

بست ؟
 • محاسبی توزیع تنش زیر وجود دارد. اگر نیروی دایمی حجمی اعمال شود، این حجم در حال متولد است.

حل : با استفاده از روابط تعادل برای محور

$$\sigma = \begin{bmatrix} C_1 x + C_2 y & C_5 x - C_1 y & 0 \\ C_5 x - C_1 y & C_5 x + C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تنش داده شده بررسی شود.

در عدم حضور نیروهای حجمی داریم :

$$\sigma_{xx} \cdot n_x = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + 0 = 0 \rightarrow C_1 - C_1 = 0 \rightarrow 0.K$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + 0 = 0 \rightarrow 0 + C_5 = 0 \rightarrow C_5 = 0$$

در صورتی که مقدار C_5 برابر صفر باشد، حجم در حال متولد نخواهد بود.

• بررسی کنید که آیا حجم با توزیع تنش زیر در حال متولد است یا نه ؟

حل : صحت روابط تعادل حجم دوبعدی داریم :

$$\sigma = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} x^2 y^2 & x y^3 \\ x y^3 & -\frac{1}{4} y^4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \rightarrow -3 x y^2 + 3 x y^2 = 0 \rightarrow 0.K$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \rightarrow -y^3 + y^3 = 0 \rightarrow 0.K$$

با توجه به صحت بودن توزیع تنش در

محولات تعادل، حجم در حال متولد می باشد.

• پیش تنش در محاسبی به صورت زیر می باشد. مطلوب است فرم دایمی تنش بر حسب x و y ؟ لازم به توضیح

$$\sigma_x = a x^2 + b y^2 \quad \text{kg/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = -2 b y^2$$

$$\tau_{xy} = -4 a y$$

می باشد که حجم در حال متولد است.

حل:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \rightarrow 2ax + 4a = 0 \rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \rightarrow -4by + 4y = 0 \rightarrow \boxed{b = 1.0}$$

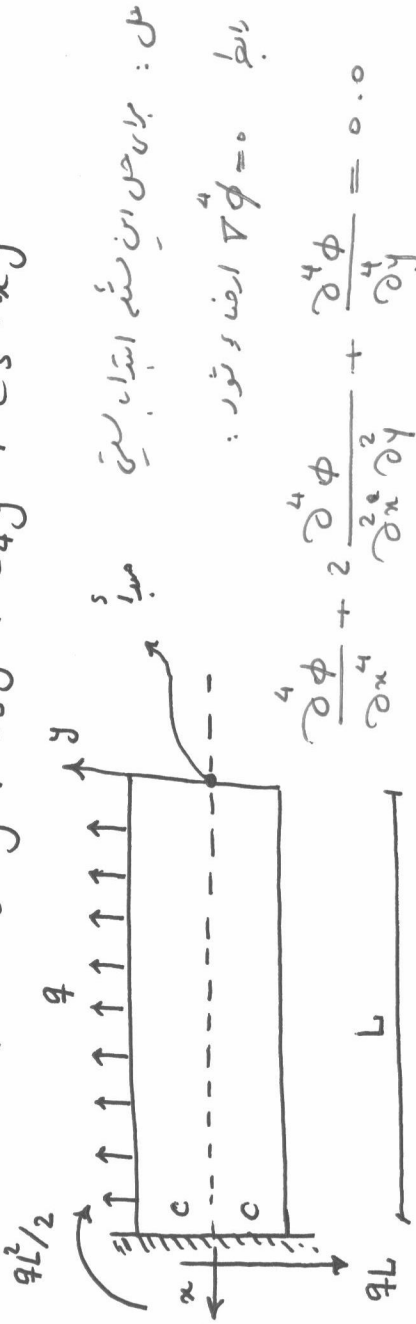
بنابراین مقادیر دست آمده داریم:

$$\phi_x = -2x^2 + y^2$$

$$\phi_y = -2y^2$$

برای تعیین تنش اری داده شده، ضرایب C_i را تعیین کنید.

$$\phi = C_1 x^2 + C_2 x^2 y + C_3 y^3 + C_4 y^5 + C_5 x^2 y^3$$



حل: برای حل این مسئله ابتدا باید

رابطه $\nabla^4 \phi = 0$ ارضا شود:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0.0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0.0, \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 120 C_4 y, \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 12 C_5 y$$

$$\rightarrow 120 C_4 y + 2 \cdot 12 C_5 y = 0 \rightarrow \boxed{C_5 = -5 C_4} \quad (1)$$

در ادامه بعضی روابط مربوط به تنش σ_x را بر حسب ضرایب C_i برای ابعاد L و h تعیین می‌کنیم:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6 C_3 y + 20 C_4 y^3 + 6 C_5 x^2 y \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2 C_1 + 2 C_2 y + 2 C_5 y^3 \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} = -2 C_2 x - 6 C_5 x y^2 \quad (4)$$

در صورتی شرایط مرزی سکته را اعمال می‌کنیم:

$$\text{if } x=0.0 \rightarrow \overline{b_x}=0.0 \rightarrow 6C_3 \cdot y + 20C_4 y^3 = 0.0 \rightarrow \boxed{C_3 = -\frac{20}{6} C_4^2 \cdot C_4} \quad (5)$$

$$\text{if } x=L \rightarrow \int_{-c}^c \tau_{xy} \cdot 1 \cdot dy = -qL \rightarrow \int_{-c}^c -(2C_2 x + 6C_5 x y^2) dy = -qL$$

$$\rightarrow \boxed{C_2 \cdot C + C_5 \cdot C^3 = \frac{qL}{4}} \quad (2)$$

$$\text{if } x=L \rightarrow \int_{-c}^c \overline{b_x} \cdot 1 \cdot dy \cdot y = -\frac{qL^2}{2} \rightarrow \int_{-c}^c (6C_3 y + 20C_4 y^3 + 6C_5 y^2) y dy = -\frac{qL^2}{2}$$

