

CHAPTER

2

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: **STATICS**

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Note:
Pouria Hajikarimi

Qazvin Islamic Azad
University

استاتیک ذرات

- هدف اصلی این فصل بررسی تأثیر نیروها روی ذرات است:

- جایگزینی چند نیرو که بر یک ذره اثر می کنند با یک نیروی معادل یا برآیند نیروها

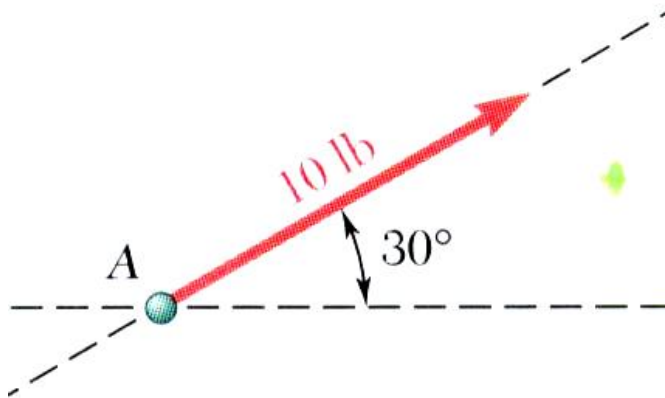
- رابطه بین نیروهایی که بر یک ذره اثر می کنند در حالت تعادل

- در این فصل مطالعه نیروها با این پیش زمینه در نظر گرفته می شود که اندازه و شکل اجسام تأثیر قابل توجهی بر معادلات تعادل نداشته و می توان فرض کرد که کلیه نیروها تنها در یک نقطه اعمال می شوند.



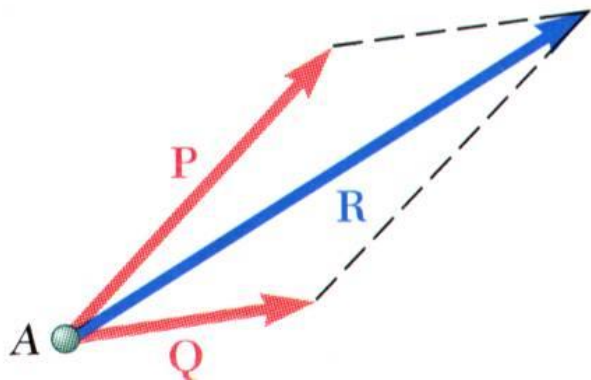
Vector Mechanics for Engineers: Statics

برآیند دو بردار



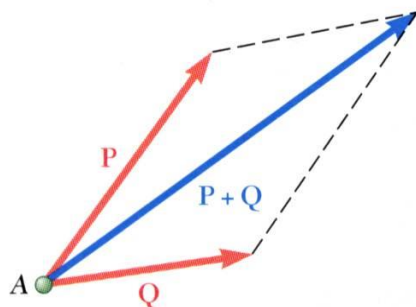
- نیرو: کنش یک جسم بر دیگری که به وسیله نقطه اعمال نیرو، اندازه نیرو، خط تأثیر و جهت نیرو مشخص می‌شود.

- مشاهدات آزمایشگاهی و تجربی نشان داده‌اند که تأثیر ترکیبی دو نیرو می‌تواند به وسیله یک نیروی برآیند نشان داده شود.



- برآیند دو نیرو معادل قطر متوازی الاضلاعی است که دو ضلع آن دو نیروی مورد نظر است.

- نیرو یک کمیت برداری است.



• بردار: پارامترهایی که با اندازه و جهتشان مشخص می‌شوند و بر اساس قاعده متوازی‌الاضلاع با یکدیگر جمع بسته می‌شوند. تغییر مکان، سرعت و شتاب مثال‌هایی از این نوع پارامترها هستند.

• اسکالر: پارامترهایی که تنها با اندازه‌شان مشخص می‌شوند مانند: جرم، حجم و دما.

• طبقه‌بندی بردارها:

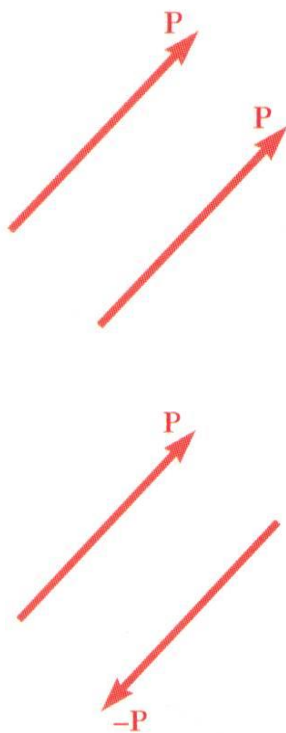
- بردارهای ثابت که نقطه اثر آنها به دقت تعریف شده و قابل تغییر نیست. تغییر نقطه اثر این نوع بردارها منجر به تغییر حل مسئله می‌شود.

- بردارهای آزاد که بدون محدودیت در فضا حرکت کرده بدون اینکه تغییر نقطه اثر آنها منجر به تغییر حل مسئله شود.

- بردارهای لغزان که می‌توانند در هر نقطه‌ای در طول خط اثر خود اعمال شوند.

• بردارهای معادل اندازه و جهت یکسان دارند.

• بردار منفی یک بردار برداری است در خلاف جهت بردار موردنظر و با اندازه یکسان.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

جمع و تفریق دو بردار

• قاعده ذوزنقه‌ای جمع بستن بردارها

• قاعده مثلثی جمع بستن بردارها

• قاعده کسینوس‌ها

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

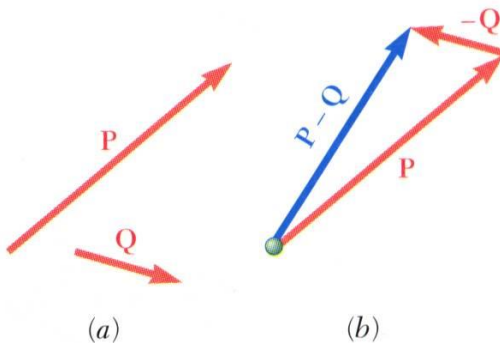
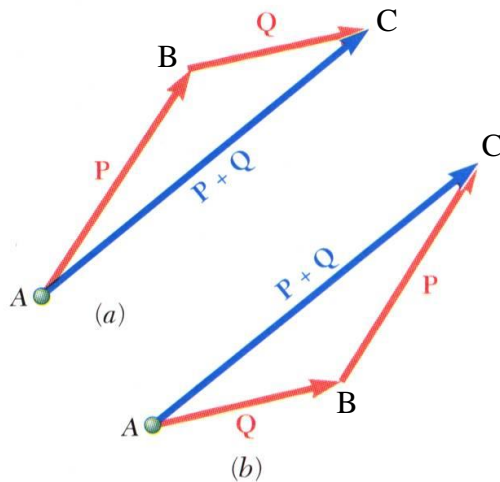
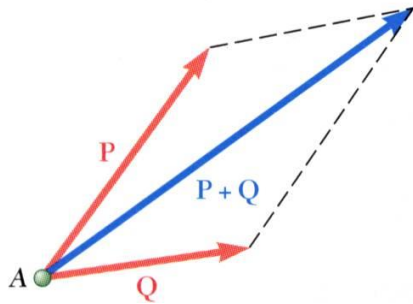
• قاعده سینوس‌ها

