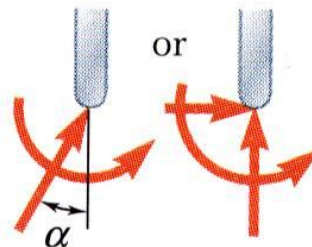


Force of unknown  
direction

- عکس‌العمل‌های مربوط به نیروهای با اندازه و جهت نامشخص



Fixed support



Force and couple

- عکس‌العمل‌های مرتبط با نیروهای با اندازه و جهت نامشخص و گشتاور با اندازه نامشخص

# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## عکس العمل‌های تکیه گاهی و اتصالات در سازه‌های دوبعدی

نمونه ای از تکیه گاه های غلطکی





# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## عکس العمل‌های تکیه گاهی و اتصالات در سازه‌های دوبعدی

نمونه ای از تکیه گاه های مفصلی



# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## عکس العمل‌های تکیه‌گاهی و اتصالات در سازه‌های دوبعدی

نمونه ای از تکیه گاه های گیردار





# Vector Mechanics for Engineers: Statics

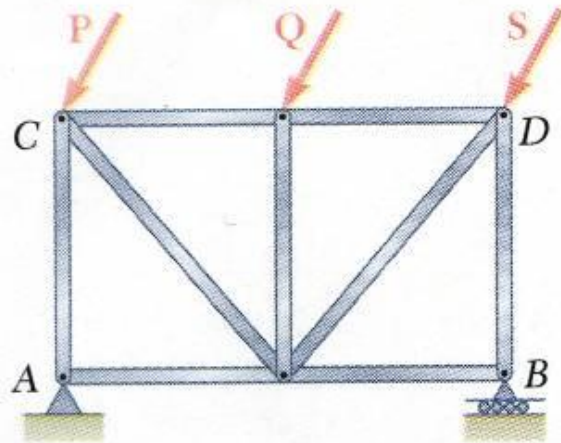
## عکس العمل‌های تکیه‌گاهی و اتصالات در سازه‌های دوبعدی

نمونه ای از تکیه گاه های ساده



# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## تعداد یک جسم صلب در مختصات دوبعدی



(a)

- برای کلیه نیروها و گشتاورهایی که به یک سازه دوبعدی اثر می‌کنند:

$$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_O$$

- معادلات تعادل به صورت زیر خواهند بود:

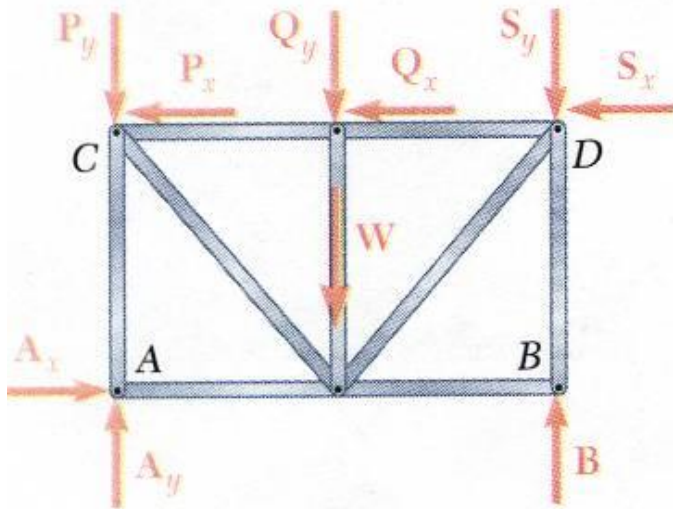
$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

که در آن A هر نقطه‌ای در صفحه سازه می‌تواند باشد.

- حل سه معادله بالا نمیتواند برای پیدا کردن بیش از سه مجهول استفاده شود.

- برای یک سازه دوبعدی نمیتوان بیش از سه معادله نوشت ولی میتوان معادلات را جایگزین یکدیگر کرد:

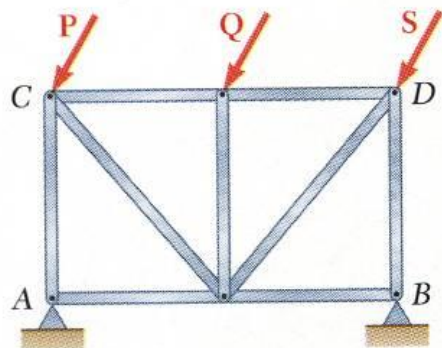
$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$$



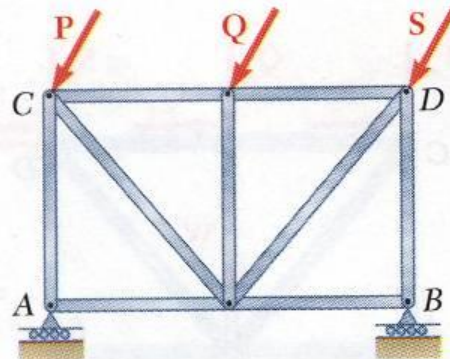
(b)

# Vector Mechanics for Engineers: Statics

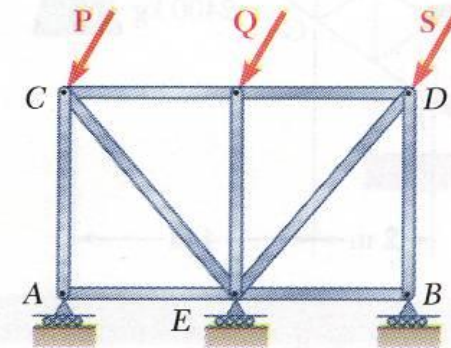
## عکس العمل‌های استاتیکی نامعین



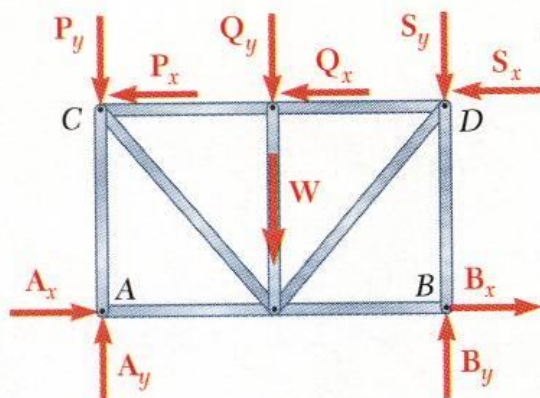
(a)



