«بسم الله الرحمن الرحیم»

دانشگاه علوم و فنون مازندران

جزوه حل تمرین تئوری الاستیسیته

گردآورنده:

سید مهرزاد حسینی بای

«با تشکر فراوان از مهری عفتی،
نادر قدسی، شادروان شادان عطاردی
و سعید لاری»

مقدمه:

درس تئوری الاستیسیته یکی از دروس مهم کارشناسی ارشد عمران در شاخه‌ی سازه می باشد. با توجه به اهمیت این درس و نیاز دانشجویان و نبود جزوه‌ای حل تمرین کامل و جامع بر آن شدم تا منابع مختلف را که از آن ها در مطالعه و حل مسائل در این درس استفاده کردم، در قالب یک جزوه ی حل تمرین در اختیار همه‌ی دانشجویان مشتاق قرار دهم. امید است این جزوه مورد استفاده‌ی دانشجویان عزیز قرار بگیرد.

این جزوه‌ی حل تمرین از دو بخش تشکیل می شود:

۱- مکانیک محیط پیوسته ۲- تئوری ارتجاعی

در بخش اول مسائل حل شده شامل تمامی تمرینات آخر فصل، مثال های حل شده نکته دار کتاب مکانیک محیط پیوسته و مثال های کاربردی می باشد.

در بخش دوم مسائل حل شده شامل بخش از تمرینات آخر فصل کتاب تئوری ارتجاعی می باشد.

لازم به ذکر است زمانی این جزوه برای دانشجویان عزیز قابل استفاده است که به مباحث و نکات جزوه و کتاب درسی مناسب داشته باشند همچنین خواندن کامل مسائل این جزوه به معنی تسلط کامل نمی باشد زیرا مثال های حل شده‌ی کتاب به طور کامل باید مطالعه شود.

دوستان توجه داشته باشند که این مسائل که در اختیار شما قرار گرفته است یقیناً در راه حل و یا محاسبات ریاضی غلط وجود خواهد داشت پس حتماً در صورت پیدا کردن راه حل منطقی تر به آن استناد کنید.

در پایان برخود لازم می دانم که از دوستان ورودی ۸۴ که بنده سعادت زیارت آن ها را نداشتم به نام های مهدی عفتی، نادر قدس و شادروان شادان عطاری و همچنین سعید لاری ورودی ۸۵ با بت راه حل هایشان تشکر و قدردانی کنم.

سید مهرزاد حسینی بای

اردیبهشت ۹۵

mehrzad89o@gmail.com

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

تمرینات و مثال های مهم جزوه حل تمرین

فهرست مطالب

ب) کتاب تئوری ارتجاعی

فصل دوم: حل مسائل سه بعدی تئوری ارتجاعی

فصل چهارم: حل مسائل تئوری ارتجاعی در دستگاه x_1x_2

★ بعد از خواندن دقیق تمرین ۴-۶، از صفحه ۱۹۶ تا 219 خیلی خیلی مهم

فصل پنجم: حل مسائل تئوری ارتجاعی در دستگاه ۲۵ (استوانه ای)

★ تمامی مثال های این فصل مهم هستند و همه باید خوانده شوند.

★ توجه مهم ۱: این فهرست به معنای آن نیست که فقط این مثال ها حل شود و مطالب تمام است، به هیچ وجه این طور نیست. این لیست فقط مثال و تمرینات مهم است.

توجه مهم ۲: توصیه می شود در هر فصل ابتدا این مثال ها خوانده شود سپس سراغ مثال های دیگر رفته شود.

توجه مهم ۳: تمامی صفحات هر دو جلد کتاب، جزوه ی درس و جزوه ی حل تمرین باید خوانده شود حتی اگر متوجه هم نشدید.

۲-۱: بردار یکه موازی با بردار $\underline{a}=4\underline{i}_1-2\underline{i}_2+4\underline{i}_3$ را بدست آورید.

$$\|a\|: a=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=\sqrt{36}=6$$

$$n_i=\frac{a_i}{a}=\frac{4}{6}\underline{i}_1+\left(-\frac{2}{6}\underline{i}_2\right)+\frac{4}{6}\underline{i}_3=\frac{2}{3}\underline{i}_1-\frac{1}{3}\underline{i}_2+\frac{2}{3}\underline{i}_3$$

$$\boxed{n=\frac{2}{3}\underline{i}_1-\frac{1}{3}\underline{i}_2+\frac{2}{3}\underline{i}_3}$$

۲-۲: بردار $\underline{a}$ با اندازه ۱۰۰ در امتداد خط واصل نقاط $A(10,5,0)$ و $B(9,0,24)$ اثر می‌کند این بردار را برحسب مؤلفه‌های $\underline{i}_1$، $\underline{i}_2$، $\underline{i}_3$ بنویسید.

$$\vec{AB}=(9-10)\underline{i}_1+(0-5)\underline{i}_2+(24-0)\underline{i}_3 \Rightarrow \vec{AB}=-\underline{i}_1-5\underline{i}_2+24\underline{i}_3$$

$$AB=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(24)^2}=\sqrt{602}$$

* بدست آوردن بردار یکه AB
* بردار a در امتداد

$$\underline{n}=\frac{\vec{AB}}{AB}=\frac{-1}{\sqrt{602}}\underline{i}_1-\frac{5}{\sqrt{602}}\underline{i}_2+\frac{24}{\sqrt{602}}\underline{i}_3$$

* حالا بدست آوردن بردار a

$$\underline{a}=a.\underline{n}=100\left(\frac{-1}{\sqrt{602}}\underline{i}_1-\frac{5}{\sqrt{602}}\underline{i}_2+\frac{24}{\sqrt{602}}\underline{i}_3\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{a}=\frac{-100}{\sqrt{602}}\underline{i}_1-\frac{500}{\sqrt{602}}\underline{i}_2+\frac{2400}{\sqrt{602}}\underline{i}_3}$$

۲-۳: در حالت‌های زیر $V\times U$، $U\times V$ و $U.V$ را بیابید.

الف) $\underline{u}=6\underline{i}_1-4\underline{i}_2-6\underline{i}_3$, $\underline{v}=4\underline{i}_1-2\underline{i}_2-8\underline{i}_3$

ب) $\underline{u}=3\underline{i}_1-\underline{i}_2-2\underline{i}_3$, $\underline{v}=-\underline{i}_1+2\underline{i}_2-3\underline{i}_3$

الف) $\underline{U}=6\underline{i}_1-4\underline{i}_2-6\underline{i}_3$ $\quad \underline{V}=4\underline{i}_1-2\underline{i}_2-8\underline{i}_3$

$$*\ \underline{V}\times\underline{U}=\begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ 4 & -2 & -8 \\ 6 & -4 & -6 \end{vmatrix}$$

* ادامه در صفحه‌ی بعد

ادامه $i_1(12-32) - i_2(-24+48) + i_3(-16+12)$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{V} \times \underline{U} = -20\, i_1 + 24\, i_2 - 4\, i_3}$$

$$* \ \underline{U} \times \underline{V} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ 6 & -4 & -6 \\ 4 & -2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow i_1(32-12) - i_2(-48+24) + i_3(-12+16)$$

$$\boxed{\underline{U} \times \underline{V} = 20\, i_1 + 24\, i_2 + 4\, i_3}$$

$$\underline{U} \cdot \underline{V} = U_i V_i = U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 = 24 + 8 + 48 = 80 \Rightarrow \boxed{\underline{U} \cdot \underline{V} = 80}$$

ب) $\underline{U} = 3\, i_1 - i_2 - 2 i_3$ ، $\underline{V} = -i_1 + 2 i_2 - 3 i_3$

$$* \ \underline{V} \times \underline{U} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= i_1(-4-3) - i_2(+2+9) + i_3(1-6) \Rightarrow \boxed{-7\, i_1 - 11\, i_2 - 5\, i_3 = \underline{V} \times \underline{U}}$$

$$* \ \underline{U} \times \underline{V} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= i_1(3+4) - i_2(-9-2) + i_3(6-1) \Rightarrow \boxed{\underline{U} \times \underline{V} = 7\, i_1 + 11\, i_2 + 5\, i_3}$$

$$* \ \underline{U} \cdot \underline{V} = U_i V_i = U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 = -3 - 2 + 6 = 1$$

$$\boxed{\underline{U} \cdot \underline{V} = 1}$$

3

۲-۴: تصویر بردار $c = 18i_1 - 27i_2 + 81i_3$ را روی بردار d در حالت های زیر بیابید.

الف) $d = -i_1 - 2i_2 + 2i_3$

ب) $d = i_1 + 2i_2 - 2i_3$

★ برای بدست آوردن تصویر یک بردار مثل c روی d باید

$c' = (\vec{c} \cdot \vec{n})\cdot\vec{n}$

$c' = \left(c \cdot \frac{d}{d}\right)\frac{d}{d} \Rightarrow c' = \frac{c \cdot d}{d \cdot d}\, d$

الف)

تصویر بردار c روی d

$$c' = \frac{c \cdot d}{d \cdot d} d = -22i_1 - 44i_2 + 44i_3$$

$$\begin{cases} c \cdot d = (18 \times -1) + (-27 \times -2) + (81 \times 2) = 198 \\ d \cdot d = (-1 \times -1) + (-2 \times -2) + (2 \times 2) = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{c \cdot d}{d \cdot d} = \frac{198}{9} = 22$$

ب)

تصویر بردار c روی d

$$c' = \frac{c \cdot d}{d \cdot d} \cdot d = -22i_1 - 44i_2 + 44i_3$$

$$\begin{cases} c \cdot d = (18 \times 1) + (-27 \times 2) + (81 \times -2) = -198 \\ d \cdot d = (1 \times 1) + (2 \times 2) + (-2 \times -2) = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{c \cdot d}{d \cdot d} = \frac{-198}{9} = -22$$

۲-۵: تصویر بردار $a = 12i_1 - 24i_2$ را روی بردار $b = 2i_1 + i_2 + 3i_3$ تعیین کنید

از جواب بدست آمده چه نتیجه ای می گیرید.

راه حل اول:

a_r: تصویر بردار a روی b

n_r: بردار یکه b

$\underbrace{b}_{\text{عمود بر } b}$

$$\vec{a}_r = (\vec{a} \cdot \vec{n}_r)\vec{n}$$

$$\vec{n}_r = \frac{2i_1 + i_2 + 3i_3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}} i_1 + \frac{1}{\sqrt{14}} i_2 + \frac{3}{\sqrt{14}} i_3$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}_r) = (12i_1 - 24i_2)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{14}} i_1 + \frac{1}{\sqrt{14}} i_2 + \frac{3}{\sqrt{14}} i_3\right)$$

$$= \frac{24}{\sqrt{14}} - \frac{24}{\sqrt{14}} = 0$$

* می توان نتیجه گرفت که n_r بر $\vec{a}$ عمود است

راه حل دوم:

$$A_n = (a \cdot n)\cdot n = \left(a \cdot \frac{b}{b}\right)\frac{b}{b} = \left(\frac{a \cdot b}{b^2}\right) b$$

$$a \cdot b = 24 - 24 + 0 = 0$$

* برهم عمودا ند

4

۲-۶: مولفه نیروی $F=600\underline{i}_1+1200\underline{i}_2-900\underline{i}_3$ برحسب نیوتن را در راستای عمود بر صفحه $2x_1-2x_2+x_3=3$ بیابید.

راه حل اول:

* بردار یک عمود بر صفحه

بردار نرمال $N=(2,-2,1)$

$$n=\frac{1}{3}(2\underline{i}_1-2\underline{i}_2+\underline{i}_3)$$

* تصویر بردار F روی n می‌شود F_n

$$F_n=F\cdot n=\frac{1}{3}(1200-2400-900)=-\frac{2100}{3}=-700$$

* که بردار F_n به صورت زیر بیان می‌شود

$$\boxed{\underline{F}_n=F_n\cdot n=-\frac{700}{3}(2\underline{i}_1-2\underline{i}_2+\underline{i}_3)}$$

راه حل دوم:

$$(\vec{F}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n}=\left(\underline{F}\cdot\frac{\underline{n}}{n}\right)\frac{\underline{n}}{n}=\frac{\underline{F}\cdot\underline{n}}{\underline{n}\cdot\underline{n}}\,\underline{n}=-700\,\underline{n}$$

$$\begin{cases}\underline{F}\cdot\underline{n}=\left(\frac{2}{3}\times600\right)+\left(-\frac{2}{3}\times1200\right)+\left(\frac{1}{3}\times-900\right)=-700\\ n\cdot n=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1\end{cases}$$

$$n=\frac{1}{3}(2\underline{i}_1-2\underline{i}_2+\underline{i}_3)$$

$$\Rightarrow\boxed{-\frac{1400}{3}\underline{i}_1+\frac{1400}{3}\underline{i}_2-\frac{700}{3}\underline{i}_3=\underline{F}_n}$$

۲-۷: معادله نقاط (x_1, x_2, x_3) را چنان بیابید که بردار گذرنده از نقطه‌ی (x_1, x_2, x_3) به نقطه $(2,-1,4)$ عمود بر بردار گذرنده از نقطه $(2,-1,4)$ به $(3,3,2)$ باشد.

$X(x_1, x_2, x_3)$ $\quad\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ⇝ یعنی بر هم عمودند.

$A(2,-1,4)$

$B(3,3,2)$

$$\overrightarrow{XA}=(2-x_1)\underline{i}_1+(-1-x_2)\underline{i}_2+(4-x_3)\underline{i}_3$$

$$\overrightarrow{AB}=(3-2)\underline{i}_1+(3+1)\underline{i}_2+(2-4)\underline{i}_3=\underline{i}_1+4\underline{i}_2-2\underline{i}_3$$

$$\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow(2-x_1)+(-1-x_2)4-2(4-x_3)=0$$

$$\Rightarrow -x_1+2-4x_2-4+2x_3-8=0$$

$$\Rightarrow\boxed{-x_1-4x_2+2x_3-10=0}$$ ⇝ معادله نقاط x_1, x_2, x_3

۸-۲: زاویه بین بردارهای گذرنده از مبدأ به نقاط $A(4\,و\,3\,و\,2)$ و $B(-2\,و\,4\,و\,3)$ را تعیین کنید.

$$\vec{OA} = (4-0)\,i_1 + (3-0)\,i_2 + (2-0)\,i_3 = 4i_1 + 3i_2 + 2i_3$$

$$\vec{OB} = (-2-0)\,i_1 + (4-0)\,i_2 + (3-0)\,i_3 = -2i_1 + 4i_2 + 3i_3$$

* زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ را θ می‌نامیم.

$$\cos\theta = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|OA||OB|} = \frac{10}{29} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{10}{29} \Rightarrow \boxed{\theta = 69,8^\circ}$$

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = -8 + 12 + 6 = 10$$

$$|OA| = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = \sqrt{29}$$

$$|OB| = \sqrt{2^2+4^2+3^2} = \sqrt{29} \Rightarrow |OA|\,|OB| = \sqrt{29}\times\sqrt{29} = 29$$

۹-۲: مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده روی بردارهای مسأله ۲-۸ را محاسبه کنید.

* طبق فرمول ص ۱۲ کتاب مساحت متوازی الاضلاع:

$$S = |\vec{OA}\times\vec{OB}| = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \sqrt{(9-8)^2 + (12+4)^2 + (16+\ \ )^2}$$

$$= \sqrt{1^2+16^2+22^2} = \sqrt{741} = 27,22 \Rightarrow \boxed{S = 27,22}$$

۱۰-۲: بردار واحد در امتداد عمود بر بردارهای مسأله (۲-۸) را به دست آورید.

$$\vec{OA}\times\vec{OB} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = i_1(9-8) - i_2(12+4) + i_3(16+6)$$

$$= i_1 - 16\,i_2 + 22\,i_3$$

بردار واحد $= \dfrac{i_1 - 16i_2 + 22i_3}{\sqrt{1^2+16^2+22^2} = \sqrt{741}} \Rightarrow$

بردار واحد $\boxed{= \dfrac{1}{\sqrt{741}}\,i_1 + \dfrac{-16}{\sqrt{741}}\,i_2 + \dfrac{22}{\sqrt{741}}\,i_3}$

۲-۱۱: خط گذرنده از نقطه $M(1, 2, 3)$ و عمود بر صفحه $x_1 - x_3 = 0$ را به دست آورید

راه حل اول:

$$\vec{XM} = (1-x_1)\,i_1 + (2-x_2)\,i_2 + (3-x_3)\,i_3$$

بردار نرمال $(1, 0, -1)$ $\Rightarrow n = \frac{1}{\sqrt{2}}(i_1 - i_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} i_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} i_3$

* برای اینکه یک خط گذرنده بر یک صفحه عمود باشد کافی است بردار یکه عمود بر آن صفحه عمود باشد

$$\vec{XM} = (1-x_1)\,i_1 + (2-x_2)\,i_2 + (3-x_3)\,i_3$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} i_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} i_3$$

این راه حل غلطه

$$\vec{XM} \cdot n = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(1-x_1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(3-x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-x_1-3+x_3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-x_1 - 2 + x_3 = 0} \quad \text{یا} \quad \boxed{x_1 - x_3 + 2 = 0}$$

راه حل دوم:

* نرمال صفحه هادی خط عمود بر صفحه می باشد ، $N(1, 0, -1)$ بردار نرمال صفحه

$$\frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 2}{0} = \frac{x_3 - 3}{-1} = t \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = t \Rightarrow x_1 = t \\ x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \\ x_3 - 3 = -t \Rightarrow x_3 = -t + 3 \end{cases}$$

فرم پارامتری

خط مورد نظر $\begin{cases} x_1 - 1 = 3 - x_3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

۲-۱۲: درستی رابطه (۲-۳۵) را بررسی کنید.

$$\bar{i}_p \cdot \bar{i}_q = \delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } p = q \\ 0 & \text{اگر } p \neq q \end{cases} \quad [I]$$

رابطه ۲-۳۵

$$\delta_{pq} = \bar{i}_p \cdot \bar{i}_q = |\bar{i}_p||\bar{i}_q| \cos\underbrace{(p,q)}_{\theta}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = 1 & \text{اگر } i = j \\ \cos\theta = 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

* $\bar{i}_1 \cdot \bar{i}_1 = 1$ * $\bar{i}_2 \cdot \bar{i}_2 = 1$

* $\bar{i}_1 \cdot \bar{i}_2 = 0$ * $\bar{i}_2 \cdot \bar{i}_3 = 0$

۲-۱۳: درستی معادلات (۲-۳۹) را ثابت کنید (رابطه ۲-۳۹)

$$\bar{X}_r = n_{sr}(X_s - b_s)$$

* این فرمول زمانی است که دستگاه جدید در اثر دوران دستگاه قدیم به همراه انتقال آن به اندازه b به وجود آید

از چرخش محورها داشتیم $\bar{X}_r = n_{sr} X_s \Leftarrow$ پس برای انتقال X خواهیم داشت

$$\bar{x} = x - b \Rightarrow \bar{x}_s = x_s - b_s \Rightarrow \boxed{\bar{X}_r = n_{sr}(X_s - b_s)}$$

۲-۱۴: روابط اندیس زیر را بسط دهید:

$a^2 = a_i a_i$

$a^2 = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3$

الف)

تعداد اندیس تکرار = ۱ ⇐ $3^1 = 3$ سه تا معادله داریم

~ ~ آزاد = ۰ ⇐ $3^0 = 1$ یک معادله

ب) $trA = A_{ii}$ $\quad trA = A_{11} + A_{22} + A_{33}$

پ) $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$

*تعداد اندیس آزاد = ۲ تا (i و j) $9 = 3^2$ ، ۹ تا معادله داریم

*تعداد اندیس تکرار = ۱ (k) در هر جمله ۳ بار تکرار می شود

$\varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \underbrace{\cancel{\delta_{11}}}_{1}$

$\varepsilon'_{22} = \varepsilon_{22} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \underbrace{\cancel{\delta_{22}}}_{1}$

$\varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \underbrace{\cancel{\delta_{33}}}_{1}$

$\varepsilon'_{12} = \varepsilon_{12} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \underbrace{\cancel{\delta_{13}}}_{0}$

$* \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$

$\varepsilon'_{21} = \varepsilon_{21}$ ، $\varepsilon'_{23} = \varepsilon_{23}$ و $\varepsilon'_{31} = \varepsilon_{31}$ ، $\varepsilon'_{32} = \varepsilon_{32}$ و $\varepsilon'_{31} = \varepsilon_{31}$

ت) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

*تعداد اندیس آزاد ۲ ⇐ ۹ تا معادله

*تعداد اندیس تکرار صفر

$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$

$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$ ، $\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$

$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$ ، $\varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$

$\varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$ ، $\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$

$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)$

$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)$

μ و λ ثابت می باشند

الف) $T_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$

* تعداد اندیس آزاد ۲ تا
* تعداد اندیس تکرار ۱ (k) که در هر جمله ۳ بار تکرار می شود

$T_{11} = 2\mu \varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \underset{1}{\cancel{\delta_{11}}}$

$T_{22} = 2\mu \varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \underset{1}{\cancel{\delta_{22}}}$

$T_{33} = 2\mu \varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \underset{1}{\cancel{\delta_{33}}}$

$T_{12} = 2\mu \varepsilon_{12} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \underset{0}{\cancel{\delta_{12}}}$

$T_{13} = 2\mu \varepsilon_{13}$ و $T_{21} = 2\mu \varepsilon_{21}$ و $T_{23} = 2\mu \varepsilon_{23}$ و $T_{31} = 2\mu \varepsilon_{31}$ و $T_{32} = 2\mu$

ج) $T_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ji}}\right)$

* تعداد اندیس آزاد ۲ تا : i و j و ۹ تا معادله
* اندیس تکرار نداریم

$T_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{11}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{11}}\right)$

$T_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{12}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{21}}\right)$

$T_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{13}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{31}}\right)$

$T_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{21}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{12}}\right)$

$T_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{22}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{22}}\right)$

$T_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{23}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{32}}\right)$

$T_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{31}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{13}}\right)$

$T_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{32}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{23}}\right)$

$T_{33} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{33}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{33}}\right)$

۲-۱۵: اگر a، b و c سه بردار دلخواه باشند، نشان دهید:

$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c})=(\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b}-(\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$

$L=b\times c=e_{ijk}\,i_i\,b_j\,c_k=\underbrace{(e_{ijk}\,b_j\,c_k)}_{L_i}\underline{i}_i$ مؤلفه اام

$a\times L=e_{pqr}\,i_p\,a_q\,L_r=e_{pqr}\,i_p\,a_q\,\underbrace{(e_{rjk}\,b_j\,c_k)}_{\text{مؤلفه r ام}}$

مؤلفه r ام

$=e_{pqr}\,e_{rjk}\,i_p\,a_q\,b_j\,c_k=\underbrace{e_{rpq}}_{\text{بچرخونیمش}}\,e_{rjk}\,i_p\,a_q\,b_j\,c_k$

$=\underbrace{(\delta_{pj}\delta_{qk}-\delta_{pk}\delta_{qj})}_{e-\delta \text{ استفاده از}}\,i_p\,a_q\,b_j\,c_k$

$=\cancel{\delta_{pj}}\,\cancel{\delta_{qk}}\,i_{\underset{j}{p}}\,a_{\underset{k}{q}}\,b_j\,c_k-\cancel{\delta_{pk}}\,\cancel{\delta_{qj}}\,i_{\underset{k}{p}}\,a_{\underset{j}{q}}\,b_j\,c_k$

$=i_j\,b_j\,a_k\,c_k-i_k\,c_k\,a_j\,b_j=\underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c})-\underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$ ✓

۲-۱۶: اگر v یک بردار دلخواه و n یک بردار یکه‌ی دلخواه باشد، ثابت کنید:
$\underline{v}=(\underline{v}\cdot\underline{n})\underline{n}+\underline{n}\times(\underline{v}\times\underline{n})$

$V=(\underline{v}\cdot\underline{n})\underline{n}+\underline{n}\times(\underline{v}\times\underline{n})=(v_i n_i)n_j\,\underline{i}_j+e_{ijk}\,i_i\,n_j\,(e_{kqr}\,v_q\,n_r)$

$=v_i\,n_i\,n_j\,i_j+\underbrace{e_{ijk}}_{e_{kij}}\,e_{kqr}\,i_i\,n_j\,v_q\,n_r$

بچرخونیم

اتحاد $e-\delta$

$=v_i\,n_i\,n_j\cdot i_j+(\delta_{iq}\,\delta_{jr}-\delta_{ir}\,\delta_{jq})\,i_i\,n_j\,v_q\,n_r$

$=v_i\,n_i\,n_j\cdot i_j+\cancel{\delta_{iq}}\,\cancel{\delta_{jr}}\,i_{\underset{q}{i}}\,n_{\underset{r}{j}}\,v_q\,n_r-\cancel{\delta_{ir}}\,\cancel{\delta_{jq}}\,i_{\underset{r}{i}}\,n_{\underset{q}{j}}\,v_q\,n_r$

$=v_i n_i\,n_j\,i_j+i_q\,v_q\,n_r\,n_r-n_r\,i_r\,n_q\,v_q$

$=(\underline{v}\cdot\cancel{\underline{n}})n+\underline{v}(\underline{n}\cdot\underline{n})-\underline{n}(\cancel{\underline{v}\cdot\underline{n}})=V\underbrace{(\underline{n}\cdot\underline{n})}_{1}=\underline{V}$

* n بردار یکه

توجه: اگر سؤال به این صورت بود $\underline{V}=(\underline{v}\cdot\underline{n})\underline{n}-(\underline{v}\times\underline{n})\times\underline{n}$
با استفاده از نکته‌ی $a\times b=-(b\times a)$ سؤال را به این صورت می شود:
$\underline{v}=(\underline{v}\cdot\underline{n})n+\underline{n}\times(\underline{v}\times\underline{n})$ ⟶ جواب مثل همین تمرین

⑨

۲- ۴۱۷ (الف) نشان دهید که $\bar{i}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(i_1+i_2-i_3)$ و $\bar{i}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(i_1-i_2)$ برهم عمودند.

ب) بردار $\bar{i}_3$ را چنان بیابید که یک دستگاه کارتزین به وسیله‌ی بردار $\bar{i}_1$، $\bar{i}_2$ و $\bar{i}_3$ به وجود آید

ج) مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{PQ}$ را در دستگاه جدید برای حالتی که $P(1,0,3)$ و $Q(0,2,1)$ هستند، بیابید.

الف) * برای اینکه نشان دهیم دو بردار برهم عمودند کافی است نشان دهیم ضرب داخلی آن‌ها صفر است.

$$\bar{i}_1\cdot\bar{i}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+0=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0 \checkmark$$

* پس برهم عمودند.