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} = \frac{\sin C}{P}$$

• جمع بردارها قابل جابجایی است

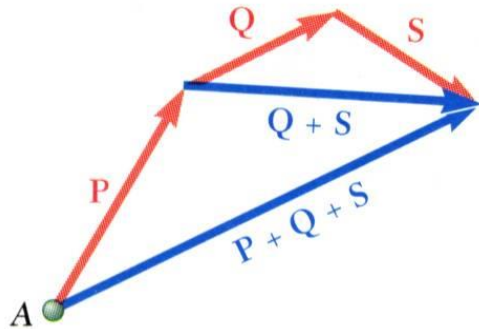
$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$$

• تفریق بردارها

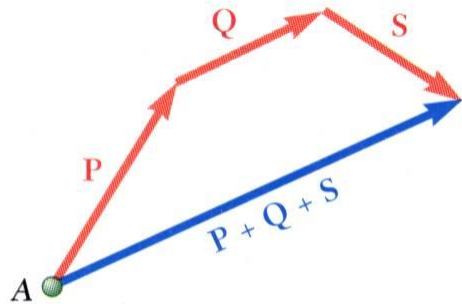


Vector Mechanics for Engineers: Statics

جمع بستن چند بردار

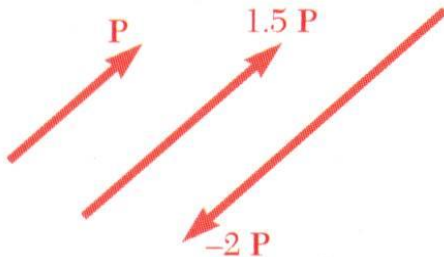


- جمع سه بردار یا بیشتر از طریق تکرار اعمال قاعده مثلثی انجام می شود.



- قاعده چندضلعی جهت اضافه کردن سه یا تعداد بیشتری بردار
- جمع بردارها دارای خاصیت انجمنی است

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{S} = (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{S} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{S})$$



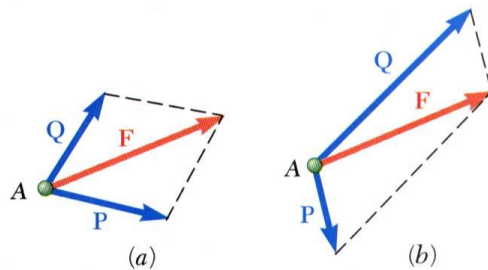
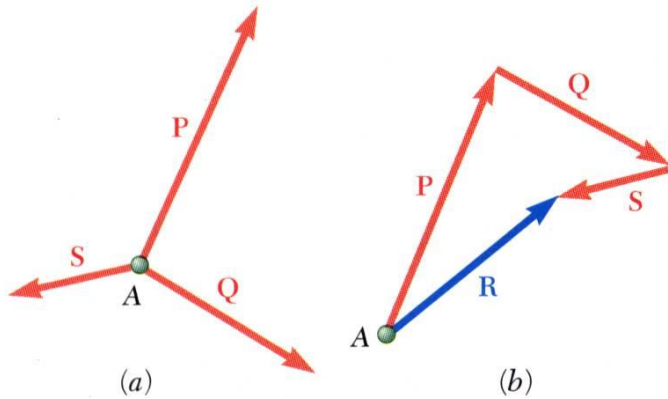
- ضرب یک بردار در یک اسکالر

Vector Mechanics for Engineers: Statics

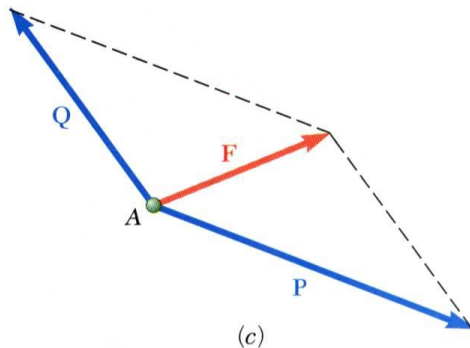
بر آیند چند نیروی همرس

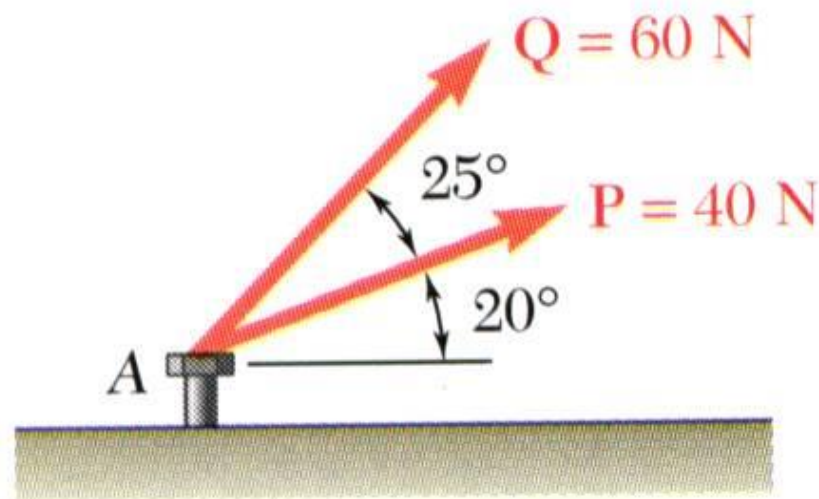
• نیروهای همرس: مجموعه‌ای از نیروها که همه از یک نقطه عبور می‌کنند.

• مجموعه‌ای از نیروهای همرس که بر یک ذره اعمال می‌شوند می‌توانند با بر آیند این نیروها جایگزین شوند که بردار حاصل جمع این نیروهاست.



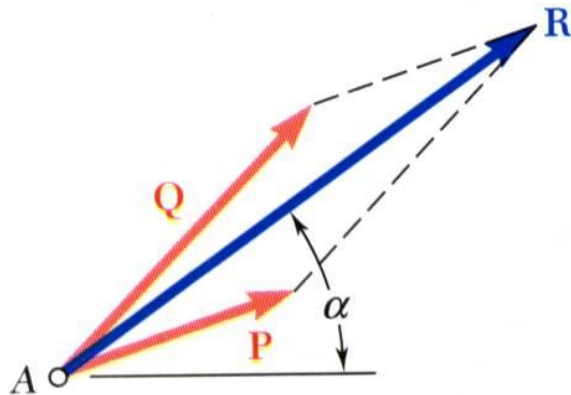
• مولفه‌های بردار نیرو: وابسته به دستگاه مختصاتی مورد استفاده و فضای حل مسئله، دو یا چند نیرو هستند که بر آیند آنها معادل نیروی موردنظر است.





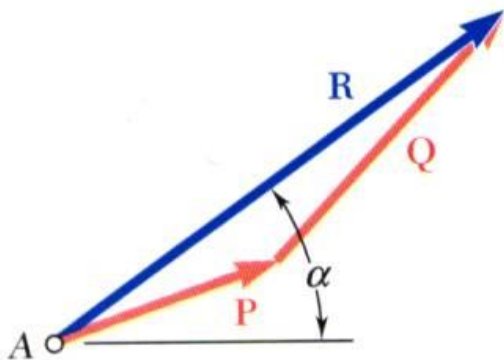
مطابق شکل روبرو، دو نیرو در نقطه A بر یک بولت اثر می‌کنند. برآیند دو نیرو را محاسبه کنید.





- حل ترسیمی: متوازی‌الاضلاعی که اضلاع آن معادل P و Q هستند با مقیاس مناسب ترسیم می‌شود. مقدار و جهت بردار برآیند با توجه به قطر متوازی‌الاضلاع قابل تعیین خواهد بود.