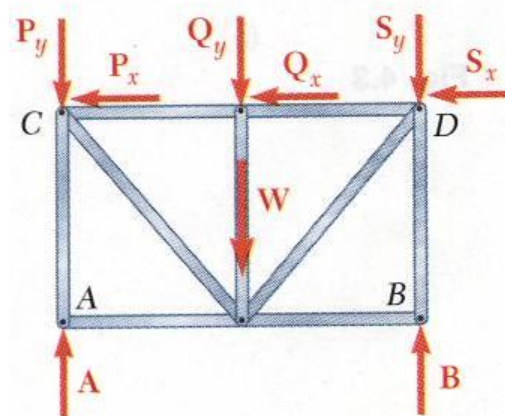
(a)



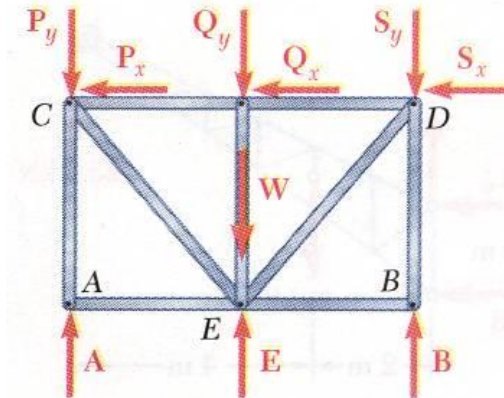
(a)



(b)



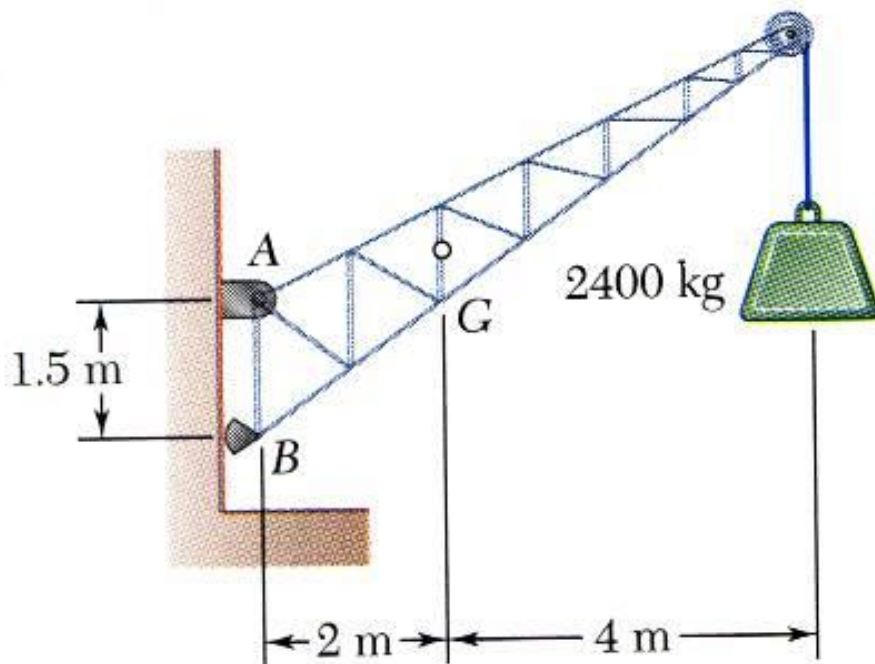
(b)



(b)

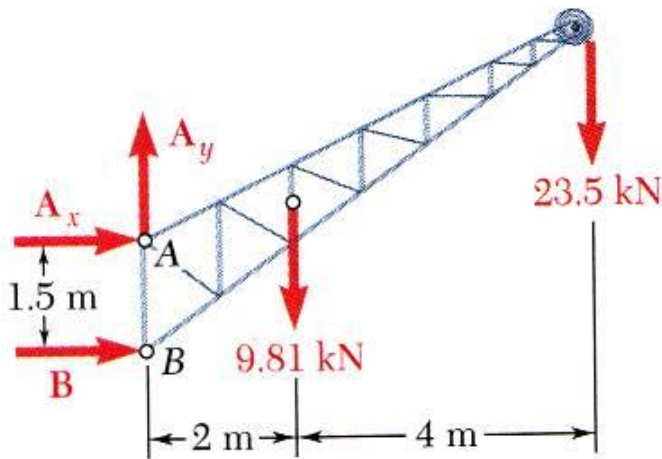
- مجهولات برابر معادلات اما با قید نامناسب
- مجهولات کمتر از معادلات، مقید ناقص
- مجهولات بیشتر از معادلات

یک جرثقیل ثابت جرمی معادل ۱۰۰۰ کیلوگرم دارد و به منظور بلند کردن یک وزنه ۲۴۰۰ کیلوگرمی مورد استفاده قرار گرفته است. مرکز جرم جرثقیل نقطه  $G$  است. مولفه‌های نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاهی در نقاط  $A$  و  $B$  را بیابید.



# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## مسئله نمونه ۴-۱



• رسم دیاگرام جسم آزاد

$$\sum M_A = 0: + B(1.5\text{m}) - 9.81\text{ kN}(2\text{m}) - 23.5\text{ kN}(6\text{m}) = 0$$

$$B = +107.1\text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: A_x + B = 0$$

