

CHAPTER

3

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

اجسام صلب:
سیستم‌های معادل نیروها

- همیشه نمی توان یک جسم را به صورت یک ذره در نظر گرفت. در حالت کلی، اندازه جسم و نقاط اعمال بار می بایست در نظر گرفته شود.
- در مکانیک مقدماتی بیشتر اجسام به صورت صلب در نظر گرفته می شوند، به عبارت دیگر تغییر شکل ها کوچک بوده و بر شرایط تعادل یا حرکت جسم تأثیرگذار نیستند.
- در این فصل تأثیر نیروها بر اجسام صلب مورد بررسی قرار گرفته و عنوان می شود که چگونه می توان مجموعه ای از نیروها را با سیستم نیروهای معادل جایگزین نمود.
- گشتاور نیرو حول یک نقطه
- گشتاور نیرو حول یک محور
- گشتاور ناشی از کوپل نیرو
- هر سیستم از نیروها می توانند با یک سیستم معادل نیرو متشکل از یک نیرو و یک کوپل نیرو (زوج نیرو) جایگزین شوند.

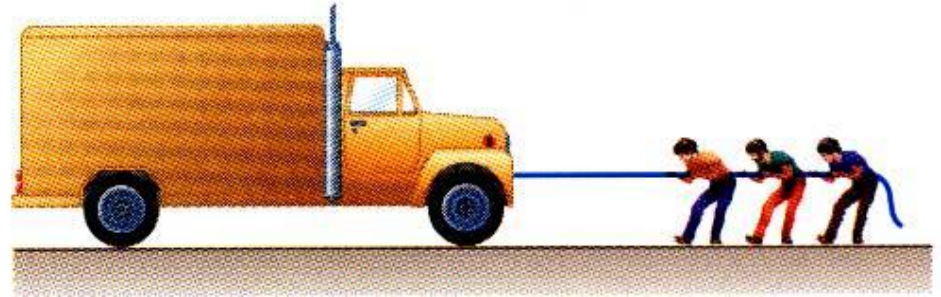


Vector Mechanics for Engineers: Statics

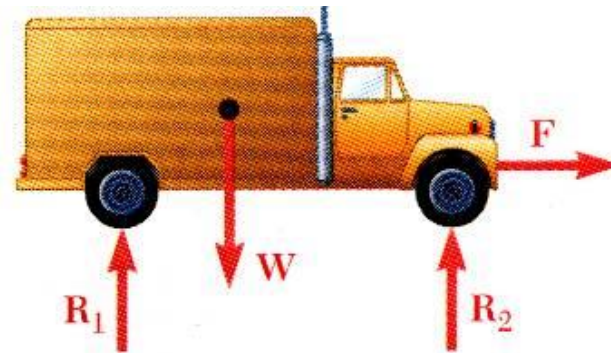
نیروهای داخلی و خارجی

- نیروهایی که بر اجسام صلب وارد میشوند به دو دسته تقسیم میشوند:

- نیروهای خارجی
- نیروهای داخلی



- نیروهای خارجی در نمودار جسم آزاد نمایش داده می‌شوند.

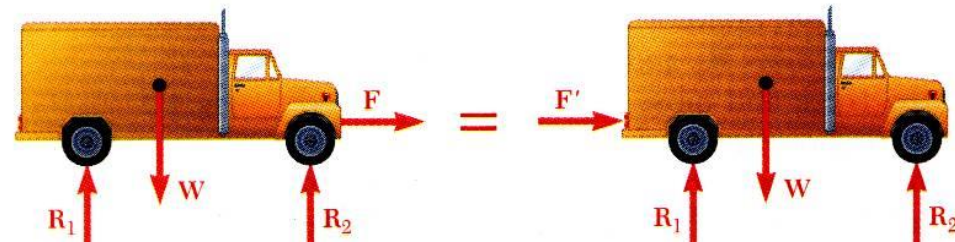
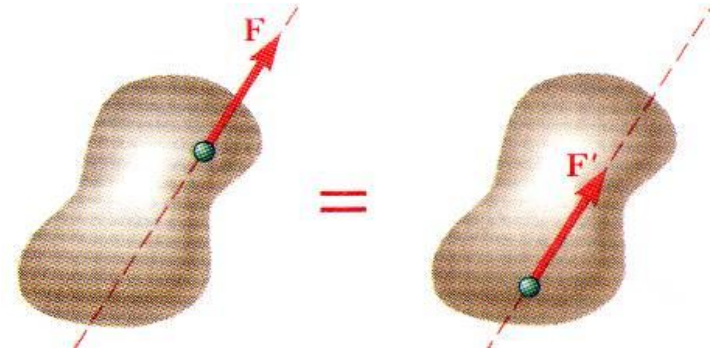


- هر یک از نیروهای خارجی نماینده یک حرکت انتقالی یا حرکت دورانی است.

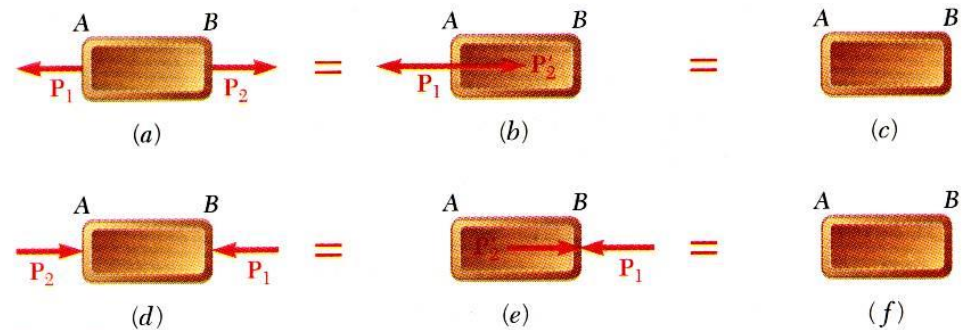
Vector Mechanics for Engineers: Statics

اصل انتقال: نیروهای معادل

- اصل انتقال:
- شرایط تعادل یا حرکت یک جسم تحت تأثیر انتقال یک نیرو در راستای خط تأثیر آن نمی‌باشد.
- دو نیروی F و F' نیروهای معادل هستند.



- اصل انتقال ممکن است در برخی موارد در خصوص نیروهای داخلی و تغییرشکل‌ها صادق نباشد.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

حاصل ضرب برداری دو بردار

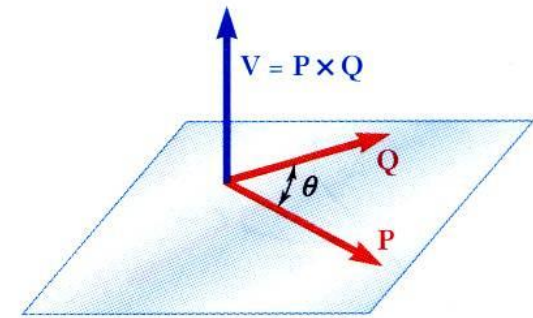
• مفهوم گشتاور یک نیرو حول یک نقطه با کاربرد ضرب داخلی یا خارجی بردارها به راحتی قابل درک است.

• بردار حاصل ضرب برداری دو نیروی P و Q به صورت بردار V تعریف می شود که ویژگی های زیر را داراست:

1. خط تأثیر بردار V عمود بر صفحه گذرنده از بردارهای P و Q است.

2. اندازه بردار V برابر است با: $V = PQ \sin \theta$

3. جهت بردار V از قاعده دست راست تبعیت می کند.



(a)



(b)

$$Q \times P = -(P \times Q)$$

$$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$$

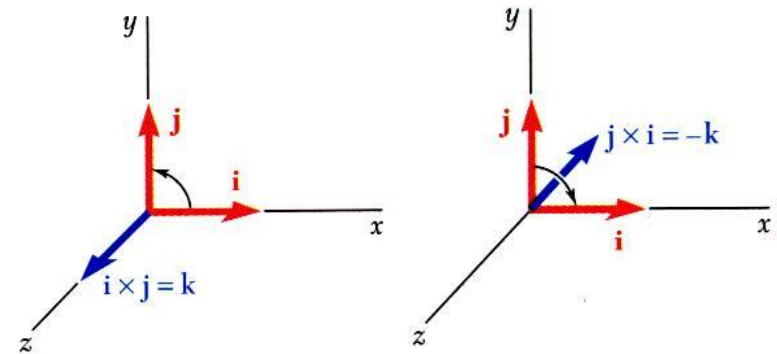
$$(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S)$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

حاصل ضرب برداری بر اساس مولفه‌های سازنده دو بردار

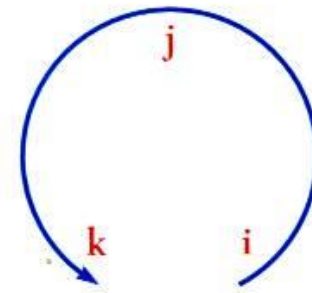
• حاصل ضرب خارجی بردارهای یکه:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0 & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} &= 0 & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} &= 0 \end{aligned}$$



• حاصل ضرب خارجی بر اساس مولفه‌های سازنده بردار:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \times (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}) \\ &= (P_y Q_z - P_z Q_y) \vec{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \vec{j} \\ &\quad + (P_x Q_y - P_y Q_x) \vec{k} \end{aligned}$$



$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

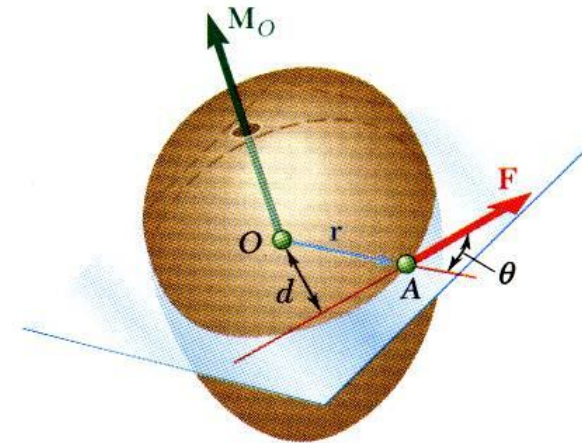
گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

- نیرو به وسیله اندازه و جهتش تعیین می‌شود. تأثیر نیرو بر اجسام صلب همچنین به نقطه اعمال نیرو بستگی دارد.

- گشتاور نیروی F حول نقطه O به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_O = r \times F$$

- گشتاور نیرو حول نقطه O عمود بر صفحه‌ای است که از نقطه O و بردار F می‌گذرد.



(a)

- مقدار گشتاور نشان‌دهنده میزان تمایل نیرو برای ایجاد دوران جسم حول محور در راستای گشتاور است

$$M_O = rF \sin \theta = Fd$$

- قاعده دست راست برای تشخیص جهت گشتاور مورد استفاده قرار می‌گیرد.