ب)

$$\bar{i}_3=\bar{i}_1\times\bar{i}_2=\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=i_1\left(\frac{1}{3}\right)-i_2\left(+\frac{1}{3}\right)+i_3\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow \boxed{\bar{i}_3=\frac{1}{3}i_1-\frac{1}{3}i_2-\frac{2}{3}i_3}$$

ج) $P(1,0,3)$ و $Q(0,2,1)$

قدیم $\overrightarrow{PQ}=-i_1+2i_2-2i_3$ و جدید $\overrightarrow{PQ}=\bar{t}_1\bar{i}_1+\bar{t}_2\bar{i}_2+\bar{t}_3\bar{i}_3$

	$\bar{i}_1$	$\bar{i}_2$	$\bar{i}_3$
i_1	$n_{11}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$n_{12}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$n_{13}=\frac{1}{3}$
i_2	$n_{21}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$n_{22}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$n_{23}=-\frac{1}{3}$
i_3	$n_{31}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$n_{32}=0$	$n_{33}=-\frac{2}{3}$

* ادامه مسئله در ص ۱۱

$$\bar{t}_r = n_{sr}\, t_s$$

$$\bar{t}_1 = n_{11} t_1 + n_{21} t_2 + n_{31} t_3$$

$$\bar{t}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times -1\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times 2\right) + \left(-2 \times -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\bar{t}_2 = n_{12} t_1 + n_{22} t_2 + n_{32} t_3$$

$$\bar{t}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times -1\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \times 2\right) + 0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\bar{t}_3 = n_{13} t_1 + n_{23} t_2 + n_{33} t_3$$

$$\bar{t}_3 = \left(\frac{1}{3} \times -1\right) + \left(-\frac{1}{3} \times 2\right) + \left(-\frac{2}{3} \times -2\right) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

جواب $\boxed{\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{\sqrt{3}} \bar{i}_1 - \frac{3}{\sqrt{3}} \bar{i}_2 + \frac{1}{3} \bar{i}_3}$

۲-۱۸: در معادله (۲-۴۵-الف)، طرف دوم رابطه را برای $\bar{T}_{22}$ و $\bar{T}_{31}$ بسط دهید

$$\bar{T}_{ip} = n_{ji}\, n_{qp}\, T_{jq}$$

رابطه ۲-۴۵ الف

* i و p اندیس آزاد
* j و q اندیس تکرار (که در جمله از ۱ تا ۳ تکرار می شوند)

$$\begin{aligned}
*\ \bar{T}_{22} = {} & n_{12} n_{12} T_{11} + n_{12} n_{22} T_{12} + n_{12} n_{32} T_{13} \\
& + n_{22} n_{12} T_{21} + n_{22} n_{22} T_{22} + n_{22} n_{32} T_{23} \\
& + n_{32} n_{12} T_{31} + n_{32} n_{22} T_{32} + n_{32} n_{32} T_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*\ \bar{T}_{31} = {} & n_{13} n_{11} T_{11} + n_{13} n_{21} T_{12} + n_{13} n_{31} T_{13} \\
& + n_{23} n_{11} T_{21} + n_{23} n_{21} T_{22} + n_{23} n_{31} T_{23} \\
& + n_{33} n_{11} T_{31} + n_{33} n_{21} T_{32} + n_{33} n_{31} T_{33}
\end{aligned}$$

۲-۱۹) محورهای جدید $\bar{X}_m$ نسبت به محورهای قدیم X_r مطابق جدول زیر چرخیده اند.

	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$
X_1	90°	45°	135°
X_2	45°	60°	60°
X_3	45°	120°	120°

الف) بردارهای یکه محورهای جدید را بر حسب بردار یکه محورهای قدیم بنویسید.

ب) اگر تانسور T دارای مولفه هایی به صورت ماتریس زیر بر حسب دستگاه قدیم باشد، مولفه های آن را بر حسب دستگاه جدید بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الف) * n_{ij} همان کسینوس cos بین محور دستگاه جدید و دستگاه قدیم.

	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$
X_1	90°	45°	135°
X_2	45°	60°	60°
X_3	45°	120°	120°

$\xrightarrow{\cos}$ می گیریم

	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$
X_1	0	0/7	-0/7
X_2	0/7	0/5	0/5
X_3	0/7	-0/5	-0/5

$\bar{x}_r = n_{jr} x_j$ و $\bar{i}_r = n_{jr} i_j$

$$\bar{i}_1 = n_{11} i_1 + n_{21} i_2 + n_{31} i_3 = 0 + 0/7\, i_2 + 0/7\, i_3$$

$$\bar{i}_2 = n_{12} i_1 + n_{22} i_2 + n_{32} i_3 = 0/7\, i_1 + 0/5\, i_2 - 0/5\, i_3$$

$$\bar{i}_3 = n_{13} i_1 + n_{23} i_2 + n_{33} i_3 = -0/7\, i_1 + 0/5\, i_2 - 0/5\, i_3$$

ب) $\bar{T} = N^T T N$

راه‌حل اول:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0/7 & 0/7 \\ 0/7 & 0/5 & 0/5 \\ -0/7 & 0/5 & -0/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0/7 & -0/7 \\ 0/7 & 0/5 & 0/5 \\ 0/7 & -0/5 & -0/5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 0+1,4+0 & 0+4,2+0 & 0+0+2,8 \\ 1,4-1+0 & -1,4+3+0 & 0+0+2 \\ -1,4-1+0 & 1,4+3+0 & 0+0-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0/7 & -0/7 \\ 0/7 & 0/5 & 0/5 \\ 0/7 & -0/5 & -0/5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 1,4 & 4,2 & 2,8 \\ 0/4 & 1,6 & 2 \\ -2,4 & 4,4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0/7 & -0/7 \\ 0/7 & 0/5 & 0/5 \\ 0/7 & -0/5 & -0/5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 4,5 & 1,68 & -0/28 \\ 2,52 & 0/08 & -0/48 \\ 1,68 & 1,52 & 4,88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} & \bar{T}_{13} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} & \bar{T}_{23} \\ \bar{T}_{31} & \bar{T}_{32} & \bar{T}_{33} \end{bmatrix}$$

راه‌حل دوم:

$$\bar{T}_{kr} = n_{ks} n_{rp} T_{sp}$$

$$\bar{T}_{11} = T_{11} n_{11} n_{11} + T_{12} n_{11} n_{21} + \cancel{T_{13}}^{0} n_{11} n_{31}$$
$$+ T_{21} n_{21} n_{11} + T_{22} n_{21} n_{21} + \cancel{T_{23}}^{0} n_{21} n_{31}$$
$$+ T_{31} n_{31} n_{11} + T_{32} \cancel{n_{31}}^{0} n_{21} + T_{33} n_{31} n_{31}$$

$\bar{T}_{12}$

⋮

$\bar{T}_{33}$

* بقیه هم به همین شکل

۳-۲۱ص جدول کسینوس های هادی محور های جدید نسبت به محورهای قدیم را در حالت های زیر به دست آورید.

الف) محور های جدید حول محور قدیم x_3 به اندازه $180°$ چرخیده است.

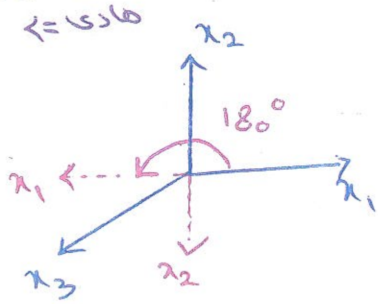
ب) محور های جدید حول محور قدیم x_1 به اندازه $45°$ چرخیده است.

ج) محورهای جدید ابتدا حول محور قدیم x_1 به اندازه $90°$ و سپس حول محور x_2 به دست آمده از چرخش اول به اندازه 90 چرخیده است.

الف) حول x_3 به اندازه $180°$

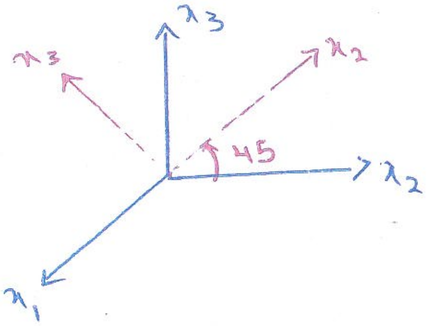
جدول کسینوس های هادی =>

	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}
x_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}



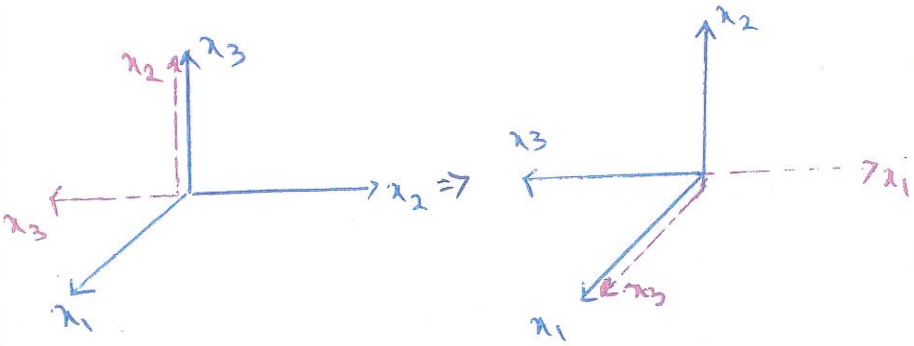
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
x_1	$-n_{11}$	$-n_{12}$	$-n_{13}$
x_2	$\cancel{-n_{21}}$ 0	$-n_{22}$	$-n_{23}$
x_3	$\cancel{n_{31}}$ 0	n_{32}	n_{33}

ب) حول x_1 به اندازه $45°$



	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}
x_2	$0/7n_{21}$	$0/7n_{22}$	$0/7n_{32}$
x_3	$0/7n_{31}$	$0/7n_{31}$	$0/7n_{33}$

ج) حول x_1 به اندازه $90°$ سپس حول x_2 به اندازه $90°$



	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
x_1	n_{31}	n_{32}	n_{33}
x_2	n_{11}	n_{12}	n_{13}
x_3	n_{21}	n_{22}	n_{23}

★ جواب این سؤال احتمالاً غلط است

۲-۲۲: بردارهای $a = 3\underline{i}_1 + 2\underline{i}_2$ و $b = 2\underline{i}_1 - 2\underline{i}_3$ داده شده‌اند. تا تنسور T را از حاصل ضرب جفتی a و b بدست آورید.

$T = a \otimes b \Rightarrow T_{ij} = a_i b_j$ حاصل ضرب جفتی

$$a = \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 0 \end{cases} \qquad b = \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = -2 \end{cases} \qquad T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$T_{11} = a_1 b_1 = 3 \times 2 = 6$ | $T_{12} = a_1 b_2 = 3 \times 0 = 0$ | $T_{13} = a_1 b_3 = 3 \times -2 = -6$

$T_{21} = a_2 b_2 = 2 \times 0 = 0$ | $T_{22} = a_2 b_2 = 2 \times 0 = 0$ | $T_{23} = a_2 b_3 = 2 \times -2 = -4$

$T_{31} = a_3 b_1 = 0 \times -2 = 0$ | $T_{32} = a_3 b_2 = 0 \times 0 = 0$ | $T_{33} = a_3 b_3 = 0 \times -2 = 0$

$$T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲-۲۳: حاصل ضرب‌های AB و BA را با ماتریس‌های زیر به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۲-۲۴: حاصل ضرب AB را با ماتریس زیر به دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

آ- آیا حاصل ضرب BA امکان پذیر است.

$$*\ AB=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+9+2 & 2+0-1\\ 2+3-2 & 4+0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

* حاصل ضرب BA امکان پذیر است چون وقتی ضرب دو ماتریس امکان پذیر است که اندیس دوم ماتریس اول با اندیس اول ماتریس دوم یکی باشد که اینجا یکی نیست پس ضرب ماتریس امکان پذیر نیست. $* B_{3\times 2}\ A_{2\times 3} \Rightarrow$ *

۲-۲۵: الف) معکوس ماتریس A را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 6 & 5\\ 3 & 8 & 4\end{bmatrix}$$

ب) آیا می توان معکوس ماتریس زیر را بدست آورد.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

الف) $|A|=3(24-40)-2(16-15)+1(32-18)=-36$

$\Delta_{11}=24-40=-16$ ، $\Delta_{12}=-(16-15)=-1$ و $\Delta_{13}=32-18=14$

$\Delta_{21}=-(8-8)=0$ ، $\Delta_{22}=12-3=9$ و $\Delta_{23}=-(24-6)=-18$

$\Delta_{31}=10-6=4$ و $\Delta_{32}=-(15-4)=-11$ و $\Delta_{33}=18-8=10$

$$A^c=\begin{bmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13}\\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23}\\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & -1 & 14\\ 0 & 9 & -18\\ 4 & -11 & 10\end{bmatrix}$$

ادامه ی حل در صفحه ی بعد

$$A^{*}=\begin{bmatrix}-16 & 0 & 4\\ -1 & 9 & -11\\ 14 & -18 & 10\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{A^{*}}{\det A}=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}-16 & 0 & 4\\ -1 & 9 & -11\\ 14 & -18 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9}\\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{4} & -\frac{11}{36}\\ \frac{7}{18} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{18}\end{bmatrix}$$

ب) $\det B=1(0-0)+0+1(0-0)=0$

* ماتریس معکوس B وجود ندارد.

۲-۱۶: اگر u، v و w بردارهای ویژه ماتریس M و λ_1، λ_2 و λ_3 مقادیر ویژه آن باشند و در صورتی که L یک ماتریس مربع باشد که ستون های آن بردارهای u، v و w می باشند، آنگاه نشان دهید که $D=L^{T}ML$ یک ماتریس قطری است.

$$\underline{M}\,\underline{u}=\lambda_1\underline{u}$$
$$\underline{M}\,\underline{v}=\lambda_2\underline{v}\;\Rightarrow\;\underline{M}\,\underline{L}=\underline{L}\,\underline{D}\quad \text{(I)}\qquad \text{و}\quad D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$
$$\underline{M}\,\underline{w}=\lambda_3\underline{w}$$

$$[\underline{M}]\Big[\{\underline{u}\}\;\{\underline{v}\}\;\{\underline{w}\}\Big]=\Big[\underbrace{\{\underline{u}\}}_{\begin{Bmatrix}L_{11}\\L_{21}\\L_{31}\end{Bmatrix}}\;\underbrace{\{\underline{v}\}}_{\begin{Bmatrix}L_{12}\\L_{22}\\L_{32}\end{Bmatrix}}\;\underbrace{\{\underline{w}\}}_{\begin{Bmatrix}L_{13}\\L_{23}\\L_{32}\end{Bmatrix}}\Big]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

$$\underline{M}\,\underline{L}=\begin{bmatrix}\lambda_1L_{11} & \lambda_2L_{12} & \lambda_3L_{13}\\ \lambda_1L_{21} & \lambda_2L_{22} & \lambda_3L_{23}\\ \lambda_1L_{31} & \lambda_2L_{32} & \lambda_3L_{33}\end{bmatrix}=\Bigg[\lambda_1\underbrace{\begin{Bmatrix}L_{11}\\L_{21}\\L_{31}\end{Bmatrix}}_{\underline{u}}\;\lambda_2\underbrace{\begin{Bmatrix}L_{12}\\L_{22}\\L_{32}\end{Bmatrix}}_{\underline{v}}\;\lambda_3\underbrace{\begin{Bmatrix}L_{13}\\L_{23}\\L_{33}\end{Bmatrix}}_{\underline{w}}\Bigg]$$

* که نشان دادیم $\underline{A}\,\underline{L}=\underline{L}.\underline{D}$ است
* حال دو طرف را ضرب در L^{T} ضرب می کنیم

$$\left.\begin{array}{l}L^{T}ML=L^{T}LD\\ \bar{A}=N^{T}AN\end{array}\right\}\Rightarrow D=L^{T}ML$$

از قبل $D=\bar{M}$

۲-۲۷ : مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر را برای ماتریس زیر بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}11 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix} \qquad \underline{A}\cdot\underline{v}=\lambda\,\underline{v}$$

* ماتریس یکه در هر بردار همان بردار است.

$$\begin{bmatrix}11 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}_1\\ \underline{x}_2\\ \underline{x}_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}_1\\ \underline{x}_2\\ \underline{x}_3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}11-\lambda & 4 & 0\\ 4 & 5-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 7-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}_1\\ \underline{x}_2\\ \underline{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{B}\,\underline{X}=0 \xrightarrow[\text{ضرب } B^{-1}]{\text{دو طرف}} \underline{B}^{-1}\underline{B}\,\underline{X}=0 \Rightarrow \underline{I}\,\underline{X}=\underline{0}\Rightarrow \underline{X}=0$$

* که تناقض است چون بردار ویژه نمی تواند صفر شود پس باید پس باید نشان دهیم ماتریس معکوس وجود ندارد و برای این کار باید نشان دهیم $\det B=0$ است

$$B^{-1}=\frac{B^*}{\det B}$$

$$\det B=\begin{vmatrix}11-\lambda & 4 & 0\\ 4 & 5-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \boxed{\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0}$$

$$I_1=\operatorname{tr}A=A_{ii}=A_{11}+A_{22}+A_{33}=11+5+7=23$$

$$I_2=A_{11}A_{22}+A_{22}A_{33}+A_{33}A_{11}-A_{12}A_{21}-A_{23}A_{32}-A_{31}A_{13}=35+77+(55-16)=151$$

$$I_3=\det A=11(35)-4(28)=273$$

$$\lambda^3-23\lambda^2+151\lambda-273=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=3\\ \lambda_2=7\\ \lambda_3=13\end{cases}$$

★ تعیین بردار ویژه برای $\lambda_1=3$

$$\begin{bmatrix} 11-3 & 4 & 0 \\ 4 & 5-3 & 0 \\ 0 & 0 & 7-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$8\underline{x}_1+4\underline{x}_2=0 \Rightarrow 8x_1=-4x_2 \Rightarrow 2\underline{x}_1=-\underline{x}_2$

$4\underline{x}_1+2\underline{x}_2=0$

$4\underline{x}_3=0 \Rightarrow \boxed{\underline{x}_3=0}$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ تعیین بردار ویژه برای $\lambda_2=7$

$$\begin{bmatrix} 11-7 & 4 & 0 \\ 4 & 5-7 & 0 \\ 0 & 0 & 7-7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{cases} 4\underline{x}_1+4\underline{x}_2=0 \\ 4\underline{x}_1-3\underline{x}_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \cancel{4}\underline{x}_1+4\underline{x}_2=0 \\ -\cancel{4}\underline{x}_1+3\underline{x}_2=0 \\ \hline 7\underline{x}_2=0 \end{array}$$

$7\underline{x}_2=0 \Rightarrow \underline{x}_2=0$ و $\underline{x}_1=0$

$\forall \underline{x}_3\neq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$

★ تعیین بردار ویژه برای $\lambda_3=13$

$$\begin{bmatrix} 11-13 & 4 & 0 \\ 4 & 5-13 & 0 \\ 0 & 0 & 7-13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-2\underline{x}_1+4\underline{x}_2=0$

$4\underline{x}_1-8\underline{x}_2=0 \Rightarrow 4\underline{x}_1=8\underline{x}_2 \Rightarrow \underline{x}_1=2\underline{x}_2$

$-6\underline{x}_3=0 \Rightarrow \underline{x}_3=0$

$$\begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲-۲۸ : نیروی F در امتداد خط واصل مبدأ مختصات و نقطه $P(\frac{a}{3}, \frac{2b}{3}, \frac{2c}{3})$ بر سطح بیضوی $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$ اثر می‌کند. مؤلفه این نیرو را در امتداد عمود بر سطح بیضوی بیابید

$$f=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b}+\frac{x_3^2}{c^2}-1=0$$

$$\vec{\nabla} F=\frac{\partial f}{\partial x_i}\underline{i}_i=\frac{\partial f}{\partial x_1}\underline{i}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\underline{i}_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\underline{i}_3$$

$$\vec{\nabla} F=\frac{2x_1}{a^2}\underline{i}_1+\frac{2x_2}{b^2}\underline{i}_2+\frac{2x_3}{c^2}\underline{i}_3 \xrightarrow{P(\frac{a}{3},\frac{2b}{3},\frac{2c}{3})}$$

$$\vec{\nabla} F=\frac{2}{a^2}\left(\frac{a}{3}\right)\underline{i}_1+\frac{2}{b^2}\left(\frac{2b}{3}\right)\underline{i}_2+\frac{2}{c^2}\left(\frac{2c}{3}\right)\underline{i}_3$$

$$\vec{\nabla} F=\frac{2}{3a}\underline{i}_1+\frac{4}{3b}\underline{i}_2+\frac{4}{3c}\underline{i}_3$$

$$|\vec{\nabla} F|=\sqrt{\left(\frac{2}{3a}\right)^2+\left(\frac{4}{3b}\right)^2+\left(\frac{4}{3c}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9a^2}+\frac{16}{9b^2}+\frac{16}{9c^2}}$$

$$n=\frac{\vec{\nabla} F}{\nabla F}=n_1\underline{i}_1+n_2\underline{i}_2+n_3\underline{i}_3$$

$A_n=\vec{\nabla} F\cdot n$ = یک عدد بدست می‌آید

$$A=A_n\underline{n}$$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\underline{u})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\underline{u})-\nabla^2\underline{u}$ (آزمون دکترا ۹۶ (جواب درست گزینه ۱ بود))

حل:

$$\nabla\times(\underbrace{\nabla\times\underline{u}}_{L})$$

$$L=\nabla\times\underline{u}=e_{ijk}\underline{i}_i\frac{\partial u_k}{\partial x_j}=\underbrace{e_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{L_i}\underline{i}_i$$

$\star\ L=L_i\underline{i}_i$

$L_r=e_{rjk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

$$\vec{\nabla}\times\underline{L}=e_{pqr}\underline{i}_p\frac{\partial L_r}{\partial x_q}$$

$$=e_{pqr}\underline{i}_p\frac{\partial}{\partial x_q}\left(e_{rjk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)=e_{pqr}e_{rjk}\underline{i}_p\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_q\partial x_j}$$

$$=e_{rpq}e_{rjk}\underline{i}_p\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_q\partial x_j}=(\delta_{pj}\delta_{qk}-\delta_{pk}\delta_{qj})\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_q\partial x_j}\underline{i}_p$$

$$=\delta_{pj}\delta_{qk}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_q\partial x_j}\underline{i}_p-\delta_{pk}\delta_{qj}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_q\partial x_j}\underline{i}_p$$

$$=\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_q\partial x_j}\underline{i}_j-\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_q\partial x_q}\underline{i}_k$$

$\nabla^2\underline{u}$

$\star\ \underline{u}=u_k\underline{i}_k$

$\vec{\nabla}$ $\frac{\partial}{\partial x_j}\underline{i}_j$ $\frac{\partial u_q}{\partial x_q}$ $\nabla\cdot\underline{u}$ $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\underline{u})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\underline{u})-\nabla^2\underline{u}$

۵ـ صفحه ۲۰ کتاب: اگر F و G توابع اسکالر (میدان های عددی) و V و U میدان های برداری باشند، روابط زیر را اثبات کنید.

(۲-۱۲۵- الف)

$$\nabla\cdot(\nabla F) = \nabla^2 F$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_j} i_j = f_{,j}\, i_j = \frac{\partial F}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} i_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} i_3$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_j} i_j = \frac{\partial}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} i_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} i_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = \nabla^2 f$$

(۲-۱۲۵- ب)

$$\nabla(FG) = F\nabla G + G\nabla F$$

$$\frac{\partial i_j}{\partial x_j}(FG) = \frac{\partial F}{\partial x_j} i_j G + \frac{\partial G}{\partial x_j} i_j F = G\nabla F + F\nabla G = F\nabla G + G\nabla F$$

(۲-۱۲۵- پ)

$$\nabla^2(FG) = F\nabla^2 G + 2(\nabla F)\cdot(\nabla G) + G\nabla^2 F$$

$$\nabla^2(fg) = \nabla\cdot\nabla(fg) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial (fg)}{\partial x_j}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} g + \frac{\partial g}{\partial x_j} f\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} g + \frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_j} f + \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}$$

$$= g\nabla^2 f + 2\frac{\partial f}{\partial x_{\underset{s}{j}}}\frac{\partial g}{\partial x_j}\underbrace{\delta_{js}}_{i_j\cdot i_s} + f\nabla^2 g$$

$$= g\nabla^2 F + 2\frac{\partial F}{\partial x_s}\cdot i_s \frac{\partial g}{\partial x_j} i_j + f\nabla^2 g$$

$$= g\nabla^2 F + 2(\nabla F)\cdot(\nabla g) + f\nabla^2 g = \nabla^2(FG)$$

(۲-۱۲۵-ب)

$$\nabla\cdot(F\underline{v}) = (\nabla F)\cdot\underline{v} + F\nabla\cdot\underline{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(F v_j) = \frac{\partial F}{\partial x_{\underset{r}{\cancel{j}}}} v_j \underbrace{\delta_{jr}}_{i_j\cdot i_r} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} F$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_j} i_j \cdot v_j i_j + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} F = (\nabla F)\cdot\underline{v} + F\nabla\cdot\underline{v}$$

(۲-۱۲۵-ج)

$$\nabla\times(\nabla F) = 0$$

$$e_{ijk}\, i_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} e_{ijk}\, i_i \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{1}{2} e_{ijk}\, i_i \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$= \frac{1}{2} e_{ijk}\, i_i \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{1}{2} e_{i\underset{k}{\cancel{j}}\underset{j}{\cancel{k}}}\, i_i \frac{\partial}{\partial x_{\underset{k}{\cancel{j}}}}\frac{\partial f}{\partial x_{\underset{j}{\cancel{k}}}} = 0$$

$$= \frac{1}{2} e_{ijk}\, i_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{2} e_{ijk}\, i_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

(۲-۱۲۵-ج)

$$\nabla\cdot(\nabla\times\underline{v}) = 0 \qquad \nabla\times\underline{v} = e_{ijk}\, i_i \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) = e_{ijk}\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} =$$

$$= \frac{1}{2} e_{ijk}\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{2} e_{i\underset{k}{\cancel{j}}\underset{j}{\cancel{k}}}\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_{\underset{k}{\cancel{j}}} \partial x_{\underset{j}{\cancel{k}}}}$$

$$= \frac{1}{2} e_{ijk}\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i x_k} - \frac{1}{2} e_{ijk}\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i x_k} = 0$$

(۲-۱۲۵-ث)

$$\nabla\cdot(F\nabla G) = F\nabla^2 G + \nabla F\cdot\nabla G$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}\underbrace{\delta_{rj}}_{i_r\cdot i_j} + f\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_r} i_r \frac{\partial g}{\partial x_j} i_j + f\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} = \nabla F\cdot\nabla G + F\nabla^2 G$$

$\nabla\times(F\,\underline{V}) = \nabla F\times\underline{V} + F\nabla\times\underline{V}$ (۲-۱۲۵-خ)

$$\nabla\times(F\underline{V}) = e_{ijk}\,\underline{i}_i\,\frac{\partial(f v_k)}{\partial x_j} = e_{ijk}\,\underline{i}_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}v_k + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}f\right)$$

$$= e_{ijk}\,\underline{i}_i\,\frac{\partial f}{\partial x_j}v_k + e_{ijk}\,\underline{i}_i\,f\,\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \nabla F\times V + f\nabla\times V$$