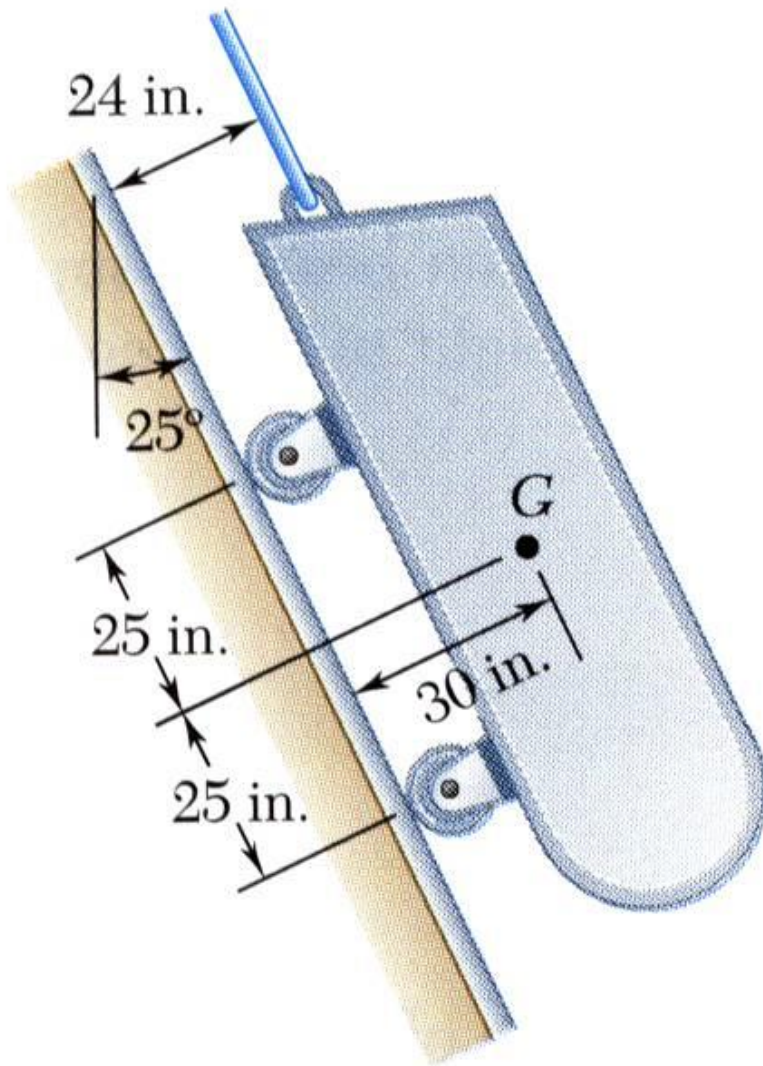
$$A_x = -107.1\text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: A_y - 9.81\text{ kN} - 23.5\text{ kN} = 0$$

$$A_y = +33.3\text{ kN}$$

• کنترل نتایج به دست آمده



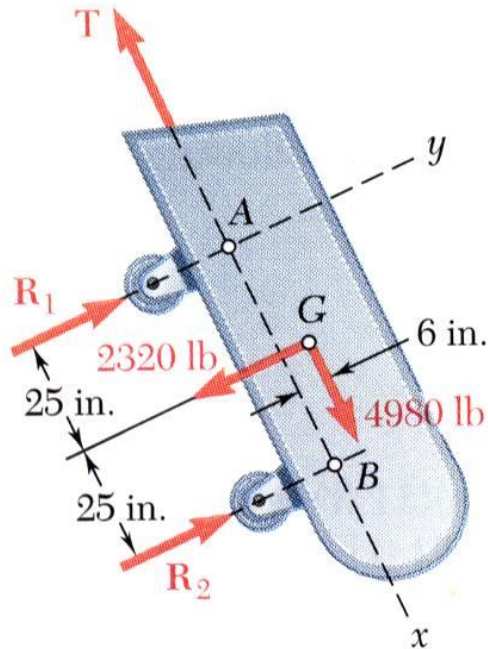


یک وسیله حمل بار در یک شیب ۶۵ درجه در حالت استراحت قرار گرفته است. مجموع وزن وسیله و بار حمل شده توسط آن ۵۵۰۰ پوند است که در نقطه  $G$  وارد میشود. این وسیله در جای خود توسط یک کابل نگهدارنده ثابت شده است.

نیروی کششی موجود در کابل و عکس‌العمل در هر یک از چرخ‌ها را تعیین کنید.

# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## مسئله نمونه ۴-۲



• محاسبه عکس‌العمل در چرخ‌ها

$$\sum M_A = 0: -(2320 \text{ lb})25 \text{ in.} - (4980 \text{ lb})6 \text{ in.} + R_2(50 \text{ in.}) = 0$$

$$R_2 = 1758 \text{ lb}$$

$$\sum M_B = 0: +(2320 \text{ lb})25 \text{ in.} - (4980 \text{ lb})6 \text{ in.} - R_1(50 \text{ in.}) = 0$$

$$R_1 = 562 \text{ lb}$$

• رسم دیاگرام جسم آزاد

$$W_x = +(5500 \text{ lb})\cos 25^\circ = +4980 \text{ lb}$$

$$W_y = -(5500 \text{ lb})\sin 25^\circ = -2320 \text{ lb}$$

• نیروی کشش کابل:

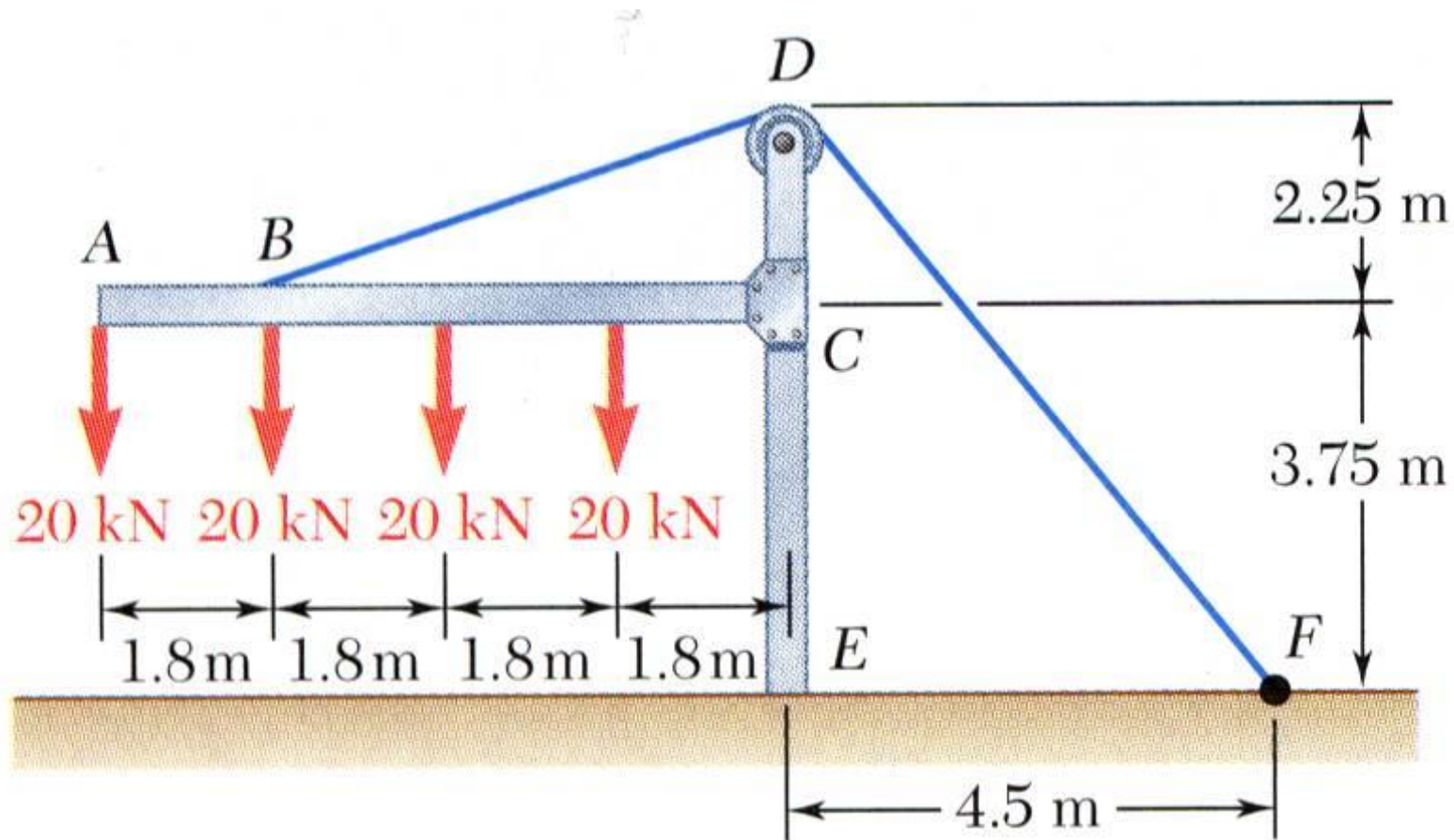
$$\sum F_x = 0: +4980 \text{ lb} - T = 0$$

$$T = +4980 \text{ lb}$$

# Vector Mechanics for Engineers: Statics

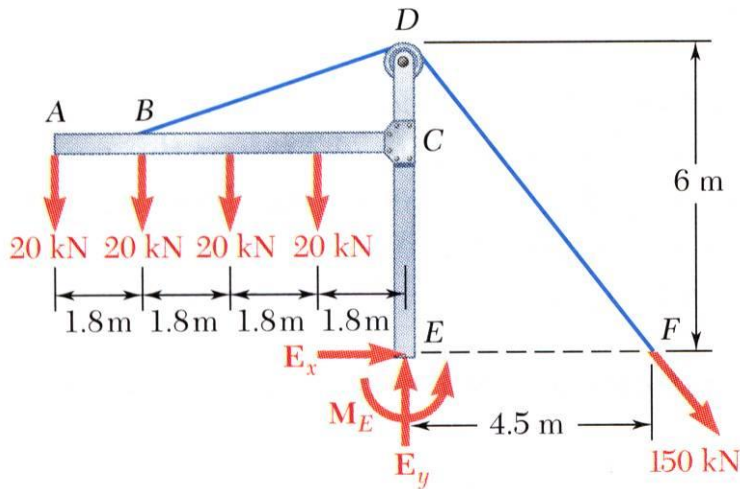
## مسئله نمونه ۳-۴

قاب نشان داده در شکل بخشی از سازه یک ساختمان کوچک است. کشش در کابل معادل ۱۵۰ نیوتن است. عکس‌العمل تکیه گاهی در انتهای E را بیابید.



# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## مسئله نمونه ۴-۳



$$\sum F_x = 0: E_x + \frac{4.5}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90.0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_y = +200 \text{ kN}$$

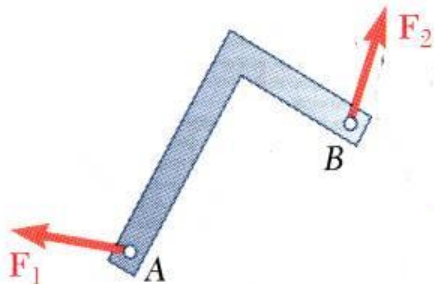
$$\sum M_E = 0: +20 \text{ kN}(7.2 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(5.4 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(3.6 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(1.8 \text{ m})$$

$$- \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN})4.5 \text{ m} + M_E = 0$$

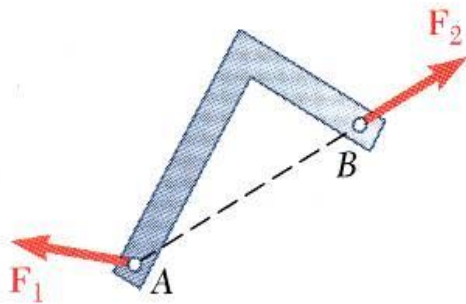
$$M_E = 180.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



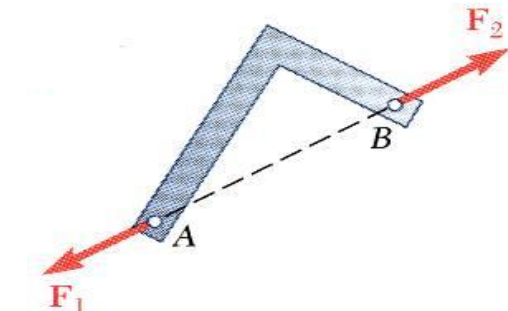
• صفحه روبرو را در نظر بگیرید:



• به منظور برقراری تعادل استاتیکی، مجموع گشتاور حول نقطه A می‌بایست صفر باشد. گشتاور نیروی  $F_2$  می‌بایست صفر باشد، بنابراین ایجاب میکند که خط تأثیر نیروی  $F_2$  از نقطه A عبور کند.

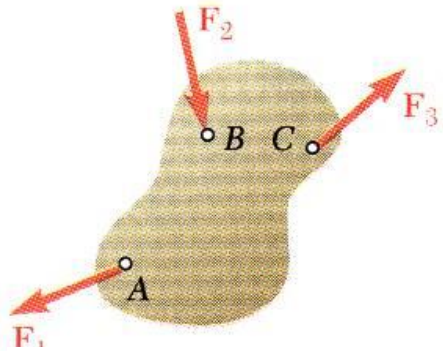


• به طور مشابه خط تأثیر  $F_1$  می‌بایست از نقطه B عبور کند تا مجموع گشتاور حول نقطه B برابر صفر باشد.