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ$$



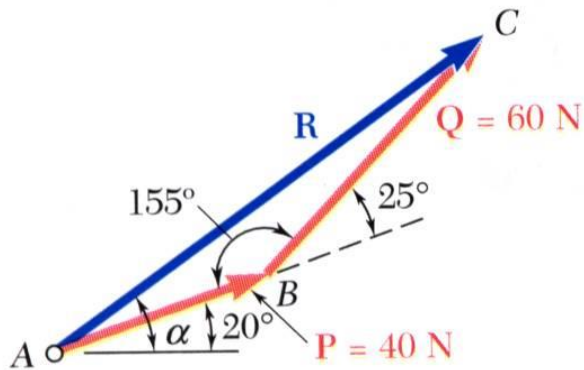
- حل ترسیمی: مثلثی با اضلاع P و Q با مقیاس مناسب ترسیم می‌شود. اندازه و جهت ضلع سوم تعیین‌کننده اندازه و جهت بردار برآیند خواهد بود.

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۱-۲

• با استفاده از قاعده کسینوس ها:



$$\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B \\ &= (40\text{N})^2 + (60\text{N})^2 - 2(40\text{N})(60\text{N})\cos 155^\circ \end{aligned}$$

$$R = 97.73\text{N}$$

با استفاده از قاعده سینوس ها

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R}$$

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin B \frac{Q}{R} \\ &= \sin 155^\circ \frac{60\text{N}}{97.73\text{N}} \end{aligned}$$

$$A = 15.04^\circ$$

$$\alpha = 20^\circ + A$$

$$\alpha = 35.04^\circ$$



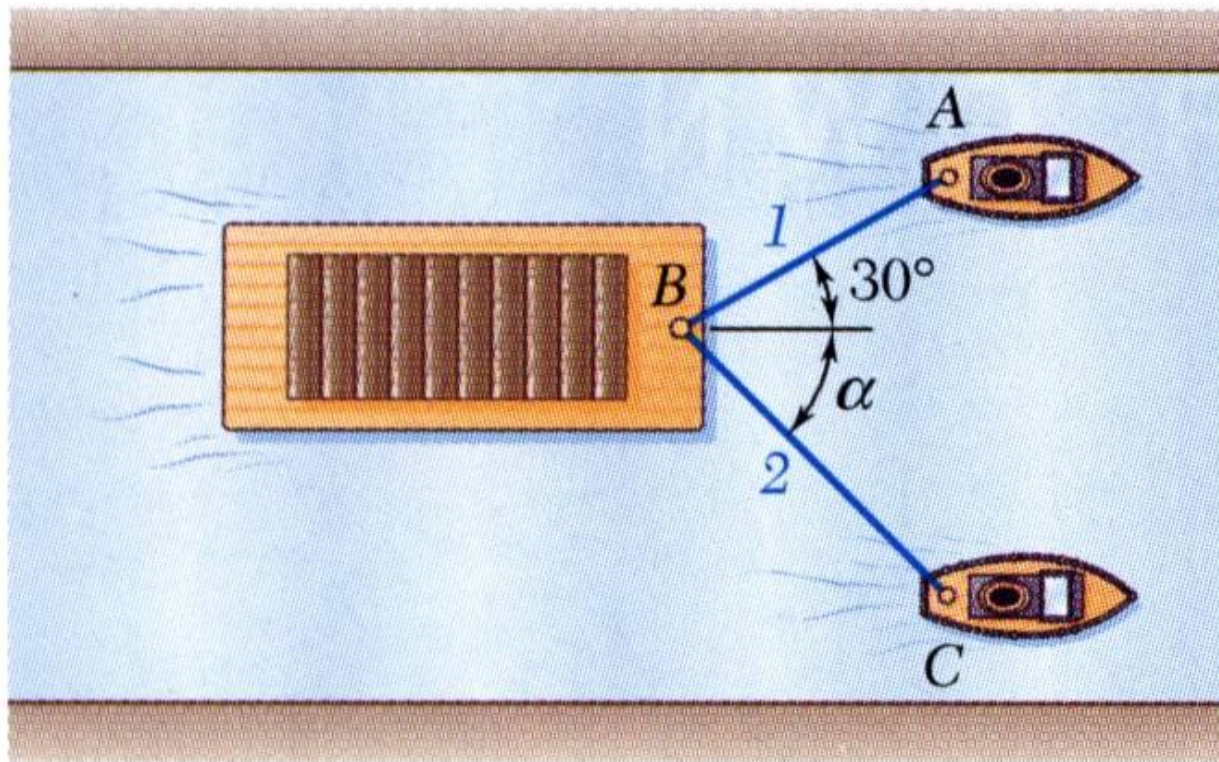
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۲-۲

الف) نیروی کششی در هر یک از طناب‌ها در صورتی که $\alpha = 45^\circ$

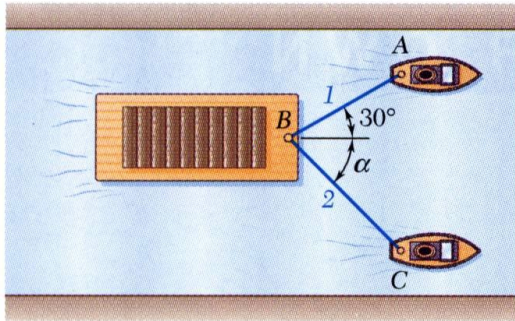
ب) مقدار زاویه α به منظور به دست آوردن کمترین مقدار کشش در طناب شماره ۲

یک قایق به وسیله دو یدک کش کشیده می‌شود. اگر برآیند نیرویی که توسط دو یدک کش به قایق وارد می‌شود ۵۰۰۰ پوند و در جهت محور افقی قایق باشد، مطلوبست:

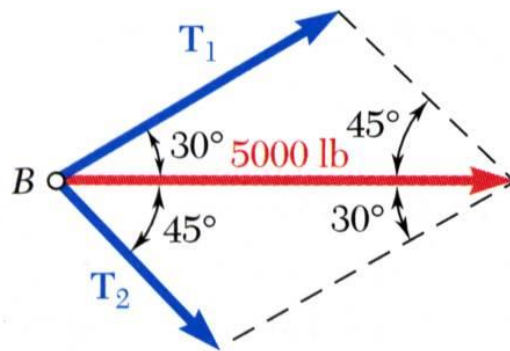


Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۲-۲

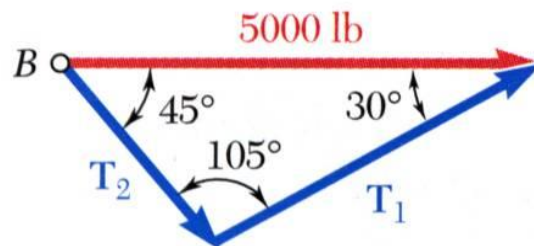


- حل ترسیمی: قاعده متوازی الاضلاع با توجه به اینکه جهت و اندازه نیروی برآیند مشخص است:



$$T_1 = 3700 \text{ lbf} \quad T_2 = 2600 \text{ lbf}$$

- قاعده مثلثی با استفاده از قاعده سینوس ها

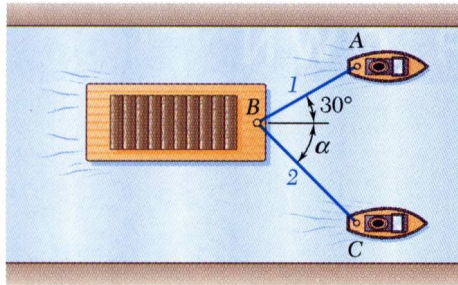


$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{5000 \text{ lbf}}{\sin 105^\circ}$$

$$T_1 = 3660 \text{ lbf} \quad T_2 = 2590 \text{ lbf}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۲-۲