$\nabla\cdot(\underline{U}\times\underline{V}) = (\nabla\times\underline{U})\cdot\underline{V} - \underline{U}\cdot(\nabla\times\underline{V})$ (۲-۱۲۵-ح)

$$\underline{L} = \underline{U}\times\underline{V} = e_{ijk}\,\underline{i}_i\,u_j v_k = \underbrace{e_{ijk}\,u_j v_k}_{\text{مؤلفه i ام}}\,\underline{i}_i \Leftrightarrow \underline{L} = L_i\,\underline{i}_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(e_{ijk}\,u_j v_k) = e_{ijk}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}v_k + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}u_j\right)$$

$$= e_{ijk}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}v_k + e_{ijk}\,\frac{\partial v_k}{\partial x_i}u_j$$

$$= e_{kij}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,v_{\cancel{k}\,s}\,\underbrace{\delta_{ks}}_{i_k\cdot i_s} - e_{jik}\,\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\,u_{\cancel{j}\,r}\,\underbrace{\cancel{\delta_{rj}}}_{i_r\cdot i_j}$$

$$= e_{kij}\,\underline{i}_k\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,v_s\cdot\underline{i}_s - e_{jik}\,\underline{i}_j\,\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\,u_r\,\underline{i}_r$$

$$= (\nabla\times\underline{U})\cdot\underline{V} - \underline{U}\cdot(\nabla\times\underline{V})$$

$\nabla\times(\nabla\times\underline{V}) = \nabla(\nabla\cdot\underline{V}) - \nabla^2\underline{V}$ (۲-۱۲۵-د)

$$e_{ijk}\,\underline{i}_i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(e_{kqr}\,\frac{\partial v_r}{\partial x_q}\right) = e_{ijk}\,e_{kqr}\,\underline{i}_i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_r}{\partial x_q}$$

$$= e_{kij}\,e_{kqr}\,\underline{i}_i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_r}{\partial x_q} = (\delta_{iq}\,\delta_{jr} - \delta_{ir}\,\delta_{jq})\,\underline{i}_i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_r}{\partial x_q}$$

$$= \cancel{\delta_{iq}}\,\cancel{\delta_{jr}}\,\underline{i}_{\cancel{i}\,q}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_r}{\partial x_{\cancel{j}\,r}} - \cancel{\delta_{ir}}\,\cancel{\delta_{jq}}\,\underline{i}_{\cancel{i}\,r}\,\frac{\partial}{\partial x_{\cancel{j}\,q}}\,\frac{\partial v_r}{\partial x_q}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial x_r}}_{\nabla\cdot V}\,\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_q}\cdot\underline{i}_q}_{\nabla} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_q\,\partial x_q}\,\underline{i}_r = \nabla(\nabla\cdot\underline{V}) - \nabla^2\underline{V}$$

۴- اگر V یک بردار دلخواه و F و G توابع اسکالر در مختصات x_i باشند نشان دهید

$$V\times(\nabla\times V)=\nabla(V\cdot V)-(V\cdot\Delta)V$$

$$\underline{L}=\nabla\times\underline{V}=e_{ijk}\,\underline{i}_i\frac{\partial v_k}{\partial x_j}=\underbrace{e_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}}_{L_i\ \text{مولفه ام}\ i}\underline{i}_i \Leftrightarrow \underline{L}=L_i\underline{i}_i$$

$$\underline{V}\times\underline{L}=e_{pqr}\,\underline{i}_p v_q L_r=e_{pqr}\,\underline{i}_p v_q\left(e_{rjk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)$$

$$=e_{pqr}e_{rjk}\,\underline{i}_p v_q\frac{\partial v_k}{\partial x_j}=e_{rpq}e_{rjk}\,\underline{i}_p v_q\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$=(\delta_{pj}\delta_{qk}-\delta_{pk}\delta_{qj})\underline{i}_p v_q\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$=\cancel{\delta_{pj}}\,\cancel{\delta_{qk}}\,\underline{i}_{\underset{j}{p}}\,v_{\underset{k}{q}}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\cancel{\delta_{pk}}\,\cancel{\delta_{qj}}\,\underline{i}_{\underset{k}{p}}\,v_{\underset{j}{q}}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$=\overset{\nabla}{\underline{i}_j v_k\frac{\partial v_k}{\partial x_j}}-\underline{i}_k\overset{V\cdot\Delta}{v_j\frac{\partial v_k}{\partial x_j}}=\nabla(V\cdot V)-(V\cdot\Delta)V$$

تمرین : نشان دهید که اگر $c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\delta_{ik}\delta_{jl}+\nu\delta_{il}\delta_{jk}$ آنگاه c_{ijkl} ایزوتروپ است.

حل:

$$\bar{c}_{ijkl}=(n_{ir}n_{js}n_{tk}n_{wl}c_{rstw})+(n_{ir}n_{ks}n_{tj}n_{wl}c_{rstw})$$
$$+(n_{ir}n_{ls}n_{tj}n_{wk}c_{rstw})$$

$$\Rightarrow\ =(n_{ir}n_{j\underset{r}{s}}n_{\underset{w}{t}k}n_{wl}\lambda\cancel{\delta_{rs}}\cancel{\delta_{tw}})+(n_{ir}n_{k\underset{r}{s}}n_{\underset{w}{t}j}n_{wl}\mu\cancel{\delta_{rs}}\cancel{\delta_{tw}})$$
$$+(n_{ir}n_{l\underset{r}{s}}n_{\underset{w}{t}j}n_{wk}\nu\cancel{\delta_{rs}}\cancel{\delta_{tw}})$$

$$=(\lambda n_{ir}n_{jr}n_{tk}n_{tl})+(\mu n_{ir}n_{kr}n_{wj}n_{wl})$$
$$+(\nu n_{ir}n_{lr}n_{wj}n_{wk})$$

$$=(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl})+(\mu\delta_{ik}\delta_{jl})+(\nu n_{il}n_{jk})=c_{ijkl}$$

* پس ایزوتروپ است یعنی تحت دوران عوض نمی شود.

۷- اگر ϕ ، ϕ_1 و ϕ_2 میدان‌های اسکالر و $\underline{A}$ میدان برداری پیوسته باشند، نشان دهید: مثال ۲-۲۰ ص ۶۲

الف) $\nabla(\phi_1\phi_2)=\phi_1\nabla\phi_2+\phi_2\nabla\phi_1$

ب) $\nabla\times(\phi\underline{A})=\phi\nabla\times\underline{A}-\underline{A}\times\nabla\phi$

الف) $$\nabla(\phi_1\phi_2)=\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{i}_i(\phi_1\phi_2)=\frac{\partial\phi_1}{\partial x_i}\underline{i}_i\phi_2+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_i}\underline{i}_i\phi_1$$

$$=\phi_2\nabla\phi_1+\phi_1\nabla\phi_2=\phi_1\nabla\phi_2+\phi_2\nabla\phi_1$$

ب) $$\nabla\times(\phi\underline{A})=e_{ijk}\,\underline{i}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi A_k)$$

$$=e_{ijk}\,\underline{i}_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}A_k+\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\phi\right)$$

$$=\underbrace{e_{ijk}\,\underline{i}_i\frac{\partial\phi}{\partial x_j}A_k}_{\nabla\phi\times\underline{A}}+\underbrace{e_{ijk}\,\underline{i}_i\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\phi}_{\phi\nabla\times\underline{A}}$$

$$=-e_{ikj}\,\underline{i}_i\frac{\partial\phi}{\partial x_j}+e_{ijk}\,\underline{i}_i\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\phi$$

$$=-\underline{A}\times\nabla\phi+\phi\nabla\times\underline{A}=\phi\nabla\times\underline{A}-\underline{A}\times\nabla\phi\ \checkmark$$

۸- مثال ۲-۲۲ ص ۶۴): اگر A یک میدان برداری و $\underline{X}$ بردار وضعیت نقطه (X_1, X_2, X_3) باشد، نشان دهید که:

$$\nabla^2(\underline{A}\cdot\underline{X})=2\nabla\cdot\underline{A}+\underline{X}\cdot\nabla^2\underline{A}$$

$$\nabla\cdot\nabla(A_iX_i)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(A_iX_i)\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}X_i+\underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial x_j}}_{\delta_{ij}}A_i\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}X_i+A_j\right)$$

$$=\frac{\partial^2A_i}{\partial x_j\partial x_j}X_i+\frac{\partial A_j}{\partial x_j}+\underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial x_j}}_{\delta_{ij}}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}=\frac{\partial^2A_i}{\partial x_j\partial x_j}X_i+2\frac{\partial A_j}{\partial x_j}$$

$$=2\nabla\cdot\underline{A}+\underline{X}\cdot\nabla^2\underline{A}$$

۹- (تمرین ۲-۳۰ کتاب): اگر ϕ یک میدان اسکالر پیوسته و $\underline{X}$ یک بردار دلخواه باشد، نشان دهید که:

$$\nabla^2(\phi \underline{X}) = \underline{X}\nabla^2\phi + 2\nabla\underline{X}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla^2\underline{X}$$

درصورتی که X بردار وضعیت یک نقطه‌ی دلخواه باشد:

$$\nabla^2(\phi \underline{X}) = 2\nabla\phi + \underline{X}\nabla^2\phi$$

* $\nabla^2(\phi \underline{X}) = \underline{X}\nabla^2\phi + 2\nabla X\cdot\nabla\phi + \phi\nabla^2\underline{X}$

$$\nabla\cdot\nabla(\phi\underline{X}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi X_i)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}X_i + \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\phi\right)$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_j}X_i + \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_j}\phi + \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_j}X_i + 2\frac{\partial X_i}{\partial x_{\cancel{j}\,r}}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\underbrace{\delta_{rj}}_{i_r\cdot i_j} + \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j\partial x_j}\phi$$

$$= \underline{X}\nabla^2\phi + 2\frac{\partial X_i}{\partial x_r}\underline{i}_r\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\underline{i}_j + \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j\partial x_j}\phi$$

$$= \underline{X}\nabla^2\phi + 2\nabla\underline{X}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla^2\underline{X}$$

* $\nabla^2(\phi\underline{X}) = 2\nabla\phi + \underline{X}\nabla^2\phi$

$$\nabla\cdot\nabla(\phi\underline{X}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\phi X_m\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}X_m + \frac{\partial X_m}{\partial x_j}\phi\right) \quad \delta_{mj}$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_j}X_m + \frac{\partial X_m}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_{\cancel{j}\,m}} + \frac{\partial\phi}{\partial x_{\cancel{j}\,m}}\cancel{\delta_{mj}} \quad \delta_{mj}$$

$$= \frac{\partial^2\phi X_m}{\partial x_j\partial x_j} + 2\frac{\partial\phi}{\partial x_m} = \underline{X}\nabla^2\phi + 2\nabla\phi \checkmark$$

۱۰ - اگر $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} c_{ij} x_i x_j$ باشد آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x_i} = ?$
(مثال حل جزوه)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2} c_{ij} x_i x_j\right)$$

* چون اندیس آزاد i سه بار تکرار شده است باید اندیس i را خط بزنیم و یک نام دیگر قرار بدهیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2} c_{ij} x_i x_j\right) = \frac{1}{2} c_{ij}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right)$$

$$= \frac{1}{2} c_{ij}(\delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk}) = \frac{1}{2} c_{ik} \cancel{\delta_{ik}} x_j + \frac{1}{2} c_{ij} x_i \cancel{\delta_{jk}}$$

$$F_{,k} = \frac{1}{2}(c_{kj} x_j + c_{ik} x_i)$$

* در هر جمله باید یک اندیس آزاد داشته باشیم. اگر k را به i تبدیل کنیم در جمله $c_{ik} x_i$ سه جمله i داریم پس ابتدا i را به j تبدیل می کنیم سپس k را به i تبدیل می کنیم.

$$F_{,i} = \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) x_j$$

۱۱- نشان دهید که تانسور مرتبه ۴، $c_{ijkl} = \mu \delta_{ik} \delta_{jl}$ ایزوتروپ است.
(μ ثابت و اسکالر فرض می شود).

* حل خوده دکتر اسکندری برگرفته از جزوه ی ورودی های ۹۲:

حل:

$$c_{ijkl} = n_{ir} n_{ks} n_{tj} n_{wl} c_{rstw}$$
$$= n_{ir} n_{ks} n_{tj} n_{wl} \lambda \delta_{rs} \delta_{tw}$$
$$= \mu \underbrace{n_{ir} n_{kr}}_{\delta_{ik}} \underbrace{n_{wj} n_{wl}}_{\delta_{jl}} = c_{ijkl}$$

تمرین: ثابت کنید e_{ijk} ایزوتروپ است.

$$e_{ijk} = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = (a_{ri} \vec{e}'_r \times a_{sj} \vec{e}'_r) \cdot a_{tk} \vec{e}'_k$$
$$= a_{ri} a_{sj} a_{tk} [(\vec{e}'_r \times \vec{e}'_s) \cdot \vec{e}'_t] = a_{ri} a_{sj} a_{rk} \varepsilon'_{rst}$$

$$\vec{e}_{rst} = (\vec{e}'_r \times \vec{e}'_s) \cdot \vec{e}'_t = (a_{ri} \vec{e}_i \times a_{sj} \vec{e}_j) \cdot e_{tk} \vec{e}_k = a_{ri} a_{sj} a_{tk} e_{ijk}$$

۱۱- فرض کنید تابع u :
(مثال ۱۴ جزوه)

$$u(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}\left(C_{ijKL}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{KL}\right)$$

که C_{ijKL} ثابت است مطلوب است: $\frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}}$ ؟

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}}\left(\frac{1}{2} C_{\underset{rs}{ij}KL}\,\sigma_{\underset{rs}{ij}}\,\sigma_{KL}\right)$$

* چون اندیس های اول سه بار تکرار شده اند باید اصلاح شوند.

$$= \frac{1}{2} C_{rsKL} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}}\left(\sigma_{rs}\sigma_{KL}\right)$$

$$= \frac{1}{2} C_{rsKL}\left(\frac{\partial \sigma_{rs}}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{KL} + \sigma_{rs}\frac{\partial \sigma_{KL}}{\partial \sigma_{ij}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} C_{rsKL}\left(\frac{\partial \sigma_{rs}}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{KL} + \sigma_{rs}\frac{\partial \sigma_{KL}}{\partial \sigma_{ij}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} C_{rsKL}\left(\delta_{ri}\,\delta_{sj}\,\sigma_{KL} + \sigma_{rs}\,\delta_{Ki}\,\delta_{Lj}\right)$$

$$= \frac{1}{2} C_{\underset{i}{r}\underset{j}{s}KL}\,\cancel{\delta_{ri}}\,\cancel{\delta_{sj}}\,\sigma_{KL} + \frac{1}{2} C_{rs\underset{i}{K}\underset{j}{L}}\,\sigma_{rs}\,\cancel{\delta_{Ki}}\,\cancel{\delta_{Lj}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2} C_{ijKL}\,\sigma_{KL} + \frac{1}{2} C_{rsij}\,\sigma_{rs} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} C_{rs.KL}\,\sigma_{rs} & ① \\ \frac{1}{2} C_{mnKL}\,\sigma_{mn} & ② \\ \frac{1}{2} C_{mnij}\,\sigma_{mn} & ③ \\ \frac{1}{2} C_{KLij}\,\sigma_{KL} & ④ \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2} C_{ijKL}\,\sigma_{KL} + \frac{1}{2} C_{ijKL}\,\sigma_{KL}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_{ij}} = C_{ijKL}\,\sigma_{KL}$$

$$C_{KLij} = C_{ijKL}$$

خواص تانسور

①

مثال ۳-۵ ص ۱۵۷

$$u_1 = K(3X_1^2 + X_2) \quad , \quad u_2 = K(2X_2^2 + X_3) \quad , \quad u_3 = K(4X_2^2 + X_1)$$

ضریب بزرگنمایی یک جزء طول dL در نقطه (۱و۱و۱) و در امتداد (۱و۱و۱)N را بیابید.

$$MF = \varepsilon_{ij} N_i N_j$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\, u_{k,j})$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1} + u_{1,1}u_{1,1} + u_{2,1}u_{2,1} + u_{3,1}u_{3,1})$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(6KX_1 + 6KX_1 + 36K^2X_1^2 + 0 + K^2)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(12KX_1 + 36K^2X_1^2 + K^2) = \boxed{6KX_1 + 18K^2X_1^2 + \frac{K^2}{2}}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2})$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(u_{2,2} + u_{2,2} + u_{1,2}u_{1,2} + u_{2,2}u_{2,2} + u_{3,2}u_{3,2})$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3})$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(u_{3,3} + u_{3,3} + u_{1,3}u_{1,3} + u_{2,3}u_{2,3} + u_{3,3}u_{3,3})$$

* پس از این روابط ε_{ij} را داریم

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 6KX_1 + \frac{1}{2}K^2 + 18K^2X_1^2 & \frac{K^2}{2} + 3K^2X_1 & \frac{K}{2} + 4K^2X_1 \\ & 4KX_2 + \frac{1}{2}K^2 + 8K^2X_2^2 & \frac{K}{2} + 2K^2X_2 \\ \text{Sym} & & 8KX_3 + \frac{K^2}{2} + 32K^2X_3^2 \end{bmatrix}$$

* تانسور کرنش ε_{ij} در نقطه (1,1,1) به صورت زیر به دست می آید

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix} 6K+\frac{37}{2}K^2 & \frac{K}{2}+3K^2 & \frac{K}{2}+4K^2 \\ & 4K+\frac{17}{2}K^2 & \frac{K}{2}+2K^2 \\ & & 8K+\frac{65}{2}K^2 \end{bmatrix}$$

* نرمال کردن N

$$N=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(i_1+i_2+i_3)=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{N_1}i_1+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{N_2}i_2+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{N_3}i_3 \qquad N=\frac{\text{خود بردار}}{\text{اندازه بردار}}$$

$$N_1=N_2=N_3=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$MF=\varepsilon_{ij}N_iN_j=\varepsilon_{11}N_1N_1+\varepsilon_{12}N_1N_2+\varepsilon_{13}N_1N_3$$
$$+\varepsilon_{21}N_2N_1+\varepsilon_{22}N_2N_2+\varepsilon_{23}N_2N_3$$
$$+\varepsilon_{31}N_3N_1+\varepsilon_{32}N_3N_2+\varepsilon_{33}N_3N_3$$

$$=6K+\frac{37}{2}K^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{K}{2}+3K^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{K}{2}+4K^2\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}$$

$+\cdots$

$+\cdots$

$$MF=\frac{1}{3}\left(21K+\frac{155}{2}K^2\right)$$

مثال ۳- ۵ - تغییر شکل یک جسم در یک نقطه کلی به صورت زیر داده شده است

$$u_1=K(3X_1^2+X_2) \quad \text{و} \quad U_2=K(2X_2^2+X_3) \quad \text{و} \quad U_3=K(4X_3^2+X_1)$$

که در آن K مقدار ثابت بزرگتر از صفر می باشد. ضریب بزرگنمایی یک جزء طول dL در نقطه (1,1,1) و در امتداد N(1,1,1) را بیابید.

مثال ۳-۶۶ وضعیت یک محیط پس از تغییر شکل با معادلات زیر مشخص شده است (e_0 ، b ثابت هستند)

$$x_1 = X_1 + \frac{e_0}{b^2} X_2^2 \quad و \quad x_2 = X_2 \quad و \quad x_3 = X_3$$

زاویه بین امتدادهای $N(1,0,0)$ و $M(0,1,0)$ را در نقطه دلخواه روی خط با معادله‌ی پارامتری زیر بیابید:

$$X_1 = t \quad و \quad X_2 = X_3 = b$$

* ما به دنبال ϕ هستیم.

$$u_i = x_i - X_i \Rightarrow u_1 = \cancel{X_1} + \frac{e_0}{b^2} X_2^2 - \cancel{X_1} = \frac{e_0}{b^2} X_2^2 \quad , \quad u_2 = 0 \; , \; u_3 = 0$$

$\Phi = 90 \Rightarrow N \cdot M = 0$

$$\sqrt{1 + 2\,mF(N)}\,\sqrt{1 + 2\,mF(M)}\,\cos\phi = 2\varepsilon_{ij} N_i M_j + \underbrace{\cos\Phi}_{0}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}\right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1} u_{1,2} + u_{2,1} u_{2,2} + u_{3,1} u_{3,2}\right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(2\frac{e_0}{b^2} X_2 + 0 + 0 + 0 + 0\right) = \frac{e_0}{b^2} X_2$$

$$mF(N) = \varepsilon_{ij} N_i N_j = \varepsilon_{11} N_1 N_1 = 0$$

(در امتداد (۱و۰و۰))

$$N_1 = 1 \Leftarrow N = \frac{1}{\sqrt{1^2}} i_1 = i_1 \Leftarrow N$$ * نرمال کردن

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(u_{1,1} + u_{1,1} + u_{1,1} u_{1,1} + u_{2,1} u_{2,1} + u_{3,1} u_{3,1}\right)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(0 + 0 + 0 + 0 + 0\right) = 0$$

$$mF(M) = \varepsilon_{ij} M_i M_j = \varepsilon_{22} M_2 M_2 =$$

(در امتداد (۰و۱و۰))

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(u_{2,2} + u_{2,2} + u_{1,2} u_{1,2} + u_{2,2} u_{2,2} + u_{3,2} u_{3,2}\right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(0 + 0 + \left(2\frac{e_0}{b^2} X_2\right)^2 + 0 + 0\right) = 2\frac{e_0^2}{b^4} X_2^2$$

$$mF(M) = 2\frac{e_0^2}{b^4} X_2^2 \times 1 \times 1 = 2\frac{e_0^2}{b^4} X_2^2$$

$$\cos\phi = \frac{2 \times \frac{e_0}{b^2} X_2}{\sqrt{1 + 2 \times 2\frac{e_0^2}{b^4} X_2^2}} \Rightarrow \phi = \cos^{-1}\left(\frac{2 e_0 X_2}{b^2\sqrt{1 + 4\frac{e_0^2}{b^4} X_2^2}}\right)$$

مثال ۳-۷: تغییر شکل محیطی به صورت زیر داده شده است:

$x_i = (\delta_{ij} + B_{ij}) X_j$

که در آن B_{ij} ثابت می باشد

الف) تانسور تغییرشکل e_{ij} و تانسور چرخش را بیابید

ب) شرایطی را که در آن $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$ است تعیین کنید (ε_{ij} مؤلفه های تانسور کرنش گرین لاگرانژ می باشند).

الف)

$U_i = x_i - X_i = (\delta_{ij} + B_{ij}) X_j - X_i = \cancel{\delta_{ij}} \cancel{X_j} + B_{ij} X_j - X_i = \cancel{X_i} + B_{ij} X_j - \cancel{X_i}$

$U_i = B_{ij} X_j$

$U_{i,k} = B_{ij} \left(\frac{\partial X_j}{\partial X_k}\right) \cancel{\delta_{jk}} = B_{ik}$

$U_{k,i} = B_{ki}$

$e_{ik} = \frac{1}{2}(U_{i,k} + U_{k,i}) = \frac{1}{2}(B_{ik} + B_{ki})$

$\omega_{ik} = \frac{1}{2}(U_{i,k} - U_{k,i}) = \frac{1}{2}(B_{ik} - B_{ki})$

ب)

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i} U_{k,j})$ (I)

$U_i = B_{ij} X_j$

$\cancel{U_i} = \cancel{B_{ij}} \cancel{X_j} \Rightarrow U_j = B_{jk} X_k$

$\cancel{U_i} = \cancel{B_{ij}} X_j \Rightarrow U_k = B_{kj} X_j$

$U_{i,j} = B_{ij}$

$U_{j,i} = B_{jk} \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_i}\right) \cancel{\delta_{ki}} = B_{ji}$

$U_{k,i} = B_{kj} \left(\frac{\partial X_j}{\partial X_i}\right) \cancel{\delta_{ji}} = B_{ki}$

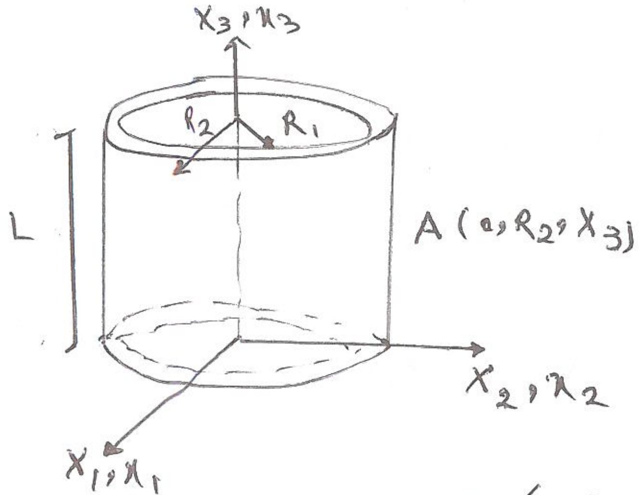
$U_{k,j} = B_{kj}$

* با جاگذاری ★ در (I) داریم:

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(B_{ij} + B_{ji} + B_{ki} B_{kj})$

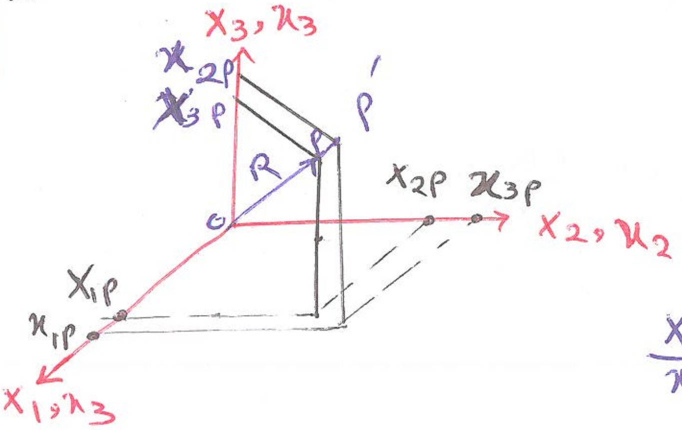
* شرط لازم و کافی برای آنکه $\varepsilon_{ij} = e_{ij}$ باشد آن است که $B_{ij} + B_{ji} >> B_{ki} B_{kj}$

مثال ۳-۱۱: استوانه‌ای توخالی مطابق شکل (۳-۱۲) را در نظر می‌گیریم. این:



$\forall X_3:\ r = R + cR$

استوانه تحت تغییرشکل $r = R + cR$ قرار می‌گیرد که در آن R شعاع قبل از تغییر شکل و r شعاع پس از تغییرشکل بوده و c ثابت است. بزرگترین کرنش محوری در نقطه $A(0, R_2, X_3)$ را بیابید.