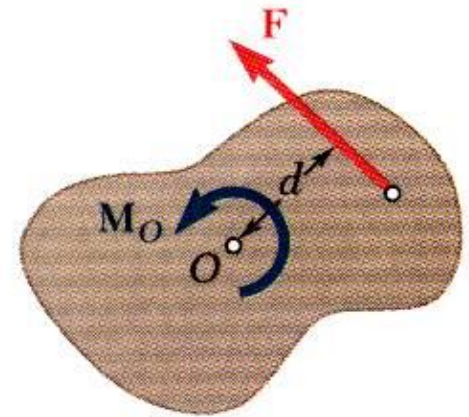
(b)

- هر نیروی F' که اندازه و جهت مشابه F دارد در صورتی معادل با این نیرو است که نقطه تأثیر آن نیز یکسان بوده و گشتاور معادل ایجاد نماید.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

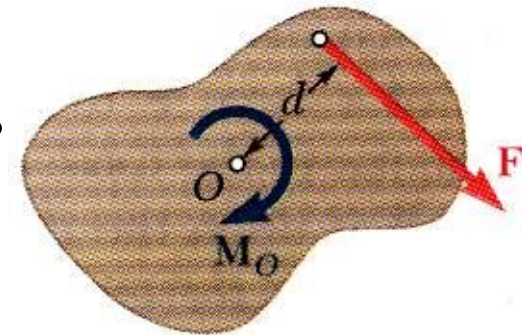
گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

- اگر نیرو جسم را در جهت پادساعتگرد بچرخاند، جهت گشتاور به سمت خارج صفحه بوده و اندازه گشتاور مثبت خواهد بود.



(a) $M_O = +Fd$

- اگر نیرو جسم را در جهت ساعتگرد بچرخاند، جهت گشتاور به سمت داخل صفحه بوده و اندازه گشتاور منفی خواهد بود.



(b) $M_O = -Fd$

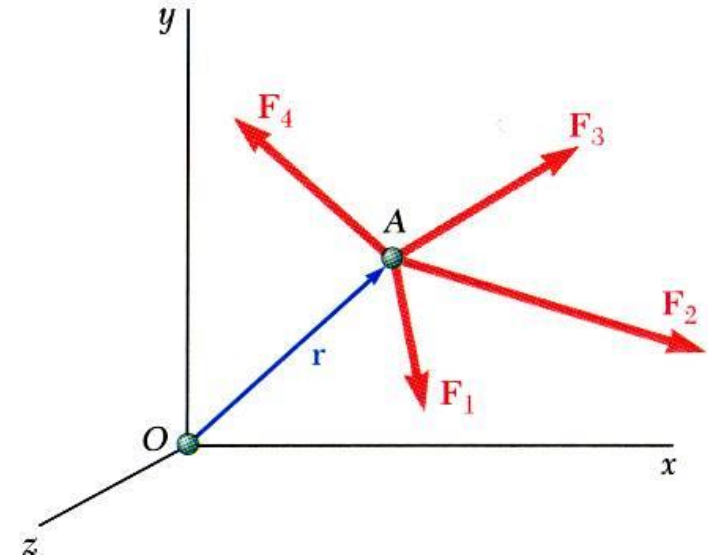


Vector Mechanics for Engineers: Statics

Varignon's Theorem

• قضیه وارینون:

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots$$



• با کمک قضیه وارینون می‌توان برآیند چند نیرو را جایگزین نیروها کرده و به جای محاسبه تعداد زیادی گشتاور حول یک نقطه تنها گشتاور یک نیرو حول نقطه مورد نظر را محاسبه نمود.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه‌های گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

گشتاور نیروی \mathbf{F} حول نقطه O

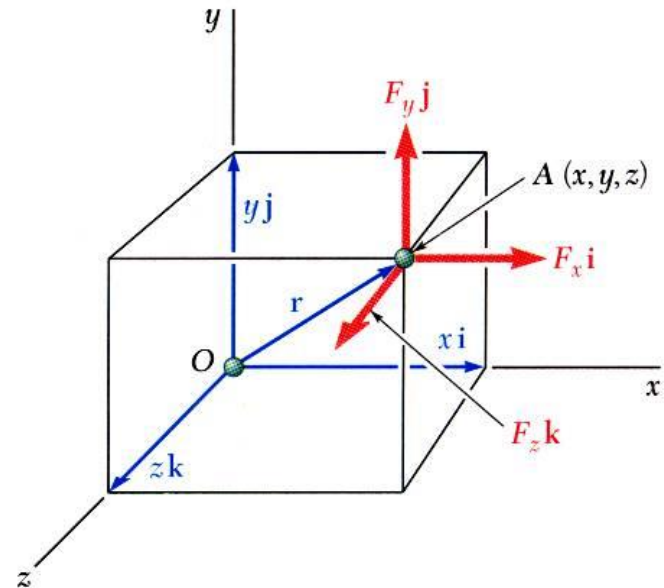
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

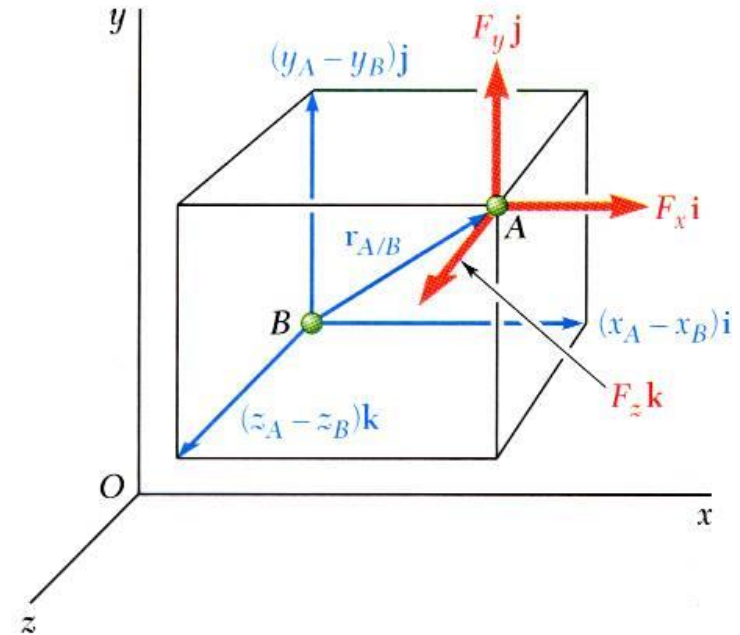
مولفه‌های گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

گشتاور نیروی \vec{F} حول نقطه B

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_{A/B} &= \vec{r}_A - \vec{r}_B \\ &= (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k} \\ \vec{F} &= F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x_A - x_B) & (y_A - y_B) & (z_A - z_B) \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



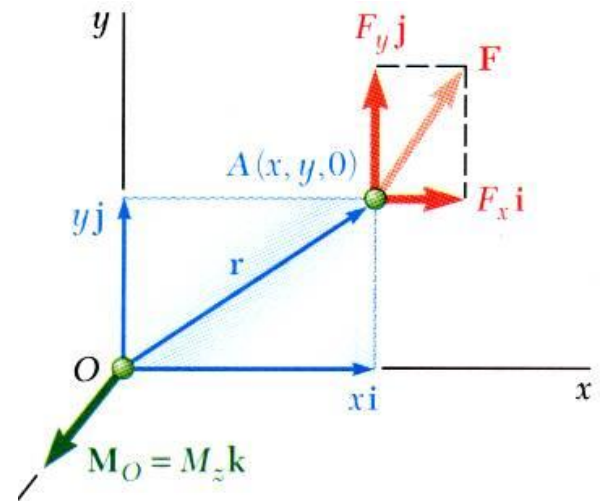
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه‌های گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

برای سازه‌های دوبعدی

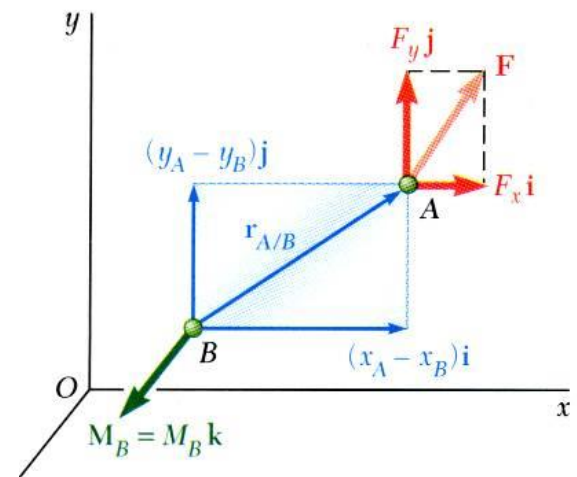
$$\vec{M}_O = (xF_y - yF_z)\vec{k}$$

$$\begin{aligned} M_O &= M_Z \\ &= xF_y - yF_z \end{aligned}$$



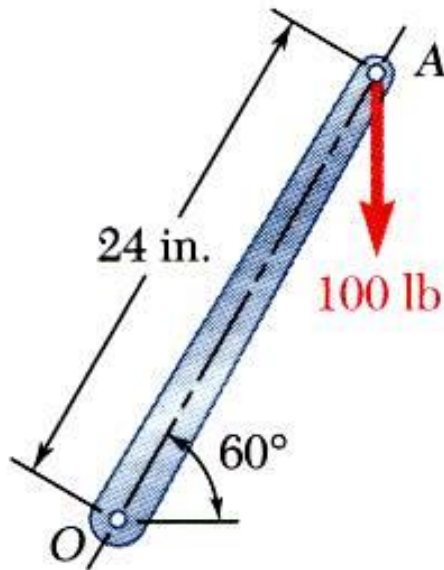
$$\vec{M}_O = [(x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_z]\vec{k}$$

$$\begin{aligned} M_O &= M_Z \\ &= (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_z \end{aligned}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۱-۳



یک نیروی ۱۰۰ پوندی بر انتهای یک میله وارد می‌شود که در نقطه O لولا شده است. مطلوبست:

الف) گشتاور حول نقطه O

ب) نیروی افقی در نقطه A که گشتاور مشابه تولید کند.

ج) کمترین مقدار نیرو در نقطه A که گشتاور مشابه تولید کند.

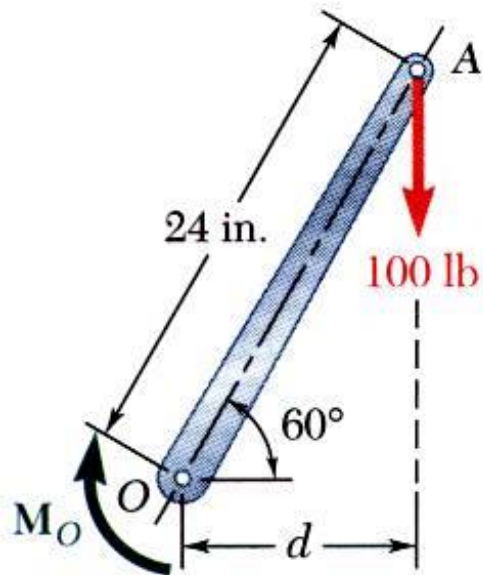
د) محل اعمال نیروی ۲۴۰ پوندی عمودی که گشتاور مشابه تولید کند.