- با استفاده از قاعده مثلثی و در نظر گرفتن اثر تغییرات زاویه α میتوان مقدار زاویه α را به منظور به دست آوردن کمترین مقدار کشش در طناب شماره ۲ محاسبه نمود:

- کمترین مقدار کشش در طناب شماره ۲ زمانی اتفاق می افتد که T_2 و T_1 بر یکدیگر عمود باشند:

$$T_2 = (5000 \text{ lbf}) \sin 30^\circ$$

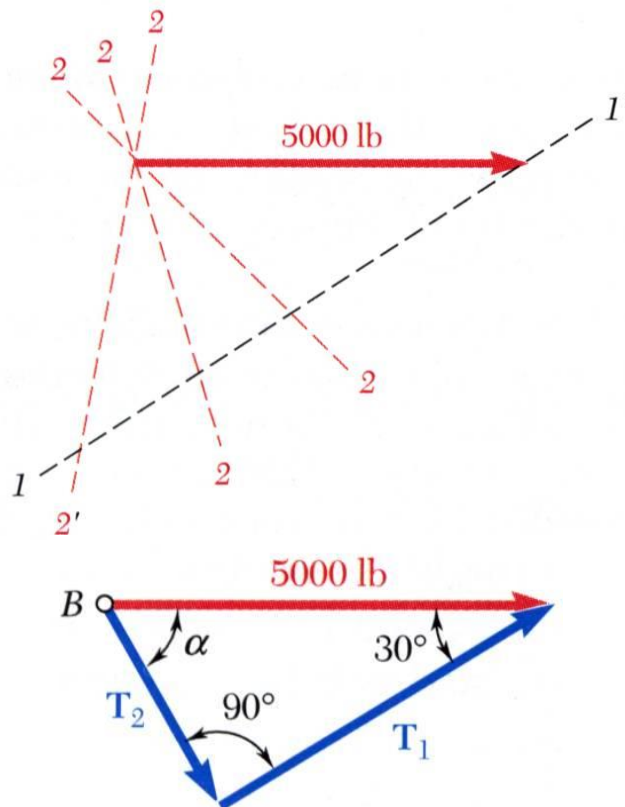
$$T_2 = 2500 \text{ lbf}$$

$$T_1 = (5000 \text{ lbf}) \cos 30^\circ$$

$$T_1 = 4330 \text{ lbf}$$

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه های نیرو: بردارهای یکه

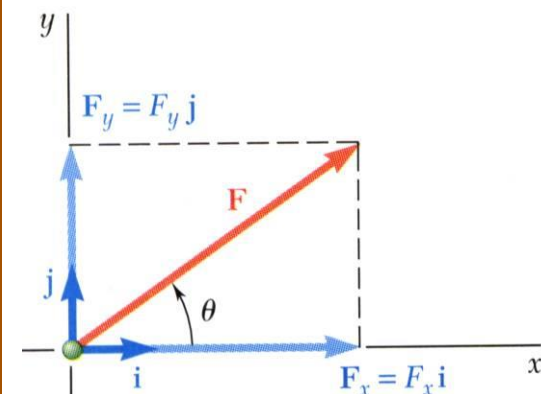
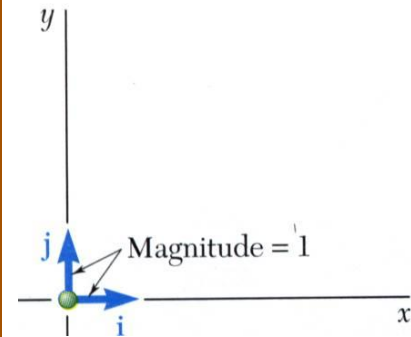
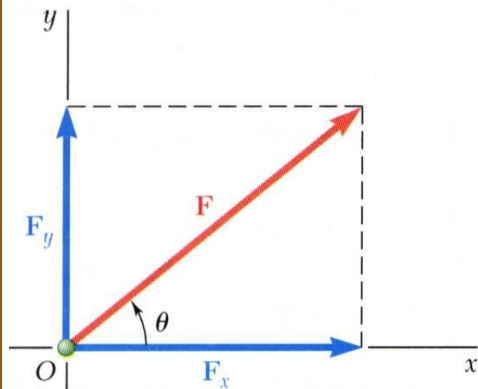
- هر نیرو می تواند به دو نیروی عمود بر یکدیگر در راستای افقی و عمودی تجزیه شود. این نیروها به عنوان مولفه های نیرو شناخته می شوند:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

- بردارهای یکه \vec{i} and \vec{j} عمود بر یکدیگر و به موازات محورهای x و y تعریف می شوند.

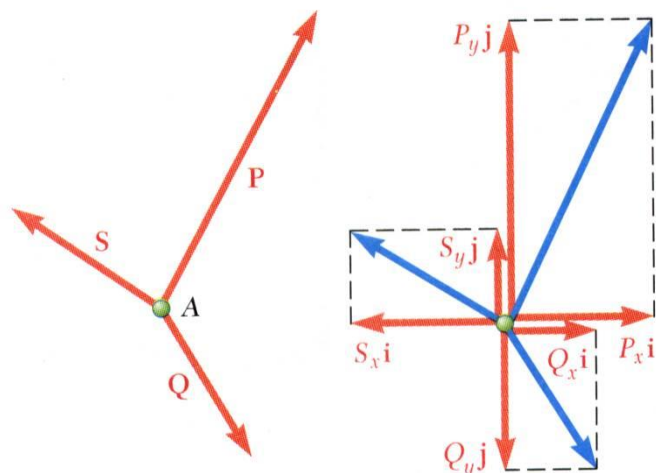
- مولفه های یک بردار ممکن است به صورت حاصلضرب بردارهای یکه در اندازه اسکالر مولفه های نیرو نیز بیان شوند:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

جمع بستن بردارها با استفاده از مولفه‌های سازنده

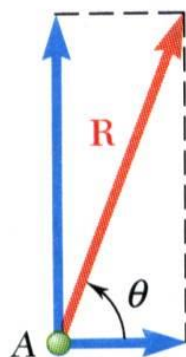
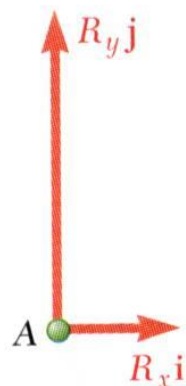


- برای پیدا کردن برآیند سه یا تعداد بیشتری از نیروهای هم‌رسم:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$

- می‌توان هر بردار را به مولفه‌های تشکیل‌دهنده اش تجزیه کرد:

$$\begin{aligned} R_x \vec{i} + R_y \vec{j} &= P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + S_x \vec{i} + S_y \vec{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \vec{i} + (P_y + Q_y + S_y) \vec{j} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} R_x &= P_x + Q_x + S_x & R_y &= P_y + Q_y + S_y \\ &= \sum F_x & &= \sum F_y \end{aligned}$$