گام اول: ایجاد تغییرشکل‌ها

* در اینجا باید از رابطه‌ی تالس استفاده کنیم و تغییرشکل‌ها را نوشته

$$\frac{X_i}{x_i} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{X_i}{x_i} = \frac{R}{R + cR}$$

$$\Rightarrow \frac{X_i}{x_i} = \frac{\cancel{R}}{\cancel{R}(1+c)} \Rightarrow x_i = X_i(1+c)$$

$$u_i = x_i - X_i \Rightarrow u_i = \cancel{X_i} + cX_i - \cancel{X_i} = cX_i$$

$$u_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}[c\delta_{ij} + c\delta_{ij} + (c\delta_{ki})(c\delta_{kj})] = c\delta_{ij} + \frac{1}{2}c^2\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = (c + \frac{1}{2}c^2)\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = c + \frac{1}{2}c^2$$

مثال ۳-۱۲: کره توخالی به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 تحت تغییر شکل زیر قرار دارد:

$$r = R + cR^2$$

که در آن R شعاع هر نقطه قبل از تغییر شکل و r شعاع همان نقطه پس از تغییر شکل است و c ثابت می باشد. تانسور کرنش را بیابید

$$\frac{X_i}{x_i} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{X_i}{x_i} = \frac{R}{R+cR^2} \Rightarrow \frac{X_i}{x_i} = \frac{\cancel{R}}{\cancel{R}(1+cR)}$$

$$\Rightarrow X_i = \frac{x_i}{1+cR} \Rightarrow x_i = X_i(1+cR)$$

$$u_i = x_i - X_i = \cancel{X_i} + X_i cR - \cancel{X_i} = X_i cR$$

$$\star\ R^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = X_j X_j = X_i X_i$$

$$u_{i,j} = \frac{\partial}{\partial X_j}(cX_i R) = c\left(\frac{\partial X_i}{\partial X_j} \times R + X_i \frac{\partial R}{\partial X_j}\right)$$

$$u_{i,j} = c(\delta_{ij} R + X_i R_{,j})$$

$$\star \Rightarrow 2R\frac{\partial R}{\partial X_j} = 2X_k \frac{\partial X_k}{\partial X_j} = 2X_k \delta_{kj} = 2X_j \Rightarrow 2R\frac{\partial R}{\partial X_j} = 2X_j$$

$$\Rightarrow R_{,j} = \frac{1}{R} X_j$$

$$u_{i,j} = c\left(R\delta_{ij} + \frac{X_i}{R} X_j\right)$$

مثال:

تغییر شکل همگن برای یک جسم به صورت زیر داده شده است:

$$x_1 = X_1 + \alpha X_2 + \alpha\beta X_3 \quad , \quad x_2 = \alpha\beta X_1 + X_2 + \beta^2 X_3 \quad , \quad x_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

که در آن α و β ثابت هستند. β را برحسب α چنان بیابید که هیچ تغییر حجمی در هیچ نقطه اتفاق نیافتد. تغییر شکل ها دلخواه هستند.

* چون صورت سؤال از ما خواسته است که هیچ تغییر حجمی اتفاق نیافتد

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i} U_{k,j})$$

$$U_i = x_i - X_i$$

$$U_1 = x_1 - X_1 = \cancel{X_1} + \alpha X_2 - \alpha\beta X_3 - \cancel{X_1} = \alpha X_2 - \alpha\beta X_3$$

$$U_2 = x_2 - X_2 = \alpha\beta X_1 + \cancel{X_2} + \beta^2 X_3 - \cancel{X_2} = \alpha\beta X_1 + \beta^2 X_3$$

$$U_3 = x_3 - X_3 = X_1 + X_2 + \cancel{X_3} - \cancel{X_3} = X_1 + X_2$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(U_{1,1} + U_{1,1} + U_{1,1} U_{1,1} + U_{2,1} U_{2,1} + U_{3,1} U_{3,1})$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(0 + 0 + 0 + (\alpha\beta)(\alpha\beta) + (1)(1)) = \frac{\alpha^2\beta^2}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow e_{11} = 0$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(U_{2,2} + U_{2,2} + U_{1,2} U_{1,2} + U_{2,2} U_{2,2} + U_{3,2} U_{3,2})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(0 + 0 + (\alpha)(\alpha) + 0 + (1)(1)) = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow e_{22} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(\cancel{U_{3,3}} + \cancel{U_{3,3}} + U_{1,3} U_{1,3} + U_{2,3} U_{2,3} + U_{3,3} U_{3,3})$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(+\alpha^2\beta^2 + (\beta^2)(\beta^2) + 0) = \frac{\alpha^2\beta^2}{2} + \beta^4 . \quad \Rightarrow e_{33} = 0$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2\beta^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{2} + \beta^4$$

$$\alpha^2\beta^2 + \frac{\alpha^2}{2} + \beta^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$ ازهشت غیرخطی مرتبه نظر نشد

۱-۳: میدان تغییرمکان در یک محیط پیوسته به صورت $\underline{u}=(K(X_2-X_1), K(X_1-X_2), KX_1X_3)$ است که در آن K مقدار ثابت می باشد. آیا این تغییرمکان امکان پذیر است.

$$u_1=K(X_2-X_1) \quad , \quad u_2=K(X_1-X_2) \quad , \quad u_3=KX_1X_3$$

* شرط اینکه تغییرمکان امکان پذیر باشد باید $J>0$ باشد.

$$J=\begin{vmatrix} 1+u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & 1+u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1+u_{3,3} \end{vmatrix}>0$$

$$J=\begin{vmatrix} 1-K & K & 0 \\ K & 1-K & 0 \\ KX_3 & 0 & 1+KX_1 \end{vmatrix}>0$$

$$(1-K)\big((1-K).(1+KX_1)\big)-K\big(K(1+KX_1)\big)=0$$

$$\Rightarrow (1-K)(1+KX_1-K-K^2X_1)-K(K+K^2X_1$$

$$\Rightarrow 1+KX_1-K-K^2X_1-K-K^2X_1+\cancel{K^2}+\cancel{K^3}X_1-\cancel{K^2}-\cancel{K^3}X_1>0$$

$$\Rightarrow -2X_1K^2+KX_1-2K+1>0 \Rightarrow X_1K(-2K+1)+(-2K+1)>0$$

$$\Rightarrow (-2K+1)(X_1K+1)>0 \Rightarrow -2K+1>0 \Rightarrow K<\frac{1}{2}=0/5$$

* پس شرط امکان پذیر بودن تغییرمکان:

$$0<K<0/5$$

۳-۵۵ تغییر شکل زیر داده شده است:

$$x_1 = \mu(X_1 + X_2 \tan\alpha) \quad , \quad x_2 = \mu^{-1} X_2 \quad , \quad x_3 = X_3$$

که در آن α و $\mu \neq$ ثابت است. با استفاده از مسأله (۳-۴۴) نشان دهید که سه امتداد در این تغییر شکل وجود دارد که امتداد تغییرشکل یافته آن‌ها بر امتداد اولیه منطبق است. ضریب بزرگنمایی را در این امتدادها بدست آورید.

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \lambda \delta_{ij}\right) N_j = 0 \Rightarrow$$ از مسأله ۳-۴

$$B = \begin{bmatrix} \mu-\lambda & \mu\tan\alpha & 0 \\ 0 & \mu^{-1}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mu-\lambda & \mu\tan\alpha & 0 \\ 0 & \mu^{-1}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* برای اینکه امتداد ویژه صفر نشود باید نشان دهیم B^{-1} وجود ندارد پس باید $\det B = 0$ باشد

$$\begin{vmatrix} \mu-\lambda & \mu\tan\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\mu-\lambda)\left(\left(\frac{1}{\mu}-\lambda\right)(1-\lambda)\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = \mu \\ \lambda = 1 \\ \lambda = \frac{1}{\mu} \end{cases}$$

امتداد ویژه برای $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} \mu-1 & \mu\tan\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mu-1)N_1 + \mu\tan\alpha\, N_2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{\mu}-1\right)N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = 0 \Rightarrow N_1 = 0$$

* N_3 دلخواه است

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_3 \end{bmatrix} = n_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

امتداد ویژه برای $\lambda=\mu$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mu\tan\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu}-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu\tan\alpha\, N_2=0 \Rightarrow N_2=0 \\ (\frac{1}{\mu}-\mu)N_2=0 \Rightarrow N_2=0 \\ (1-\mu)N_3=0 \Rightarrow N_3=0 \\ * N_1 \text{ دلخواه} \end{array}\right\} \quad N_2=\begin{bmatrix} n_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=n_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

امتداد ویژه برای $\lambda=\frac{1}{\mu}$

$$\begin{bmatrix} \mu-\frac{1}{\mu} & \mu\tan\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{\mu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mu-\frac{1}{\mu})N_1+\mu\tan\alpha\, N_2=0 \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$(1-\frac{1}{\mu})N_3=0 \Rightarrow \boxed{N_3=0}$$

$$* \Rightarrow (\mu-\frac{1}{\mu})N_1+\mu\tan\alpha\, N_2=0 \Rightarrow \overbrace{(\mu-\frac{1}{\mu})}^{\frac{\mu^2-1}{\mu}}N_1=-\mu\tan\alpha\, N_2$$

$$\Rightarrow (\mu^2-1)N_1=-\mu^2\tan\alpha\, N_2 \Rightarrow N_1=\frac{-\mu^2}{\mu^2-1}\tan\alpha\, N_2$$

اگر $N_2=n_1$ دلخواه $\Rightarrow N_1=\frac{-\mu^2}{\mu^2-1}\tan\alpha\, n_1$

$\bar{N}_3$: امتداد ویژه واحد (هر مؤلفه تقسیم بر اندازه)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-\mu^2}{\mu^2-1}\tan\alpha\, n_1 \\ n_1 \\ 0 \end{bmatrix}=n_1\begin{bmatrix} \frac{-\mu^2}{\mu^2-1}\tan\alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N}_3=\underbrace{\frac{\frac{-\mu^2}{\mu^2-1}\tan\alpha}{|\bar{N}_3|}}_{N_1}\,\mathbf{i}_1+\underbrace{\frac{1}{|\bar{N}_3|}}_{N_2}\,\mathbf{i}_2$$

$$|\bar{N}_3|=\sqrt{\left(\frac{-\mu^2}{\mu^2-1}\tan\alpha\right)^2+1^2}=\sqrt{1+\frac{\mu^4}{(\mu^2-1)^2}\tan^2\alpha}$$

اندازه‌ی امتداد سوم

7

$$x_1=\mu(X_1+X_2\tan\alpha)\quad , x_2=\mu^{-1}X_2\quad , x_3=X_3$$

$$u_i=x_i-X_i$$

$$u_1=x_1-X_1=\mu X_1+\mu X_2\tan\alpha-X_1=(\mu-1)X_1+\mu X_2\tan\alpha$$

$$u_2=\frac{1}{\mu}X_2-X_2=\left(\frac{1}{\mu}-1\right)X_2$$

$$MF(\underline{N})=\varepsilon_{ij}N_iN_j$$

$$u_3=X_3-X_3=0$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}\,u_{k,j}\right)$$

$$MF(\underline{N}_1)=\varepsilon_{33}N_3N_3=0$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{2}\left(\cancel{u_{3,3}}^{0}+\cancel{u_{3,3}}^{0}+\cancel{u_{1,3}}^{0}u_{1,3}+\cancel{u_{2,3}}^{0}u_{2,3}+\cancel{u_{3,3}}^{0}u_{3,3}\right)$$

$$MF(\underline{N}_2)=\varepsilon_{11}N_1N_1=\frac{1}{2}(\mu^2-1)$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}\left(u_{1,1}+u_{1,1}+u_{1,1}u_{1,1}+u_{2,1}u_{2,1}+u_{3,1}u_{3,1}\right)$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}\left(\mu-1+\mu-1+(\mu-1)^2\right)=\frac{1}{2}\left(2(\mu-1)+(\mu-1)^2\right)=(\mu-1)+\frac{1}{2}(\mu-1)^2$$

$$=\mu-1+\frac{1}{2}\mu^2-\mu+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\mu^2-\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{2}(\mu^2-1)}$$

$$MF(\underline{N}_3)=\varepsilon_{ij}n_in_j=\varepsilon_{11}N_1N_1+\varepsilon_{12}N_1N_2+\varepsilon_{13}N_1\cancel{N_3}$$
$$+\varepsilon_{21}N_2N_1+\varepsilon_{22}N_2N_2+\varepsilon_{23}N_2\cancel{N_3}$$
$$+\varepsilon_{31}\cancel{N_3}N_1+\varepsilon_{32}\cancel{N_3}N_2+\varepsilon_{33}N_3\cancel{N_3}$$

$$\varepsilon_{21}=\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(u_{1,2}+\cancel{u_{2,1}}+u_{1,1}u_{1,2}+\cancel{u_{2,1}}u_{2,2}+\cancel{u_{3,1}}u_{3,2}\right)=\frac{1}{2}\mu\tan\alpha$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}\left(u_{2,2}+u_{2,2}+u_{1,2}u_{1,2}+u_{2,2}u_{2,2}+\cancel{u_{3,2}}u_{3,2}\right)$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\mu}-1\right)+\left(\frac{1}{\mu}-1\right)+(\mu\tan\alpha)^2+\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2\right)$$

$$MF(\underline{N}_3)=\varepsilon_{11}N_1N_1+\varepsilon_{22}N_2N_2+2\varepsilon_{21}N_2N_1\Rightarrow$$

باجایگذاری N_1 ، N_2 (از صفحه‌ی قبل) و ε_{11} و ε_{22} و ε_{21} ضریب بزرگنمایی در این (4) راستا بدست می آید

۳-۷: دو المان با طول تغییرناپذیر در امتدادهای $n_1(\cos\beta, \sin\beta, 0)$ و $n_2(\cos\beta, -\sin\beta, 0)$ در یک محیط تراکم ناپذیر قرار داده شده است. این محیط تحت تغییر شکل زیر قرار گرفته است:

$$x_1=\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}X_1 \quad , \quad x_2=\frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}}X_2 \quad , \quad x_3=\mu X_3$$

که در آن α و μ ثابت هستند. نشان دهید که شرط تغییرناپذیر بودن طول المان $\alpha^2\cos^2\beta+\alpha^{-2}\sin\beta=\mu$

حل:

$$x_1=\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}X_1 \quad , \quad x_2=\frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}}X_2 \quad , \quad x_3=\mu X_3$$

$$U_1=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}-1\right)X_1 \; , \; U_2=\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}}-1\right)X_2 \; , \; U_3=(\mu-1)X_3$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\mu}-1\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2\mu}-1\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\mu^2-1) \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(U_{i,j}+U_{j,i}+U_{k,i}U_{k,j}\right)$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}\left(U_{1,1}+U_{1,1}+U_{1,1}U_{1,1}+\cancel{U_{2,1}}U_{2,1}+\cancel{U_{3,1}}U_{3,1}\right)$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}-1\right)+\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}-1\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{2\alpha}{\sqrt{\mu}}}-2+\frac{\alpha^2}{\mu}-\cancel{2\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}}+1\right)$$

$$\boxed{\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\mu}-1\right)}$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}\left(U_{2,2}+U_{2,2}+\cancel{U_{1,2}}U_{1,2}+U_{2,2}U_{2,2}+\cancel{U_{3,2}}U_{3,2}\right)$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}}-1\right)+\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}}-1\right)+\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}}-1\right)^2\right)$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{2}{\alpha\sqrt{\mu}}}-2+\frac{1}{\alpha^2\mu}-\cancel{\frac{2}{\alpha\sqrt{\mu}}}+1\right)\Rightarrow\boxed{\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2\mu}-1\right)}$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{2}\left(U_{3,3}+U_{3,3}+\cancel{U_{1,3}}U_{1,3}+\cancel{U_{2,3}}U_{2,3}+U_{3,3}U_{3,3}\right)$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{2}\left(2(\mu-1)+(\mu-1)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\cancel{2\mu}-2+\mu^2-\cancel{2\mu}+1\right)=\frac{1}{2}(\mu^2-1)$$

$$\Rightarrow\boxed{\varepsilon_{33}=\frac{1}{2}(\mu^2-1)}$$

$MF = \varepsilon_{ij} N_i N_j \qquad MF(\underline{N}) = \frac{1}{2}\left(\frac{dL}{dl} - 1\right)$

★ $dL = dl$ (طول اولیه و ثانویه) باهم برابر است چون صورت سوال گفته است دو المان با طول تغییرناپذیر داریم ⇐ $MF = \frac{1}{2}(1-1) = 0$.

$$MF = \varepsilon_{ij} N_i N_j = \varepsilon_{11} N_1 N_1 + \varepsilon_{12} N_1 N_2 + \varepsilon_{13} N_1 N_3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} N_i N_j = 0 \Rightarrow \varepsilon_{11}(N_1)^2 + \varepsilon_{22}(N_2)^2 = 0$$

$$\vec{N}_1 = \frac{\cos\beta}{1}\underline{i}_1 + \frac{\sin\beta}{1}\underline{i}_2$$

$$|N| = \sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta} = 1$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha^2}{\mu} - 1\right)\cos^2\beta + \cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\alpha^2\mu} - 1\right)\sin^2\beta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{\mu}\cos^2\beta - \cos^2\beta + \frac{1}{\alpha^2\mu}\sin^2\beta - \sin^2\beta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{\mu}\cos^2\beta + \frac{1}{\alpha^2\mu}\sin^2\beta = \underbrace{\sin^2\beta + \cos^2\beta}_{1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\left(\alpha^2\cos^2\beta + \frac{1}{\alpha^2}\sin^2\beta\right) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2\cos^2\beta + \alpha^{-2}\sin^2\beta = \mu$$

۳-۹: میدان کرنش در حالت کرنش مسطح در یک جسم به صورت زیر داده شده است:

$e_{11} = k x_1 x_2$ ، $e_{22} = -\nu k x_1 x_2$ و $e_{12} = \frac{k}{2}(1+\nu)(c^2 - x_2^2)$

که در آن k ، ν ، c ثابت هستند.

الف- نشان دهید که این میدان کرنش شرایط سازگاری را ارضا می کند.

ب- با فرض $u_1 = u_1(x_1, x_2)$ و $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ و $u_3 = 0$ ، مؤلفه های جابجایی را در این تغییر شکل به دست آورید.

حل:

الف-

$$e_{mn,ij} + e_{ij,mn} = e_{im,jn} + e_{jn,im}$$

$$R_3 = 0 \Rightarrow e_{11,22} + e_{22,11} = 2e_{12,21}$$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} \Rightarrow 0 + 0 = 0 \checkmark$$

$$R_1 = 0 \Rightarrow e_{22,33} + e_{33,22} = 2e_{23,32}$$

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial^2 x_2^2} = 2\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_3 \partial x_2} \Rightarrow 0 + 0 = 0 \checkmark$$

$R_2=0 \Rightarrow e_{33,11}+e_{11,33}=2e_{13,31}$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial^2 e_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \Rightarrow 0+0=0$$

$U_1=0 \Rightarrow e_{11,23}+e_{23,11}=e_{12,13}+e_{13,12} \Rightarrow 0+0=0+0$

$U_2=0 \Rightarrow e_{22,13}+e_{13,22}=e_{21,23}+e_{23,21} \Rightarrow 0+0=0+0$

$U_3=0 \Rightarrow e_{33,12}+e_{12,33}=e_{31,32}+e_{32,31} \Rightarrow 0+0=0+0$

* پس این میدان کرنش در شرایط سازگاری صدق می کند.

ب -

$e_{11}=\frac{1}{2}(u_{1,1}+u_{1,1}) \Rightarrow e_{11}=u_{1,1} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1}=e_{11} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1}=kx_1x_2$

$$\boxed{u_1=\frac{kx_1^2x_2}{2}+F(x_2,x_3)}$$

$e_{22}=u_{2,2} \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial x_2}=-\upsilon k x_1 x_2 \Rightarrow \boxed{u_2=\frac{-\upsilon k x_1 x_2^2}{2}+h(x_1,x_3)}$

* طبق صورت سوال $u_1=u_1(x_1,x_2)$ و $u_2=u_2(x_1,x_2)$ پس داریم:

$F(x_2,x_3)=F(x_2)$, $h(x_1,x_3)=h(x_1)$

$\Rightarrow u_1=\frac{kx_1^2x_2}{2}+F(x_2)$, $u_2=\frac{-\upsilon k x_1 x_2^2}{2}+h(x_1)$

$e_{12}=\frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1}) \Rightarrow$

$$\frac{k}{\cancel{2}}(1+\upsilon)(c^2-x_2^2)=\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{kx_1^2}{2}+\frac{\partial(F(x_2))}{\partial x_2}-\frac{\upsilon k x_2^2}{2}+\frac{\partial(h(x_1))}{\partial x_1}\right)$$

$$kc^2(1+\upsilon)-kx_2^2(1+\upsilon)=\frac{kx_1^2}{2}-\frac{\upsilon k x_2^2}{2}+\frac{\partial(F(x_2))}{\partial x_2}+\frac{\partial(h(x_1))}{\partial x_1}$$

$\Rightarrow$ * چون طرف چپ معادله تابعی از x_2 می باشد پس داریم:

$$\frac{\partial(h(x_1))}{\partial x_1}=-\frac{kx_1^2}{2} \Rightarrow h(x_1)=-\frac{kx_1^3}{6}+g(x_2,x_3)$$

* چون طرف چپ معادله تابعی از x_1 می باشد پس $g(x_2,x_3)=0$ است پس:

$h(x_1)=\frac{-kx_1^3}{6}$ $\Rightarrow$ $u_1=\frac{kx_1^2x_2}{2}+F(x_2)$

$u_2=\frac{-\upsilon k x_1 x_2^2}{2}-\frac{kx_1^3}{6}$

۳-۱۱: میزان تغییر مکان در یک تغییر شکل به صورت زیر است:

$u_1 = 2x_1$ ، $u_2 = 3x_2 + x_3$ و $u_3 = x_3 - x_2$

الف- تانسور کرنش را در این تغییر مکان به دست آورید.
ب- تانسور چرخش را برای این تغییر مکان به دست آورید.
پ- تانسور کرنش کاوشی را به دست آورید.
ت- تانسور کرنش در مختصات فضایی را به دست آورید.

حل:

الف-

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$e_{11} = \frac{1}{2}(2+2) = 2$

$e_{22} = \frac{1}{2}(3+3) = 3$

$e_{33} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

$e_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{21} = 0$

$e_{13} = \frac{1}{2}(0+0) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{31} = 0$

$e_{23} = \frac{1}{2}(1-1) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{32} = 0$

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب-

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

$\omega_{11} = \frac{1}{2}(2-2) = 0$

$\omega_{22} = \frac{1}{2}(3-3) = 0$

$\omega_{33} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$

$\omega_{12} = \frac{1}{2}(0-0) = 0 \Rightarrow \omega_{21} = 0$

$\omega_{13} = \frac{1}{2}(0-0) = 0 \Rightarrow \omega_{13} = 0$

$\omega_{23} = \frac{1}{2}(1-(-1)) = 1 \Rightarrow \omega_{32} = -1$

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۳-۱۳: اگر در مثال (۳-۷) $B_{ij}=1$ برای تمام (ij ها) باشد، کرنش اصلی و صفحات اصلی را بدست آورید.

حل: مثال ۳-۷ تغییر شکل محیطی به صورت زیر داده شده است:

$$x_i=(\delta_{ij}+B_{ij})X_j$$

$$u_i=x_i-X_i=(\delta_{ij}X_j+B_{ij}X_j-X_i)=B_{ij}X_j \Rightarrow \boxed{u_i=B_{ij}X_j}$$

$$u_1=B_{11}X_1+B_{12}X_2+B_{13}X_3 \Rightarrow u_1=X_1+X_2+X_3$$

$$u_2=B_{21}X_1+B_{22}X_2+B_{23}X_3 \Rightarrow u_2=X_1+X_2+X_3$$

$$u_3=B_{31}X_1+B_{32}X_2+B_{33}X_3 \Rightarrow u_3=X_1+X_2+X_3$$

* کرنش‌های اصلی یعنی همان مقادیر ویژه صفحات اصلی هم همان امتداد ویژه

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}\,u_{k,j})$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}(u_{1,1}+u_{1,1}+u_{1,1}\,u_{1,1}+u_{2,1}\,u_{2,1}+u_{3,1}\,u_{3,1})$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}(1+1+1+1+1)=5/2$$

$$\lambda=\frac{\bar{\lambda}}{\frac{5}{2}}=\frac{2\bar{\lambda}}{5}$$

$$\varepsilon_{22}=5/2 \quad \text{و} \quad \varepsilon_{33}=5/2 \quad \text{و} \quad \varepsilon_{12}=5/2$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}5/2 & 5/2 & 5/2\\ 5/2 & 5/2 & 5/2\\ 5/2 & 5/2 & 5/2\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{5}{2}\underbrace{\begin{bmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

* برای اینکه B^{-1} وجود نداشته باشد باید دترمینان B آن برابر صفر شود

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)((1-\lambda)^2-1)-1((1-\lambda)-1)+1(1-(1-\lambda))=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^3-3(1-\lambda)+2=0 \Rightarrow \cancel{1}-\lambda^3-\cancel{3\lambda}+3\lambda^2-\cancel{3}+\cancel{3\lambda}+\cancel{2}=0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+3\lambda^2=0 \Rightarrow -\lambda^2(\lambda-3)=0 < \begin{matrix}\lambda=0\\ \lambda=3\end{matrix}$$

برای $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای $\lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳-۱۵: وضعیت هر نقطه پس از تغییرشکل در برش ساده به صورت زیر می باشد (روابط ۳-۸۱-الف)

$x_1 = X_1 + KX_2$ و $x_2 = X_2$ و $x_3 = X_3$

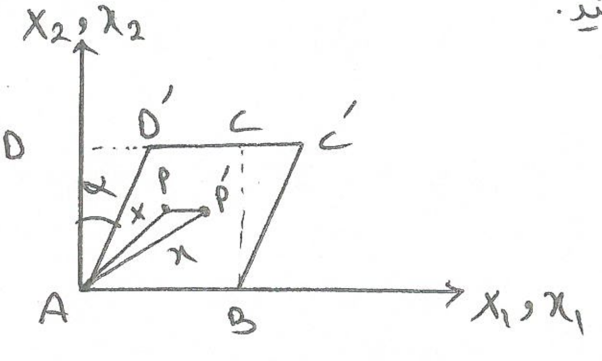
این تغییرشکل برای المان مربع شکل $ABCD$ با طول ضلع dL در شکل (۳-۹) رسم شده است.

الف) تانسور کرنش کاوشی را برای این تغییرشکل به دست آورید.

ب) تانسور گرین - لاگرانژ را در این تغییرشکل بدست آورده و با تانسور کرنش تغییرشکل های کوچک (رابطه ی 3-81-ب) مقایسه کنید.

پ) تغییرطول لبه های AB و AD و نیز تغییرطول قطرهای AC ، BD را با تانسور گرین - لاگرانژ به دست آورید.