ه) آیا نیروهای اشاره شده در بخش های ب و ج و د معادل نیروی اولیه هستند؟

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۱-۳

بخش الف



$$M_O = Fd$$

$$d = (24 \text{ in.}) \cos 60^\circ = 12 \text{ in.}$$

$$M_O = (100 \text{ lb})(12 \text{ in.})$$

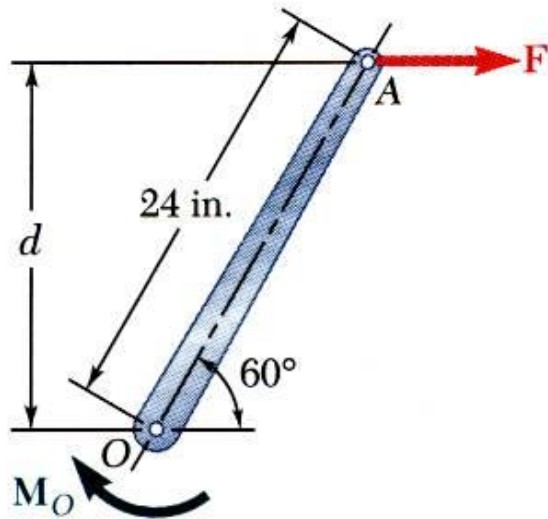
$$M_O = 1200 \text{ lb} \cdot \text{in}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۱-۳

بخش ب



$$d = (24 \text{ in.}) \sin 60^\circ = 20.8 \text{ in.}$$

$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = F(20.8 \text{ in.})$$

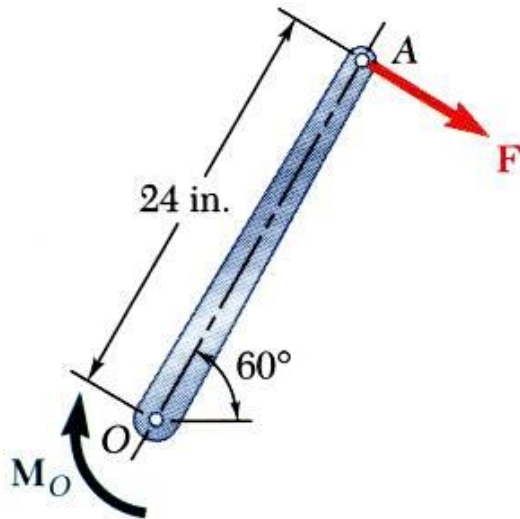
$$F = \frac{1200 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{20.8 \text{ in.}}$$

$$F = 57.7 \text{ lb}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۱-۳

بخش ج



$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = F(24 \text{ in.})$$

$$F = \frac{1200 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{24 \text{ in.}}$$

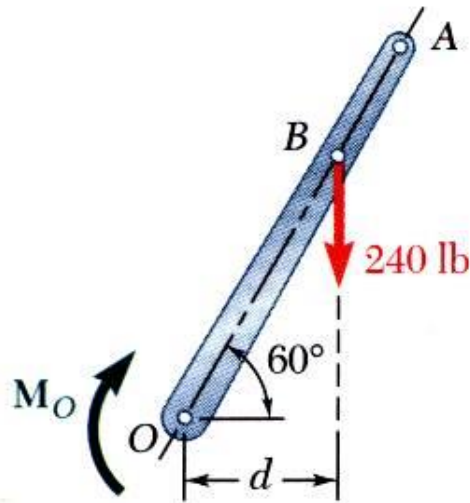
$$F = 50 \text{ lb}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۱-۳

بخش د



$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = (240 \text{ lb})d$$

$$d = \frac{1200 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{240 \text{ lb}} = 5 \text{ in.}$$

$$OB \cos 60^\circ = 5 \text{ in.}$$

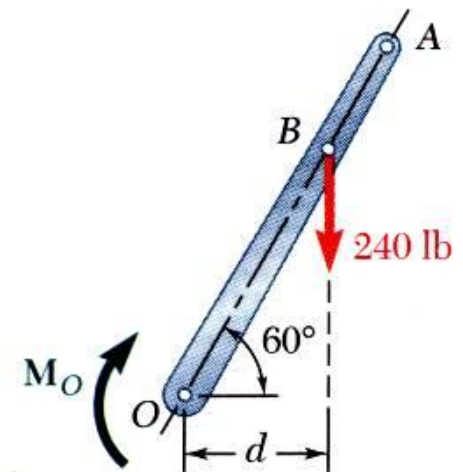
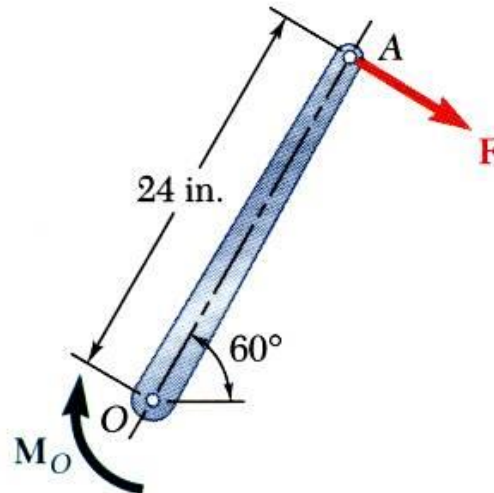
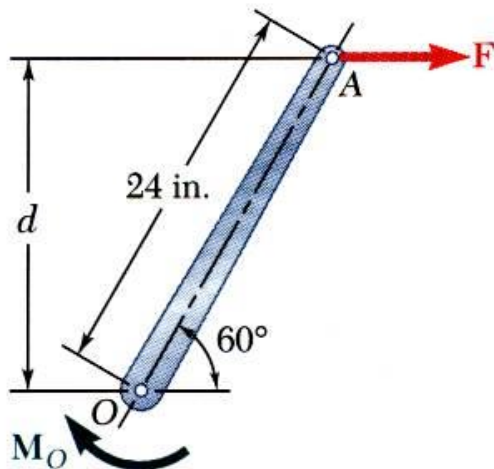
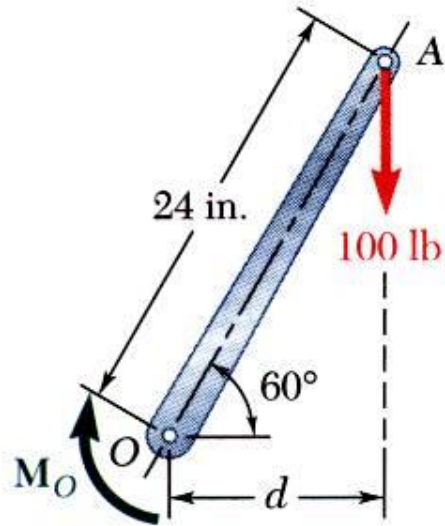
$$OB = 10 \text{ in.}$$

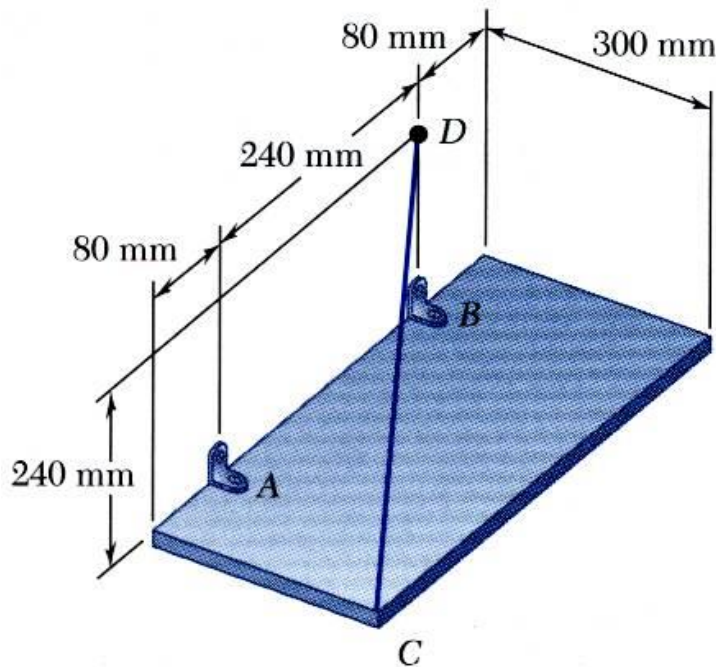


Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۱-۳

بخش ه



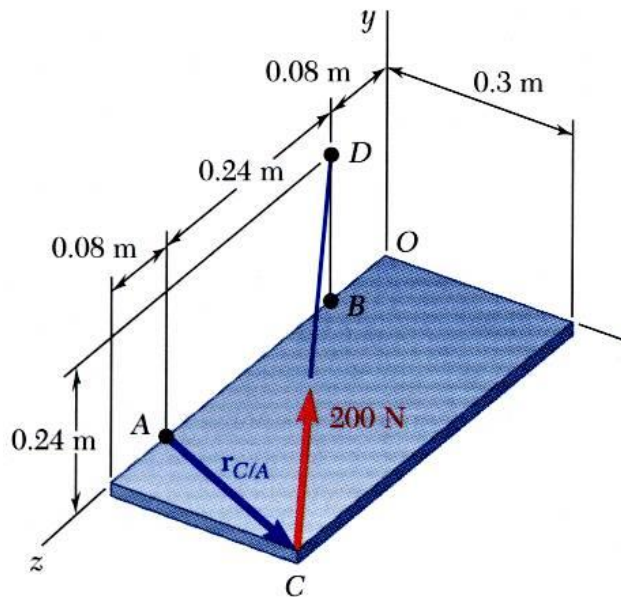


$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

یک صفحه مستطیلی به وسیله دو نگهدارنده در نقاط A و B و یک کابل CD نگهداشته شده است. میدانیم کشش در کابل برابر ۲۰۰ نیوتن است. مشخص کنید گشتاور حول نقطه A توسط کشش کابل CD چقدر است؟

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۲-۳



$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

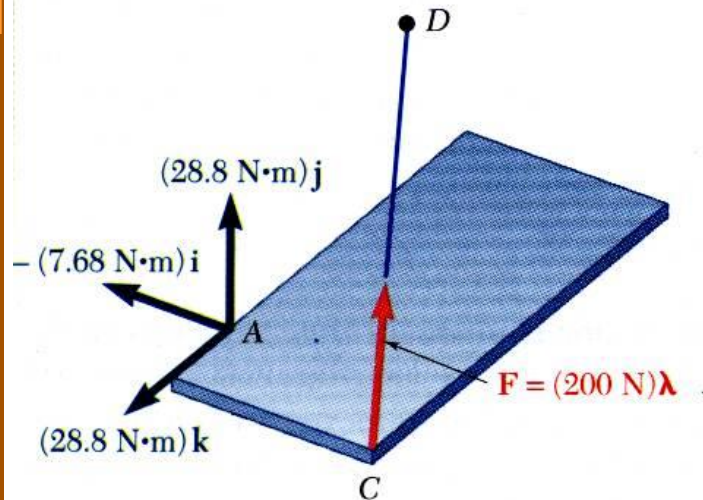
$$\vec{r}_{C/A} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (0.3 \text{ m})\vec{i} + (0.08 \text{ m})\vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F\vec{\lambda} = (200 \text{ N}) \frac{\vec{r}_{C/D}}{r_{C/D}} \\ &= (200 \text{ N}) \frac{-(0.3 \text{ m})\vec{i} + (0.24 \text{ m})\vec{j} - (0.32 \text{ m})\vec{k}}{0.5 \text{ m}} \end{aligned}$$

$$= -(120 \text{ N})\vec{i} + (96 \text{ N})\vec{j} - (128 \text{ N})\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