$$\rightarrow (2C_3 y^3 + 4C_4 y^5 + 2C_5 x^2 y^3) \Big|_{-c}^c = -\frac{qL^2}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{4C_3 \cdot C^3 + 8C_4 \cdot C^5 + 4C_5 \cdot L^2 C^3 = -\frac{qL^2}{2}} \quad (7)$$

$$\text{if } y = \pm c \rightarrow \tau_{xy} = 0.0 \rightarrow -2C_2 x - 6C_5 x c^2 = 0.0 \rightarrow \boxed{C_2 = -3C_5 \cdot C^2} \quad (8)$$

$$\text{if } y=c \rightarrow \overline{b_y} = q, \text{ if } y=-c \rightarrow \overline{b_y} = 0.0 \rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 \cdot C + 2C_5 \cdot C^3 = q \\ 2C_1 - 2C_2 \cdot C - 2C_5 \cdot C^3 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\boxed{C_1 = \frac{q}{4}} \quad (9)$$

در نهایت شرایط مرزی داریم:

در صورتی که شرایط مرزی (8) و (9) داریم:

$$2C_1 + 2(-3C_5 \cdot C^2)C + 2C_5 \cdot C^3 = q \rightarrow 2C_1 - 4C_5 \cdot C^3 = q$$

$$\rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{q}{4}}$$

با توجه به مقدار C_5 و مقدار (A) ، ضریب C_2 بدست می آید:

$$C_2 = -3C_5 \cdot C^2 = \frac{3}{8} \frac{q}{C}$$

با توجه به مقدار C_5 ، ضریب C_4 نیز از مقدار (1) بدست می آید.

$$C_4 = -\frac{1}{5} C_5 \rightarrow C_4 = \frac{q}{40C^3}$$

ضریب C_3 نیز از مقدار (7) بدست می آید.

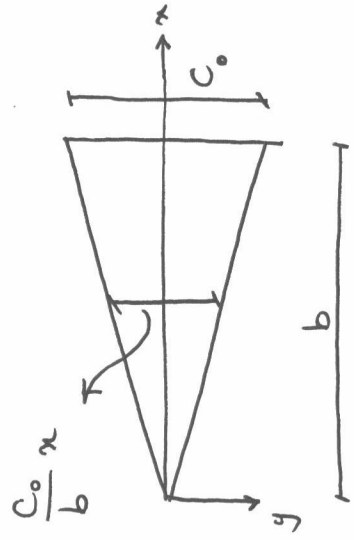
$$C_3 = -\frac{q}{20C}$$

• می‌توانیم با مقطع مستطین شکل زیر تحت اثر نیروی پیوسته T قرار داد. با فرض آنکه غوطه‌خورده در این مقطع

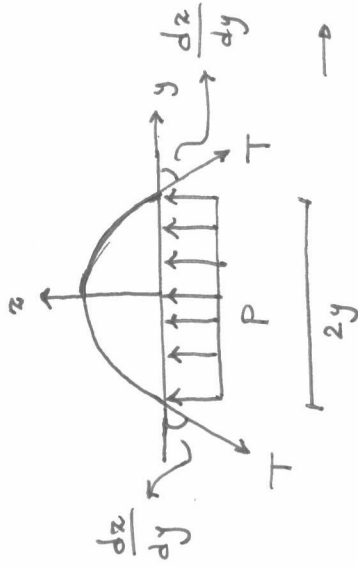
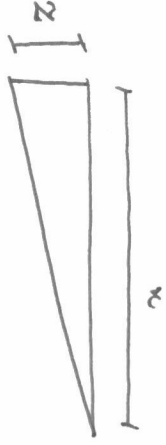
در هر x دلتا، سطحی متناسب با پهنای مقطع باشد. $\frac{C_0}{b} x$ را به عنوان دهنده نیروی پیوسته مقطع تقریباً برابر با:

$$T = -\frac{1}{12} G \theta b C_0^3$$

جانبی که θ زاویه پیچش واحد طول است.



حل: ابتدا عمل تغییر شکل یافته را رسم می‌کنیم.



به تصویر به شکل، معادله تعادل را می‌نویسیم:

$$\uparrow \text{ تعادل: } 2y \cdot P \cdot dx = -2T \cdot \frac{dz}{dy} \cdot dx$$

$$\rightarrow dz = -\frac{P}{T} \cdot y \cdot dy \rightarrow z = -\frac{P}{2T} y^2 + C$$

$$\rightarrow \text{for } y = \pm \frac{C_0}{2b} x \rightarrow z = 0 \rightarrow -\frac{P}{2T} \cdot \left(\frac{C_0^2}{4b^2} \cdot x^2 \right) + C = 0 \rightarrow C = \frac{P}{8T} \frac{C_0^2}{b^2} x^2$$

با جایگذاری مقدار فوق در رابطه z داریم:

$$z = \frac{P}{2T} \left(\frac{C_0^2}{4b^2} x^2 - y^2 \right)$$

از طرفی داریم:

$$J = 2 \int_A x^2 dA = 2 \int_0^b \int_{-\frac{C_0}{2b} x}^{\frac{C_0}{2b} x} \left(\frac{C_0^2}{4b^2} x^2 - y^2 \right) dy \cdot dx$$

استداسیب: J انتگرال گیری می‌کنیم. به دلیل تقارن داریم:

$$\int_{-\frac{C_0}{2b}x}^{\frac{C_0}{2b}x} \left(\frac{C_0^2}{4b^2} \cdot x^2 - y^2 \right) dy = 2 \left(\frac{C_0^2}{4b^2} x^2 y - y^3 \cdot \frac{1}{3} \right) \Big|_{-\frac{C_0}{2b}x}^{\frac{C_0}{2b}x}$$

$$= \frac{C_0^3}{4b^3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) x^3 = \frac{C_0^3}{6b^3} \cdot x^3$$