ت) تغییرزاویه در نقطه A را با استفاده از رابطه ی (۳-۴۳) و همچنین با استفاده از شکل (۳-۹) بیابید و این دو را باهم مقایسه کنید.



ب -

$x_1 = X_1 + KX_2$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= KX_2 \\ U_2 &= 0 \\ U_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad U_i = x_i - X_i \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i}U_{k,j})$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(U_{1,1} + U_{1,1} + U_{1,1}U_{1,1} + U_{2,1}U_{2,1} + U_{3,1}U_{3,1}) = 0$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(\underset{0}{\cancel{U_{2,2}}} + \underset{0}{\cancel{U_{2,2}}} + \underset{K^2}{\cancel{U_{1,2}U_{1,2}}} + \underset{0}{\cancel{U_{2,2}U_{2,2}}} + \underset{0}{\cancel{U_{3,2}U_{3,2}}}) = \frac{K^2}{2}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(U_{3,3} + U_{3,3} + U_{1,3}U_{1,3} + U_{2,3}U_{2,3} + U_{3,3}U_{3,3})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(U_{1,2} + U_{2,1} + U_{1,1}U_{1,2} + U_{2,1}U_{2,2} + U_{3,1}U_{3,2})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(K) = \frac{K}{2} \Rightarrow \varepsilon_{21} = \frac{K}{2}$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(U_{1,3} + U_{3,1} + U_{1,1}U_{1,3} + U_{2,1}U_{2,3} + U_{3,1}U_{3,3}) = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(U_{2,3} + U_{3,2} + U_{1,2}U_{1,3} + U_{2,2}U_{2,3} + U_{3,2}U_{3,3}) = 0$$

$\varepsilon_{32} = 0$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K}{2} & 0 \\ \frac{K}{2} & \frac{K^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad e_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K}{2} & 0 \\ \frac{K}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

48

ب -

$$\varepsilon_{11}=0 \Rightarrow L_{AB}=0 \quad , \quad \cos\alpha=\frac{AD}{AD'}=\frac{AD}{\sqrt{AD^2+DD'^2}}=\frac{AD}{\sqrt{AD^2+k^2AD^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{AD}{AD\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}$$

$$AD'=\frac{AD}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow AD'=\frac{AD}{\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}} \Rightarrow AD'=AD(\sqrt{1+k^2})$$

$$AC'^2=AD^2+(DC')^2=AD^2+(DD'+D'C')^2 \Rightarrow$$

طول اولیه عضو

تغییر طول لبه $=AD'-AD=AD\sqrt{1+k^2}-AD=AD(\sqrt{1+k^2}-1)=dL(\sqrt{1+k^2}-1)$

$$\Rightarrow AC'=\sqrt{dL^2+(kdL+dL)^2}$$

ت -

تمرین ۳۵-۱۷: تانسور چرخش را برای مسأله (۳-۱۵) به دست آورید.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} - U_{j,i})$$

$$\omega_{11} = \frac{1}{2}(U_{1,1} - U_{1,1}) = 0$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2}(U_{1,2} - U_{2,1}) = \frac{K}{2} \Rightarrow \omega_{21} = -\frac{K}{2}$$

$$\omega_{13} = \frac{1}{2}(U_{1,3} - U_{3,1}) = 0$$

$$\omega_{2,3} = \frac{1}{2}(U_{2,3} - U_{3,2}) = 0$$

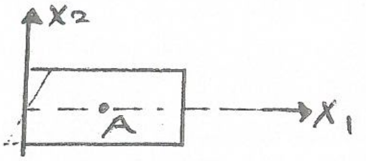
$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & K/2 & 0 \\ -K/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۳-۲۱: تسمه‌ای به پهنای $2h$ و طول زیاد در یک انتها به صورت زیر تغییر شکل می‌یابد

در $X_1 = 0$ داریم:

$$u_1 = \frac{a}{h}X_2$$

با فرض $u_1 = u_1(X_2)$ و $u_2 = u_3 = 0$ محورهای اصلی کرنش را در نقطه A روی محور X_1 بیابید



$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2h} & 0 \\ \frac{a}{2h} & \frac{a^2}{2h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(U_{1,1} + U_{1,1} + U_{1,1}U_{1,1} + U_{2,1}U_{2,1} + U_{3,1}U_{3,1}) = 0$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\underbrace{U_{1,2}}_{a/h} + \cancel{U_{2,1}}_{0} + \cancel{U_{1,1}}_{0}U_{1,2} + \cancel{U_{2,1}}_{0}U_{2,2} + \cancel{U_{3,1}}_{0}U_{3,2}) = \frac{a}{2h}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(\cancel{U_{2,2}}_{0} + \cancel{U_{2,2}}_{0} + \underbrace{U_{1,2}U_{1,2}}_{\frac{a^2}{h^2}} + \cancel{U_{2,2}}_{0}U_{2,2} + \cancel{U_{3,2}}_{0}U_{3,2}) = \frac{a^2}{h^2}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(U_{2,3} + U_{3,2} + U_{1,2}U_{1,3} + U_{2,2}U_{2,3} + U_{3,2}U_{3,3}) = 0$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(U_{3,3} + U_{3,3} + U_{1,3}U_{1,3} + U_{2,3}U_{2,3} + U_{3,3}U_{3,3}) = 0$$

$$(\varepsilon_{ij}-\lambda\delta_{ij})N_j=0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0-\lambda & \frac{a}{2h} & 0 \\ \frac{a^2}{2h^2} & \frac{a^2}{2h^2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* برای عدم وجود B^{-1} باید $\det B=0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{a}{2h} & 0 \\ \frac{a^2}{2h^2} & \frac{a^2}{2h^2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -\lambda\left(-\lambda\left(\frac{a^2}{2h^2}-\lambda\right)\right)-\frac{a}{2h}\left(-\lambda\frac{a^2}{2h^2}\right)=$$

$$\Rightarrow \lambda^2\frac{a^2}{2h^2}-\lambda^3+\lambda\frac{a^3}{4h^3}=0 \Rightarrow -\lambda\left(\lambda^2-\lambda\frac{a^2}{2h^2}-\frac{a^3}{4h^3}\right)=0 \Rightarrow \lambda_1=0$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{\frac{a^2}{2h^2}\pm\sqrt{\frac{a^4}{4h^4}-4(1)\left(-\frac{a^3}{4h^3}\right)}}{2}=\frac{a^2}{4h^2}\pm\frac{a}{2h}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a}{h}}$$

امتداد ویژه برای $\lambda_1=0$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2h} & 0 \\ \frac{a^2}{2h^2} & \frac{a^2}{2h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0+\frac{a}{2h}N_2=0 \Rightarrow N_2=0$$

$$\frac{a^2}{2h^2}N_1+\frac{a^2}{2h^2}N_2 \Rightarrow N_1=0$$

$$n_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_3 \end{bmatrix}=N_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* N_3 دلخواه است

امتداد ویژه برای λ_2

!

!

۳-۶۴

الف – نشان دهید که شرط لازم و کافی برای آنکه یک امتداد در یک تغییر شکل ثابت بماند این است که:

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \lambda \delta_{ij}\right) N_j = 0$$

ب – با استفاده از (الف) نشان دهید که در برش ساده (روابط ۳-۸۱) تمام خطوطی که عمود بر X_2 هستند امتدادشان تغییر نکرده و هر خط دیگر در صفحه ی X_1 , X_2 در این تغییر شکل می چرخد.

حل:

الف –

کرنش $\quad \frac{1}{2}\left(\frac{dl^2}{dL^2} - 1\right) = MF(N) \Rightarrow \frac{dl^2}{dL^2} = 2MF(N) + 1$

$$\Rightarrow \frac{dl}{dL} = \sqrt{1+2MF(N)} \quad \text{و} \quad \frac{dl}{dL} = \lambda , \; n_i = N_i$$

$$n_i \sqrt{1+2MF(N)} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} N_j \Rightarrow N_i \frac{dl}{dL} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} N_j$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} N_j = \lambda N_i \Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial X_j} N_j = \lambda \delta_{ij} N_j \Rightarrow \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \lambda \delta_{ij}\right) N_j = 0$$

ب – قسمت اول: $\quad N_2 = N_3 = 0 , \; N_1 = 1$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} N_j - \lambda N_i = 0 \qquad N(1,0,0)$$

عمود بر x_2

شکل ۳-۹ (ص ۱۰۳)

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2 \tan\alpha \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \\ u_1 = X_2 \tan\alpha \\ u_2 = u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} N_1 + \cancel{\frac{\partial x_1}{\partial X_2} N_2} + \cancel{\frac{\partial x_1}{\partial X_3} N_3} - \lambda N_1 = 0 \\ \cancel{\frac{\partial x_2}{\partial X_1}} N_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \cancel{N_2} + \cancel{\frac{\partial x_2}{\partial X_3}} N_3 - \lambda \cancel{N_2} = 0 \\ \cancel{\frac{\partial x_3}{\partial X_1}} N_1 + \cancel{\frac{\partial x_3}{\partial X_2}} N_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \cancel{N_3} - \lambda \cancel{N_3} = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \sqrt{1+2MF(N)} = 1 \quad \text{و} \quad MF(N) = \varepsilon_{ij} N_i N_j = \varepsilon_{11} N_1 N_1 = 0$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(u_{1,1} + u_{1,1} + u_{1,1} u_{1,1} + u_{2,1} u_{2,1} + u_{3,1} u_{3,1}\right) = 0$$

قسمت دوم:

$N(0,1,0) \Rightarrow$ چون گفته صفحه‌ی X_1X_2 ، X_3 را نمی‌نویسیم

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1}\cancel{N_1}^{0} + \frac{\partial x_1}{\partial x_2}^{\tan\alpha} N_2 - \lambda \cancel{N_1}^{0} = \tan\alpha \neq 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} N_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} N_2 - \lambda N_2 = 1 + \frac{1}{\cos\alpha} \neq 0$$

$$MF(\underline{N}) = \varepsilon_{ij} N_i N_j = \varepsilon_{22}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(0 + 0 + \tan^2\alpha + 0) = \frac{1}{2}\tan^2\alpha$$

$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

۳-۶- معادلات جابجایی در مسأله خمش خالص (روابط (ص) مثال ۳-۱۰) را در نظر بگیرید.

الف- نشان دهید ضریب بزرگنمایی تنها جز خط روی محور خنثی برابر صفر است.

ب- زاویه‌ی خطوط عمود بر محور خنثی در این تغییر شکل چه تغییری می کند.

* از مثال ۳-۱۰ داریم: ص ۱۱۳

الف)

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{X_1 X_2}{R} + A X_2 + B X_3 + C \\ u_2 = -\dfrac{1}{2R}\left[X_1^2 + \nu(X_2^2 - X_3^2)\right] - A X_1 + K X_3 + L \\ u_3 = -\dfrac{\nu X_2 X_3}{R} - B X_1 - K X_2 + M \end{cases}$$

* با توجه به صورت مثال ۳-۱۰: تار خنثی در راستای X_1 است: $\leftarrow N(1,0,0)$

$MF(\underline{N}) = \varepsilon_{ij} N_i N_j$ $\xrightarrow{\text{با توجه به در نظر گرفتن تغییر شکل های کوچک در نظریه تیرها}}$ $\Rightarrow \varepsilon_{11} = e_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dfrac{X_2}{R}$

روی امتداد تار خنثی در امتداد محور X_1 $\rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow MF(\underline{N}) = \varepsilon_{11} = \dfrac{X_2}{R} = 0$

ب) اگر محور خنثی در امتداد محور X_1 $\rightarrow$ $N(1,0,0)$

اگر خط عمود بر محور خنثی را محور X_2 بگیریم $\rightarrow$ $M(0,1,0)$

$\Phi = 90 \Rightarrow \phi = ?$

زاویه اولیه — زاویه پس از تغییر شکل

$$\sqrt{1+2MF(\underline{N})}\sqrt{1+2MF(\underline{M})}\cos\phi = 2\varepsilon_{ij}N_iN_j + \cos\Phi$$

$$\begin{cases} \cos\Phi = \cos 90 = 0 \\ 2\varepsilon_{ij}N_iN_j = 2\varepsilon_{12} \end{cases}$$

$$2e_{12} = 2\varepsilon_{12} = 2\times\frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{X_1}{R} + A - \frac{X_1}{R} - A = 0$$

$$\cos\phi = \frac{2\varepsilon_{12} = 0}{\sqrt{(1+2MF(\underline{N}))(1+2MF(\underline{M}))}} = 0 \Rightarrow \boxed{\phi = 90}$$

* خطوط عمود بر محور خنثی پس از تغییر شکل نیز عمود باقی می مانند.

20 20

۳-۸- روابط تنش-کرنش در نظریه تفسیر شکل های کوچک در کرنش مسطح برای مصالح همسان به صورت زیر می باشد:

$$e_{11}=\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)T_{11}-\nu T_{22}\right]$$

$$e_{22}=\frac{1+\nu}{E}\left[-\nu T_{11}+(1-\nu)T_{22}\right]$$

$$e_{12}=\frac{1+\nu}{E}T_{12}$$

که در آن E و ν ثابت هستند. با استفاده از این روابط، معادله سازگاری برحسب تنش ها بنویسید.

حل:

$$R_3=0 \Rightarrow e_{11,22}+e_{22,11}=2e_{12,12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2^2}\left[\cancel{\frac{1+\nu}{E}}\left[(1-\nu)T_{11}-\nu T_{22}\right]\right]+\frac{\partial}{\partial x_1^2}\left[\cancel{\frac{1+\nu}{E}}\left[-\nu T_{11}+(1-\nu)T_{22}\right]\right]=2\frac{\partial}{\partial x_1\partial x_2}\left(\cancel{\frac{1+\nu}{E}}T_{12}\right)$$

$$\Rightarrow (1-\nu)\frac{\partial T_{11}}{\partial x_2^2}-\nu\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2^2}-\nu\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1^2}+(1-\nu)\frac{\partial T_{22}}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$\Rightarrow (1-\nu)\left[T_{11,22}+T_{22,11}\right]-\nu\left[T_{22,22}+T_{11,11}\right]=2T_{12,12}$$

R_1، R_2، U_1، U_2، U_3 $\Longrightarrow$ به همین صورت بدست می آید

20 20

مثال: ثابت کنید تمام روابط شرایط سازگاری کوشی ها برابر صفر هستند.
$(R_1=R_2=R_3=U_1=U_2=U_3=0)$

$$R_1=0 \Rightarrow e_{22,33}+e_{33,22}=2e_{23,23}$$

$$R_2=0 \Rightarrow e_{11,33}+e_{33,11}=2e_{13,13}$$

$$R_3=0 \Rightarrow e_{22,11}+e_{11,22}=2e_{12}$$

$$U_1=0 \Rightarrow e_{11,23}+e_{23,11}=e_{12,13}+e_{13,12}$$

$$U_2=0 \Rightarrow e_{22,13}+e_{13,22}=e_{21,23}+e_{23,21}$$

$$U_3=0 \Rightarrow e_{33,12}+e_{12,33}=e_{31,32}+e_{32,31}$$

اثبات:

$$R_1=0 \Rightarrow e_{22,33}+e_{33,22}=2e_{23,23}$$

$$e_{22}=\frac{\partial U_2}{\partial X_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial X_2}+\frac{\partial U_2}{\partial X_2}\right)=U_{2,2}$$

$$e_{22,33}=\frac{\partial^2}{\partial X_3^2}(e_{22})=\frac{\partial^2}{\partial X_3^2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial X_2}\right)=\frac{\partial^3 U_2}{\partial X_3^2\partial X_2}$$

$$e_{33,22}=\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial X_3}\right)=\frac{\partial^3 U_3}{\partial X_2^2\partial X_3}$$

$$e_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3}+\frac{\partial U_3}{\partial X_2}\right)$$

$$2e_{23,23}=\frac{2}{2}\frac{\partial^2}{\partial X_2\partial X_3}\left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3}+\frac{\partial U_3}{\partial X_2}\right)$$

$$2e_{23,23}=\frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2\partial X_3^2}+\frac{\partial^3 U_3}{\partial X_2^2\partial X_3} \Rightarrow$$

ادامه صفحه‌ی بعد

$$\Rightarrow e_{22,33} + e_{33,22} = 2e_{23,23}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_3^2}} + \cancel{\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3 \partial x_2^2}} = \cancel{\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_3^2 \partial x_2}} + \cancel{\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^2 \partial x_3}}$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \checkmark \quad \Rightarrow R_1 = 0$$

$$u_1 = 0 \Rightarrow e_{11,23} + e_{23,11} = e_{12,13} + e_{13,12}$$

$$* \; e_{11,23} = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}(e_{11}) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$$

$$* \; e_{23,11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(e_{23}) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

$$* \; e_{12,13} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3}$$

$$* \; e_{13,12} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

$$\xRightarrow{u_1 = 0} \cancel{\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}} + \frac{1}{2}\cancel{\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3}} + \frac{1}{2}\cancel{\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}} + \frac{1}{2}\cancel{\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3}} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}}$$

$$+ \frac{1}{2}\cancel{\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}} \quad \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow$$ بقیه هم همینطوری

۳-۱۰- میدان کرنش در یک تغییر شکل به صورت زیر داده شده است.

$e_{11} = \nu c(1-X_3)$ و $e_{22} = \nu c(1-X_3)$ و $e_{33} = -c(1-X_3)$

که در آن ν ها، c، L ثابت هستند. با فرض تغییر شکل های کوچک میدان تغییر مکان را در این تغییر شکل با شرایط مرزی به دست آورید:

۱- در نقطه $(0,0,0)$ تمام تغییر مکان ها صفر هستند.

۲- در نقطه $(L,0,0)$ داریم: $w_{23}=0$ ، $w_{31}=0$ ، $w_{12}=A$

$e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$

حل:

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \nu c(L-X_3) \xrightarrow[\text{نسبت به } dX_1]{\text{انتگرال}} u_1 = \nu c(L-X_3)X_1 + F(X_2,X_3)$$

$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = \nu c(L-X_3) \xrightarrow{\int} u_2 = \nu c(L-X_3)X_2 + G(X_1,X_3)$$

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = -c(L-X_3) \xrightarrow{\int} u_3 = -c(L-X_3)X_3 + H(X_1,X_2)$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F(X_2,X_3)}{\partial X_2} = -\frac{\partial G(X_1,X_3)}{\partial X_1} \quad (1)$$

$$e_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1}) = 0 \Rightarrow -\nu c X_1 + \frac{\partial F(X_2,X_3)}{\partial X_3} + \frac{\partial H(X_1,X_2)}{\partial X_1} = 0 \quad (2)$$

$$e_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3}+u_{3,2}) = 0 \Rightarrow -\nu c X_2 + \frac{\partial G(X_1,X_3)}{\partial X_3} + \frac{\partial H(X_1,X_2)}{\partial X_2} = 0 \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F(X_2,X_3)}{\partial X_3} = 0 \xrightarrow[\text{نسبت به } X_3]{\text{انتگرال}} F(X_2,X_3) = F_1(X_2,X_2) \\ \Rightarrow \boxed{F(X_2,X_3) = F(X_2)} \\ \dfrac{\partial H(X_1,X_2)}{\partial X_1} = \nu c X_1 \xrightarrow[\text{نسبت به } X_1]{\int} H(X_1,X_2) = \dfrac{\nu c X_1^2}{2} + H_1(X_2) \end{cases}$$

تابعی از X_1 نیست

$H_1(X_2,X_3)$

وابسته به X_3 نیست

(4)

$$③ \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial G(x_1, x_3)}{\partial x_3} = 0 \xrightarrow{\int} \boxed{G(x_1, x_3) = G_1(x_1)} \\ \dfrac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \nu c x_2 \xrightarrow{\int} H(x_1, x_2) = \dfrac{\nu c x_2^2}{2} + H_2(x_1) \quad ⑤ \end{cases}$$

$$⑤ , ④ \Rightarrow H_1(x_2) = \frac{\nu c x_2^2}{2} \Rightarrow \boxed{H(x_1, x_2) = \frac{\nu c x_1^2}{2} + \frac{\nu c x_2^2}{2} + N}$$

$$① \Rightarrow \frac{\partial F_1(x_2)}{\partial x_2} = -\frac{\partial G_1(x_1)}{\partial x_1} = m \Rightarrow$$

فقط زمانی امکان پذیر است که هردو برابر ثابتی بنام m باشند

$$\frac{\partial F_1(x_2)}{\partial x_2} = m \underset{\text{نسبت به } x_2}{\overset{\int}{\Longrightarrow}} \boxed{F_1(x_2) = m x_2 + K}$$

$$\frac{\partial G_1(x_1)}{\partial x_1} = -m \underset{\text{نسبت به } x_1}{\overset{\int}{\Longrightarrow}} \boxed{G_1(x_1) = -m x_1 + J}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \nu c (L - x_3) x_1 + m x_2 + K \\ u_2 = \nu c (L - x_3) x_2 - m x_1 + J \\ u_3 = -c (L - x_3) x_3 + \dfrac{\nu c x_1^2}{2} + \dfrac{\nu c x_2^2}{2} + N \end{cases}$$

الف) شرایط مرزی اول $(0, 0, 0) \Rightarrow u_i = u_1 = u_2 = u_3 = 0 \Rightarrow \boxed{K = 0 , J = 0 , N = 0}$

ب) شرط مرزی دوم $(0,0,L) \rightarrow \omega_{23}=0 \quad , \omega_{31}=0 \quad , \omega_{12}=A$

$$\begin{cases} \omega_{23}=\frac{1}{2}(U_{2,3}-U_{3,2})=\frac{1}{2}\left(-\nu c X_2-\frac{2\nu c X_2}{2}\right)\xrightarrow{X_2=0}\omega_{23}=0 & \text{OK}\checkmark \\ \omega_{31}=\frac{1}{2}(U_{3,1}-U_{1,3})=\frac{1}{2}\left(\frac{2\nu c X_1}{2}-(-\nu c X_1)\right)\xrightarrow{X_1=0}\omega_{31}=0 & \text{OK}\checkmark \\ \omega_{12}=\frac{1}{2}(U_{1,2}-U_{2,1})=\frac{1}{2}(m-(-m))=A \Rightarrow \boxed{m=A} \end{cases}$$

نتیجه:

$$\begin{cases} u_1=\nu c(L-X_3)X_1+AX_2 \\ u_2=\nu c(L-X_3)X_2-AX_1 \\ u_3=-c(L-X_3)+\frac{\nu c X_1^2}{2}+\frac{\nu c X_2^2}{2} \end{cases}$$

۳-۱۲- برای تغییر مکان داده شده در مسأله (۳-۱۱) کرنش های اصلی و صفحات اصلی و نیز کرنش حجمی را بدست آورید.

$$u_1 = 2X_1 \quad , \quad u_2 = 3X_2 + X_3 \quad , \quad u_3 = X_3 - X_2$$

حل:

$$\nabla u = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ sym & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1} + u_{1,1}u_{1,1} + \underbrace{u_{2,1}}_{0}u_{2,1} + \underbrace{u_{3,1}}_{0}u_{3,1})$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(2 + 2 + 4) = 4$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\cancel{u_{1,2}} + \cancel{u_{2,1}} + u_{1,1}\cancel{u_{1,2}} + \cancel{u_{2,1}}u_{2,2} + \cancel{u_{3,1}}u_{3,2}) = 0$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(\cancel{u_{1,3}} + \cancel{u_{3,1}} + u_{1,1}\cancel{u_{1,3}} + \cancel{u_{2,1}}u_{2,3} + \cancel{u_{3,1}}u_{3,3}) = 0$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(u_{2,2} + u_{2,2} + \underbrace{u_{1,2}}_{0}u_{1,2} + u_{2,2}u_{2,2} + u_{3,2}u_{3,2})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(3 + 3 + 9 + (-1)^2) = 8$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}[u_{2,3} + u_{3,2} + \underbrace{u_{1,2}}_{0}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}]$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}[\cancel{1} - \cancel{1} + (3 \times 1) + (-1 \times 1)] = 1$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}[u_{3,3} + u_{3,3} + \underbrace{u_{1,3}}_{0}u_{1,3} + u_{2,3}u_{2,3} + u_{3,3}u_{3,3}]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}[1 + 1 + 1 + 1] = 2 \qquad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

25 25

6.4

$$(\varepsilon_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j=0$$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 8-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (4-\lambda)\left[(8-\lambda)(2-\lambda)-1\right]=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=4\\ \lambda_2=8{,}16\\ \lambda_3=1{,}84\end{cases}$$

$\underline{\lambda_1=4}$

$$\begin{bmatrix}4-4 & 0 & 0\\ 0 & 8-4 & 1\\ 0 & 1 & 2-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}0=0\\ \times 2\;\; 4n_2+n_3=0\\ n_2-2n_3=0\end{cases} \Rightarrow n_2=n_3=0 \xrightarrow{n_1^2+n_2^2+n_3^2=1} n_1=1$$

$$\lambda=4 \Rightarrow n=(1,0,0)$$

$\underline{\lambda_2=8{,}16}$

$$\begin{bmatrix}4-8{,}16 & 0 & 0\\ 0 & 8-8{,}16 & 1\\ 0 & 1 & 2-8{,}16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-4{,}16n_1=0 \Rightarrow n_1=0\\ -.16n_2+n_3=0\\ n_2-6{,}16n_3=0\end{cases}$$

$\Rightarrow n_1=n_2=n_3=0$ غ ق ق

(۱)

$$n_1=0 \Rightarrow n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \Rightarrow n_3=\sqrt{1-n_2^2}$$

$$(۱) \Rightarrow -.16n_2+\sqrt{1-n_2^2}=0 \Rightarrow n_2=.99\simeq 1 \overset{\text{باید}}{\Longrightarrow} n_3=0$$

$$\lambda=8{,}16 \Rightarrow n(0,1,0)$$

$\underline{\lambda_3=1{,}84}$

$$\begin{bmatrix}4-1{,}84 & 0 & 0\\ 0 & 8-1{,}84 & 1\\ 0 & 1 & 2-1{,}84\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2{,}16n_1=0 \Rightarrow n_1=0\\ 6{,}16n_2+n_3=0\\ n_2+.16n_3=0\end{cases}$$

(۲) $\Rightarrow n_1=n_2=n_3=0$ غ ق ق

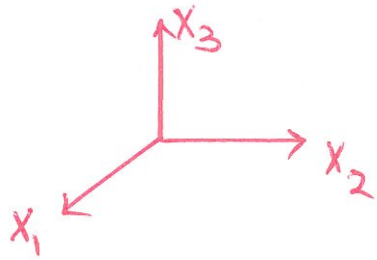
$$n_1=0 \Rightarrow n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \Rightarrow n_3=\sqrt{1-n_2^2}$$

از حل (۲) $\Rightarrow n_2=-.16 \Rightarrow n_3=\sqrt{1-n_2^2}=.99\simeq 1 \overset{\text{باید}}{\Longrightarrow} n_2=0 \quad \lambda=1{,}84 \Rightarrow n(0,0,1)$

25 25

★ مقادیر ویژه تانسور کرنش، کرنش‌های اصلی و صفحات عمود بر امتدادهای ویژه، صفحات اصلی هستند.