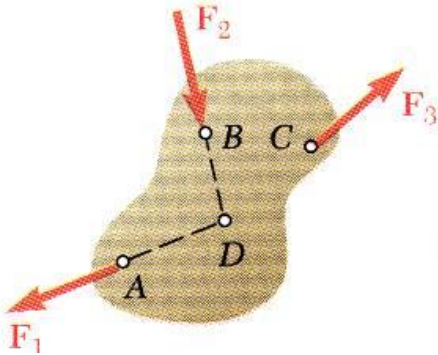
• لزوم اینکه مجموع نیروها در هر جهت می‌بایست صفر باشد ایجاب می‌کند که نیروهای  $F_1$  و  $F_2$  اندازه یکسان داشته و در خلاف جهت یکدیگر باشند.



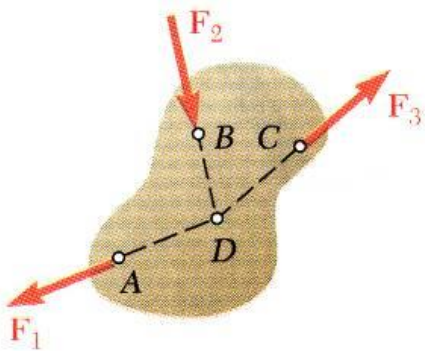


- جسم صلبی را در نظر بگیرید که سه نیرو در سه نقطه مختلف به آن اثر میکند.

- فرض کنید که خط تأثیر این نیروها با یکدیگر تلاقی کنند. در این صورت گشتاور نیروهای  $F_1$  و  $F_2$  حول نقطه تلاقی  $D$  صفر خواهد بود.



- با توجه به اینکه جسم صلب در حالت تعادل است، مجموع گشتاورهای  $F_1$ ،  $F_2$  و  $F_3$  حول هر محوری میبایست صفر باشد. بنابراین گشتاور  $F_3$  حول نقطه  $D$  میبایست صفر باشد و خط تأثیر این نیرو از نقطه  $D$  بگذرد.

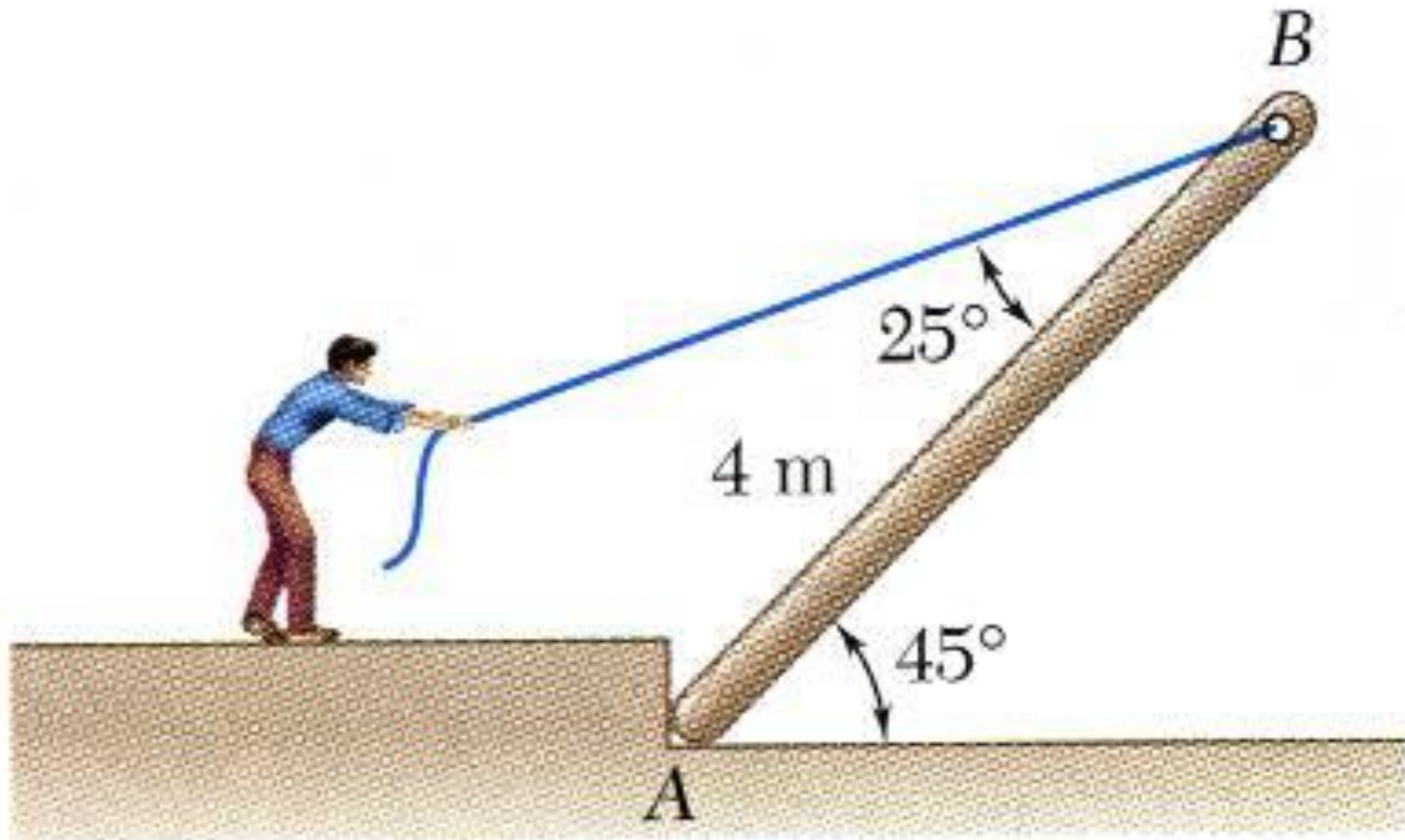


- خط تأثیر سه نیرو باید هم‌رس یا موازی باشد.