حال با استفاده از نسبت $\frac{C}{C_0}$ داریم:

$$\int_{-b}^b \frac{C_0^3}{6b^3} \cdot x^3 dx = \frac{C_0^3}{6b^3} \cdot \frac{1}{4} x^4 = \frac{b C_0^3}{24}$$

$$\rightarrow J = \frac{P}{2T} \cdot \frac{b C_0^3}{24} \quad , \quad T = G \cdot \theta \quad \rightarrow \quad T = G \cdot \theta \cdot \left(\frac{P}{T} \right) \cdot \frac{b C_0^3}{24} = \frac{G \theta}{12} b C_0^3$$

o.k

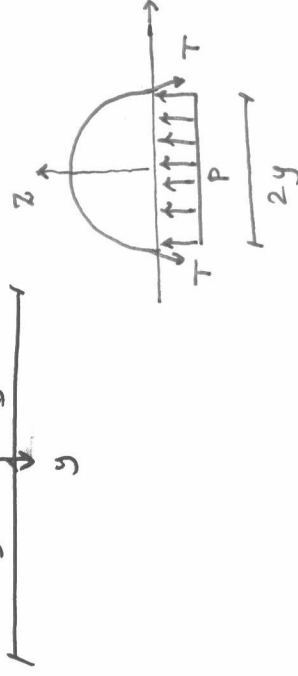
مطلوب است مقدار T برای مقطع زیر با استفاده از شبیه سازی کنید.



$$C = C_0 \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)$$

حل: ابتدا مقطع فعلی مقابل با حد فرضی برای θ قرار می دهیم.

رسم می کنیم:



لذا بطریقی متادل داریم:

$$2y \cdot P \cdot dx = -2T \cdot \frac{dx}{dy} \cdot dx$$

$$\rightarrow dx = -\frac{P}{T} \cdot y dy \rightarrow \boxed{x = -\frac{P}{2T} y^2 + C}$$

$$\text{for } y = \pm \frac{c}{2} \rightarrow x = 0 \rightarrow C = \frac{P}{2T} \left(\frac{C_0^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \right)^2$$

$$\rightarrow C = \frac{P}{2T} \left(\frac{C_0^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^2 \right) \rightarrow z = \frac{P}{2T} \left(\frac{C_0^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^2 - y^2 \right)$$

$$J = 2 \int_A z \, dA = 2 \int_{-C/2}^b \int_{-C/2}^{C/2} z \, dx \, dy = \frac{P}{T} \int_{-b}^b \int_{-C/2}^{C/2} \left(\frac{C_0^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^2 - y^2 \right) dy \, dx$$

بافتتاح الیبرکی قسمت سبب ی و دسیم x داریم :

$$\int_{-C/2}^{C/2} \left(\frac{C_0^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^2 - y^2 \right) dy = 2 \cdot \frac{C_0^3}{8} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^3 = \frac{C_0^3}{6} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^3$$

$$I = \int_{-b}^b \frac{C_0^3}{6} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^3 dx = \frac{C_0^3}{3} \int_{-b}^b \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^3 dx = \frac{C_0^3}{3} \int_0^b \left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{3x^4}{b^4} - \frac{x^6}{b^6} \right) dx$$

$$I = \frac{16}{105} C_0^3 b \rightarrow J = \left(\frac{P}{T} \right) I = 2 \cdot \frac{16}{105} C_0^3 b = \frac{32 C_0^3 b}{105}$$

باجه اسف اول نوک داریم :

$$T = G \theta J = \frac{32 b C_0^3}{105} G \theta \quad \text{و.ک}$$

• میزان جابه‌جایی داده شده مفروض است. مطلوب است:

$$u = (4x - y + 3z)^{mm}$$

$$v = (x + 7y - 4z)^{mm}$$

$$w = (-3x + 4y + 4z)^{mm}$$

الف - کرنش‌ها اصلی و جهت آنها

ب - کرنش‌ها اصلی مؤلفه دوپایه

حل: برای حل ابتدا مؤلفه‌های کرنش را در صورت x ، y و z بدست آوریم. با استفاده از روابط تقریبی داریم:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 4.0 \quad \text{and} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 7.0 \quad \text{and} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 4.0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1 + 1 = 0.0 \quad \text{and} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 3 - 3 = 0.0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -4 + 4 = 0.0$$

• با توجه به اینکه مقادیر کرنش در هر سه جهت ۰ می‌باشد،

$$\epsilon_{\text{max}} = \frac{\gamma_{ij}}{\epsilon_i - \epsilon_j} = 0.0 \rightarrow \theta = 0.0 \quad (\text{جهت محور})$$

لذا تغییر کرنش بدست آمده اصلی هستند.

ب - مؤلفه‌های دوپایه برای کرنش‌های نیز همانند کرنش‌های سه‌پایه می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y - \epsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z - \epsilon_m \end{bmatrix}$$

مؤلفه‌های دوپایه

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3} = 5.0$$

$$\begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{xy} = \sin^{-1} \frac{1}{(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 38.585^\circ \times \frac{\pi}{180} = 0.67$$

2.8818

$$\vec{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k} \rightarrow \vec{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\begin{cases} |AB| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{29} & \begin{cases} u_A = 1.59 \text{ mm} & v_A = -0.71 & w_A = 5.73 \\ u_B = 1.25 \text{ mm} & v_B = 1.60 & w_B = 0.06 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Delta x = 2, \Delta y = -4, \Delta z = 3$$