کرنش‌های اصلی $\varepsilon_1 = 8{,}16$ و $\varepsilon_2 = 4$ و $\varepsilon_3 = 1{,}84$



صفحات اصلی

$$\begin{cases} n_1 = (0,1,0) \Rightarrow & \text{صفحه } X_1 X_3 \\ n_2 = (1,0,0) \Rightarrow & \text{صفحه } X_3 X_2 \\ n_3 = (0,0,1) \Rightarrow & \text{صفحه } X_1 X_2 \end{cases}$$

کرنش حجمی : $e_v = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 4 + 8 + 2 = 14$

۳-۱۴- میدان تغییر مکان در یک تغییر شکل به صورت زیر داده شده است:
تانسور کرنش لاگرانژ و کاوش را بدست آورید.

$u_1 = -(1-\cos\phi)X_1 - X_2\sin\phi$ و $u_2 = X_1\sin\phi - (1-\cos\phi)X_2$ و $u_3 = 0$

$$u_{i,j} = \nabla u = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-\cos\phi) & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & -(1-\cos\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \qquad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ sym & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1} + u_{1,1}u_{1,1} + u_{2,1}u_{2,1} + u_{3,1}u_{3,1})$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(-2(1-\cos\phi) + (1-\cos\phi)^2 + \sin^2\phi) =$$

$$= \frac{1}{2}(-2 + \cancel{2\cos\phi} + 1 + \cos^2\phi + \cancel{2\cos\phi} + \sin^2\phi)$$

$$= \frac{1}{2}(-1 + \underbrace{\sin^2\phi + \cos^2\phi}_{1}) = 0$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(u_{2,2} + u_{2,2} + u_{1,2}u_{1,2} + u_{2,2}u_{2,2} + u_{3,2}u_{3,2})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(-2(1-\cos\phi) + \sin^2\phi + (1-\cos\phi)^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(-2 + 2\cos\phi + \sin^2\phi + 1 + \cos^2\phi - 2\cos\phi) = 0$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(u_{3,3} + u_{3,3} + u_{1,3}u_{1,3} + u_{2,3}u_{2,3} + u_{3,3}u_{3,3})$$

$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(0) = 0$ با محاسبات مشابه $\Rightarrow \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = 0$

★ تمرینات ۳-۲ و ۳-۳، ۳-۱۶، ۳-۱۸، ۳-۱۹، ۳-۲۰ حذف است

۳-۲۲- تغییرشکل همگن با معادلات (۳-۷۹- الف) مفروض است. شرایطی را بیابید که تحت آن سطوح کروی، کروی باقی بمانند.

تغییرشکل همگن

$$x_i = c_i + A_{ij} X_j$$

$$X_j = B_{ij}(X_i - c_i) \qquad B_{ij} = A^{-1}_{ij}$$

کره $(X_j - A_j)(X_j - A_j) = R^2$

$$B_{ij}(X_i - c_i)(X_K - c_K) = R^2$$

$$[B_{ij}(X_i - c_i)]\,[B_{Kj}(X_K - c_K)] = R^2$$

$$u_i = c_i + A_{ij} X_j \qquad i, j = 1, 2, 3$$

$$u_i = c_i + A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + A_{i3}X_3$$

$$\begin{cases} u_1 = c_1 + A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 \\ u_2 = c_2 + A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 \\ u_3 = c_3 + A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 \end{cases}$$

$n \left| \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{matrix} \right.$ معادله کره $(X_1 - n_1)^2 + (X_2 - n_2)^2 + (X_3 - n_3)^2 = R^2$

$$(X_i - n_i)(X_i - n_i) = R^2$$

داریم $u_i = x_i - X_i \Rightarrow X_i = x_i - u_i$

$$X_i + c_i + A_{ij} X_j = x_i$$

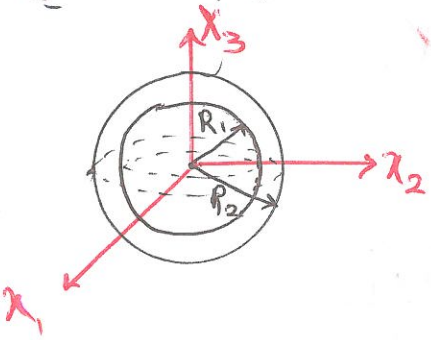
$$c_i + A_{ij} X_j + \delta_{ij} X_j = x_i$$

توجه: حل این مسئله ناقص است و باید تکمیل شود

۳-۲۴- کره‌ی توخالی به شعاع داخلی R_1 وشعاع خارجی R_2 مفروض است. فرض می شود که ضخامت این کره کوچک باشد. اگر این کره تحت تغییر شکل زیر قرار گیرد، مطلوب است بزرگترین کرنش برشی در نقطه $(R_2, 0, 0)$:

$r = R + c$

در این رابطه R شعاع قبل از تغییر شکل و r شعاع بعد از تغییر شکل بوده و c ثابت است.



$$\frac{x_i}{X_i} = \frac{r}{R} \quad (i=1,2,3) \Rightarrow r = \frac{x_i}{X_i} R$$

$$r = R + c \Rightarrow \frac{x_i}{X_i} R = R + c \Rightarrow \left(\frac{x_i}{X_i}\right) = \frac{R}{R} + \frac{c}{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_i}{X_i} - 1\right) = \frac{c}{R} \Rightarrow \frac{x_i}{X_i} = \frac{c}{R} + 1 \Rightarrow x_i = \left(\frac{c}{R} + 1\right) X_i$$

از طرفی $u_i = x_i - X_i = \frac{c}{R} X_i + X_i - X_i \Rightarrow u_i = \frac{c}{R} X_i$

$$u_{i,j} = \left(\frac{c}{R} \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial X_j}}_{\delta_{ij}} - \frac{c}{R^2} X_i \right) = c\left(\frac{\delta_{ij}}{R} - \frac{X_i}{R^2}\right)$$

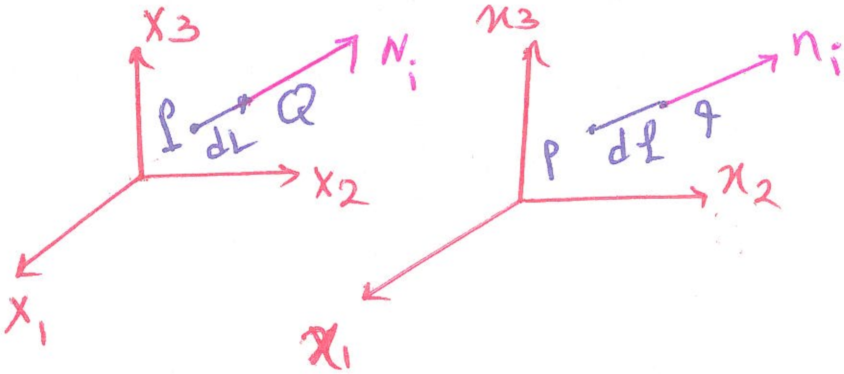
از طرفی $R^2 = X_K X_K \Rightarrow 2R \frac{\partial R}{\partial X_j} = 2 X_K \delta_{Kj} = 2 X_j \Rightarrow \boxed{\frac{\partial R}{\partial X_j} = \frac{X_j}{R}}$

$$\Rightarrow u_{i,j} = c\left(\frac{\delta_{ij}}{R} - \frac{X_i}{R^2}\right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\, u_{k,j}\right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big[c\left(\frac{\delta_{ij}}{R} - \frac{X_i}{R^2}\right) + c\left(\frac{\delta_{ji}}{R} - \frac{X_j}{R^2}\right) + c^2\left(\frac{\delta_{Ki}}{R} - \frac{X_K}{R^2}\right)\left(\frac{\delta_{Kj}}{R} - \frac{X_K}{R^2}\right)\Big]$$

۳-۲۶- تغییر شکلی را فرض کنید که مختصات قدیم X را به مختصات جدید x تبدیل می‌کند. امتدادهایی را بیابید که تحت تغییر شکل فوق، تغییر نمی‌کند.



$$n_i = \frac{dx_i}{dl} \quad \text{و} \quad N_i = \frac{dX_i}{dL}$$

دقیقاً مثل $i_i = \frac{a_i}{a_i}$

$$\frac{dl}{dl} \times \frac{1}{dL}\, dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\frac{dX_j}{dL} \Rightarrow \frac{dx_i}{dl}\cdot\frac{dl}{dL} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} N_j$$

اضافه شد

اضافه شد

$$n_i \cdot \frac{dl}{dL} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} N_j$$

$$\boxed{N_j = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\cdot\frac{dl}{dL}\, n_i}$$

مثال: تغییر شکل همگن زیر داده است:

$$x_1 = \alpha X_1 + \beta X_2$$
$$x_2 = -\alpha X_1 + \beta X_2$$
$$x_3 = \mu X_3$$

α ، β و μ ثابت هستند

الف) اندازه و امتداد کشیدگی ها یا فشردگی های اصلی را بیابید.

ب) امتداد محور چرخش و میزان زاویه‌ی چرخش را بدست آورید.

حل:

الف)

ب)

$$u_i = x_i - X_i$$

$$u_1 = x_1 - X_1 = \alpha X_1 + \beta X_2 - X_1 = (\alpha - 1) X_1 + \beta X_2$$

$$u_2 = x_2 - X_2 = -\alpha X_1 + \beta X_2 - X_2 = -\alpha X_1 + (\beta - 1) X_2$$

$$u_3 = x_3 - X_3 = \mu X_3 - X_3 = (\mu - 1) X_3$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{N}$$

$$\vec{\Omega} = \bar{\alpha} \underline{i}_1 + \bar{\beta} \underline{i}_2 + \bar{\gamma} \underline{i}_3$$

$$w_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\gamma} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & 0 & \bar{\alpha} \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\alpha+\beta) & 0 \\ -\frac{1}{2}(\alpha+\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

$$w_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1} - u_{1,1}) = 0$$

$$w_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) = \frac{1}{2}(\beta - (-\alpha)) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$w_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}) = \frac{1}{2}(0 - 0) = 0$$

$$w_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} - u_{3,2}) = \frac{1}{2}(0 - 0) = 0$$

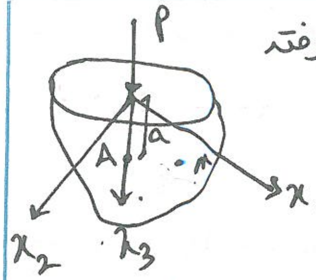
$$-\bar{\gamma} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \Rightarrow \bar{\gamma} = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \qquad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0$$

$$\vec{\Omega} = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \underline{i}_3$$

$$\Omega = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)^2} \Rightarrow \Omega = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{N} \Rightarrow \vec{N} = \frac{\vec{\Omega}}{\Omega} = \frac{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\underline{i}_3}{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = -\underline{i}_3$$

مثال: محیط ۳ بعدی شکل مقابل تحت نیروی متمرکز P قرار گرفته است. تغییر مکان ها در هر نقطه $m(x_1, 0, x_3)$ به صورت



ν و G ثابت هستند

$$u_1 = \frac{P}{4\pi G}\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_3^2}}\left[\frac{x_1 x_3}{x_1^2+x_3^2} + \frac{(1-2\nu)x_1}{x_2+\sqrt{x_1^2+x_3^2}}\right]$$

$$u_2 = 0$$

$$u_3 = \frac{P}{4\pi G}\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_3^2}}\left[2(1-\nu) + \frac{x_3^2}{x_1^2+x_3^2}\right]$$

داده شده اند. کرنش های اصلی در نقطه ی A با مختصات $(a, 0, 0)$ را بیابید.

حل: ابتدا باید از طریق رابطه ی $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ تانسور کرنش e_{ij} را بدست آوریم سپس با جایگذاری $(a, 0, 0)$ و e و شکل دادن معادله ی $(e_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0$ مقادیر λ را بدست آورده که همان کرنش های اصلی است.

$e_{11} = u_{1,1}$ $\qquad$ $e_{22} = u_{2,2}$

$e_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$ $\qquad$ $e_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2})$

$e_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1})$ $\qquad$ $e_{33} = u_{3,3}$

$$\Rightarrow e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ sym & e_{22} & e_{23} \\ & & e_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow[(0,0,a)]{\text{جایگذاری مختصات}} e_{ij} = \begin{bmatrix} \text{برحسب} \\ P, a \\ \pi, G \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (e_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \text{کرنش های اصلی}$$

* به علت حجم بالای محاسبات ریاضی این عملیات به عهده ی خواننده

تمرین: تانسور کرنش:

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\times 10^{-3}$$

داده شده است.

الف) مقادیر ویژه این تانسور را بیابید.

ب) بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه این تانسور را بیابید.

ج) اگر بردارهای ویژه تانسور فوق m_3، m_2 و m_1 باشد، تانسور $L=\left[\{m_1\}\ \{m_2\}\ \{m_3\}\right]$ را تشکیل دهید و $\underline{L}^T\underline{\varepsilon}\underline{L}$ را بدست آورید.

د) تانسور ε_{ij} را در دستگاه دوران یافته با ماتریس

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

بدست آورید و این تانسور را $\bar{\varepsilon}_{ij}$ نامگذاری کنید.

هـ) موارد الف و ب و ج را برای $\bar{\varepsilon}_{ij}$ انجام دهید.

حل:

الف)

$$(\varepsilon_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j=0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 3-\lambda & 0\\ 3 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{bmatrix}}_{\underline{n}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{\underline{0}}$$

$$\underline{B}\cdot\underline{n}=\underline{0}\xRightarrow{B^{-1}}\underline{B}^{-1}\cdot\underline{B}\cdot\underline{n}=\underline{B}^{-1}\cdot\underline{0}\Rightarrow \underline{I}\cdot\underline{n}=\underline{0}\Rightarrow n\neq 0$$

پس B^{-1} نباید وجود داشته باشد

$$B^{-1}=\frac{B^{*}}{\det B}$$

★ برای اینکه B^{-1} وجود نداشته باشد باید $\det B=0$ شود

$$\det B=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 3-\lambda & 0\\ 3 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(1-\lambda)\big((3-\lambda)(1-\lambda)-0\big)$$

$$-2\big(2(1-\lambda)-0\big)+3\big(0-3(3-\lambda)\big)=0$$

$$(1-\lambda)\big((3-\lambda)(1-\lambda)\big)-2\big(2(1-\lambda)\big)-9(3-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(3-3\lambda-\lambda+\lambda^2)-4+4\lambda-27+9\lambda=0$$

$$\Rightarrow 3-3\lambda-\lambda+\lambda^2-3\lambda+3\lambda^2+\lambda^2-\lambda^3-4+4\lambda-27+9\lambda=0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+5\lambda^2+4\lambda-1=0 \quad \begin{cases} \lambda_1=5{,}67 \\ \lambda_2=0{,}2 \\ \lambda_3=-0{,}87 \end{cases} \longrightarrow$$ مقادیر ویژه

$$\lambda_1=5{,}67 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-5{,}67 & 2 & 3 \\ 2 & 3-5{,}67 & 0 \\ 3 & 0 & 1-5{,}67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-4{,}67n_1+2n_2+3n_3=0 \quad \star$$

$$2n_1-2{,}67n_2=0 \Rightarrow 2n_1=2{,}67n_2 \Rightarrow n_1=1{,}33n_2 \quad (1)$$

$$3n_1-4{,}67n_3=0 \Rightarrow 3n_1=4{,}67n_3 \Rightarrow n_3=0{,}64n_1 \quad (2)$$

$$\star,(1),(2) \Rightarrow -4{,}67\times 1{,}33n_2+2n_2+0{,}64n_1=0$$

$$\Rightarrow -6{,}21n_2=-0{,}64n_1 \Rightarrow n_2=0{,}1n_1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1{,}33n_2 \\ 0{,}1n_1 \\ 0{,}64n_1 \end{bmatrix}}_{m_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1n_1 \\ 0{,}64n_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}33n_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = n_1\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \\ 0{,}64 \end{bmatrix} + n_2\begin{bmatrix} 1{,}33 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این دوتا امتداد ویژه هستند.

$$\lambda_2 = 0{,}2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-0{,}2 & 2 & 3 \\ 2 & 3-0{,}2 & 0 \\ 3 & 0 & 1-0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0{,}8n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$$

$$2n_1 + 2{,}8n_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2n_1 = -2{,}8n_2 \Rightarrow n_1 = -1{,}4n_2$$

$$3n_1 + 0{,}8n_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3n_1 = -0{,}8n_3 \Rightarrow n_3 = 3{,}75n_1$$

$$\Rightarrow 0{,}8 \times -1{,}4n_2 + 2n_2 + 3 \times 3{,}75n_1 = 0$$

$$\Rightarrow 0{,}88n_2 + 11{,}25n_1 = 0 \Rightarrow 0{,}88n_2 = -11{,}25n_1$$

$$\Rightarrow n_2 = 12{,}78n_1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1{,}4n_2 \\ 12{,}78n_1 \\ 3{,}75n_1 \end{bmatrix}}_{m_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12{,}78n_1 \\ 3{,}75n_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1{,}4n_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = n_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 12{,}78 \\ 3{,}75 \end{bmatrix} + n_2 \begin{bmatrix} -1{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این دوتا امتداد ویژه هستند

$$\lambda_3 = -0{,}87 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+0{,}87 & 2 & 3 \\ 2 & 3+0{,}87 & 0 \\ 3 & 0 & 1+0{,}87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1{,}87\, n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$$

$$2n_1 + 3{,}87\, n_2 = 0 \Rightarrow 2n_1 = -3{,}87 n_2 \Rightarrow n_1 = -1{,}93 n_2$$

$$3n_1 + 1{,}87 n_3 = 0 \Rightarrow 3n_1 = -1{,}87 n_3 \Rightarrow n_3 = -1{,}6 n_1$$

$$\Rightarrow 1{,}87 \times -1{,}93 n_2 + 2n_2 + 3 \times -1{,}6 n_1 = 0$$

$$-3{,}6 n_2 + 2n_2 - 4{,}8 n_1 = 0 \Rightarrow -1{,}6 n_2 = +4{,}8 n_1$$

$$n_2 = 3n_1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1{,}93 n_2 \\ 3n_1 \\ -1{,}6 n_1 \end{bmatrix}}_{m_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3n_1 \\ -1{,}6 n_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1{,}93 n_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = n_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1{,}6 \end{bmatrix} + n_2 \begin{bmatrix} -1{,}93 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این دوتا امتداد ویژه هستند

★ در تمامی موارد باید ضرب در 10^{-3} شود

ج

$$L = \begin{bmatrix} 1{,}33n_2 & -1{,}4n_2 & -1{,}93n_2 \\ 0{,}1n_1 & 12{,}78n_1 & 3n_1 \\ 0{,}64n_1 & 3{,}75n_1 & -1{,}6n_1 \end{bmatrix}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 1{,}33n_2 & 0{,}1n_1 & 0{,}64n_1 \\ -1{,}4n_2 & 12{,}78n_1 & 3{,}75n_1 \\ -1{,}93n_2 & 3n_1 & -1{,}6n_1 \end{bmatrix}$$

$$L^T \varepsilon L = \begin{bmatrix} 1{,}33n_2 & 0{,}1n_1 & 0{,}64n_1 \\ -1{,}4n_2 & 12{,}78n_1 & 3{,}75n_1 \\ -1{,}93n_2 & 3n_1 & -1{,}6n_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1{,}33n_2 & -1{,}4n_2 & -1{,}93n_2 \\ 0{,}1n_1 & 12{,}78n_1 & 3n_1 \\ 0{,}64n_1 & 3{,}75n_1 & -1{,}6n_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1{,}33n_2+0{,}2n_1+1{,}92n_1 & 2{,}66n_2+0{,}3n_1+0 & 3{,}99n_2+0+0{,}64n_1 \\ -1{,}4n_2+25{,}56n_1+11{,}25n_1 & -2{,}8n_2+38{,}34n_1+0 & -4{,}2n_2+0+3{,}75n_1 \\ -1{,}93n_2+6n_1-4{,}8n_1 & -3{,}86n_2+9n_1+0 & -5{,}79n_2+0-1{,}6n_1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1{,}33n_2 & -1{,}4n_2 & -1{,}93n_2 \\ 0{,}1n_1 & 12{,}78n_1 & 3n_1 \\ 0{,}64n_1 & 3{,}75n_1 & -1{,}6n_1 \end{bmatrix}$$

این دوماتریس را ضرب می کنیم

بقیه به عهده خواننده

د)

اگر $\underline{N} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow N^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{\bar{\varepsilon}} = \underline{N}^T \underline{\varepsilon}\, \underline{N} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_{ij} = n_{ir}\, n_{js}\, \varepsilon_{ij}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

محاسبه با casio5800

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}866 & 2{,}598 \\ -0{,}1267 & 0{,}7679 & -1{,}5 \\ -2{,}598 & -1{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

ه) دقیقاً مانند ε_{ij} عمل می کنیم

مثال ۱: تانسور تنش در نقطه P از یک جسم به صورت T_{ij} داده شده است. با دوران دستگاه مختصات در این نقطه تانسور تنش به صورت $\bar{T}_{ij}$:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad \bar{T}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{3}{5} & -1 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

a_{21}، a_{22}، a_{23} را بدست آورید.

نکته: تغییر ناپذیرهای تنش (تانسور) ص 137 جزوه:

* هر ماتریس یا تانسوری با چرخش محورهای مختصاتش بعضی از خصوصیاتش عوض نمی شود.

۱- دترمینان ۲- ترنیس یعنی حاصل جمع قطرهای اصلی

۳- حاصل جمع کفکتورهای

هر سه به مقادیر ویژه وابسته هستند

(1)

$$\det T_{ij} = \det \bar{T}_{ij}$$

$$\det T_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 2(84) = 168$$

$$\det \bar{T}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{3}{5} & -1 & \frac{4}{5} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}a_{22} - a_{23}\right) + \frac{4}{5}\left(-a_{21} - \frac{3}{5}a_{22}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{12}{25}a_{22} - \frac{3}{5}a_{23} - \frac{4}{5}a_{21} - \frac{12}{25}a_{22} \right]$$

$$= -\frac{3}{5\sqrt{2}}a_{23} - \frac{4}{5\sqrt{2}}a_{21} = -\frac{3\sqrt{2}}{10}a_{23} - \frac{4\sqrt{2}}{10}a_{21}$$

$$\Rightarrow \det T_{ij} = \det \bar{T}_{ij} \Rightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{10}a_{23} - \frac{4\sqrt{2}}{10}a_{21} = 168 \quad (1)$$

2 2

۴) $tr\, T_{ij} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 2 + 7 + 12 = 21$

$tr\, \bar{T}_{ij} = \bar{T}_{11} + \bar{T}_{22} + \bar{T}_{33} = \frac{3}{5} + a_{22} + \frac{4}{5} = a_{22} + \frac{7}{5}$

$tr\, T_{ij} = tr\, \bar{T}_{ij} \Rightarrow 21 = \frac{7}{5} + a_{22} \Rightarrow a_{22} = 21 - \frac{7}{5}$

$\Rightarrow a_{22} = \frac{105-7}{5} = \frac{98}{5} \Rightarrow a_{22} = \frac{98}{5}$

۳) $(14-0) + (24-0) + ((7\times 12) - 0) = 122$

$\left(\frac{3}{5}a_{22} - 0\right) + \left(\left(\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\right)\right) + \left(\frac{4}{5}a_{22} - a_{23}\right)$

$= \frac{3}{5}a_{22} + \frac{4}{5}a_{22} - a_{23} = \frac{7}{5}a_{22} - a_{23}$

$\Rightarrow \frac{7}{5}a_{22} - a_{23} = 122$ 2

$a_{22} = \frac{98}{5} \Rightarrow \frac{7}{5}\times\frac{98}{5} - a_{23} = 122 \Rightarrow \frac{686}{25} - a_{23} = 122$

$\Rightarrow a_{23} = -122 + 27{,}44 \Rightarrow a_{23} = -94{,}56$

$\Rightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{10}a_{23} - \frac{4\sqrt{2}}{10}a_{21} = 168$

$\Rightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{10} \times -94{,}56 - \frac{4\sqrt{2}}{10}a_{21} = 168 \Rightarrow -\frac{4\sqrt{2}}{10}a_{21} = 128$

$\Rightarrow -4\sqrt{2}\, a_{21} = 1280 \Rightarrow a_{21} = -\frac{1280}{4\sqrt{2}}$

$a_{21} = -452{,}54$

2 2

مثال ۲: تانسور تنش در یک نقطه از یک محیط به صورت

$$T_{ij}=\begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

داده شده است a و b را طوری بیابید که این تانسور مربوط به حالت تنش یک بعدی باشد.

نکته: ص 159 جزوه: اگر قرار باشد یک تانسور تنش به یک تنش یک بعدی تبدیل شود باید I_2 و I_3 آن صفر باشد

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

$$I_2 = (ab-1) + (-4a-4) + (-4b-9)$$

$$\Rightarrow ab - 4a - 4b - 14 = 0 \quad (1)$$

$$I_3 = \det T = a(-4b-9) - 1(-4-6) + 2(3-2b) = 0$$

$$\Rightarrow -4ab - 9a + 10 + 6 - 4b = 0$$

$$\Rightarrow -4ab - 9a - 4b + 16 = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a, b = ?$$

مثال ۳: تانسور تنش در یک حجم به صورت زیر داده شده است

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

بردار تنش مؤثر در نقطه (۱و۱و۱)P روی صفحه‌ی مماس بر سطح کره $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$ را بدست آورید این بردار تنش را به مؤلفه های عمود بر سطح کره و مماس بدان تجزیه کنید.