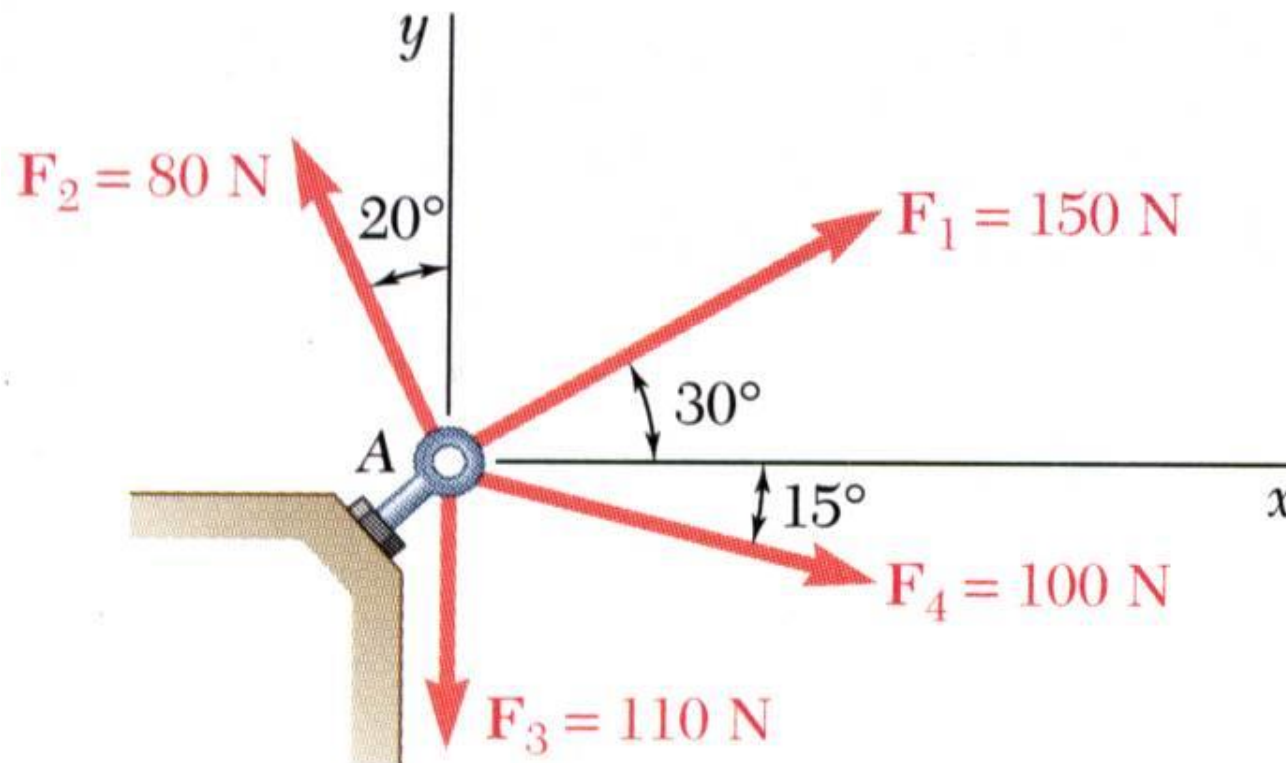
- برای پیدا کردن اندازه و جهت بردار برآیند داریم:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۲-۳

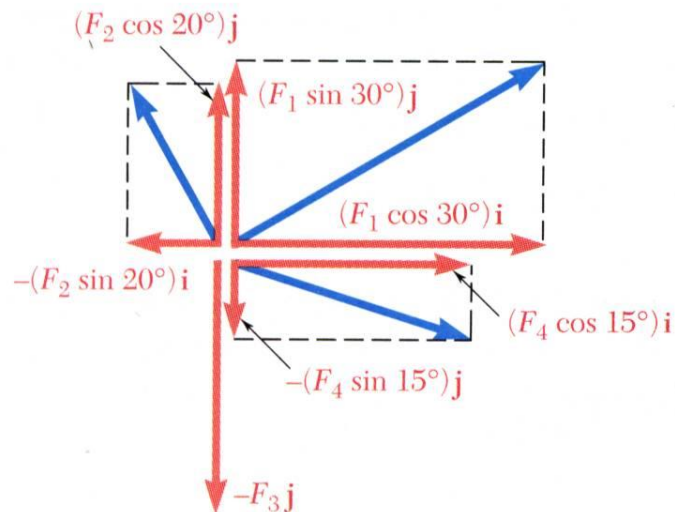
چهار نیرو بر یک بولت در نقطه A اثر می‌کنند. برآیند نیروهای وارده را تعیین کنید.



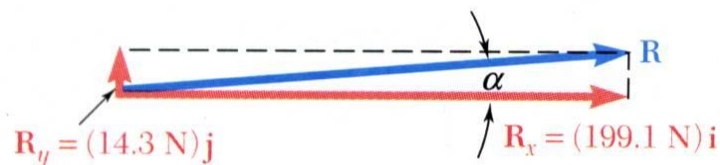
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۲-۳

- تجزیه هر یک از بردارها به مولفه‌های سازنده:



force	mag	x - comp	y - comp
\vec{F}_1	150	+129.9	+75.0
\vec{F}_2	80	-27.4	+75.2
\vec{F}_3	110	0	-110.0
\vec{F}_4	100	+96.6	-25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$



- محاسبه مولفه‌های نیروی برآیند با استفاده از جمع بستن مولفه‌ها در راستای x و y
- محاسبه مقدار و جهت نیروی برآیند:

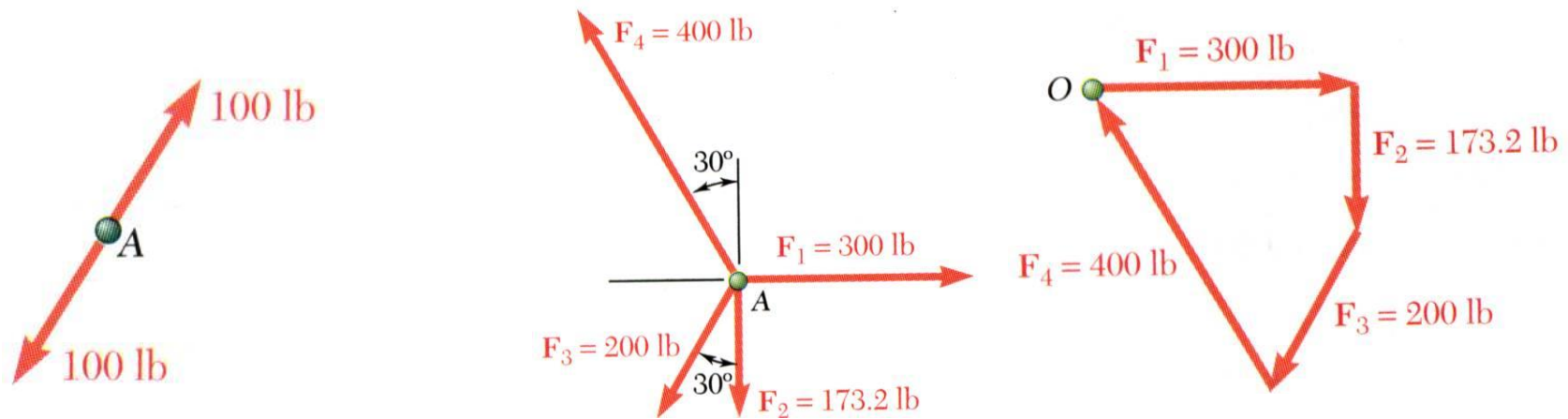
$$R = \sqrt{199.1^2 + 14.3^2}$$

$$R = 199.6 \text{ N}$$

$$\tan \alpha = \frac{14.3 \text{ N}}{199.1 \text{ N}}$$

$$\alpha = 4.1^\circ$$

- زمانی که برآیند کلیه نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد، ذره در حالت تعادل است.
- قانون اول نیوتن: اگر برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد، ذره ساکن خواهد ماند یا با سرعت ثابت و در مسیر مستقیم به حرکت خود ادامه خواهد داد.