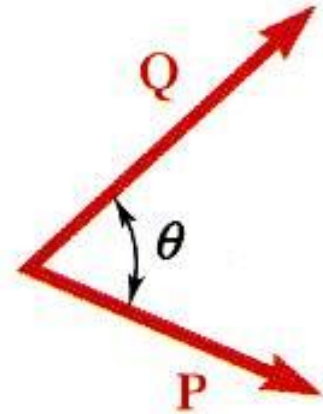
حاصل ضرب عددی دو بردار

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ \cos \theta \quad (\text{scalar result})$$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = \vec{Q} \bullet \vec{P}$$

$$\vec{P} \bullet (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P} \bullet \vec{Q}_1 + \vec{P} \bullet \vec{Q}_2$$

$$(\vec{P} \bullet \vec{Q}) \bullet \vec{S} = \text{undefined}$$



$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \bullet (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k})$$

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = 1 \quad \vec{j} \bullet \vec{j} = 1 \quad \vec{k} \bullet \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \bullet \vec{j} = 0 \quad \vec{j} \bullet \vec{k} = 0 \quad \vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\vec{P} \bullet \vec{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$$



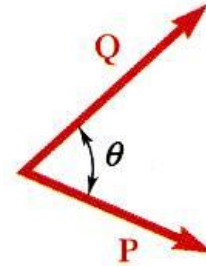
Vector Mechanics for Engineers: Statics

کاربرد حاصل ضرب عددی دو بردار

- پیدا کردن زاویه بین دو بردار

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$

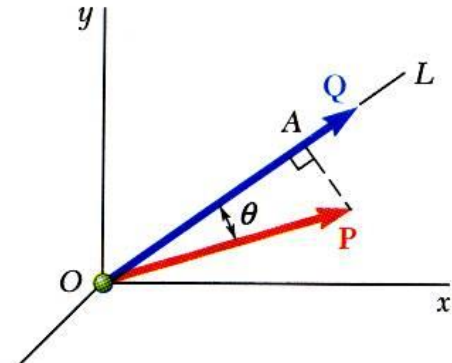


- پیدا کردن تصویر یک بردار بر یک صفحه دلخواه

$$P_{OL} = P \cos \theta = \text{projection of } P \text{ along } OL$$

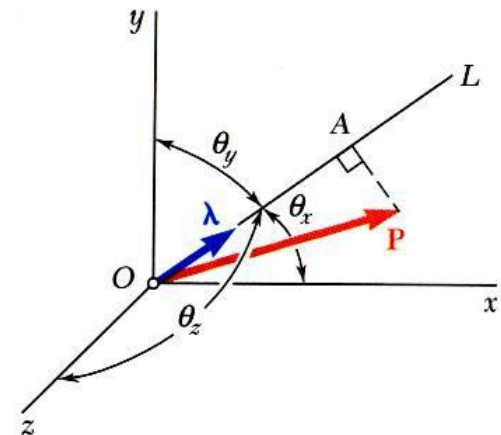
$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ \cos \theta$$

$$\frac{\vec{P} \bullet \vec{Q}}{Q} = P \cos \theta = P_{OL}$$



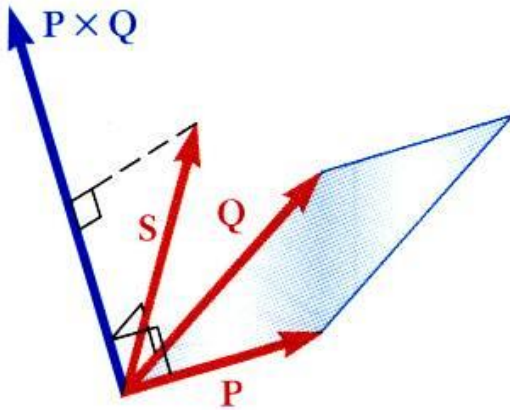
- برای یک بردار که با بردار یکه تعریف می شود:

$$\begin{aligned} P_{OL} &= \vec{P} \bullet \vec{\lambda} \\ &= P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \end{aligned}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

حاصل ضرب عددی سه بردار



$$\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \text{scalar result}$$

$$\begin{aligned}\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) &= \vec{P} \cdot (\vec{Q} \times \vec{S}) = \vec{Q} \cdot (\vec{S} \times \vec{P}) \\ &= -\vec{S} \cdot (\vec{Q} \times \vec{P}) = -\vec{P} \cdot (\vec{S} \times \vec{Q}) = -\vec{Q} \cdot (\vec{P} \times \vec{S})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) &= S_x(P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y(P_z Q_x - P_x Q_z) \\ &\quad + S_z(P_x Q_y - P_y Q_x)\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور یک نیرو حول یک محور

- گشتاور نیروی F وارد در نقطه A حول نقطه O

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

- مقدار عددی گشتاور حول محور OL تصویر بردار گشتاور روی این محور است:

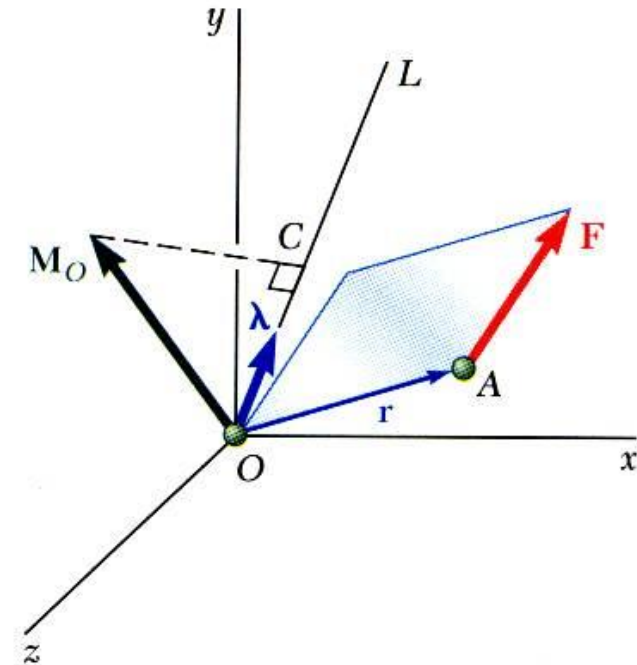
$$M_{OL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_O = \vec{\lambda} \bullet (\vec{r} \times \vec{F})$$

- گشتاور نیروی F حول محورهای مختصات به صورت زیر است:

$$M_x = yF_z - zF_y$$

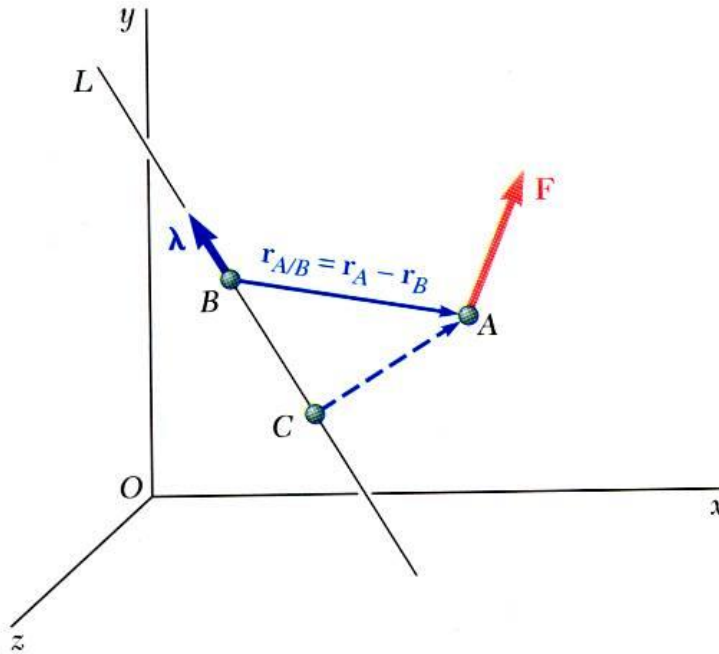
$$M_y = zF_x - xF_z$$

$$M_z = xF_y - yF_x$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور یک نیرو حول یک محور



- گشتاور یک نیرو حول یک محور دلخواه

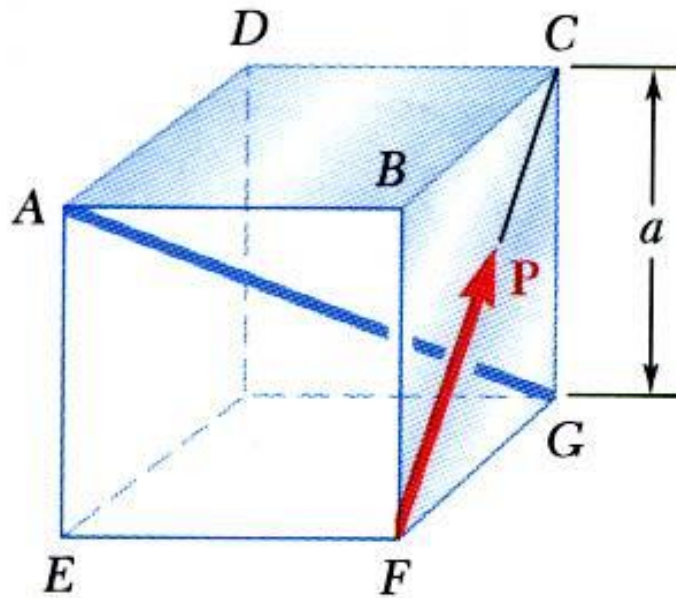
$$\begin{aligned} M_{BL} &= \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_B \\ &= \vec{\lambda} \cdot (\vec{r}_{A/B} \times \vec{F}) \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

- نتیجه به نقطه انتخابی B روی محور موردنظر وابسته نیست.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۳-۳



یک مکعب را در نظر بگیرید که نیروی P روی آن اثر میکند. گشتاور نیروی P را در حالت های زیر تعیین کنید:

الف) حول نقطه A

ب) حول ضلع AB

ج) حول قطر AG مکعب

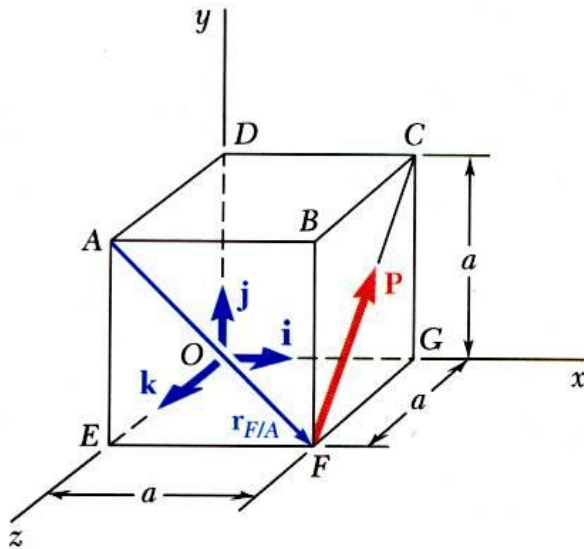
د) فاصله عمودی بین AG و FC را تعیین کنید.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۳-۳

• گشتاور نیروی P حول نقطه A



$$\vec{M}_A = \vec{r}_{F/A} \times \vec{P}$$

$$\vec{r}_{F/A} = a\vec{i} - a\vec{j} = a(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{P} = P(\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}) = P\sqrt{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{M}_A = a(\vec{i} - \vec{j}) \times P\sqrt{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{M}_A = (aP\sqrt{2})(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