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z = (3x^2)(2 \times 10^{-2}) + (4y + 6yz + z^2)(-4 \times 10^{-2}) + (2y^3 + 2yz)(3 \times 10^{-2}) = -2.30 \text{ mm} \end{cases}$$

for A

$$\begin{cases} \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z = (y + z + 6xz)(2 \times 10^{-2}) + (x + 4yz)(-4 \times 10^{-2}) + (x + 3x^2 + 2y)(3 \times 10^{-2}) = 2.08 \text{ mm} \end{cases}$$

point

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z = 0 + (4y^3 + 15y^2)(-4 \times 10^{-2}) + (3)(3 \times 10^{-2}) = -19.75 \text{ mm}$$

for B

$$\Delta u = 1.34 \text{ mm} \quad \begin{cases} x'_A = x_A + u_A + \Delta u_A = 2.29 \text{ mm} \\ x'_B = x_B + u_B + \Delta u_B = 7.59 \text{ mm} \\ y'_A = y_A + v_A + \Delta v_A = 5.37 \text{ mm} \\ y'_B = y_B + v_B + \Delta v_B = 5.04 \text{ mm} \\ z'_A = z_A + w_A + \Delta w_A = -15.02 \text{ mm} \\ z'_B = z_B + w_B + \Delta w_B = 2.15 \text{ mm} \end{cases}$$

point

$$\Delta v = 3.44 \text{ mm}$$

$$\Delta w = 0.09 \text{ mm}$$

$$\vec{AB}' = (x'_B - x'_A) \vec{i} + (y'_B - y'_A) \vec{j} + (z'_B - z'_A) \vec{k}$$

$$= 5.30 \vec{i} - 0.33 \vec{j} + 17.17 \vec{k}$$

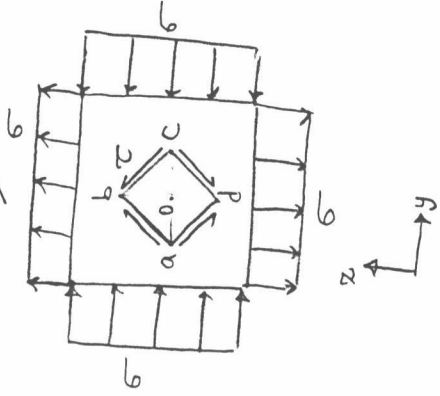
$$|\vec{AB}'| = \sqrt{5.30^2 + (-0.33)^2 + (17.17)^2} = 17.972 \text{ mm}, |AB| = \sqrt{29} = 5.385 \text{ m}$$

$$\Delta L = L_{AB'} - L_{AB} \approx 12.60 \text{ mm}$$

اثبات رابطه تنش / کرنش برشی با استفاده از دو ثابت E و ν .

حل: هدف اثبات رابطه
$$\gamma = \frac{2\tau(1+\nu)}{E}$$

برای حل کل المان مانند شکل مقابل تحت تنش یکسانی σ داریم در نظر بگیریم.



المان c را برین آوردیم و تحلیل می کنیم.

حال با استفاده از تناسب مشابهی داریم:

$$\tan\left(45 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \epsilon_y}{1 + \epsilon_x} \quad (I)$$

از طرفی برای ϵ_y و ϵ_x داریم:
$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{1}{E}(-\sigma - \nu\sigma) = \frac{-(1+\nu)\sigma}{E}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{E}(\sigma - \nu(-\sigma)) = \frac{\sigma(1+\nu)}{E} \rightarrow \epsilon_y = -\epsilon_x \quad (II)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$$

$$\rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \tan\frac{\gamma}{2}}{1 + \tan\frac{\gamma}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \gamma/2}{1 + \gamma/2} \quad (III)$$

با فرض کوچک بودن γ داریم:

$$\frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \epsilon_y}{1 + \epsilon_x} \rightarrow \frac{\gamma}{2} = \epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma(1+\nu)$$

بمقایسه I با III داریم:

$$\rightarrow \gamma = \frac{2(1+\nu)\sigma}{E} \quad (IV)$$

$$\sum F_n = 0 \rightarrow \tau A \cos 45^\circ = \sigma A \sin 45^\circ$$

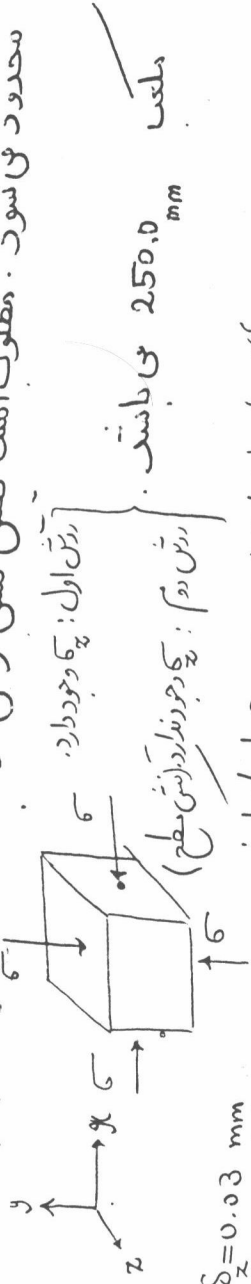
حال به بدنه تحت کشش در این حالت $\sigma = \tau$ است لذا

المان مثلث شکل داریم:

طلس از جنس فولاد $v = 0.25$ ، $E = 2 \times 10^5 \text{ مپا}$ ، تحت اثر عسا ، تلفحات در چهار وجه .

۰.۰۳ mm

محدود می شود. مطلوب است تعیین کنش نرمال در جهت $\vec{e}$ (در صورت وجود). ابعاد


$$S_N = 0.03 \text{ mm}$$
$$L = 250.0 \text{ mm}$$

روش اول حل: با توجه داده ها مسئله ابتدا مقدار مجاز درع را پیدا کنیم.