- ذره ای که تحت تأثیر سه یا تعداد بیشتری نیرو است:
 - حل ترسیمی که منجر به یک چندضلعی بسته شود.
- ذره ای که تحت تأثیر دو نیرو است:
 - اندازه یکسان

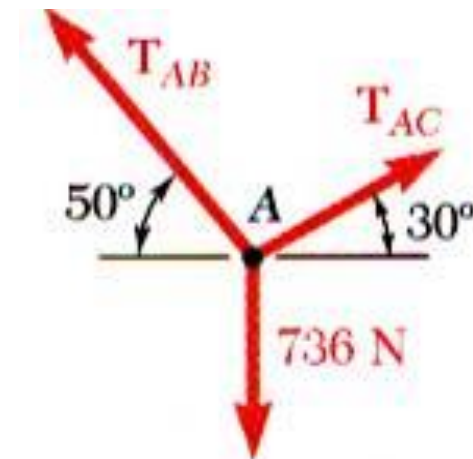
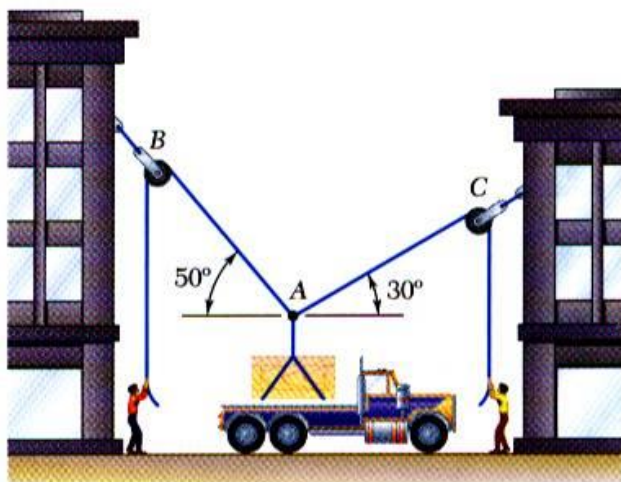
- خط تأثیر یکسان
- در دو جهت متفاوت

- حل جبری با جواب صفر $\vec{R} = \sum \vec{F} = 0$

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

دیاگرام جسم آزاد



دیاگرام فضایی: نمایشی از شرایط فیزیکی
مسأله

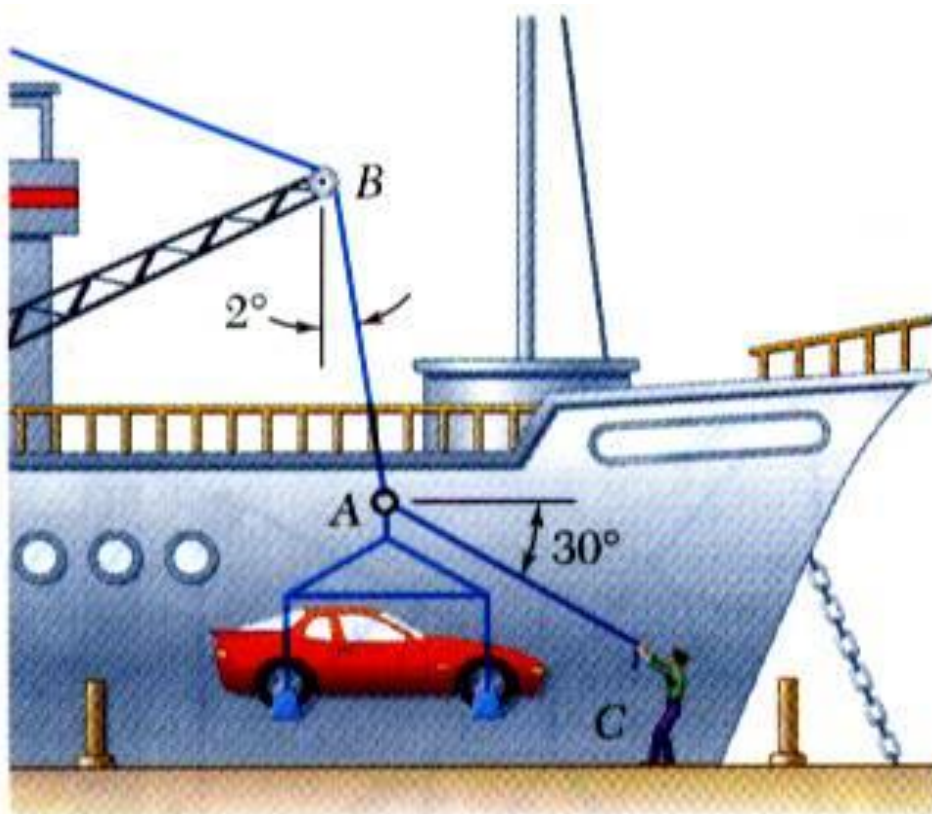
دیاگرام جسم آزاد: نمایشی از نیروهای وارد به
ذره مورد نظر



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۲-۴

در زمان تخلیه یک کشتی باری، اتومبیلی به وزن ۳۵۰۰ پوند به وسیله یک کابل نگهداشته شده است. طنابی به این کابل بسته شده و کشیده می شود. کشش در طناب را محاسبه کنید.



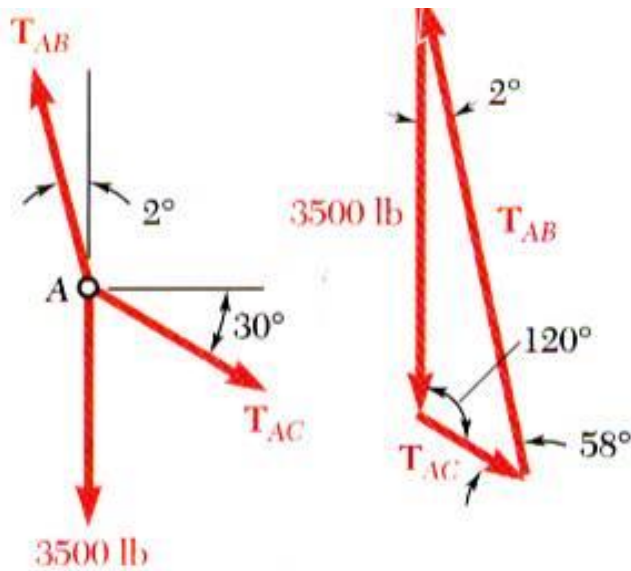
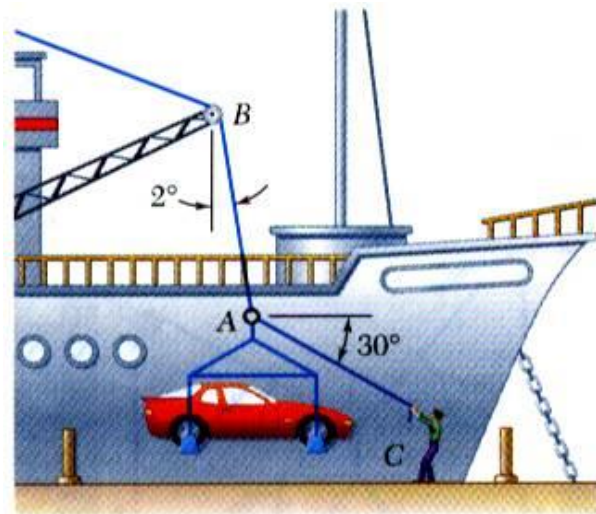
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۲-۴

• دیاگرام جسم آزاد در نقطه A ترسیم می شود:

• شرایط تعادل اعمال می شود:

• نیروهای مجهول محاسبه می شود



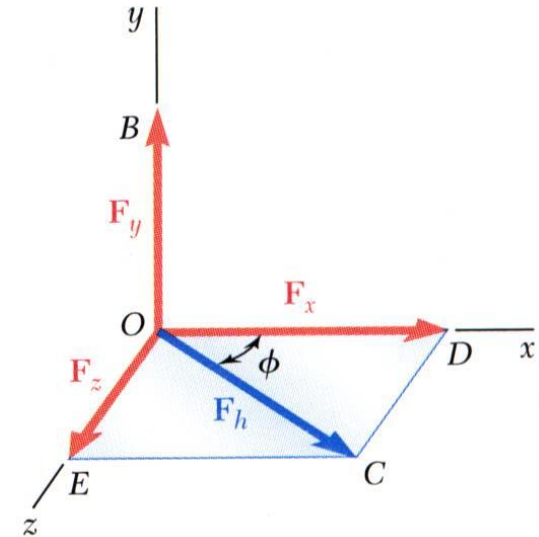
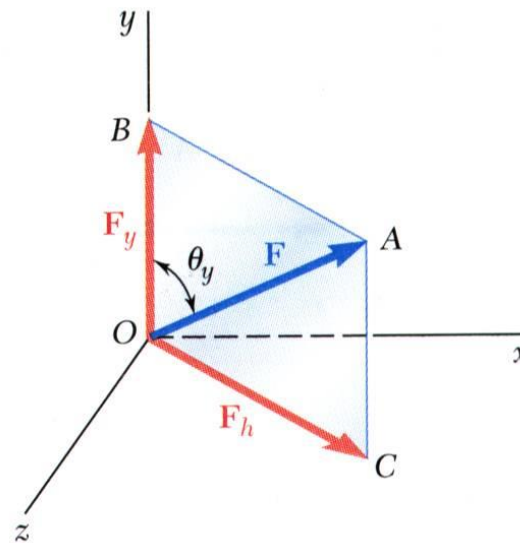
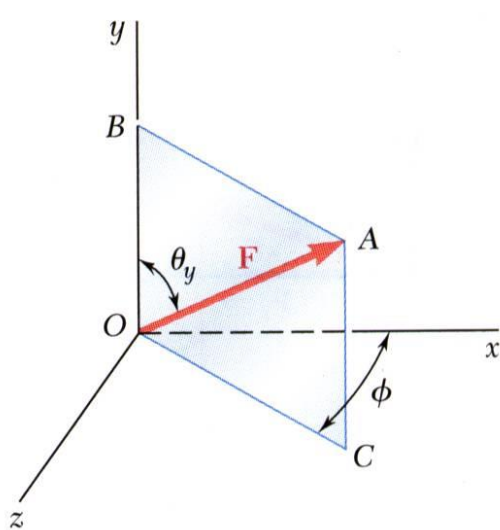
$$\frac{T_{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{3500 \text{ lb}}{\sin 58^\circ}$$

$$T_{AB} = 3570 \text{ lb}$$

$$T_{AC} = 144 \text{ lb}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه‌های نیرو در فضای سه بعدی



$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_h = F \sin \theta_y$$

$$F_x = F_h \cos \phi$$

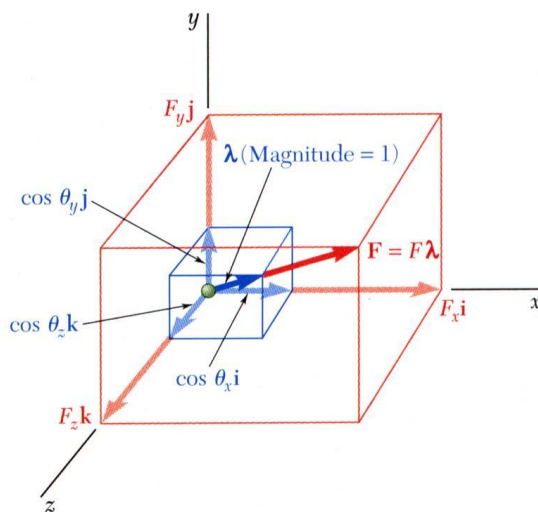
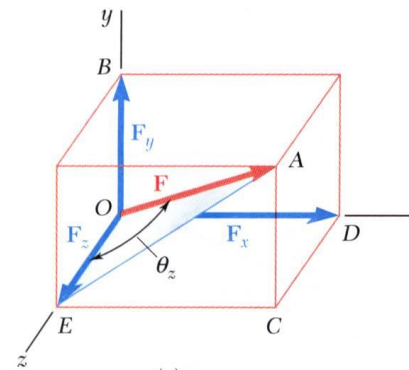
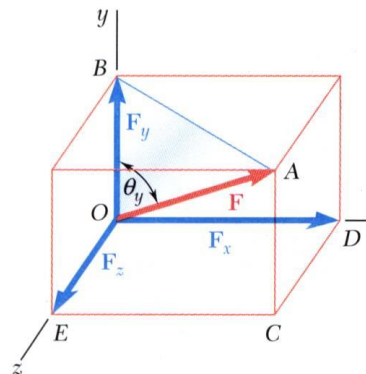
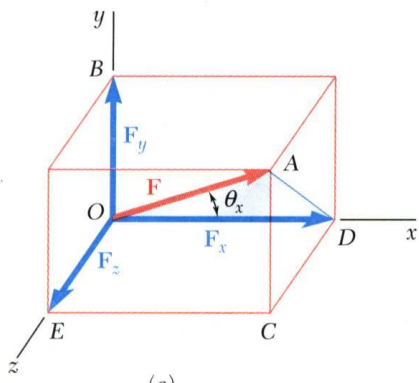
$$= F \sin \theta_y \cos \phi$$

$$F_y = F_h \sin \phi$$

$$= F \sin \theta_y \sin \phi$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه‌های نیرو در فضای سه بعدی



$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$= F (\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$

$$= F \vec{\lambda}$$

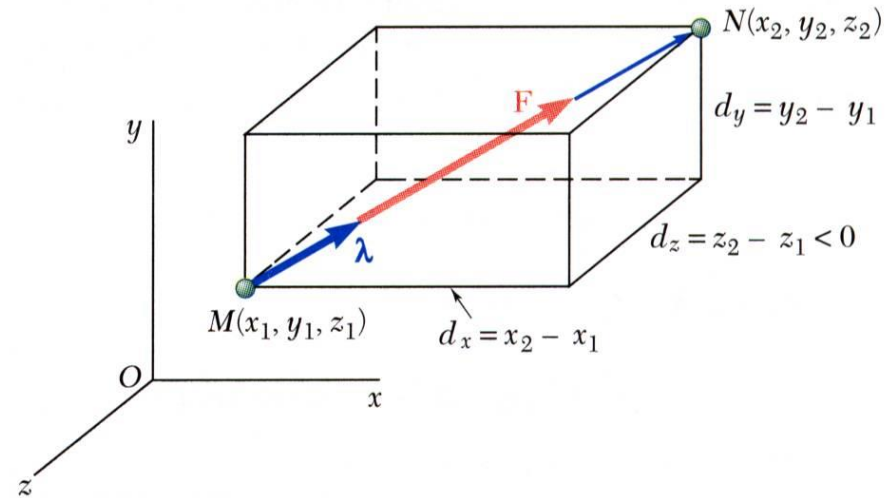
$$\vec{\lambda} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه‌های نیرو در فضای سه بعدی