تنش های اصلی و امتدادهای اصلی تانسور تنش در نقطه P را بیابید

نکته ص 125 جزوه:

$$P(1,1,1) \Rightarrow T_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

راه دوم برای بردار نرمال:

$$\vec{\nabla F} = (2x_1, 2x_2, 2x_3) = (2,2,2)$$

$$|\nabla F| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3) \Rightarrow n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \vec{N} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3)$$

$$t_i = T_{ij}n_j = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}61 \\ 4{,}04 \\ 1{,}15 \end{bmatrix}$$

بردار تنش نرمال $\vec{t_n} = t_n \cdot \vec{n}$

$$t_n = \underline{t} \cdot \underline{n} = t_1n_1 + t_2n_2 + t_3n_3$$

$$t_n = (4{,}61)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (4{,}04)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (1{,}15)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow t_n = 5{,}65$$

$$\vec{t_n} = 5{,}65\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i}_3\right) = 3{,}26\,\underline{i}_1 + 3{,}26\,\underline{i}_2 + 3{,}26\,\underline{i}_3$$

$$t_t^2 = t^2 - t_n^2 \Rightarrow t_t^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_n^2$$

$$t_t^2 = 4{,}61^2 + 4{,}04^2 + 1{,}15^2 - 5{,}65^2 = 6{,}97 \Rightarrow t_t = 2{,}64$$

اندازه مؤلفه مماس

$$\vec{t_t} = t_t\vec{n} = 2{,}64\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i}_3\right)$$

$$\vec{t_t} = 1{,}52\,\underline{i}_1 + 1{,}52\,\underline{i}_2 + 1{,}52\,\underline{i}_3$$

5 5

$(T_{ij} - t_n \delta_{ij}) n_j = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3-t_n & 5 & 0 \\ 5 & -t_n & 2 \\ 0 & 2 & -t_n \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{B} \cdot \underline{n} = \underline{0} \xrightarrow{\times B^{-1}}$

$B^{-1} \cdot B \cdot n = B^{-1} \cdot 0$

$\underline{I} \cdot \underline{n} = \underline{0} \Rightarrow \underline{n} = 0$

تناقض پس B^{-1} نباید وجود داشته باشد

$B^{-1} = \frac{B^*}{\det B} \Rightarrow \det B = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-t_n & 5 & 0 \\ 5 & -t_n & 2 \\ 0 & 2 & -t_n \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (3-t_n)(t_n^2 - 4) - 5(-5t_n) = 0$

$\Rightarrow 3t_n^2 - 12 - t_n^3 + 4t_n + 25t_n = 0$

$\Rightarrow -t_n^3 + 3t_n^2 + 29t_n - 12 = 0$

$t_n = 6{,}9$

$t_n = 0{,}39$

$t_n = -4{,}33$

★ اسناد ویژه برای $t_n = 6{,}9$

$$\begin{bmatrix} 3-6{,}9 & 5 & 0 \\ 5 & -6{,}9 & 2 \\ 0 & 0 & -6{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-3{,}9 n_1 + 5 n_2 = 0 \Rightarrow -3{,}9 n_1 = -5 n_2 \Rightarrow n_1 = \frac{5}{3{,}9} n_2$

$5 n_1 - 6{,}9 n_2 + 2 n_3 = 0$

$n_1 = 1{,}28 n_2$

$-6{,}9 n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1{,}28\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

5 5

★ امتداد ویژه برای $t_n = -4{,}33$

$$\begin{bmatrix} 3+4{,}33 & 5 & 0 \\ 5 & +4{,}33 & 2 \\ 0 & 0 & +4{,}33 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$7{,}33n_1 + 5n_2 = 0 \Rightarrow 7{,}33n_1 = -5n_2 \Rightarrow n_1 = -\frac{5}{7{,}33} n_2$

$5n_1 + 4{,}33n_2 + 2n_3 = 0$

$n_1 = -0{,}68 n_2$

$4{,}33 n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} -0{,}68\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ امتداد ویژه برای $t_n = 0{,}39$

$$\begin{bmatrix} 3-0{,}39 & 5 & 0 \\ 5 & -0{,}39 & 2 \\ 0 & 0 & -0{,}39 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2{,}61 n_1 + 5n_2 = 0 \Rightarrow 2{,}61n_1 = -5n_2 \Rightarrow n_1 = -\frac{5}{2{,}61} n_2$

$5n_1 - 0{,}39n_2 + 2n_3 = 0$

$-0{,}39 n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 0$

$n_1 = -1{,}91 n_2$

$$\begin{bmatrix} -1{,}91\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۴: تانسور تنش در نقطه P از یک جسم به صورت T_{ij} داده شده است. با دوران دستگاه مختصات در این نقطه تانسور تنش به صورت $\bar{T}_{ij}$:

$$T_{ij}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&7\end{bmatrix} \quad , \quad \bar{T}_{ij}=\begin{bmatrix}4&a_{12}&1\\1&a_{22}&1\\1&a_{32}&2\end{bmatrix}$$

حل:

★ این مثال مانند مثال ۸۰ است:

① $\det T_{ij}=\det \bar{T}_{ij}$

$$\det T_{ij}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&7\end{vmatrix}=1(35-0)=35$$

$$\det \bar{T}_{ij}=\begin{vmatrix}4&a_{12}&1\\1&a_{22}&1\\1&a_{32}&1\end{vmatrix}=$$

$$=4(a_{22}-a_{32})-a_{12}(1-1)+1(a_{32}-a_{22})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a_{22}-4a_{32}+a_{32}-a_{22}=3a_{22}-3a_{32}$$

① $\Rightarrow$ $3a_{22}-3a_{32}=35$

② $tr\,T_{ij}=tr\,\bar{T}_{ij} \Rightarrow 1+5+7=4+a_{22}+2 \Rightarrow a_{22}=7$

①, ② $\Rightarrow (3\times 7)-3a_{32}=35 \Rightarrow -3a_{32}=35-21$

$\Rightarrow a_{32}=4/66$

③ $\Rightarrow (35-0)+(7-0)+(5-0)=(a_{22}-a_{32})+(4-1)+(4a_{22}-a_{12})$

$\Rightarrow 47=2/34+3+28-a_{12}$

$\Rightarrow a_{12}=33/34-47 \Rightarrow a_{12}=-13/66$

مسئله ۵ : تانسور تنش در یک نقطه از یک تیر به صورت

$$T_{ij}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5/2\\ 0 & \frac{5}{2} & 0\end{bmatrix}$$

داده شده است.

الف- تنش های اصلی و جهات آن ها را بیابید

ب- دوایر موهر را رسم کنید.

ج- تانسور فوق را به تانسور فشار همه جانبه و تانسور برش تنش تجزیه کنید.

حل :

الف)

$$(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j=0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & \frac{5}{2}\\ 0 & \frac{5}{2} & -\lambda\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{bmatrix}}_{\underline{n}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{\underline{0}} \xRightarrow{\times B^{-1}} \begin{array}{l}\underline{B}\cdot\underline{n}=0\\ \underline{B}^{-1}\cdot\underline{B}\cdot\underline{n}=\underline{B}^{-1}\cdot\underline{0}\\ \underline{I}\cdot\underline{n}=\underline{0}\Rightarrow\underline{n}=0\end{array}$$

تناقض

برای اینکه به تناقض نخوریم باید B^{-1} وجود نداشته باشد

$$B^{-1}=\frac{B^{*}}{\det B}$$

$$\det B=0\Rightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & \frac{5}{2}\\ 0 & \frac{5}{2} & -\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(4-\lambda)\left(\lambda^2-\frac{25}{4}\right)=0$$

$$\lambda=4$$

$$\lambda^2=\frac{25}{4}\Rightarrow\lambda=\pm\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{\lambda_1=-2{,}5\ ,\ \lambda_2=2{,}5\ ,\ \lambda_3=4}$$

تنش های اصلی

$\lambda_1=-2{,}5$: ☆

$$\begin{bmatrix}4-(-2{,}5) & 0 & 0\\ 0 & +2{,}5 & 2{,}5\\ 0 & 2{,}5 & +2{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$6{,}5n_1+0+0=0\Rightarrow\boxed{n_1=0}$$

اگر $n_2=\alpha$

$$0+2{,}5n_2+2{,}5n_3=0\Rightarrow\boxed{n_2=-n_3}\Rightarrow \text{آنگاه}\ \begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ -\alpha\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$0+2{,}5n_2+2{,}5n_3$$

$\lambda_2 = 2{,}5$

$$\begin{bmatrix} 4-2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 & -2{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر $n_2 = \alpha \Rightarrow$ باشد

$$1{,}5 n_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{n_1 = 0}$$

$$0 - 2{,}5 n_2 + 2{,}5 n_3 = 0 \Rightarrow n_2 = n_3 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$0 + 2{,}5 n_2 - 2{,}5 n_3 = 0$$

$\lambda_3 = 4$

$$\begin{bmatrix} 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$0 = 0 \Rightarrow$ دلخواه است $n_1 \Rightarrow \beta$ مثلاً

$$-4n_2 + 2{,}5 n_3 = 0 \Rightarrow 2{,}5 n_3 = 4 n_2 \qquad \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ 1{,}6\alpha \end{bmatrix}$$

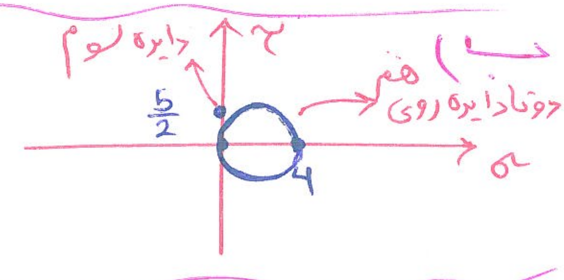
$$2{,}5 n_2 - 4 n_3 = 0 \qquad \Rightarrow n_3 = 1{,}6 n_2$$

اگر $\alpha = n_2$ باشد

صفحه xy $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, صفحه yz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$, صفحه xz $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(σ, τ) $\Downarrow$ $\begin{cases} (4, 0) \\ (0, 0) \end{cases}$ $\qquad \Downarrow \begin{cases} (0, \frac{5}{2}) \\ (0, \frac{5}{2}) \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} (4, 0) \\ (0, 0) \end{cases}$

ب)



ج)

$$T'_{ij} = T_{ij} - P\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{4}{3} & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 & +\frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$-P\delta_{ij} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix}$$

$$P = -\frac{1}{3} T_{ii} = -\frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = -\frac{1}{3}(4) = -\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{P = -\frac{4}{3}}$$

$$T'_{ij} = T_{ij} + (-P\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{4}{3} & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 & +\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

۶- تانسور تنش زیر داده شده است.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} (1-x_1^2)x_2 + \frac{2}{3}x_2^3 & -(4-x_2^2)x_1 & 0 \\ -(4-x_2^2)x_1 & -\frac{1}{3}(x_2^3 - 12x_2) & 0 \\ 0 & 0 & (3-x_1^2)x_2 \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید که معادلات تعادل در هر نقطه بدون وجود نیروی حجمی برقرارند.

ب) بردار تنش در نقطه (6 و 1- و 2) مؤثر بر صفحه $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$ را بدست آورید.

حل:

الف)

$T_{11} = x_2 - x_1^2 x_2 + \frac{2}{3}x_2^3$

$T_{12} = T_{21} = -4x_1 + x_1 x_2^2$

$T_{13} = T_{23} = 0$ و $T_{23} = T_{32} = 0$

$T_{22} = -\frac{1}{3}x_2^3 + 4x_2$

$T_{33} = 3x_2 - x_1^2 x_2$

$T_{ij,j} + \rho \cancel{b_i} = \rho \cancel{a_i}$ → معادله تعادل در حالت استاتیکی و عدم وجود نیروی حجمی

$i=1 \Rightarrow T_{11,1} + T_{12,2} + T_{13,3} = 0$

$-2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

$i=2 \Rightarrow T_{21,1} + T_{22,2} + T_{23,3} = 0$

$-4 + x_2^2 - x_2^2 + 4 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

$i=3 \Rightarrow T_{31,1} + T_{32,2} + T_{33,3} = 0$

$0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

۲ـ دوایر موهر را در حالت های زیر رسم کنید.

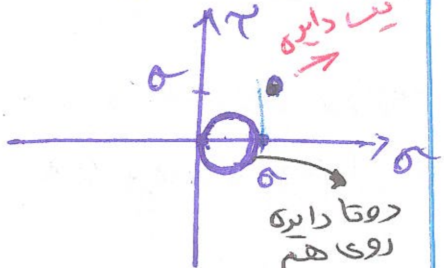
★ برای رسم دوایر موهر باید در سه صفحه ی xy ، xz و yz رسم کنیم و در هر حالت نقاط بدست می آید

$$① \quad \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & \sigma & \sigma & 0 \\ y & \sigma & \sigma & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{مثلاً صفحه ی } xy} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (\sigma_x , \tau_{xy}) \\ (\sigma_y , \tau_{xy}) \end{matrix}$$

① $\Rightarrow$ صفحه ی xy $\begin{bmatrix} \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma \end{bmatrix}$ ، صفحه ی yz $\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و صفحه zx $\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

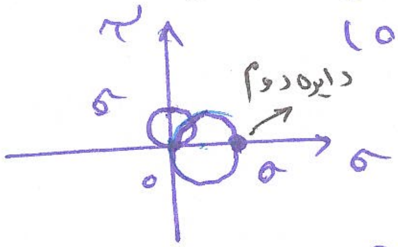
$\begin{cases} (\sigma , \sigma) \\ (\sigma , \sigma) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (\sigma , 0) \\ (0 , 0) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (\sigma , 0) \\ (0 , 0) \end{cases}$



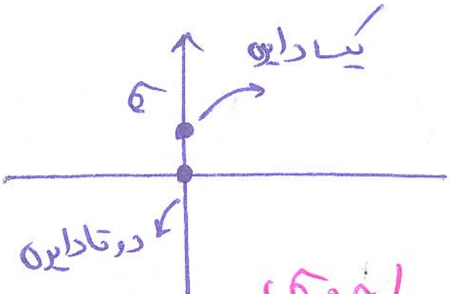
② $\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$ صفحه xy $\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و صفحه ی xz $\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$ و صفحه ی yz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$

$(\sigma , 0)$ $\quad (\sigma , 0)$ $\quad (0 , \sigma)$

$(0 , 0)$ $\quad (\sigma , 0)$ $\quad (0 , 0)$



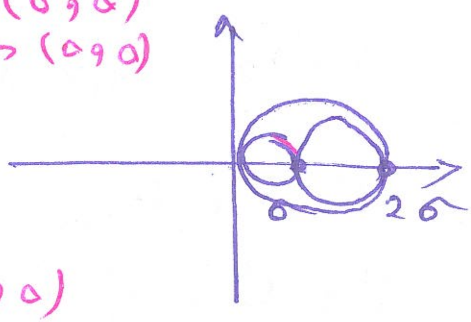
④ $\begin{bmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$



③ $\begin{bmatrix} 2\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 2\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} (\sigma , 0) \\ (0 , 0) \end{matrix}$

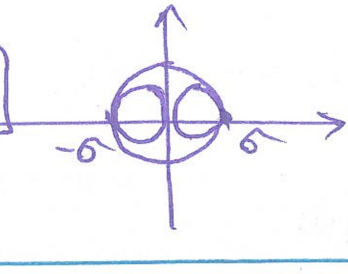
$\begin{bmatrix} 2\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} (2\sigma , 0) \\ (0 , 0) \end{matrix}$

$\begin{matrix} (2\sigma , 0) \\ (\sigma , 0) \end{matrix}$



۵) $\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (\sigma , 0) \\ (-\sigma , 0) \end{matrix}$ $\quad \begin{bmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Downarrow \begin{matrix} (-\sigma , 0) \\ (0 , 0) \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (\sigma , 0) \\ (0 , 0) \end{cases}$



$(2,-1,6) \qquad 3x_1+6x_2+2x_3=12 \Rightarrow f(x_1,x_2,x_3)$ (ب

$$\underline{n}=\frac{\vec{\nabla F}}{|\nabla F|}$$

$$\vec{\nabla F}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\underline{i}_i=\frac{\partial f}{\partial x_1}\underline{i}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\underline{i}_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\underline{i}_3$$

$$\vec{\nabla F}=3\underline{i}_1+6\underline{i}_2+2\underline{i}_3$$

$$|\vec{\nabla F}|=\sqrt{3^2+6^2+2^2}=\sqrt{49}=7$$

$t_i=T_{ij}n_j$ را در T_{ij} جایگذاری می‌کنیم. $(2,-1,6)$

$$t_i=\begin{bmatrix}\frac{7}{3} & -6 & 0\\ -6 & -\frac{11}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{7}\\ \frac{6}{7}\\ \frac{2}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\frac{36}{7}\\ -\frac{18}{7}-\frac{22}{7}\\ \frac{2}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{29}{7}\\ -\frac{40}{7}\\ \frac{2}{7}\end{bmatrix}$$

$$\underline{t}=\frac{29}{7}\underline{i}_1-\frac{40}{7}\underline{i}_2+\frac{2}{7}\underline{i}_3$$

$$\boxed{t_1=\frac{29}{7}\ ,\ t_2=-\frac{40}{7}\ ,\ t_3=\frac{2}{7}}$$

۱- فرض کنید محورهای X_1 ، X_2 و X_3 ، محورهای اصلی تنش باشند، σ_{ij} تانسور تنش در دستگاه محورهای اصلی باشد. نشان دهید که تنش محوری روی امتداد (۱و۱و۱) به صورت $\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$ و بزرگترین تنش برشی در صفحه‌ی عمود بر امتداد (۱و۱و۱) به صورت $\frac{1}{3}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2\right]^{\frac{1}{2}}$ می باشد.

حل:

* جواب این سؤال دقیقاً مثال ۴-۹ و ۴-۱۰ ص 181 و ص 182 کتاب مکانیک محیط پیوسته است.

* در صفحه‌ی 181 کتاب نوشته اگر محورهای مختصات همان امتدادهای اصلی تنش باشند (اینجا خوده سؤال گفته محورهای X_1، X_2 و X_3 محورهای اصلی تنش هستند) تانسور تنش به صورت زیر است

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}$$

که در آن σ_1، σ_2 و σ_3 تنش های اصلی هستند. صفحه اکتاهدرال مطابق تعریف بالا دارای بردار یکه n می باشد (خوده سؤال امتداد (۱و۱و۱) را داده است):

$$\underline{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i}_1+\underline{i}_2+\underline{i}_3)$$

$$t_i=T_{ij}n_j$$

$$t_{o1}=\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} \quad , \quad t_{o2}=\frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} \quad , \quad t_{o3}=\frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{t}_o=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1\underline{i}_1+\sigma_2\underline{i}_2+\sigma_3\underline{i}_3) \Rightarrow$$ تا همین جا جواب سؤال

$$t_o=\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{3}}$$ اندازه بردار تنش روی صفحه اکتاهدرال

مؤلفه عمودی تنش مطابق رابطه (۴-۲۰) برحسب تنش های اصلی برابر است با:

$$\sigma_0 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1$$

و اندازه ی مؤلفه برشی تنش برابر است با:

$$\tau_0 = (t_0^2 - \sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_0 = \left[\frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{3}(\underbrace{2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2}_{\sigma_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_3} - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2) + (\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

۴-۱۰: تانسور تنش در یک نقطه در دستگاه کارتزین در زیر داده شده است. تمام مؤلفه‌ها بجز T_{11} معلوم می باشند. T_{11} را چنان بیابید که بردار تنش در یک صفحه با بردار یکه n برابر صفر باشد. مؤلفه های بردار یکه این صفحه را نیز بیابید.

$$\begin{bmatrix} T_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad T_{ij} = T_{ji}$$

* سؤال گفته T_{11} را چنان بیابید که $t_i=0$ باشد پس: $t_i = T_{ij} n_j$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot n = 0 \xRightarrow{B^{-1}} B^{-1} \cdot B \cdot n = B^{-1} \times 0 \Rightarrow I \cdot n = 0 \Rightarrow n = 0$$ غ ق ق

* برای برقرار بودن رابطه باید B^{-1} وجود نداشته باشد پس $\det B = 0$ باید باشد

$$\begin{vmatrix} T_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow T_{11}(+4) - 2(-2) + 1(4) = 0$$

$$\Rightarrow 4T_{11} + 4 + 4 = 0 \Rightarrow 4T_{11} = -8$$

$$\boxed{T_{11} = -2}$$

$$t_i = T_{ij} n_j$$

$$\begin{cases} t_1 = T_{11} n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3 \\ t_2 = T_{21} n_1 + T_{22} n_2 + T_{23} n_3 \\ t_3 = T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + T_{33} n_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2n_1 + 2n_2 + n_3 = 0 \\ 2n_1 + 2n_3 = 0 \Rightarrow \boxed{n_1 = -n_3} \\ n_1 + 2n_2 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{n_1 = -2n_2} \\ \cancel{-}2n_2 = \cancel{-}n_3 \Rightarrow \boxed{n_3 = 2n_2} \end{cases}$$

باید $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow (-2n_2)^2 + n_2^2 + (2n_2)^2 = 1$

$$\Rightarrow 4n_2^2 + n_2^2 + 4n_2^2 = 1 \Rightarrow 9n_2^2 = 1 \Rightarrow n_2^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{n_2 = \pm\frac{1}{3}}$$

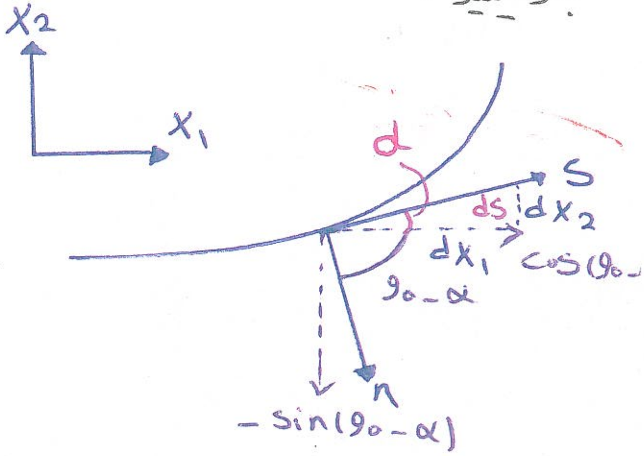
$$\boxed{n_1 = \pm\frac{2}{3}}, \quad \boxed{n_3 = \pm\frac{1}{3}}$$

۳-۴: اگر در حالت تنش مسطح در صفحه x_1x_2، مؤلفه‌های تنش با روابط زیر از تابع تنش $\phi(x_1, x_2)$ بدست آیند:

$$T_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} \quad , \quad T_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} \quad , \quad T_{12}=T_{21}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$T_{13}=T_{31}=T_{23}=T_{32}=T_{33}=0$$

مؤلفه‌های تنش t_1 و t_2 روی منحنی C (شکل ۴-۱۰) را برحسب مشتقات $\frac{\partial\phi}{\partial x_1}$ و $\frac{\partial\phi}{\partial x_2}$ بنویسید.



$$\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$$

$$-\sin(90-\alpha)=-\cos\alpha$$

پس:

$$n=\sin\alpha\, i_1-\cos\alpha\, i_2$$

$$T=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$t_i=T_{ij}n_j$$

$$t_1=T_{11}n_1+T_{12}n_2+\cancel{T_{13}}n_3 \Rightarrow t_1=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}n_1+\frac{-\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}n_2$$

$$t_2=T_{21}n_1+T_{22}n_2+\cancel{T_{23}}n_3 \quad t_2=\frac{-\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}n_1+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}n_2$$

$$t_1=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\sin\alpha-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}(-\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$t_1=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\sin\alpha+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\cos\alpha$$

$$t_2=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\sin\alpha+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}(-\cos\alpha)$$

$$t_2=-\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\sin\alpha+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}\cos\alpha\right)$$

97

۴-۵: دستگاه مختصات کروی $(r، \theta، \phi)$ داده شده است. این مختصات با روابط زیر با مختصات دستگاه کارتزین ارتباط دارند:

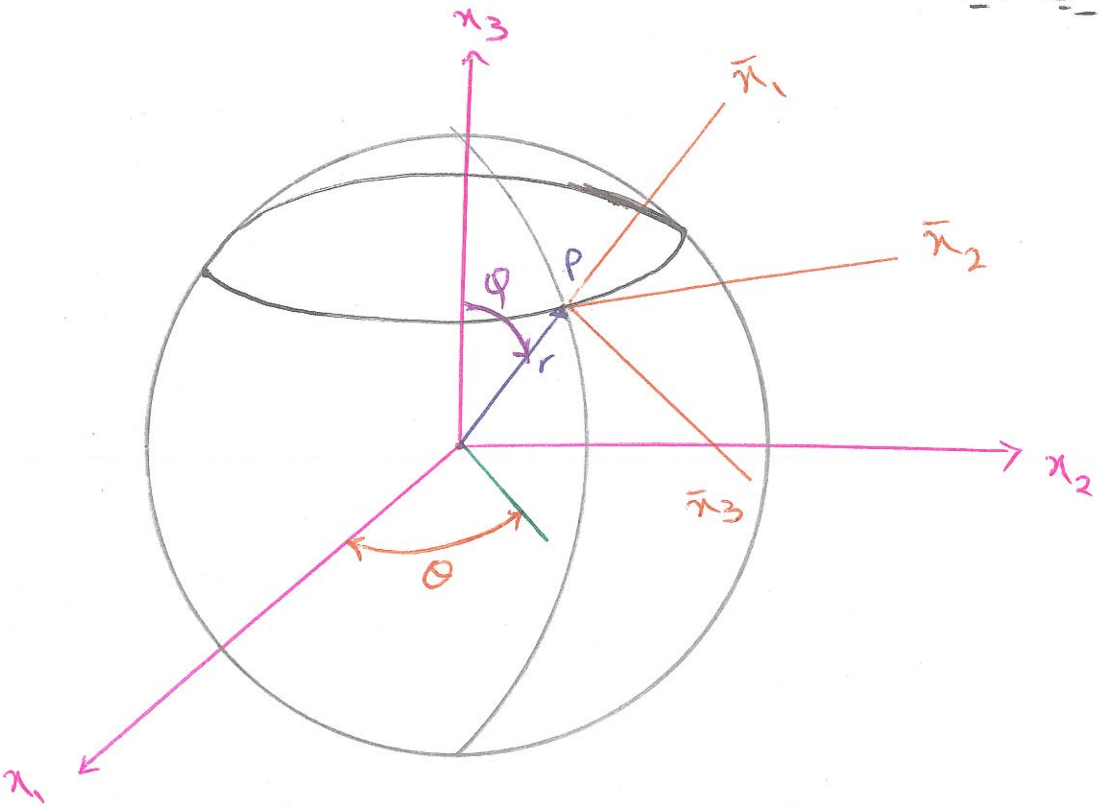
$$x_1 = r\sin\theta\cos\phi \quad \text{و} \quad x_2 = r\sin\theta\sin\phi \quad \text{و} \quad x_2 = r\cos\theta$$

در نقطه P روی سطح کره با ثابت = r دستگاه جدید $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ اختیار می‌گردد (شکل ۴-۲۶)

الف) مطلوب است تعیین ماتریس N مربوط به رابطه (۴-۲۸) برای تعیین $\bar{T}$

ب) مؤلفه‌های ($\bar{t}_1$، $\bar{t}_2$، $\bar{t}_3$) روی سطح کره و در نقطه P را برحسب تانسور تنش T (تانسور تنش در دستگاه قدیم) بدست آورید.

ج) مؤلفه‌های ($\bar{t}_1$، $\bar{t}_2$، $\bar{t}_3$) روی سطح مخروطی ثابت = ϕ در نقطه P را برحسب مؤلفه‌های T تعیین کنید.