• گشتاور نیروی P حول محور AB

$$M_{AB} = \vec{i} \cdot \vec{M}_A$$

$$= \vec{i} \cdot (aP\sqrt{2})(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

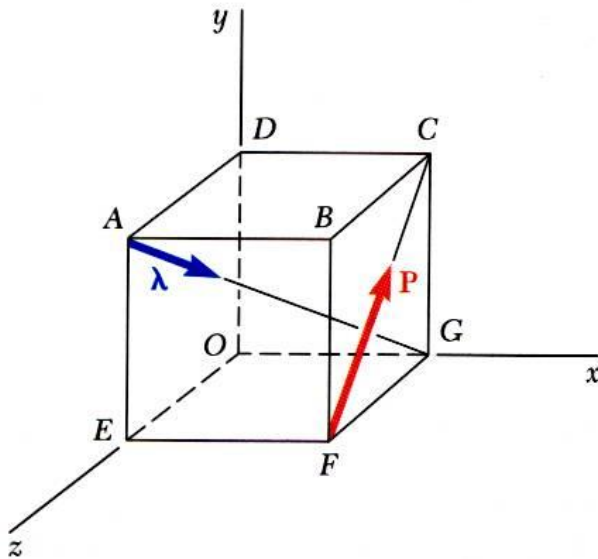
$$M_{AB} = aP\sqrt{2}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۳-۳

• گشتاور نیروی P حول قطر AG



$$M_{AG} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_A$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{A/G}}{r_{A/G}} = \frac{a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{M}_A = \frac{aP}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$\begin{aligned} M_{AG} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \bullet \frac{aP}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= \frac{aP}{\sqrt{6}}(1 - 1 - 1) \end{aligned}$$

$$M_{AG} = -\frac{aP}{\sqrt{6}}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۳-۳

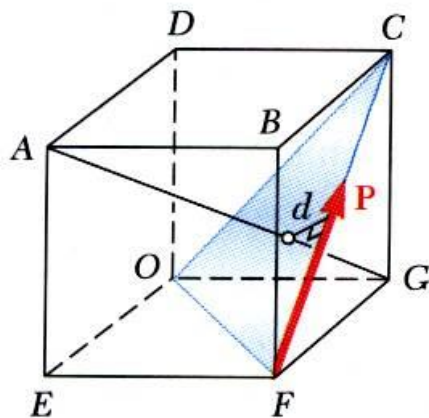
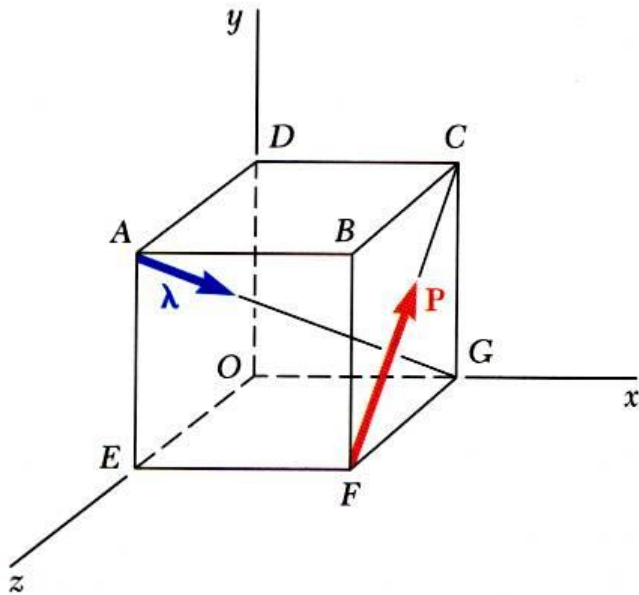
• فاصله عمودی بین AG و FC

$$\vec{P} \cdot \vec{\lambda} = \frac{P}{\sqrt{2}} (\vec{j} - \vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = \frac{P}{\sqrt{6}} (0 - 1 + 1) = 0$$

بنابراین P بر AG عمود است

$$|M_{AG}| = \frac{aP}{\sqrt{6}} = Pd$$

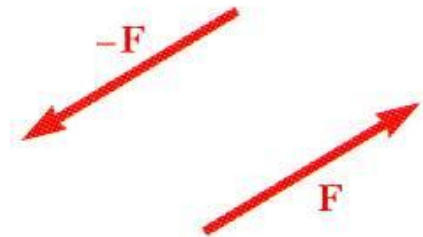
$$d = \frac{a}{\sqrt{6}}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور یک زوج نیرو

- دو نیروی \mathbf{F} و $-\mathbf{F}$ که دارای اندازه یکسان و خط تأثیر موازی باشند و مختلف جهت باشند را زوج نیرو مینامند.

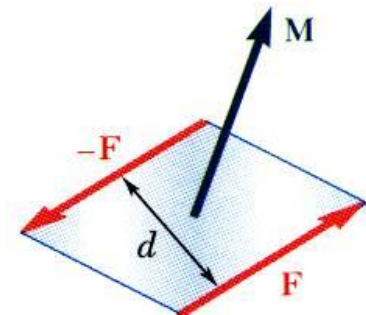
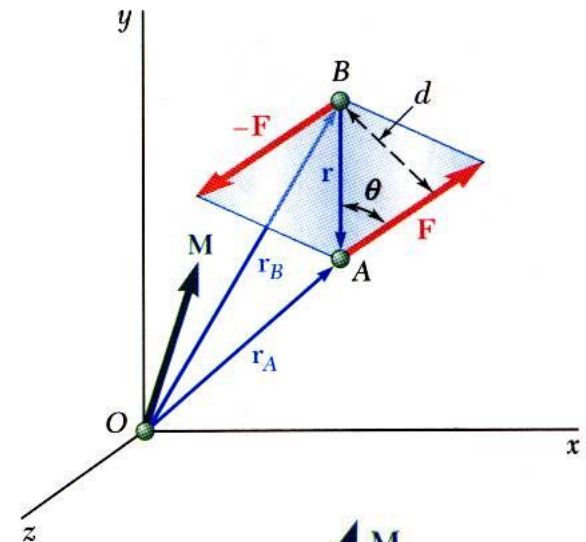


- گشتاور زوج نیرو

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) \\ &= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \vec{F}\end{aligned}$$

$$M = rF \sin \theta = Fd$$

- بردار گشتاور حاصل از یک زوج نیرو مستقل از نقطه یا محور انتخابی بوده و یک بردار آزاد است.

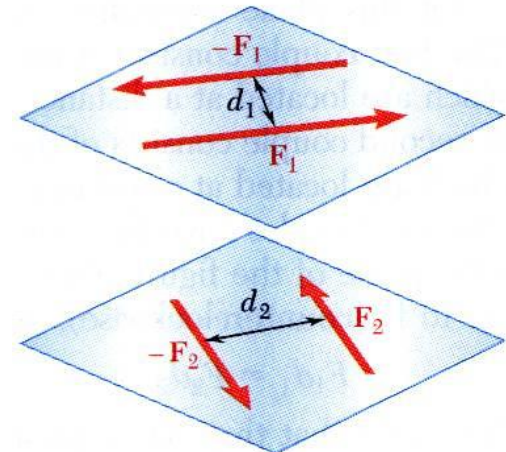
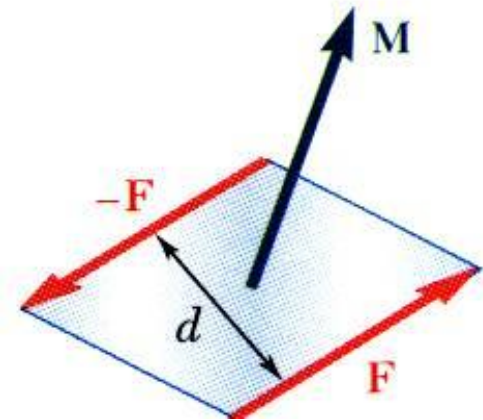


دو زوج نیرو گشتاور معادل دارند اگر:

- $F_1 d_1 = F_2 d_2$

- دو زوج نیرو در دو صفحه موازی قرار داشته باشند

- جهت دوران تولیدی زوج نیرو یکسان باشد



- دو صفحه متقاطع که هر یک حاوی یک زوج نیرو هستند را در نظر بگیرید:

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1 \text{ in plane } P_1$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2 \text{ in plane } P_2$$

- بر آیند نیروها یک زوج نیرو را تشکیل میدهد:

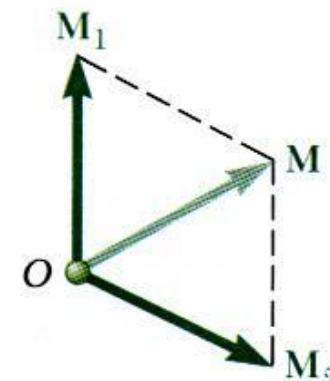
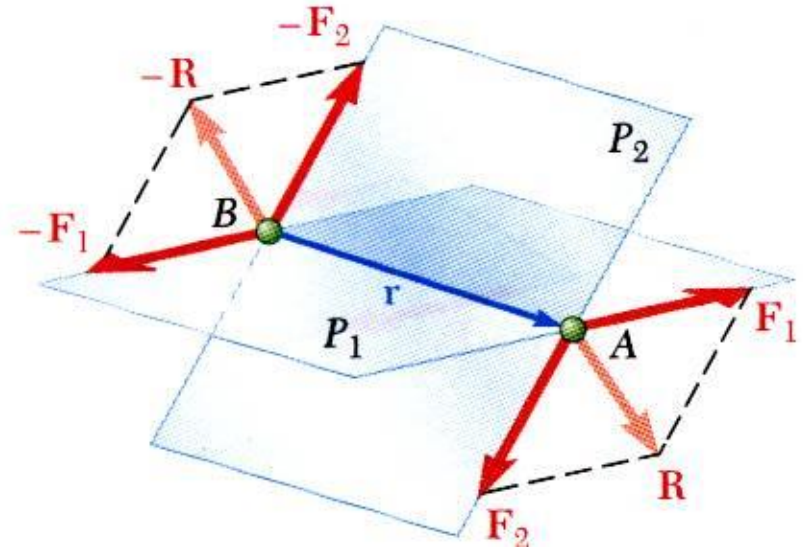
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

- با استفاده از قضیه وارینون داریم:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$

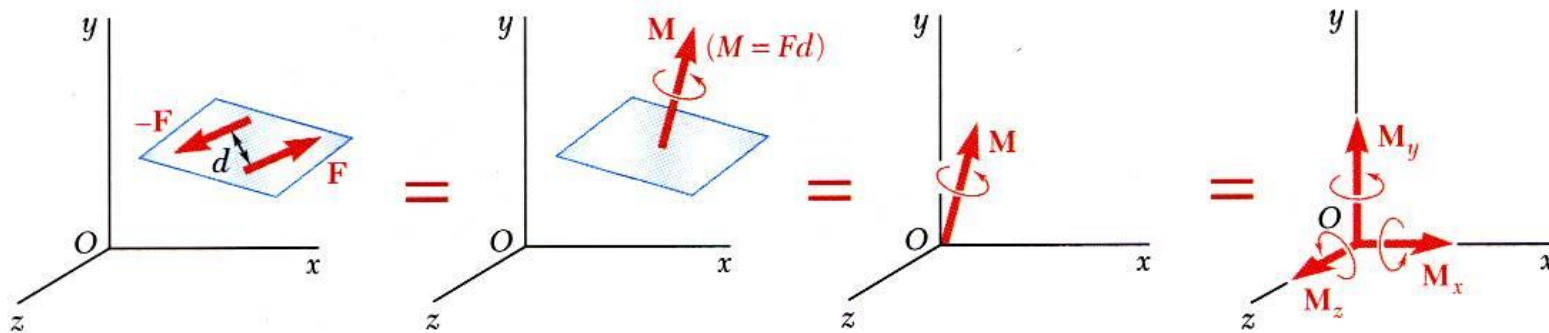
$$= \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