# Vector Mechanics for Engineers: Statics

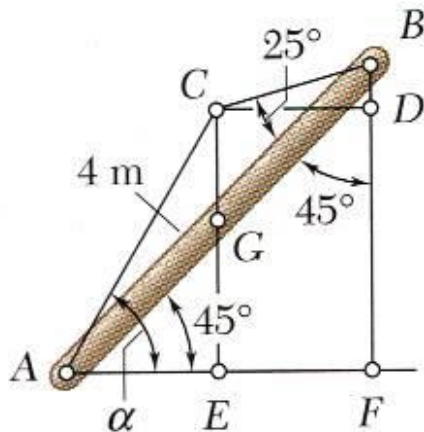
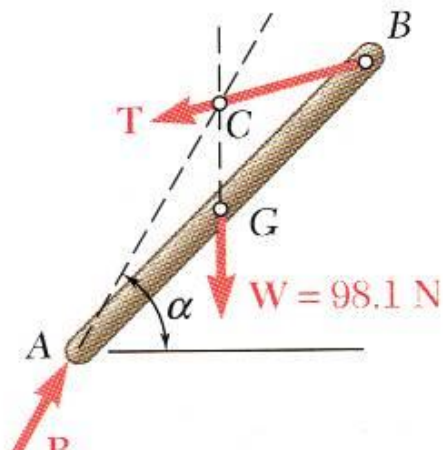
## مسئله نمونه ۴-۴

مردی میله ای به وزن ۱۰ کیلوگرم را با کشیدن یک کابل نگه داشته است. نیروی کششی در کابل و عکس‌العمل در نقطه A را بیابید.



# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## مسئله نمونه ۴-۴



$$AF = AB \cos 45 = (4 \text{ m}) \cos 45 = 2.828 \text{ m}$$

$$CD = AE = \frac{1}{2} AF = 1.414 \text{ m}$$

$$BD = CD \cot(45 + 20) = (1.414 \text{ m}) \tan 20 = 0.515 \text{ m}$$

$$CE = BF - BD = (2.828 - 0.515) \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

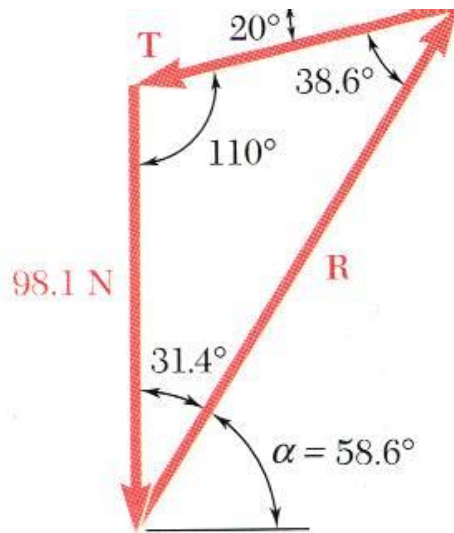
$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313}{1.414} = 1.636$$

$$\alpha = 58.6^\circ$$



# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## مسئله نمونه ۴-۴



- Determine the magnitude of the reaction force  $R$ .

$$\frac{T}{\sin 31.4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98.1 \text{ N}}{\sin 38.6^\circ}$$

$$T = 81.9 \text{ N}$$

$$R = 147.8 \text{ N}$$



## تعدادل جسم صلب در دستگاه مختصات سه بعدی

- به منظور برقراری تعدادل در دستگاه مختصات سه بعدی، شش معادله عددی زیر می‌بایست همزمان برقرار باشد.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum M_y &= 0 & \sum M_z &= 0\end{aligned}$$

- این معادلات می‌توانند برای به دست آوردن شش مجهول مورد استفاده قرار گیرند.

- معادلات عددی با استفاده از شکل برداری تعدادل نیروها و گشتاورها قابل دستیابی است:

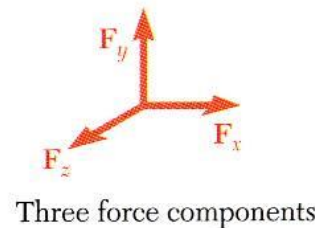
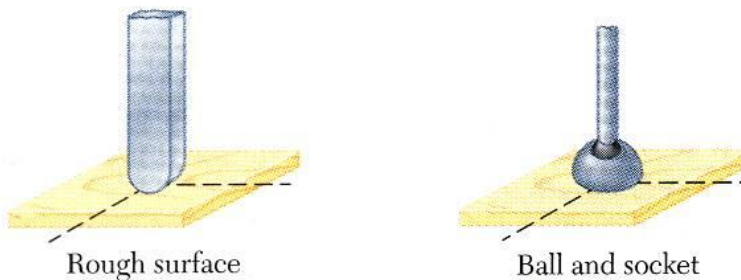
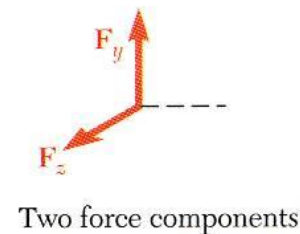
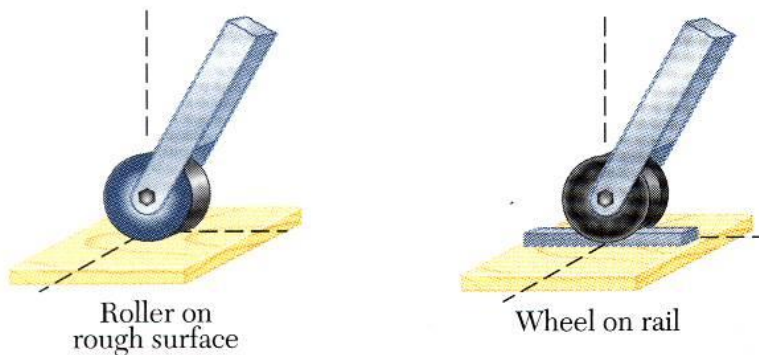
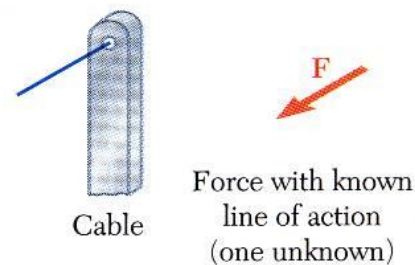
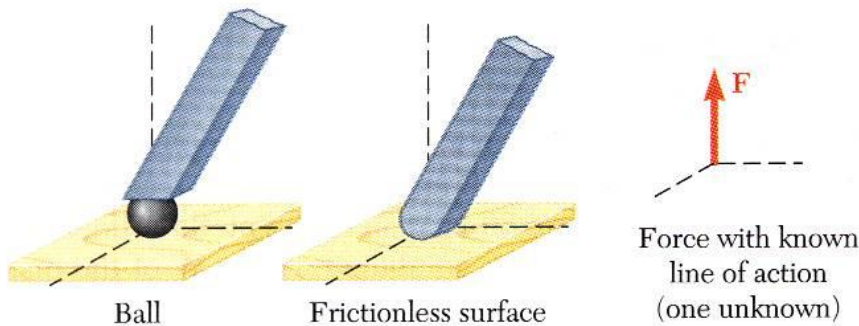
$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$$