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{L} = \frac{0.03}{250} = 1.2 \times 10^{-4} = 0.12 \times 10^{-3} = 12.0 \times 10^{-5}$$

اصل استغاده از روابط موجود برای بررسی ها داریم:

$$\epsilon_x = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6^x & 6^y & 6^z \\ 6^y & 6^x & 6^z \\ 6^z & 6^z & 6^z \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \frac{1}{4} (c_1^2 - c_2^2)$$

بوصفہ ملو اخت بولش دروحدی لاری لاری :

نہایت سے زیادہ

$\frac{0.03}{250.0}$ - در این صورت یک نشن سازی
 میل فرض به سلف در میزان ع در حجب -

[illegible]

دارد ولی رئیسش یعنی این سس و خودخواه است

$$\sigma_{xx} = 67 = -30.0 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{6^2 - 2 \times 6} = \frac{1}{6^2 + \frac{2 \times 30.0}{4}} = \frac{1}{6^2 + 15}$$

بمريض، منديل، ع. به قمار، الشتره دارم:

$$\frac{0.03}{250.0} = \frac{1}{2 \times 10^5} \left(\frac{6}{2} + \frac{15}{15} \right)$$

$$\rightarrow \frac{6x + 15}{6x + 15} = \frac{24 \times 3}{25 \times 3} = \frac{24}{25} = 96\%$$

نقطه ای از حسی بارگذاری شود. دارای تنش فشاری داشته باشد. مطلوب است تعیین:

الف - تنش‌های اصلی و جهت‌های اصلی

ب - تنش برشی ماکزیمم و جهت آن

پ - مؤلفه‌ی هیدرواستاتیک و برش خالص

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1200.0 & 800.0 & 0.0 \\ 800.0 & 2000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1500.0 \end{bmatrix}$$

حل: الف - $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0.0$ and $\sigma_{zz} = 1500.0$ σ_{xz} کاملاً صفر است.

حال برای یافتن تنش‌های اصلی ویر رابطی مربوط به تنش مسطح را برای ماتریس زیر حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 1200.0 & 800.0 \\ 800.0 & 2000.0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \sigma_{xx} = 1200.0 \\ \sigma_{yy} = 2000.0 \\ \tau_{xy} = 800.0 \end{matrix}$$

if $\tau = 0.0$

$$\tan 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

$$\rightarrow \tan 2\alpha = \frac{-2 \times 800}{2000 - 1200} = -2 \rightarrow \alpha = -31.72^\circ$$

$$\rightarrow \sigma = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha = 705.57$$

تنش اصلی دیگر

رای یابن تنش اصلی سوم از تساوی رابطی مقابل استفاده می‌کنیم.

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \rightarrow \sigma_3 = 4700 - 705.57 - 1500 = 2494.43$$

تنس داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 2494.43 \\ \sigma_2 = 1500.0 \\ \sigma_3 = 705.57 \end{array} \right.$$

جهت یافتن جهات اصلی باسنی رابطی $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ n_i

برای صرف تکرار داده و بردارها ویژه را پیدا کنیم.

حال ارضاش تاسم : $\sigma_1 = 6$ انفاه بی رسم لم :

$$\begin{bmatrix} -1294.43 & 800.0 & 0.0 \\ 800.0 & -494.43 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -994.43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \text{and} \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.0 \quad (2)$$

$$-994.43 n_3 = 0 \rightarrow n_3 = 0 \quad \checkmark \quad \begin{cases} -1294.43 n_1 + 800 n_2 = 0 \\ 800 n_1 - 494.43 n_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow n_2 = \frac{800}{494.43} n_1 = 1.618 n_1$$

$$\rightarrow n_1^2 + (1.618 n_1)^2 = 1.0 \rightarrow n_1^2 = 0.276 \rightarrow \begin{cases} n_1 = 0.526 \\ n_2 = 0.851 \\ n_3 = 0.0 \end{cases} \quad \text{برای } \sigma_1$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{bmatrix} -300 & 800.0 & 0.0 \\ 800.0 & -500 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \text{and} \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.0$$

$$\rightarrow n_1^2 = 1.0 - n_2^2 \quad \text{or} \quad n_2 = 1.0 - n_1^2$$

• برای $\sigma_2 = 6$ داریم :

$$-300 n_1 + 800 n_2 = 0.0$$

نقطه در حالتی جواب دارد هر دو تا مؤلفه n_1 و n_2 صفر نباشند.

$$800 n_1 - 500 n_2 = 0.0$$

$$\begin{cases} n_1 = 0.0 \\ n_2 = 0.0 \\ n_3 = 1.0 \end{cases}$$

لذا $n_3 = 1.0$ بردارم.

$$\begin{bmatrix} 494.43 & 800.0 & 0.0 \\ 800.0 & 1294.43 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 794.43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

• برای $\sigma_3 = 6$ داریم :

$$\begin{cases} n_3 = 0.0 \\ n_2 = 0.526 \\ n_1 = -0.851 \end{cases}$$

ب- تنش ها برشی تا درصد می نیم از رابطه زیر حاصل می شوند :

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_2 &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) \\ \tau_3 &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\end{aligned}$$

لذا بیش برشی max از رابطه عدد بدست می آید.

$$\tau_{max} = \left| \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) \right| = \left| \frac{1}{2}(705.57 - 2494.43) \right| = 894.43$$

• جهت تنش برشی بالا به مقدار $\frac{\pi}{4}$ باشد که عمودی اصلی اختلاف دارد.

پ- مولفه های دورات تنگ برشی حاصل

همچنین بر اساس تنش اصلی σ_1 و σ_3 در مولفه های تنش اصلی σ_1 و σ_3 به صورت زیر مولفه های دورات تنگ σ_1 و σ_3 به دست می آید.