- حاصل جمع دو زوج نیرو خود یک زوج نیرو است.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

نمایش زوج نیروها با بردارها

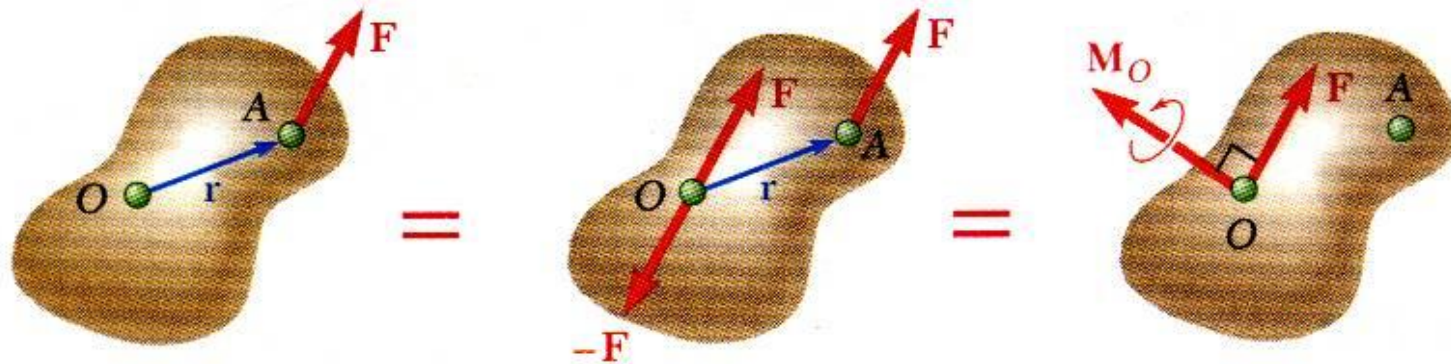


- یک زوج نیرو می تواند به وسیله یک بردار با اندازه و جهت گشتاور حاصل از یک زوج نیرو مشخص شود.
- بردارهای زوج نیرو از قاعده جمع بردارها پیروی میکنند.
- بردارهای زوج نیرو بردارهای آزاد هستند یعنی نقطه اعمال این بردارها تأثیری در نتیجه حل مسئله ندارد.
- بردارهای زوج نیرو می توانند به مولفه های سازنده خود تجزیه شوند.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

تجزیه یک نیرو به یک نیرو در نقطه O و گشتاور

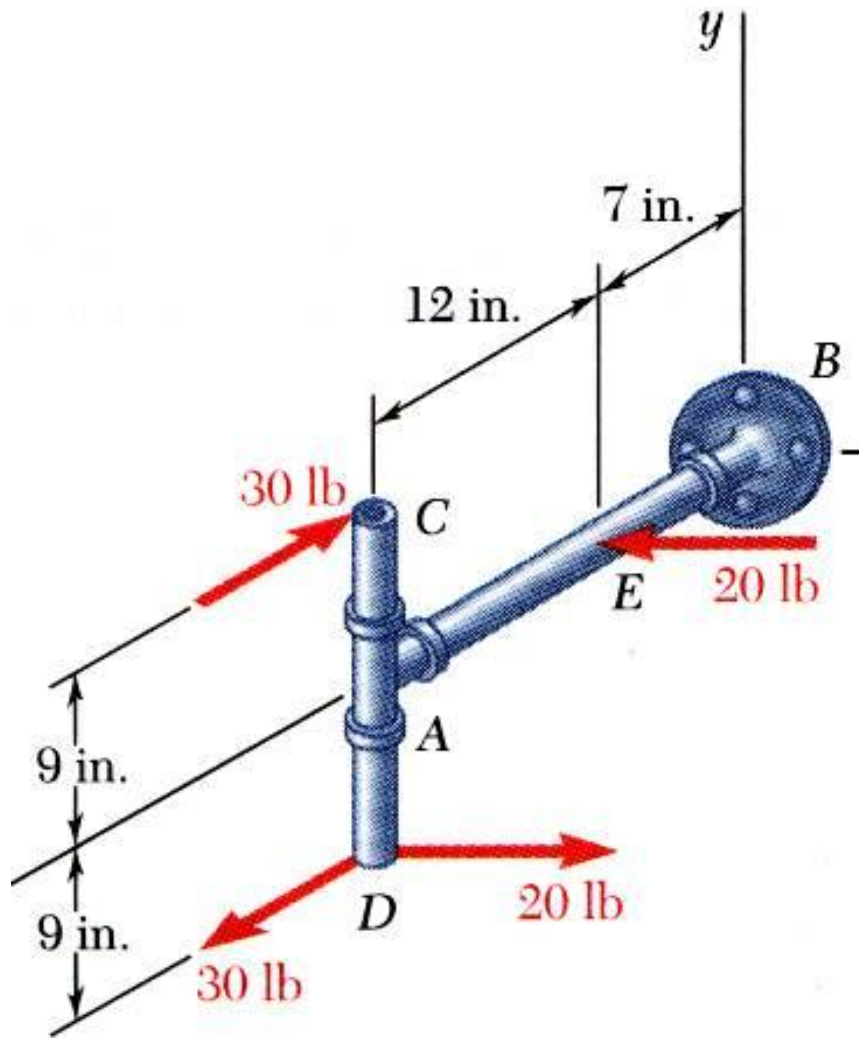


- نقطه اثر نیروی F نمیتواند به راحتی روی یک جسم جابجا شود.
- اعمال دو نیروی هم اندازه و در خلاف جهت منجر به تغییر حالت جسم نداشته و تأثیر خالصی روی آن ندارد.
- سه نیرو میتواند با یک نیرو و زوج نیروی معادل جایگزین شود که به عنوان سیستم نیرو - کوپل شناخته میشود.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۳-۴

مولفه‌های زوج نیرویی که با زوج نیروهای نشان داده شده در شکل معادل باشد را تعیین کنید.



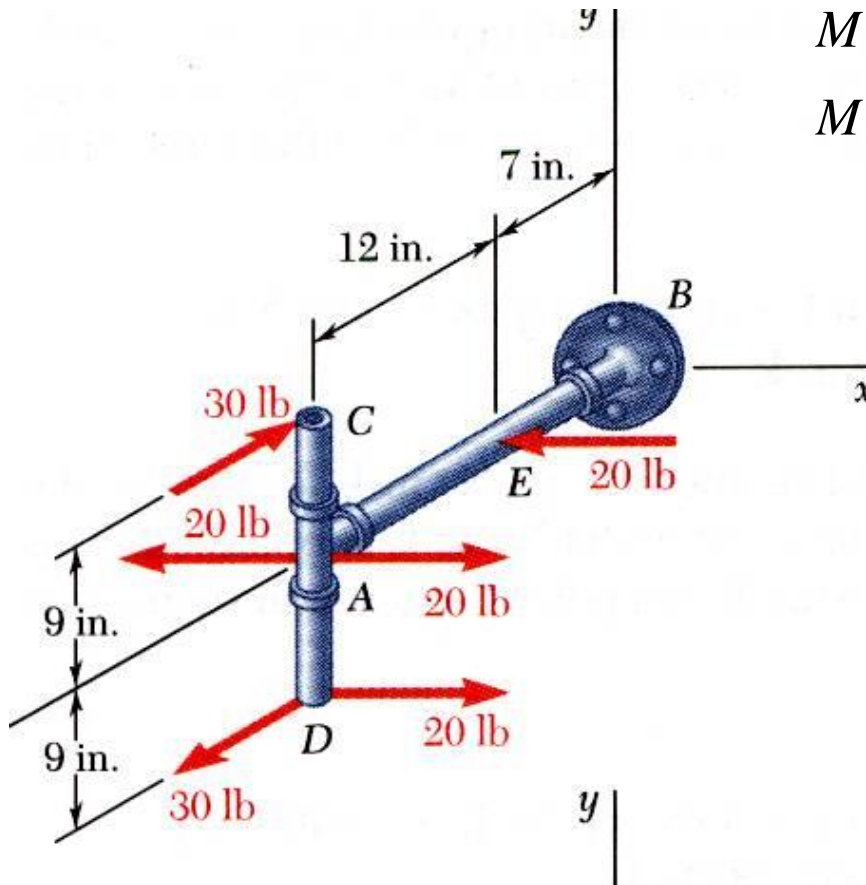
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۳-۴

$$M_x = -(30 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = -540 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_y = +(20 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = +240 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_z = +(20 \text{ lb})(9 \text{ in.}) = +180 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

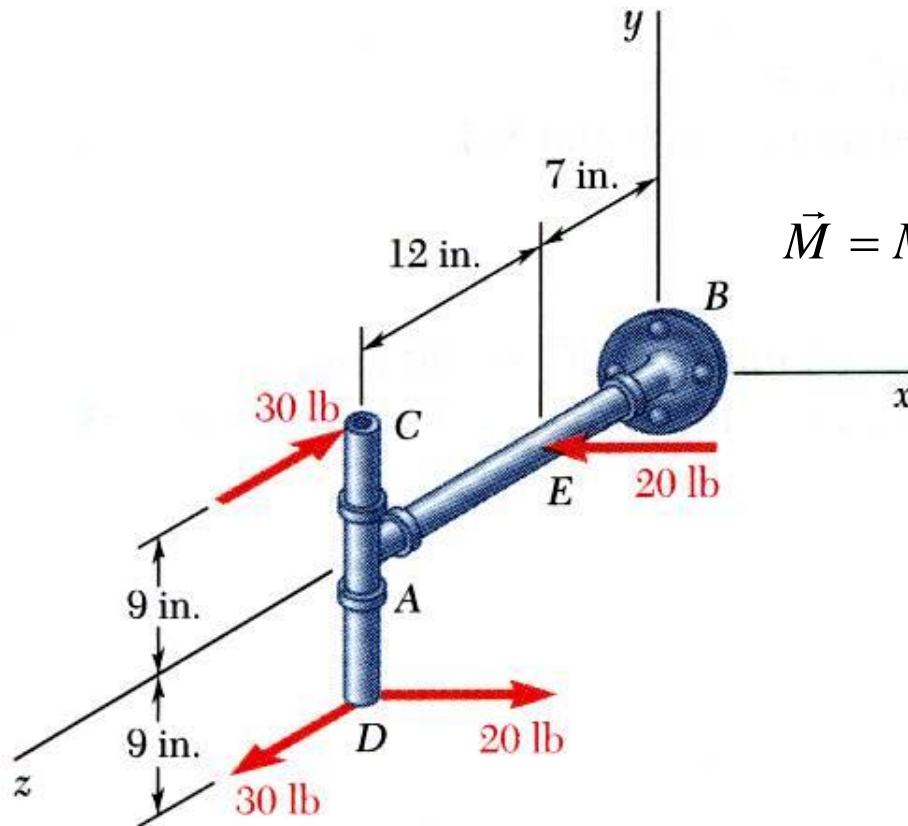


$$\vec{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{k}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۳-۴