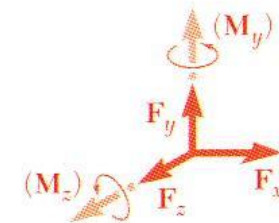
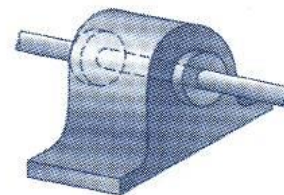
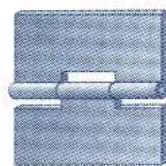
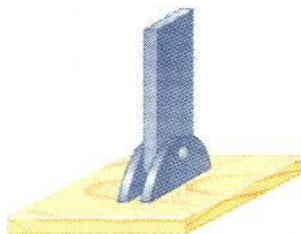
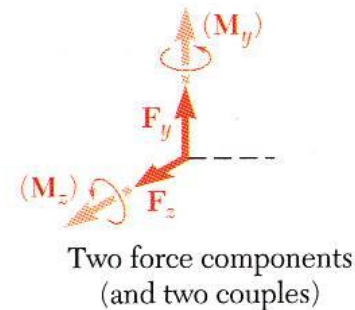
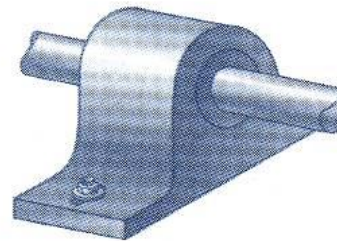
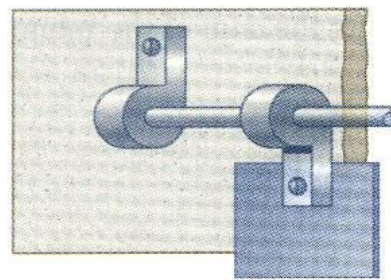
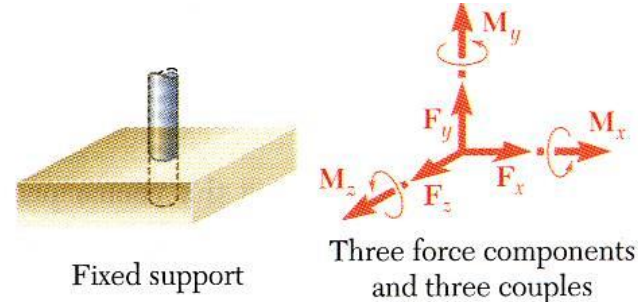
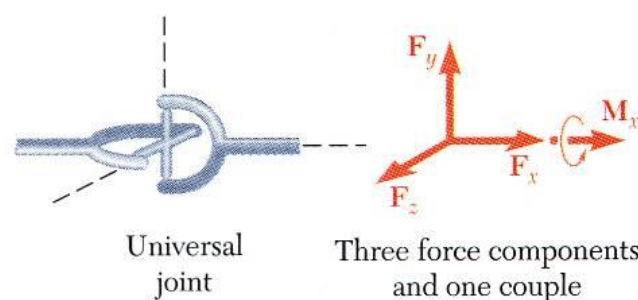
# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## عکس العمل‌های تکیه‌گاهی و اتصالات در سازه‌های سه بعدی



# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## عکس العمل‌های تکیه گاهی و اتصالات در سازه‌های سه بعدی



Pin and bracket

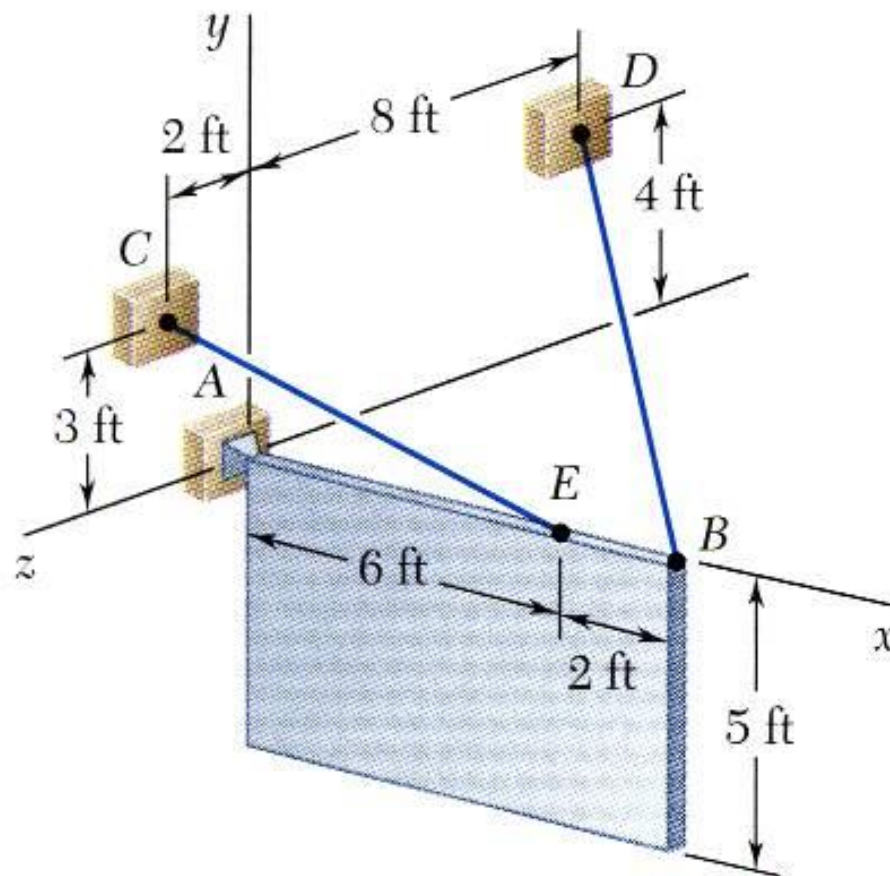
Hinge and bearing supporting axial thrust and radial load