از طرفی به دانشم در رابطه زیر تنش σ_1 و σ_3 به دست می آید:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \rightarrow \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \rightarrow \sigma = \frac{4700}{3} = 1566.67$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 1200.0 & 800.0 & 0.0 \\ 800.0 & 2000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1500.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & 800.0 & 0.0 \\ 800.0 & \sigma_y - \sigma_m & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} -366.67 & 800.0 & 0.0 \\ 800.0 & 433.33 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -66.67 \end{bmatrix}$$

مولفه های برشی :

مقادیر بدست آمده کرنش‌ها در نقطه‌ی Q از یک جسم با استفاده از روبر (60.0)

به ترتیب $\epsilon_c = 350.0 \mu$ ، $\epsilon_g = 800.0 \mu$ و $\epsilon_A = 400.0 \mu$ می باشد. مطلوب است

الف - تعیین ϵ_x ، ϵ_y ، γ_{xy} ، ب - کرنش‌ها اصلی و جهت آنها

پ - کرنش‌ها برشی $\max$ و جهت آنها ، د - کرنش‌ها اصلی و جهت آنها

$\nu = 0.25$ ، $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ، $\theta_A = 0.0$ and $\theta_B = 60.0^\circ$ and $\theta_C = 120.0^\circ$

حل: الف -

$$\epsilon_A = \epsilon_x \cos^2 \theta_A + \epsilon_y \sin^2 \theta_A + \gamma_{xy} \cos \theta_A \sin \theta_A = \epsilon_x \rightarrow \boxed{\epsilon_x = \epsilon_A = 400.0 \mu}$$

$$\epsilon_B = \epsilon_x \cos^2 \theta_B + \epsilon_y \sin^2 \theta_B + \gamma_{xy} \cos \theta_B \sin \theta_B = \frac{\epsilon_x}{4} + \frac{3}{4} \epsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} = 800.0 \mu$$

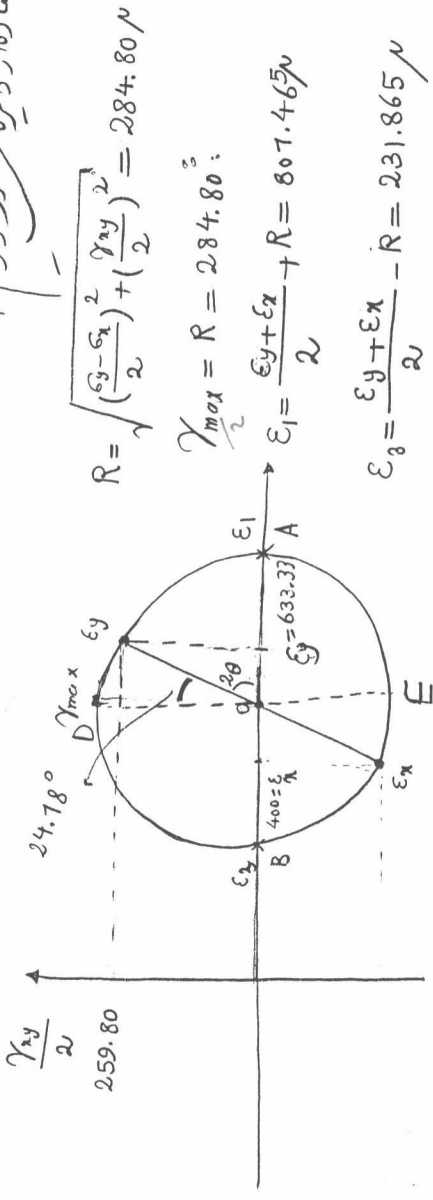
$$\epsilon_C = \epsilon_x \cos^2 \theta_C + \epsilon_y \sin^2 \theta_C + \gamma_{xy} \cos \theta_C \sin \theta_C = \frac{\epsilon_x}{4} + \frac{3}{4} \epsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} = 350.0 \mu$$

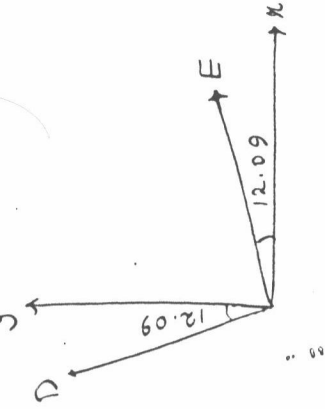
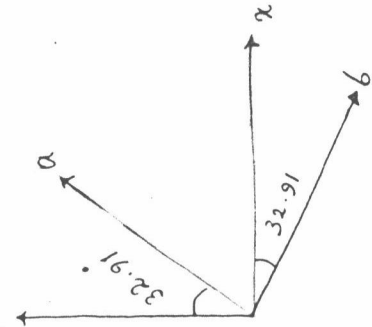
$$\rightarrow \epsilon_B - \epsilon_C = \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{xy} = 450.0 \mu \rightarrow \boxed{\gamma_{xy} = \frac{900}{\sqrt{3}} = 519.60 \mu}$$

معادله‌ی دیگری ϵ_x و ϵ_y در ϵ_B داریم ؛ $\epsilon_y = \frac{475 \times 4}{3} \Rightarrow \boxed{\epsilon_y = 633.33 \mu}$

$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_y - \epsilon_x} = \frac{519.60}{633.33 - 400.0} = 2.226$
 $\rightarrow 2\theta = 65.817^\circ \rightarrow \theta = 32.91^\circ$

ب - کرنش‌ها اصلی و جهت آنها
 پ - کرنش‌ها برشی $\max$ و جهت آنها
 با استفاده از دایره مورداریم ؛





تأثیر تنش‌ها اصلی در جهت اینها (برش مسطح)
تنش برش max و جهت آن

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y]$$

$$\rightarrow 400.0 \mu = \frac{1}{2 \times 10^5 \text{ Mpa}}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x]$$

$$\text{II} \quad \nu = \frac{1}{2 \times 10^5 \text{ Mpa}} \left[\frac{15}{16}\sigma_y - \frac{5}{16}\sigma_x \right]$$

$$\frac{\text{I}}{\text{II}} \rightarrow \frac{400.0}{633.33} = \frac{15\sigma_x - 5\sigma_y}{15\sigma_y - 5\sigma_x} \rightarrow \frac{400.0}{633.33} = \frac{3\sigma_x - \sigma_y}{3\sigma_y - \sigma_x}$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_y = 1.255\sigma_x} \quad \text{, III}$$