• محاسبه گشتاور نیروها حول نقطه D

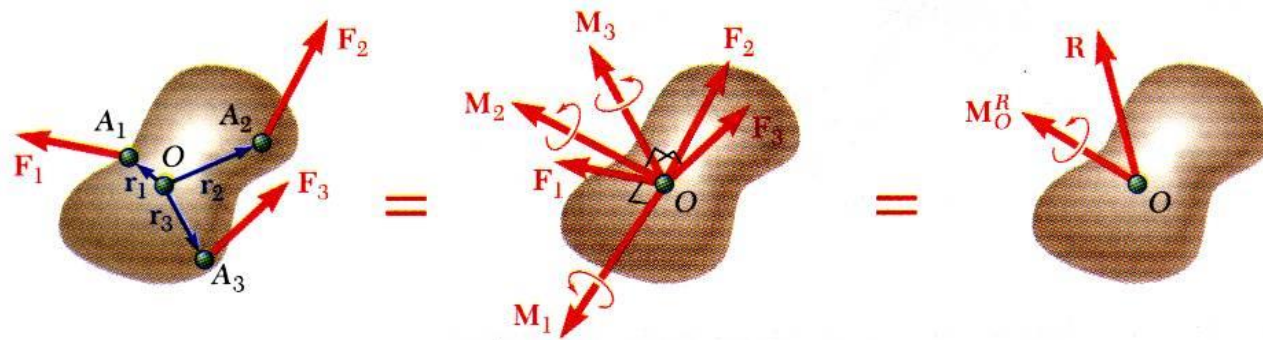


$$\vec{M} = \vec{M}_D = (18 \text{ in.})\vec{j} \times (-30 \text{ lb})\vec{k} + [(9 \text{ in.})\vec{j} - (12 \text{ in.})\vec{k}] \times (-20 \text{ lb})\vec{i}$$

$$\vec{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{k}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

سیستم نیروها: تقلیل به نیرو و زوج نیرو



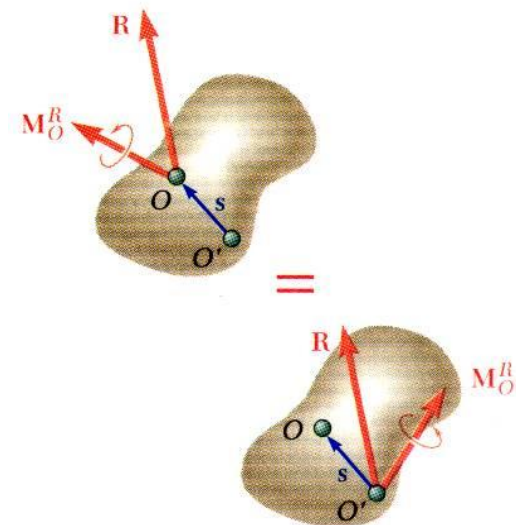
- یک سیستم از نیروها میتواند با یک نیرو و زوج نیروی معادل در نقطه ای مانند O جایگزین شود.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \quad \vec{M}_O^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

- سیستم نیرو و زوج نیرو در نقطه O با اضافه کردن یک گشتاور میتواند به نقطه دیگری نظیر O' جابجا شود

$$\vec{M}_{O'}^R = \vec{M}_O^R + \vec{s} \times \vec{R}$$

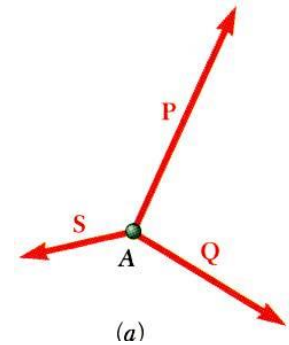
- دو سیستم نیرویی تنها در صورتی معادل هستند که قابل تبدیل به یک سیستم نیرو و زوج نیرو باشند.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

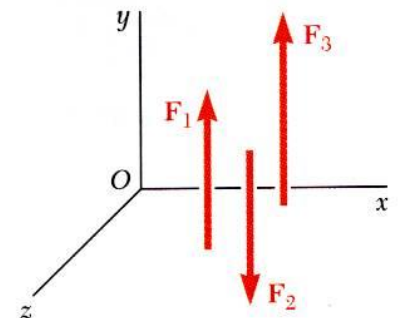
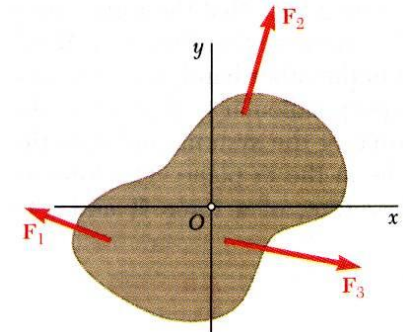
تقلیل مضاعف سیستم نیروها

- اگر نیروی برآیند و گشتاور حاصل از زوج نیرو در نقطه ای مانند O بر یکدیگر عمود باشند، در این صورت میتوان این مجموعه را با یک نیروی تنها جایگزین کرد.



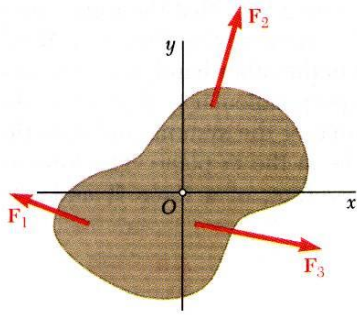
- سیستم نیرو و زوج نیروی برآیند برای یک مجموعه از نیروها متقابلاً عمود است اگر:

- (۱) نیروها هم‌رس باشند.
- (۲) نیروها هم صفحه باشند.
- (۳) نیروها موازی باشند.



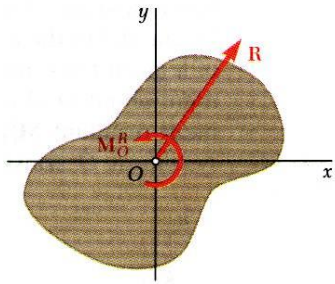
Vector Mechanics for Engineers: Statics

تقلیل مضاعف سیستم نیروها

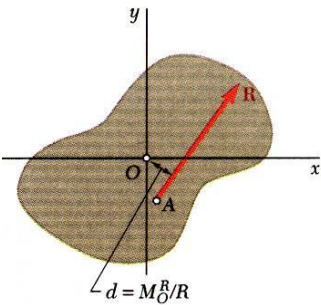


- سیستم نیروهای هم صفحه به یک سیستم نیرو و گشتاور حاصل از زوج نیرو تقلیل می یابد.

$$\vec{R} \text{ and } \vec{M}_O^R$$

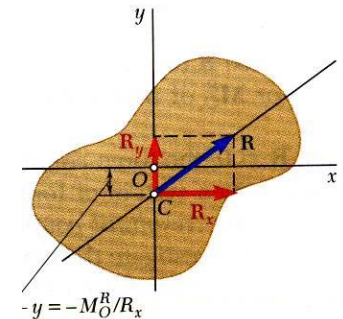
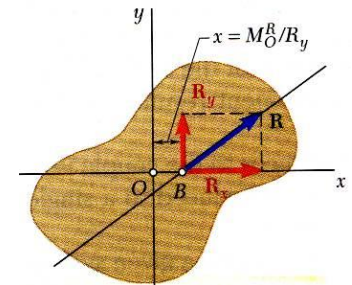
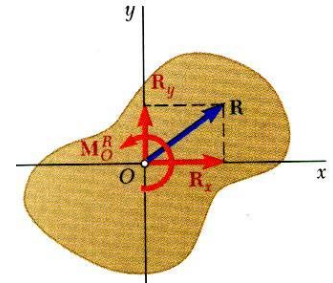


- این سیستم می تواند به یک تک نیرو نیز تقلیل داده شود در صورتی که نیرو در امتداد خط تأثیر خود به شکلی حرکت داده شود تا گشتاور آن حول نقطه O معادل \vec{M}_O^R شود.

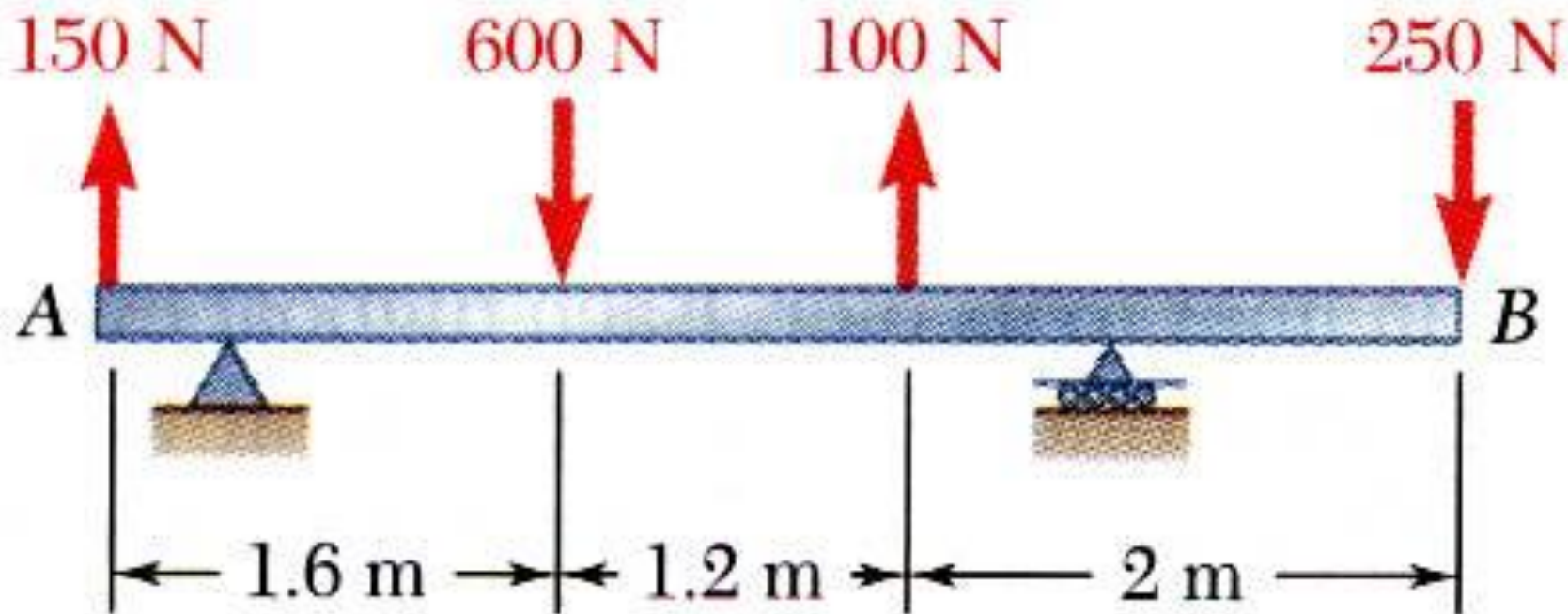


- در قالب مختصات دکارتی خواهیم داشت:

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

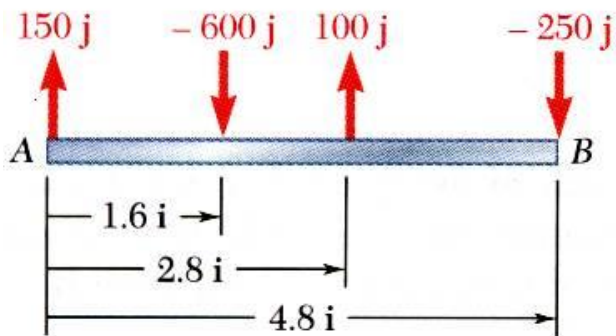


برای تیر نشان داده در شکل، سیستم نیروها را به الف) یک سیستم نیرو - زوج نیروی معادل در نقطه A،
ب) یک سیستم نیرو زوج نیروی معادل در B و ج) یک نیروی تنها تقلیل دهید.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۳-۵



$$\begin{aligned}\vec{R} &= \sum \vec{F} \\ &= (150 \text{ N})\vec{j} - (600 \text{ N})\vec{j} + (100 \text{ N})\vec{j} - (250 \text{ N})\vec{j}\end{aligned}$$

$$\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}$$



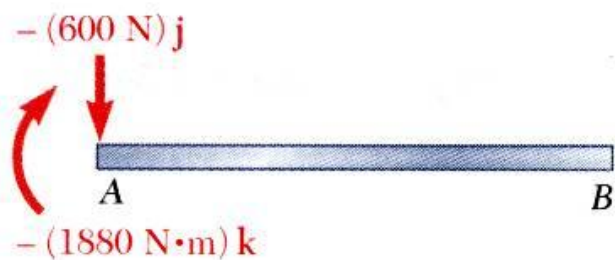
$$\begin{aligned}\vec{M}_A^R &= \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \\ &= (1.6\vec{i}) \times (-600\vec{j}) + (2.8\vec{i}) \times (100\vec{j}) \\ &\quad + (4.8\vec{i}) \times (-250\vec{j})\end{aligned}$$

$$\vec{M}_A^R = -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}$$



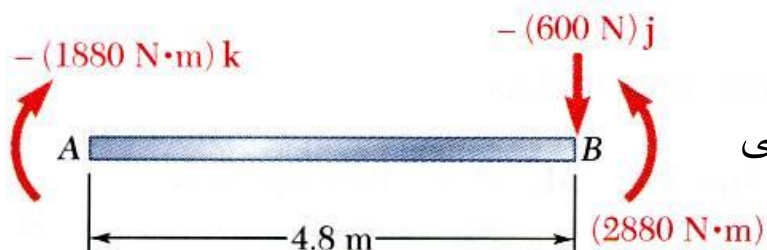
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۳-۵



با جابجایی سیستم نیرو زوج نیرو از نقطه A به نقطه B نیرو دستخوش تغییر نمیشود.

$$\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}$$

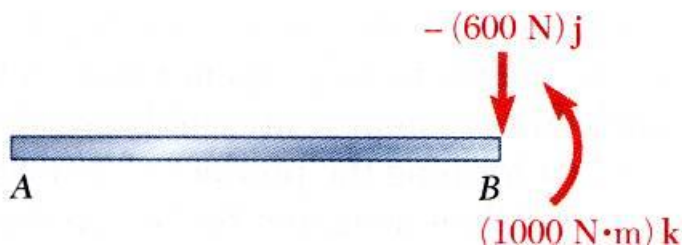


زوج نیرو در نقطه B معادل گشتاور سیستم نیرو زوج نیرویی است که در نقطه A به دست آمده است

$$\vec{M}_B^R = \vec{M}_A^R + \vec{r}_{B/A} \times \vec{R}$$

$$= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k} + (-4.8 \text{ m})\vec{i} \times (-600 \text{ N})\vec{j}$$

$$= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k} + (2880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}$$

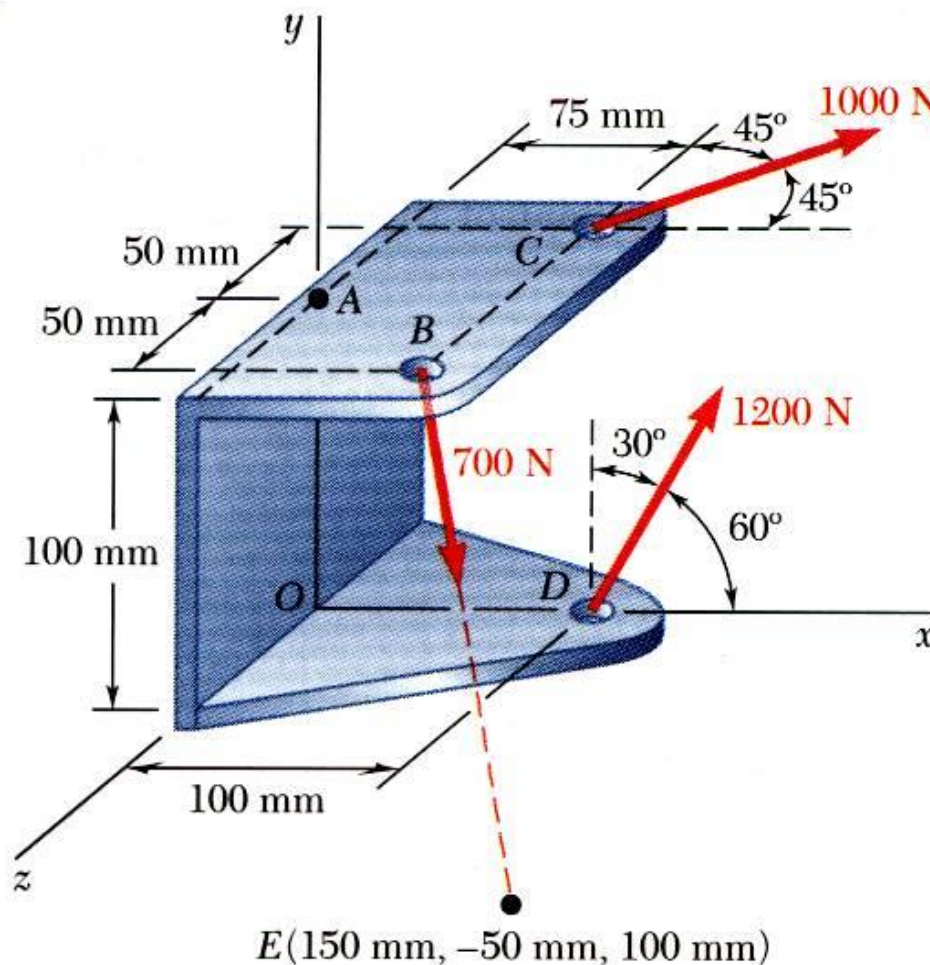


$$\vec{M}_B^R = +(1000 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

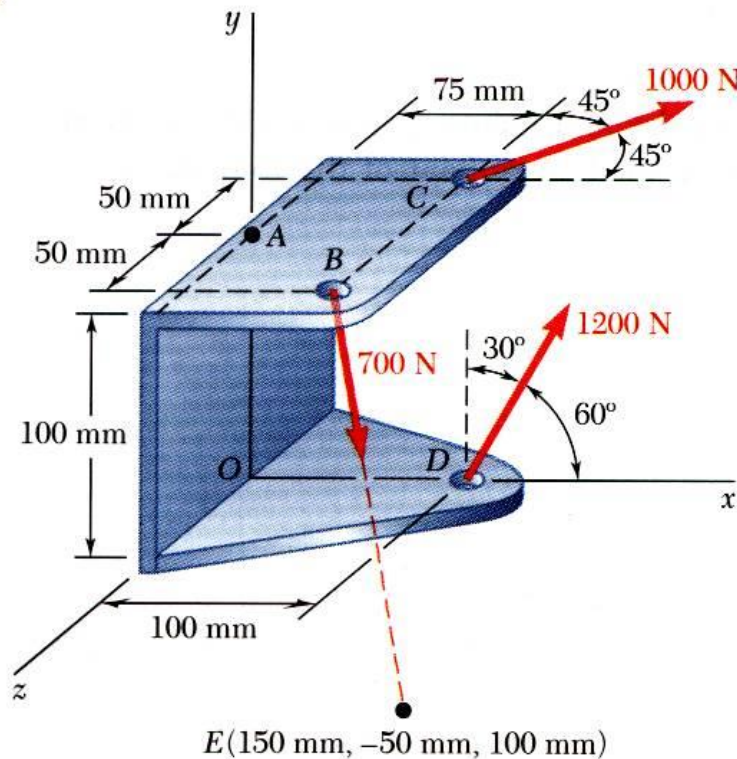
مسئله نمونه ۳-۶

سه کابل به قلاب شکل زیر متصل شده است. این سیستم از نیروها را به یک سیستم معادل نیرو و زوج نیرو در نقطه A تبدیل کنید



$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$



$$\vec{F}_B = (700 \text{ N})\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{E/B}}{r_{E/B}} = \frac{75\vec{i} - 150\vec{j} + 50\vec{k}}{175}$$

$$= 0.429\vec{i} - 0.857\vec{j} + 0.289\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = 300\vec{i} - 600\vec{j} + 200\vec{k} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_C = (1000 \text{ N})(\cos 45^\circ\vec{i} - \cos 45^\circ\vec{j})$$

$$= 707\vec{i} - 707\vec{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_D = (1200 \text{ N})(\cos 60^\circ\vec{i} + \cos 30^\circ\vec{j})$$

$$= 600\vec{i} + 1039\vec{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{r}_{B/A} = 0.075\vec{i} + 0.050\vec{k} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_{C/A} = 0.075\vec{i} - 0.050\vec{k} \text{ (m)}$$

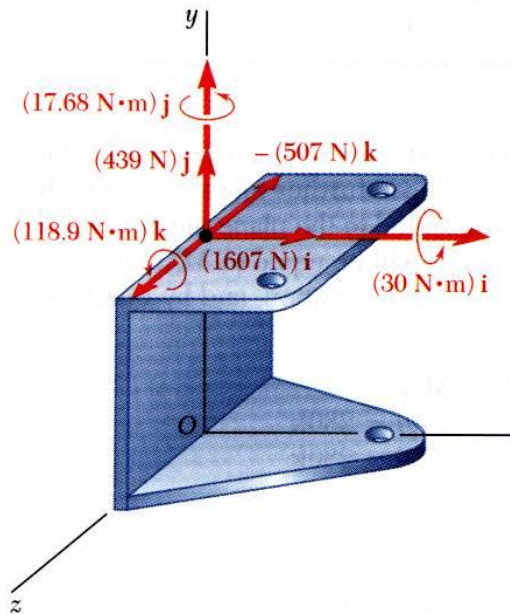
$$\vec{r}_{D/A} = 0.100\vec{i} - 0.100\vec{j} \text{ (m)}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۳-۶

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \sum \vec{F} \\ &= (300 + 707 + 600)\vec{i} \\ &\quad + (-600 + 1039)\vec{j} \\ &\quad + (200 - 707)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{R} = 1607\vec{i} + 439\vec{j} - 507\vec{k} \text{ (N)}$$



$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 45\vec{k}$$

$$\vec{r}_{C/A} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\vec{j}$$

$$\vec{r}_{D/A} \times \vec{F}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\vec{k}$$

$$\vec{M}_A^R = 30\vec{i} + 17.68\vec{j} + 118.9\vec{k}$$