Three force components (and two couples)

# Vector Mechanics for Engineers: Statics

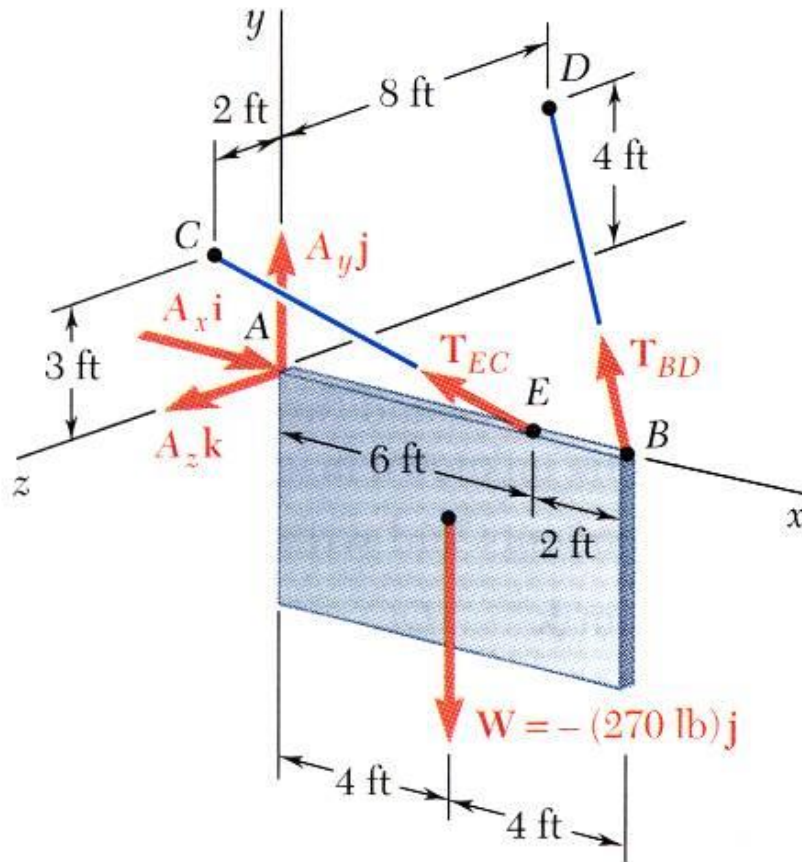
## مسئله نمونه ۴-۵

یک تابلو با چگالی یکنواخت و وزن ۲۷۰ پوند در سه نقطه مهار شده است. کشش در هر کابل و عکس‌العمل تکیه گاهی در نقطه A را بیابید.



# Vector Mechanics for Engineers: Statics

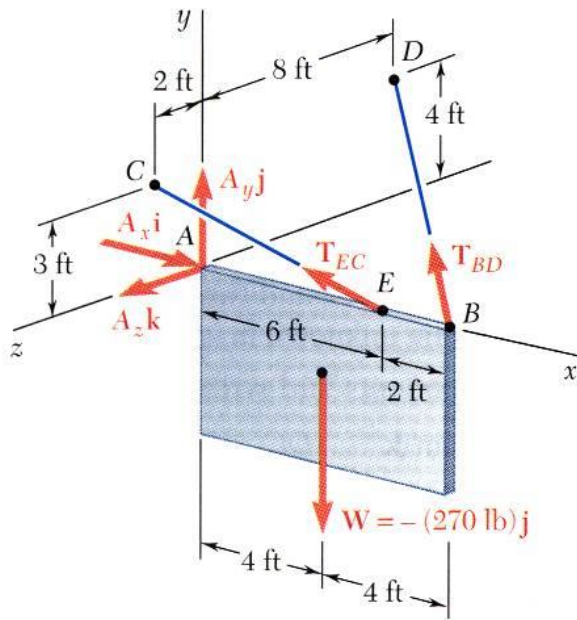
## مسئله نمونه ۴-۵



$$\begin{aligned}\vec{T}_{BD} &= T_{BD} \frac{\vec{r}_D - \vec{r}_B}{|\vec{r}_D - \vec{r}_B|} \\ &= T_{BD} \frac{-8\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}}{12} \\ &= T_{BD} \left( -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \right) \\ \vec{T}_{EC} &= T_{EC} \frac{\vec{r}_C - \vec{r}_E}{|\vec{r}_C - \vec{r}_E|} \\ &= T_{EC} \frac{-6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}}{7} \\ &= T_{EC} \left( -\frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \right)\end{aligned}$$

# Vector Mechanics for Engineers: Statics

## مسئله نمونه ۴-۵



$$\Sigma \vec{F} = \vec{A} + \vec{T}_{BD} + \vec{T}_{EC} - (270 \text{ lb})\vec{j} = 0$$

$$\vec{i}: A_x - \frac{2}{3}T_{BD} - \frac{6}{7}T_{EC} = 0$$

$$\vec{j}: A_y + \frac{1}{3}T_{BD} + \frac{3}{7}T_{EC} - 270 \text{ lb} = 0$$

$$\vec{k}: A_z - \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{7}T_{EC} = 0$$

$$\Sigma \vec{M}_A = \vec{r}_B \times \vec{T}_{BD} + \vec{r}_E \times \vec{T}_{EC} + (4 \text{ ft})\vec{i} \times (-270 \text{ lb})\vec{j} = 0$$

$$\vec{j}: 5.333T_{BD} - 1.714T_{EC} = 0$$

$$\vec{k}: 2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1080 \text{ lb} = 0$$

$$T_{BD} = 101.3 \text{ lb} \quad T_{EC} = 315 \text{ lb}$$

$$\vec{A} = (338 \text{ lb})\vec{i} + (101.2 \text{ lb})\vec{j} - (22.5 \text{ lb})\vec{k}$$