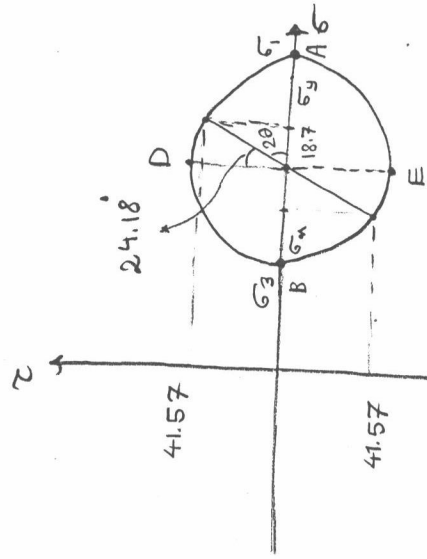
$$0.545\sigma_x = 80.0 \rightarrow \sigma_x = 146.80 \text{ Mpa}$$

رادیوس تمرکز هم:

$$\rightarrow \sigma_y = 184.20 \text{ Mpa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{C} \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{xy} \cdot \frac{E}{2(1+\nu)} = 41.57$$

$$\rightarrow \tau_{xy} = 41.57 \text{ Mpa}$$



• زاویه مورب برای مقادیر بالا رسم می‌شود.

$$\tan 2\theta = \frac{41.57}{18.76} \rightarrow \theta = 32.91$$

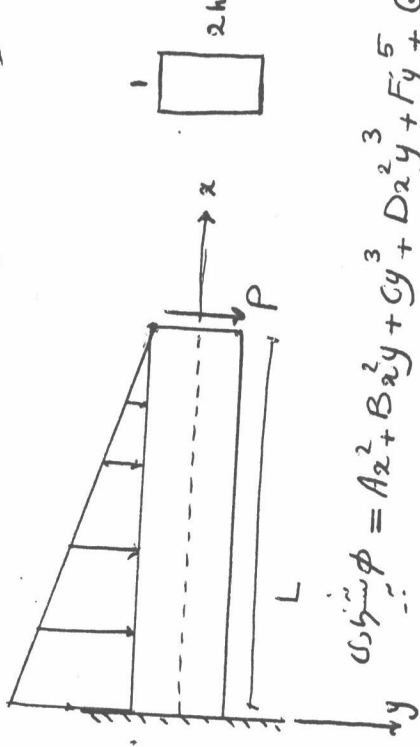
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 124.18$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = 241.8 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = -41.57 \text{ Mpa}$$

$$\tau_{max} = R = 41.57 \text{ Mpa}$$

مطلوب است تعیین انحراف گسیخ - درفش و نیز V و M در تیر نشان داده شده در زیر.



$$\phi = A x^2 + B x y + C y^3 + D x^2 y + F y^5 + G x y^3 + H x y^5 + I x y^3 + J x y + N x^3 + M x y$$

به ترتیب معنی برای این بار شده حوت حل این سوال، جملات $N x^3$ و $M x y$ را ضافه نمود.

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0.0, \quad \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 120 F y + 120 H x y$$

$$\frac{\partial^7 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 12 D y + 36 G x y$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0.0 \rightarrow$$

$$\nabla^4 \phi = 0.0 \quad \text{کنترل رابطی 1}$$

$$\begin{cases} 120 F + 24 D = 0.0 \rightarrow D = -5 F \\ 120 H + 72 G = 0.0 \rightarrow G = -\frac{5}{3} H \end{cases} \quad \text{I}$$

2. یاس رابطی نشانی

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6 C y + 6 D x^2 y + 20 F y^3 + 6 G x^3 y + 20 H x y^3 + 6 J x y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2 A + 2 B y + 2 D y^3 + 6 G x y^3 + 6 I x y + 6 N x$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2 B x - 6 D x y^2 - 9 G x^2 y^2 - 5 H y^4 - 3 I x^2 - 3 J y^2 - M$$

3. اعمال شرایط مرزی

$$\text{if } x=L \rightarrow \sigma_x = 0.0$$

$$6 C y + 6 D L^2 y + 20 F y^3 + 6 G L^3 y + 20 H L y^3 + 6 J L y = 0.0$$

$$y (6 C + 6 D L^2 + 6 G L^3 + 6 J L) + y^3 (20 F + 20 H L) = 0.0 \rightarrow \begin{cases} F = -H L \\ C + D L^2 + G L^3 + J L = 0.0 \end{cases} \quad \text{II}$$

if $x=L \rightarrow \int_{-h}^h \tau_{xy} dy = P$ بدلیل زوج بودن نسبت به y بازه را صدمت زیر نمایش کردیم

$$\rightarrow 2 \int_0^h \tau_{xy} dy = P \rightarrow -2BLh - 2DLh^3 - 3GL^2h^3 - 4h^5 - 3IL^2h - 3jh^3 - 6Nh = \frac{P}{2} \quad \text{III}$$

if $y = -h \rightarrow \bar{\sigma}_y = -q(1 - \frac{x}{L}) \rightarrow 2A - 2Bh - 2Dh^3 - 6Gxh^3 - 6Ixh^3 + 6Nh = -q + q\frac{x}{L}$

if $y = h \rightarrow \bar{\sigma}_y = 0.0 \rightarrow 2A + 2Bh + 2Dh^3 + 6Gxh^3 + 6Ixh^3 + 6Nh = 0.0$

دورالخطی با h را جمع می‌کنیم.