جهت نیرو با محل دو نقطه تعریف می‌شود:

$$M(x_1, y_1, z_1) \text{ and } N(x_2, y_2, z_2)$$



\vec{d} = vector joining M and N

$$= d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}$$

$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$$

$$\vec{F} = F \vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{d} (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})$$

$$F_x = \frac{F d_x}{d} \quad F_y = \frac{F d_y}{d} \quad F_z = \frac{F d_z}{d}$$



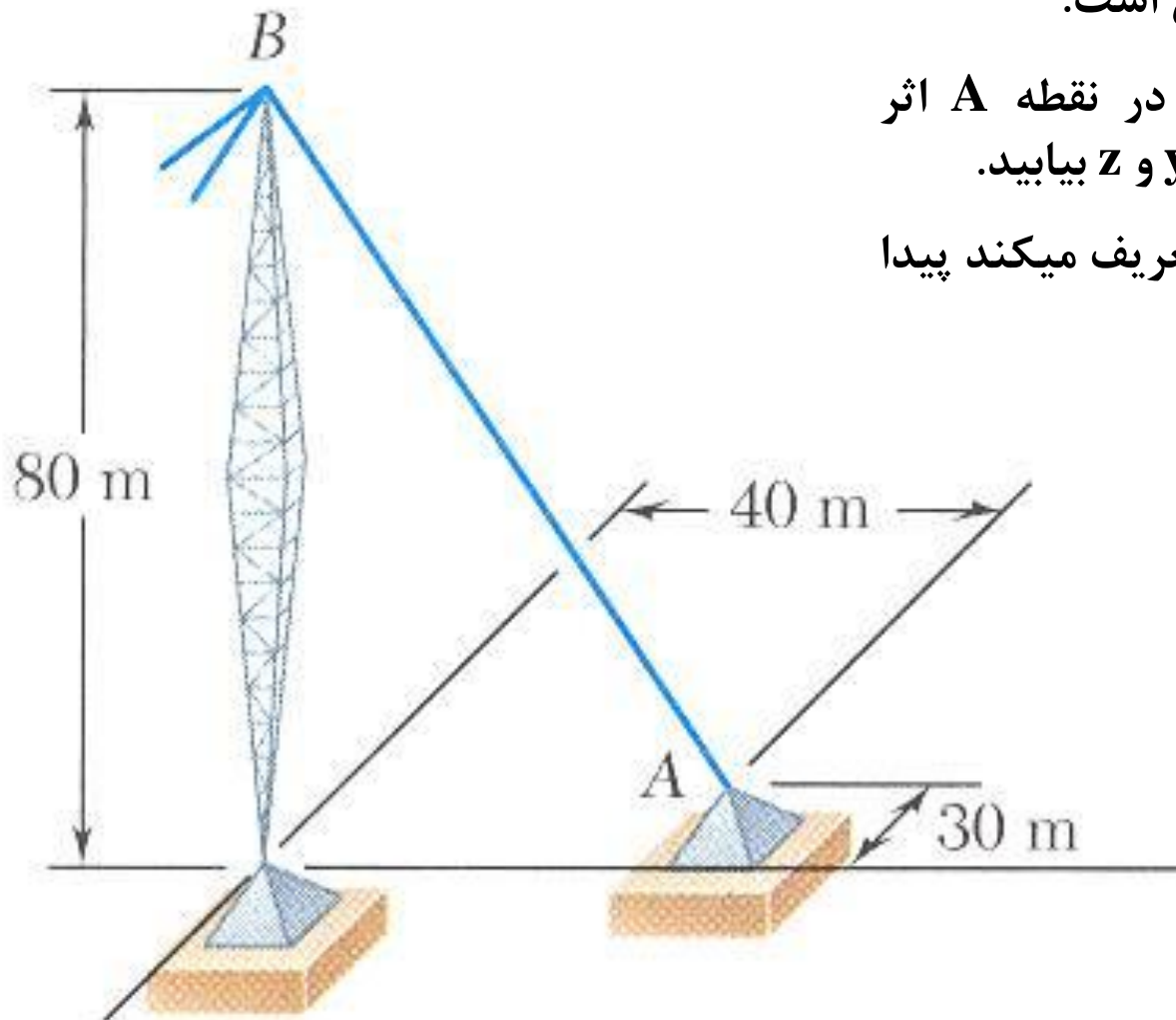
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۲-۵

تنش در کابل برابر ۲۵۰۰ نیوتن است.

الف) مولفه های نیرویی که در نقطه A اثر میکند را در سه جهت X و Y و Z بیابید.

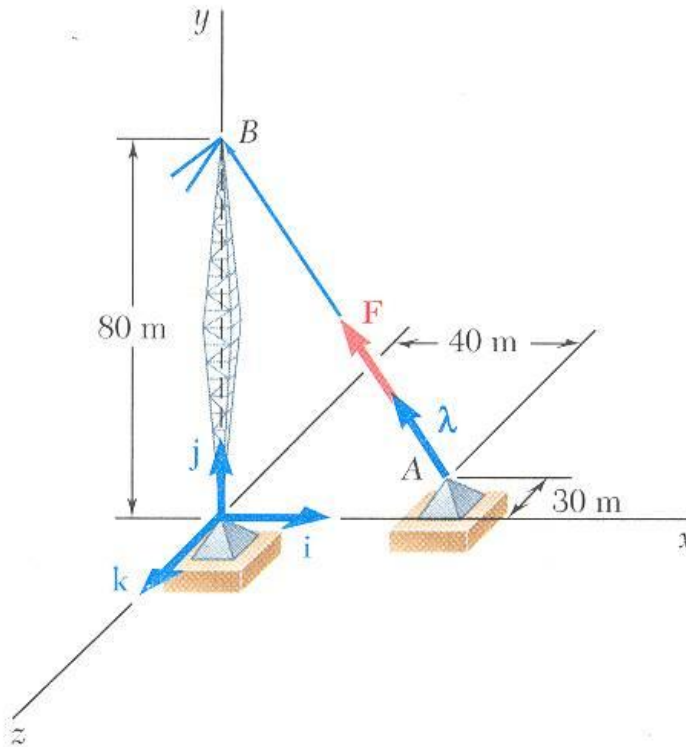
ب) زوایایی که جهت نیرو را تعریف میکند پیدا کنید.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۵-۲

- بردار یکه‌ای که از نقطه A به سمت نقطه B تعریف میشود را بیابید:



$$\overline{AB} = (-40\text{ m})\vec{i} + (80\text{ m})\vec{j} + (30\text{ m})\vec{k}$$

$$AB = \sqrt{(-40\text{ m})^2 + (80\text{ m})^2 + (30\text{ m})^2} = 94.3\text{ m}$$

$$\vec{\lambda} = \left(\frac{-40}{94.3}\right)\vec{i} + \left(\frac{80}{94.3}\right)\vec{j} + \left(\frac{30}{94.3}\right)\vec{k} = -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

- مولفه های نیرو را بیابید:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F\vec{\lambda} \\ &= (2500\text{ N})(-0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}) \\ &= (-1060\text{ N})\vec{i} + (2120\text{ N})\vec{j} + (795\text{ N})\vec{k}\end{aligned}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه ۲-۵

- لازم به توجه است که مولفه‌های بردار یکه در جهت کسینوس‌های زوایای بردار با محورهای مختصات هستند. این زوایا به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}\vec{\lambda} &= \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k} \\ &= -0.424 \vec{i} + 0.848 \vec{j} + 0.318 \vec{k}\end{aligned}$$

$$\theta_x = 115.1^\circ$$

$$\theta_y = 32.0^\circ$$

$$\theta_z = 71.5^\circ$$