$$4A + 12Nh = -q + q\frac{x}{L} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{q}{4} \\ N = \frac{q}{12L} \end{cases} \quad \text{IV}$$

if $y = \pm h \rightarrow \tau = 0.0$

if $y = h \rightarrow -2Bx - 6Dxh^2 - 9Gx^2h^2 - 5Hh^4 - 3Ix^2 - 3jh^2 - M = 0.0$

if $y = -h \rightarrow$ من رابط

$$x(-2B - 6Dh^2) + x^2(-9Gh^2 - 3I) + (-5Hh^4 - 3jh^2 - M) = 0.0$$

$$\rightarrow \begin{cases} B = -3Dh^2 \\ I = -3Gh^2 \\ -5Hh^4 - 3jh^2 - M = 0.0 \end{cases} \quad \text{V}$$

if $x = 0.0 \rightarrow \int_{-h}^h \bar{\sigma}_x dy = 0.0$

بدلیل نزد بودن x نسبت به y این رابط در زیره / یون بدین است.

if $x=0.0 \rightarrow \int_{-h}^h \tau_{xy} dy = P + \frac{qL}{2}$

$$\rightarrow 2 \int_{-h}^h (-5Hy^4 - 3Jy^2 - M) dy = P + \frac{qL}{2} \rightarrow 2(-Hh^5 - Jh^3 - Mh) = P + \frac{qL}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{Hh^5 + Jh^3 + Mh = -\frac{P}{2} - \frac{qL}{4}} \quad \text{VI}$$

if $x=0.0 \rightarrow \int_{-h}^h \sigma_x y dy = -PL - \frac{qL^2}{6}$

$$\rightarrow 2 \int_{-h}^h (6cy^2 + 20Fy^4) dy = -PL - \frac{qL^2}{6}$$

$$\rightarrow 2(2ch^3 + 4Fh^5) = -PL - \frac{qL^2}{6} \rightarrow \left\{ ch^3 + 2Fh^5 = -\frac{PL}{4} - \frac{qL^2}{24} \right. \quad \text{VII}$$

$(N = \frac{9}{12L}, A = -\frac{q}{4} \text{ دایم})$ مرتب می‌کنیم H ضرایب را بر حسب

$$F = -HL$$

$$D = -5F = 5HL$$

$$G = -\frac{5}{3}H$$

$$B = -3Dh^2 = -15HLh^2$$

$$I = -3Gh^2 = 5Hh^2$$

البرق مقادیر F, D, G, I را در رابطی III قرار می‌دهیم داریم:

$$30HL^2h^3 - 10HL^2h^3 + 5HL^2h^3 - Hh^5 - 15HL^2h^3 - Jh^3 - Mh = \frac{P}{2}$$

$$\rightarrow 10HL^2h^3 - Hh^5 - Jh^3 - Mh = \frac{P}{2} \quad \text{VIII}$$

این رابط را، رابطی V ترکیب می‌کنیم.

$$V \text{ رابط } \bar{x}h + \text{VIII} = 4Hh^5 + 2Jh^3 + 10HL^2h^3 = \frac{P}{2}$$

$$\rightarrow J = \frac{P}{4h^3} - 5HL^2 - 2Hh^2 \quad \text{IX}$$

با جای ندری J در رابطی V، مقدار M بدست می‌آید.

$$M = -\frac{3P}{4h} + 15HL^2h + Hh^4$$

حال با جایگذاری مقادیر بدست آمده برای D، ج، و J در رابطه II داریم:

$$C + 5HL^3 - \frac{5}{3}HL^3 + L\left(\frac{P}{4h^3} - 5HL^2 - 2Hh^2\right) = 0 \rightarrow C = \frac{5}{3}HL^3 + 2HLh^2 - \frac{PL}{4h^3}$$

✓
(XI)

حال مقادیر بدست آمده را در رابطه VI جایگذاری کنیم تا بدست آید.

$$Hh^5 + Jh^3 + Ah = -\frac{P}{2} - \frac{qL}{4} \rightarrow Hh^5 + h^3\left(\frac{P}{4h^3} - 5HL^2 - 2Hh^2\right) + h\left(-\frac{3P}{4h} + 15HL^2h^2 + Hh^4\right) = -\frac{P}{2} - \frac{qL}{4}$$

$$\rightarrow Hh^5 + \frac{P}{4} - 5HL^2h^3 - 2Hh^5 - \frac{3P}{4} + 15HL^2h^3 + Hh^5 = -\frac{P}{2} - \frac{qL}{4}$$

$$\rightarrow 10HL^2h^3 = -\frac{qL}{4} \rightarrow H = -\frac{qL}{40L^2h^3} \rightarrow H = -\frac{q}{40Lh^3}$$

با جایگذاری H در معادلات سایر ضرایب، مقادیر آنها نیز تعیین می شود.

$$F = -HL = \frac{q}{40h^3}$$

$$D = 5F = \frac{q}{8h^3}$$

$$G = -\frac{5}{3}H = \frac{q}{24Lh^3}$$

$$B = -15HLh^2 = \frac{3q}{8h}$$

$$I = 5Hh^2 = -\frac{q}{8Lh}$$

$$A = -\frac{q}{4}$$

$$N = \frac{q}{12L}$$

$$J = \frac{P}{4h^3} - 5HL^2 - 2Hh^2 = \frac{P}{4h^3} + \frac{qL}{8h^3} + \frac{q}{20hL}$$

$$M = -\frac{3P}{4h} + 15HL^2h^2 + Hh^4 = -\frac{3P}{4h} - \frac{3qL}{8h} - \frac{qh}{40L}$$

$$C = \frac{5}{3}HL^3 + 2HLh^2 - \frac{PL}{4h^3} = -\frac{qL^2}{24h^3} - \frac{q}{20h} - \frac{PL}{4h^3}$$

با جایگذاری مقادیر بدست آمده از ضرایب A، B، C، D، E، و F در رابطه تنش می بدست آوریم رابطه بالا در معادلات تنش

بدست آمده و u و v تعیین می شود.