شکل ۴-۲۶- دستگاه مختصات کروی

حل:

الف) ← صفحه‌ی 161 جزوه

۴-۷: میدان تنش در یک محیط پیوسته با تانسور زیر داده شده است:

$$[T_{ij}]=10^3\begin{bmatrix}1 & 0 & 2x_2\\ 0 & 1 & 4x_1\\ 2x_2 & 4x_1 & 1\end{bmatrix}\ Kg/cm^2$$

مقدار و جهت بردار تنش وارد بر صفحه‌ای به معادله $x_1+x_2+x_3=6$ را که از نقطه $M(1,2,3)$ می‌گذرد تعیین کنید.

$$t_i=T_{ij}\,n_j$$

$$n=\frac{1}{\sqrt{3}}(i_1+i_2+i_3)$$

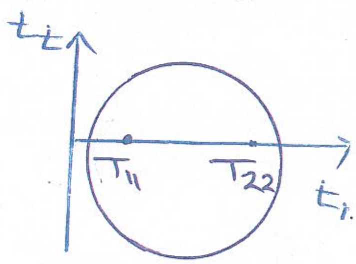
$$M(1,2,3)\Rightarrow T_{ij}=10^3\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\frac{10^3}{\sqrt{3}}=\frac{10^3}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}5\\ 5\\ 9\end{bmatrix}$$

$$|t|=\sqrt{(5^2+5^2+9^2)\left(\frac{10^3}{\sqrt{3}}\right)^2}=6608{,}07\ Kg/cm^2$$

۴-۹: با استفاده از دایره موهر در حالت تنش‌های دو بعدی نشان دهید که $T_{11}+T_{22}$ و $T_{11}T_{22}-T_{12}^2$ دو تغییر ناپذیر تانسور تنش می‌باشند

$$T=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{bmatrix}=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & 0\\ T_{21} & T_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{ستون سوم}\\ \text{دوم}\\ \text{اول}\end{array}\\ \begin{array}{ccc}\text{سوم} & \text{دوم} & \text{اول سطر}\end{array} & \end{array}$$



$$T_{ij}=T_{ji}$$

$$I_1=trT=T_{11}+T_{22}+0=T_{11}+T_{22}$$

$$I_2=\overbrace{\begin{pmatrix}T_{11}T_{22}\\ -T_{12}T_{21}\end{pmatrix}}^{\text{سطر اول وستون اول حذف}}+\overbrace{\begin{pmatrix}T_{11}T_{33}\\ -T_{13}T_{31}\end{pmatrix}}^{\text{سطر دوم وستون دوم حذف}}+\overbrace{\begin{pmatrix}T_{22}T_{33}\\ -T_{23}T_{32}\end{pmatrix}}^{\text{سطر سوم وستون سوم حذف}}$$

$$I_2=T_{11}T_{22}+\underbrace{\cancel{T_{11}T_{33}}}_{0}+\underbrace{\cancel{T_{22}T_{33}}}_{0}-T_{12}^2-\underbrace{\cancel{T_{13}^2}}_{0}-\underbrace{\cancel{T_{23}^2}}_{0}$$

$$I_2=T_{11}T_{22}-T_{12}^2$$

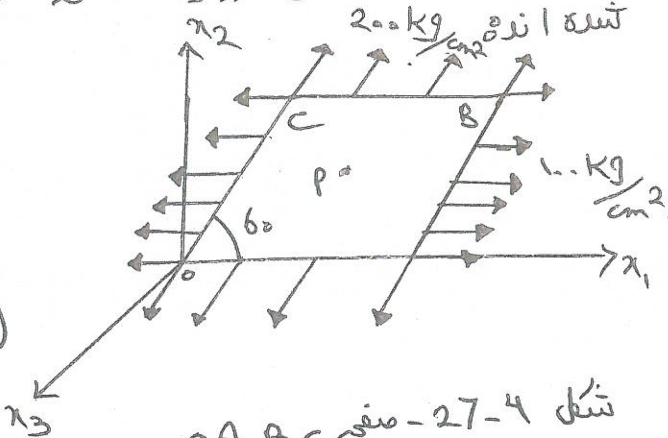
۴-۱۱: مؤلفه‌های تنش در یک صفحه نازک با مرزهای $x_1=\pm L$ و $x_2=\pm h$ با روابط زیر داده شده اند

$$T_{11}=-w\frac{m^2}{h}\cos\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)\sin\left(\frac{m x_2}{h}\right)$$

$$T_{22}=-\frac{h}{4}w\pi^2L^{-2}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\sin\left(\frac{m x_2}{h}\right)$$

$$T_{12}=\frac{1}{2}w\pi mL^{-1}\sin\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)\cos\left(\frac{m x_2}{h}\right)$$

$$T_{13}=T_{23}=T_{33}=0$$



شکل ۴-۲۷- صفحه OABC
تحت اثر نیروهای سطحی

که در آن w و m ثابت می باشند.

الف) نشان دهید که این مؤلفه‌های تنش معادلات تعادل را در حالتی که نیروهای حجمی وجود ندارند ارضا می کنند.

ب) نیروهای سطحی مؤثر بر لبه‌های $x_2=h$ و $x_1=-L$ را تعیین کنید.

ج) تنش‌های اصلی و همچنین امتدادهای اصلی را در نقاط $(0,h,0)$ و $(L,0,0)$ بیابید.

الف) * چون در صورت سؤال گفته در حالت تعادل و نیروهای حجمی وجود ندارد

معادله حرکت در هر نقطه $\quad T_{ij,j}+\rho b_i=\rho a_i \quad \xRightarrow[\rho a_i=0]{\rho b_i=0} \quad T_{ij,j}=0$

① $$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}=0$$

② $$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}=0$$

③ $$\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}=0$$

② $$\Rightarrow \frac{1}{2}w\pi mL^{-1}\times\frac{\pi}{2L}\cos\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)\cos\left(\frac{m x_2}{h}\right)-\frac{h}{4}w\pi^2L^{-2}\cos\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)\frac{m}{h}\cos\left(\frac{m x_2}{h}\right)$$

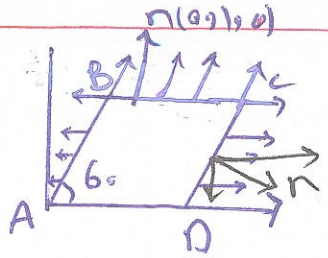
$$\checkmark \Rightarrow \frac{w\pi^2m}{4L^2}\cos\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)\cos\left(\frac{m x_2}{h}\right)-\frac{w\pi^2m}{4L^2}\cos\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)\cos\left(\frac{m x_2}{h}\right)=0$$

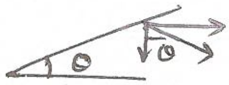
① $$\Rightarrow -w\frac{m^2}{h}\times\frac{-\pi}{2L}\sin\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)\sin\left(\frac{m x_2}{h}\right)+\frac{1}{2}w\pi mL^{-1}\sin\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)\left(-\frac{m}{h}\right)\sin\left(\frac{m x_2}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{w\pi m^2}{2Lh}\sin\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)\sin\left(\frac{m x_2}{h}\right)-\frac{w\pi m^2}{2Lh}\sin\left(\frac{\pi x_1}{2L}\right)\sin\left(\frac{m x_2}{h}\right)=0$$

ok ✓

③ $\Rightarrow \quad 0+0+0=0$ ✓





ب) وجه DC :

$\underline{n} = (\sin 60 , \cos 60 , 0)$

$\underline{n} = (\frac{\sqrt{3}}{2} , -\frac{1}{2} , 0)$

$t = (200\cos 60 , 200 \sin 60 , 0) \Rightarrow$

وجه BC :

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1 = T_{11} \cancel{n_1} + T_{12} n_2 + T_{13} \cancel{n_3} \Rightarrow T_{12} = t_1$

$i=2 \Rightarrow t_2 = T_{21} n_1 + T_{22} n_2 + T_{23} n_3 \Rightarrow T_{22} = t_2$

$i=3 \Rightarrow t_3 = T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + T_{33} n_3 \Rightarrow T_{32} = t_3 = 0$

وجه DC :

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1 = T_{11} n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3 \Rightarrow 100 = T_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} - T_{12} \times \frac{1}{2} + 0$

$\Rightarrow T_{11} = \frac{2}{\sqrt{3}} (100 + \frac{100}{2}) = 10\sqrt{3}$

$i=2 \Rightarrow t_2 = T_{21} n_1 + T_{22} n_2 + T_{23} n_3 \Rightarrow 100\sqrt{3} = T_{21} \frac{\sqrt{3}}{2} - T_{22} \times -\frac{1}{2} + 0$

$i=3 \Rightarrow t_3 = T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + T_{33} n_3 = 0 \Rightarrow T_{31} \frac{\sqrt{3}}{2} - T_{32} \times \frac{1}{2} + 0$

T_{21} و T_{31} بدست می آید

ج) بدست آوردن تنش ها و امتداد های اصلی در نقطه (0,h,0)

$T_{11} = -w \frac{m^2}{h} \cos(0) \sin(m \frac{h}{h}) = -w \frac{m^2}{h} \sin(m)$

$T_{22} = -\frac{h}{4} w \pi^2 L^{-2} \cos(0) \sin(m \frac{h}{h}) = \frac{-h w \pi^2}{4 L^2} \sin(m)$

$T_{12} = \frac{1}{2} w \pi m L^{-1} \sin(0) \cos(m) = 0$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{t} = t_n \cdot \underline{n} \Rightarrow T_{ij} \cdot n_j = t_n \cdot n_i \Rightarrow T_{ij} \cdot n_j = t_n \delta_{ij} n_j$

$\Rightarrow (T_{ij} - t_n \delta_{ij}) n_j = 0$

102

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{wm^2}{h}\sin(m)-t_n & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{hw\pi^2}{4L^2}\sin(m)-t_n & 0 \\ 0 & 0 & -t_n \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باید $\det B = 0$

$$\Rightarrow \left(-w\frac{m^2}{h}\sin(m) - t_n\right)(-t_n)\left(-\frac{hw\pi^2}{4L^2}\sin(m) - t_n\right) = 0$$

$$\begin{cases} t_n = 0 \\ t_n = -\frac{wm^2}{h}\sin(m) \\ t_n = -\frac{hw\pi^2}{4L^2}\sin(m) \end{cases}$$

امتداد ویژه برای $t_n = 0$

$$\begin{bmatrix} -\frac{wm^2}{h}\sin(m) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{hw\pi^2}{4L^2}\sin(m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{wm^2}{h}\sin(m)\, n_1 = 0 \Rightarrow \boxed{n_1 = 0}$$

$$-\frac{hw\pi^2}{4L^2}\sin(m)\, n_2 = 0 \Rightarrow \boxed{n_2 = 0}$$

$$0 = 0 \Rightarrow$$ دلخواه n_3 *

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

امتداد ویژه برای $t_n = -\frac{wm^2}{h}\sin(m)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{wm^2}{h}\sin(m)+\frac{wm^2}{h}\sin(m)=0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{hw\pi^2}{4L^2}\sin(m)+\frac{wm^2}{h}\sin(m) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{wm^2\sin m}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

103

$0 = 0$

$$\left(-\frac{hw\pi^2}{4L^2} + \frac{wm^2}{h}\right)\sin(m)\,n_2 = 0 \Rightarrow \boxed{n_2 = 0}$$

$$\frac{wm^2}{h}\sin(m)\,n_3 = 0 \Rightarrow \boxed{n_3 = 0}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$n_1 >$ دلخواه *

امتداد ویژه برای $t_n = -\frac{hw\pi^2}{4L^2}\sin(m)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{wm^2}{h}\sin(m) + \frac{hw\pi^2}{4L^2}\sin(m) & 0 & 0 \\ 0 & \underset{\text{صفر شد}}{0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{hw\pi^2}{4L^2}\sin(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{wm^2}{h} + \frac{hw\pi^2}{4L^2}\right)\sin(m)\,n_1 = 0 \Rightarrow \boxed{n_1 = 0}$$

$0 = 0$

$n_2 >$ دلخواه *

$$\frac{hw\pi^2}{4L^2}\sin(m)\,n_3 = 0 \Rightarrow \boxed{n_3 = 0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بدست آوردن تنش‌های اصلی و امتدادهای اصلی در نقطه $(L, 0, 0)$

$$\left.\begin{aligned} T_{11} &= -w\frac{m^2}{h}\cos\left(\frac{\pi L}{2L}\right)\underbrace{\sin(0)}_{0} = 0 \\ T_{22} &= -\frac{h}{4}w\pi^2L^{-2}\cos\left(\frac{\pi L}{2L}\right)\underbrace{\sin(0)}_{0} = 0 \\ T_{12} &= \frac{1}{2}w\pi m L^{-1}\sin\left(\frac{\pi L}{2L}\right)\cos(0) = \frac{w\pi m}{2L} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{w\pi m}{2L} & 0 \\ \frac{w\pi m}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(T_{ij} - t_n\delta_{ij})n_j = 0$$

$$\begin{bmatrix} -t_n & \frac{w\pi m}{2L} & 0 \\ \frac{w\pi m}{2L} & -t_n & 0 \\ 0 & 0 & -t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B

$(-t_n)(+t_n)^2 = 0 \Rightarrow -t_n^3 = 0 \Rightarrow t_n = 0$ * باید $\det B = 0$ شود

امتداد ویژه برای $t_n = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{w\pi m}{2L} & 0 \\ \frac{w\pi m}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{w\pi m}{2L} n_2 = 0 \Rightarrow n_2 = 0$

$\frac{w\pi m}{2L} n_1 = 0 \Rightarrow n_1 = 0$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$0 = 0$ * n_3 دلخواه

۴-۱۳: صفحه دایره شکلی با جرم مخصوص ρ که بسیار نازک است با سرعت زاویه‌ای ω رادیان بر ثانیه می‌چرخد. معادله تعادل یک جزء کوچک از این صفحه را بدست آورید.

راه حل اول:

* شتاب شعاعی $= a = r\omega^2$

* معادله حرکت چرخشی:

$\int_S \underline{x} \times \underline{t}\, ds + \int_V x \times \rho b\, dv = \int x \times \rho a\, dv$ ص ۱۸۸ کتاب و ص 153 جزوه خودم

سطح S همان T است

و V همان Ω است

$$\Rightarrow \int_T e_{ijk}\, i_i\, x_j\, t_k\, ds + \int_\Omega e_{ijk}\, i_i\, x_j \rho b_k\, dv = \int_\Omega e_{ijk}\, i_i\, x_j \rho a_k\, dv$$

* از قضیه دیورژانس داریم

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{\partial (x_j T_{kr})}{\partial x_r} + x_j \rho b_k - x_j \rho a_k \,]\, dv = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega e_{ijk} \left[\frac{\partial x_j T_{kr}}{\partial x_r} + x_j \rho b_k - x_j \rho r\omega^2 \right] dv$$

* رابطه ی بالا برای هر حجم دلخواهی صادق است.

$$e_{ijk}\left[\delta_{jr} T_{kr} + x_j \left(\frac{\partial T_{kr}}{\partial x_r} + \rho b_k - \rho \omega^2 r \right)\right] = 0$$

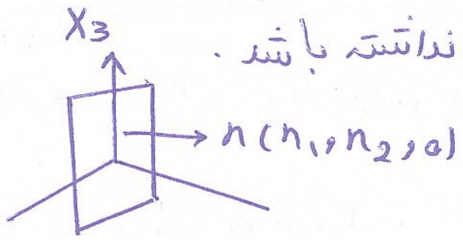
105

۴-۲- اگر تانسور تنش یک نقطه در دستگاه کارتزین مطابق زیر باشد صفحه‌ای موازی محور x_3 بیابید به طوری که مؤلفه‌های تنش روی آن صفحه مماس باشند.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & e \\ d & e & c \end{bmatrix}$$

حل:

* یعنی مؤلفه عمودی نداشته باشد.



$$\underline{t} = T_{ij} n_j = \begin{bmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & e \\ d & e & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a n_1 \\ b n_2 \\ d n_1 + e n_2 \end{bmatrix}$$

$$t_n = \underline{t} \cdot \underline{n} = 0 \Rightarrow a n_1 \times n_1 + b n_2 n_2 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow a n_1^2 + b n_2^2 = 0$$

$$\begin{cases} a n_1^2 + b n_2^2 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 = 1 \Rightarrow n_1^2 = 1 - n_2^2 \end{cases} \Rightarrow a(1 - n_2^2) + b n_2^2 = 0$$

$$a - a n_2^2 + b n_2^2 = 0$$

$$b n_2^2 = -a + a n_2^2$$

$$\div n_2^2 \Rightarrow b = -\frac{a}{n_2^2} + a$$

$$\Rightarrow a(1 - n_2^2) + \left(\frac{-a}{n_2^2} + a\right) n_2^2 = 0$$

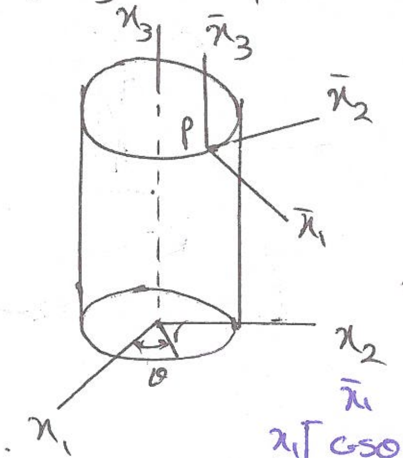
$$\Rightarrow a(1 - n_2^2) - a + a n_2^2 = 0 \Rightarrow a(1 - n_2^2 - 1 + n_2^2) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 0$$

۴-۴- دستگاه مختصات استوانه ای (x_3، θ، r) داده شده است. این مختصات با روابط زیر با مختصات دستگاه کارتزین ارتباط دارند.

$x_1 = r\cos\theta$ و $x_2 = r\sin\theta$ و $x_3 = x_3$

در نقطه P روی سطح جانبی استوانه با r = ثابت، دستگاه جدید $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ اختیار می گردد، به طوری که محور $\bar{x}_1$ در امتداد شعاع و محور $\bar{x}_2$ در امتداد افزایش θ و عمود بر $\bar{x}_1$ و محور $\bar{x}_3$ در امتداد x_3 می باشد (شکل ۴-۲۵).



الف) مطلوب است تعیین ماتریس N مربوط به رابطه (۴-۲۸) برای تعیین $\bar{T}$

ب) مؤلفه های ($\bar{t}_1$، $\bar{t}_2$، $\bar{t}_3$) روی سطح جانبی استوانه در نقطه P را برحسب تانسور تنش T بدست آورید.

حل:

الف)

$$N = \begin{array}{c|ccc} & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ \hline x_1 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ x_2 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

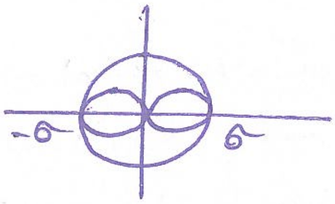
$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = X_3 \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

از ریاضی ۲

۴-۶- دایره موهر وضعیت تنش مربوط به هر یک از تانسورهای تنش زیر را رسم کنید.

الف) $\begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$

الف)

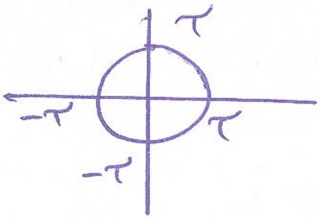


سه مرحله:
① $-\sigma$ با ۰
② σ با ۰
③ $-\sigma$ با σ

تشکیل دایره می دهند

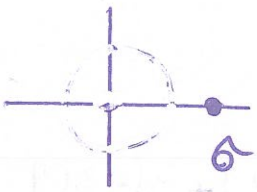
$R=\sigma$

ب)



$$R=\sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\tau$$

ج)



نقطه می شود

$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma-\sigma}{2}\right)^2+0^2}=0$$

۸-۴ - تانسور تنش در نقطه ای از یک جسم به صورت زیر می باشد:

$$T_{ij} = 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

الف) تنش های اصلی و جهات آن ها را بدست آورید.

ب) دوایر موهر را رسم کرده و نقطه مربوط به تنش های اکتاهدرال را در آن نشان دهید.

ج) تغییرناپذیرهای مؤلفه های هیدرواستاتیکی و برشی تنش را محاسبه کنید.

د) تانسور تنش را برای حالتی که محورهای مختصات جدید (۱و۰و۰) و (۰ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$) و (۰ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$- و $\frac{\sqrt{2}}{2}$) باشند ، بنویسید.

حل:

الف)

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$10^3 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 4-\lambda & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\left((4-\lambda)^2 - 2\right) + 3\left(-3(4-\lambda) + 2\right) + \sqrt{2}\left(3\sqrt{2} - \sqrt{2}(4-\lambda)\right) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\underbrace{(4-\lambda)^2}_{(16+\lambda^2-8\lambda)} - 2(1-\lambda) - 9(4-\lambda) + 6 + 6 - 2(4-\lambda) = 0$$

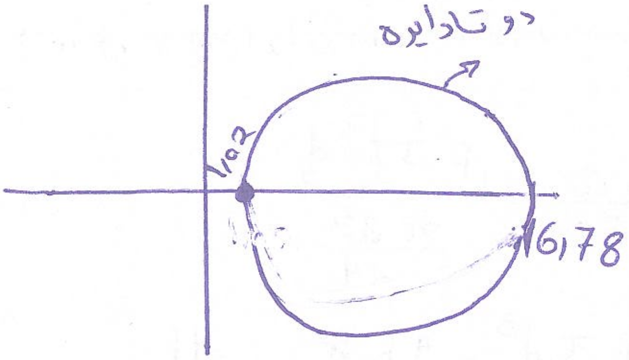
$$\Rightarrow 16 + \lambda^2 - 8\lambda - 16\lambda - \lambda^3 + 8\lambda^2 - 2 + 2\lambda - 36 + 9\lambda^2 + 12 - 8 + 2\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 20\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 16{,}87 \\ \lambda_2 = 0{,}56 + 0{,}86i = 1{,}02 \\ \lambda_3 = 0{,}56 - 0{,}86i = \sqrt{0{,}56^2 + (0{,}86)^2} = 1{,}02 \end{cases}$$

★با جایگذاری λ_1 ، λ_2 و λ_3 در معادله (I) جهت های تنش های اصلی نیز بدست می آید که بر عهده ی خواننده گذاشته می شود

ب)

$\sigma_1 = 16{,}78$ و $\sigma_2 = \sigma_3 = 1{,}02$



$$R_2 = R_1 = \frac{16{,}78 - 1{,}02}{2} = 7{,}88$$

$$R_3 = \frac{1{,}02 - 1{,}02}{2} = 0$$

* دوتادایره روی هم می افتند
سومی هم به صورت یک نقطه در ۱٫۰۲ را
ایجاد می شود

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{16{,}78 + 1{,}02 + 1{,}02}{3} = 6{,}27$$

ج) در مورد تفسیر ناپذیرهای مؤلفه های هیدرواستاتیک و برش تنش چیزی نمی دانم ولی تفسیر ناپذیرهای تنش سه چیز هستند

1) trT 2) ماتریس کوفکتور 3) $detT$

د)

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad N^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

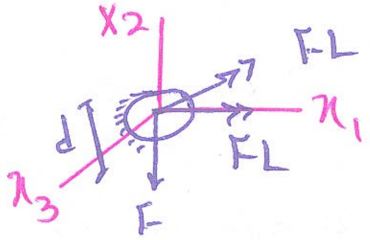
$$\bar{T} = N^T T N = \begin{bmatrix} & & \\ & N^T & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & T & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & N & \\ & & \end{bmatrix}$$

محاسبه با ماشین حساب

casio 5800

$$\xrightarrow{\quad} \quad \bar{T}_{ij} \simeq 10^3 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ & 0{,}5 & -1{,}5 \\ sym & & 5{,}5 \end{bmatrix}$$

۴-۱۲- با فرض آنکه تنش های ناشی از لنگرهای خمش و پیچش و نیز تنش ناشی از نیروی برش از روابط معمول مقاومت مصالح بدست آید، تانسور تنش نقطه A (شکل ۴-۲۸) را به دست آورید.



$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{F\,\frac{\pi t^2}{2}\,\frac{d}{2}}{\frac{\pi d^5}{64}}$$

$$I = \frac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\tau = \frac{4F\pi d^3}{16\pi d^5} = \frac{4F\pi}{\pi d^2} = \frac{4F}{d^2}$$

$$T_{\text{پیچش}} = \frac{Tr}{J} = \frac{T\,\frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{\text{خمش}} = \frac{Mc}{I} = \frac{4F\,\frac{d}{2}}{\frac{\pi d^2}{64}} = \frac{32\;F\times 4}{\pi d^3}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{16T}{\pi d^3} & -\frac{4F}{d^4} & 0 \\ \text{sym} & -\frac{4F}{d^2} & \frac{32F}{\pi d^3} \\ & & \frac{32F}{\pi d^3} \end{bmatrix}$$

14-4 ـ تانسور تنش در یک جسم به صورت زیر داده شده است:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

بردار تنش مؤثر در نقطه $P(2, 1, \sqrt{3})$ روی صفحه ی مماس بر استوانه $x_2^2 + x_3^2 = 4$ را بیابید.

$$P(2, 1, \sqrt{3}) \Rightarrow T_{ij} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 2$

$x_2 = 1$

$x_3 = \sqrt{3}$

$$\boxed{f = x_2^2 + x_3^2 - 4}$$

$$n = \frac{\vec{\nabla f}}{|\nabla f|}$$

$$\vec{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x_i} i_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} i_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} i_3$$

$$\vec{\nabla f} = 0 + 2x_2 i_2 + 2x_3 i_3 \xRightarrow{P(2,1,\sqrt{3})} \vec{\nabla f} = 2 i_2 + 2\sqrt{3} i_3$$

$$|\nabla f| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\underbrace{\vec{n}}_{\text{بردار نرمال واحد}} = \frac{\vec{\nabla f}}{|\nabla f|} = \frac{2}{4} i_2 + \frac{2\sqrt{3}}{4} i_3 = \frac{1}{2} i_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} i_3$$

$$\boxed{n_1 = 0 \text{ و } n_2 = \frac{1}{2} \text{ و } n_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

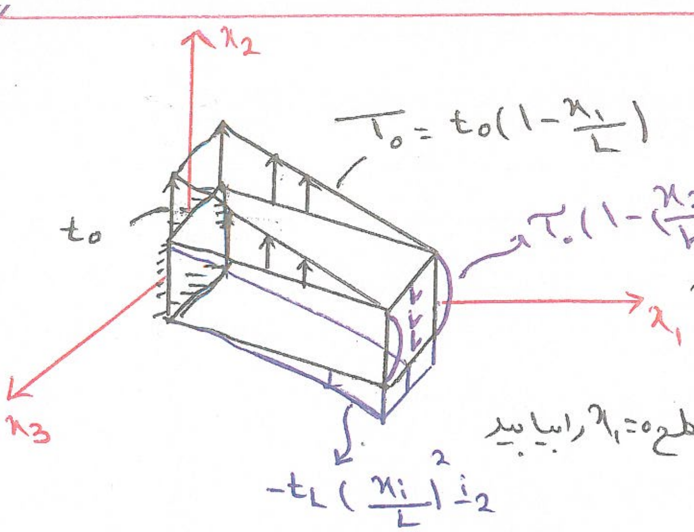
* حالا می توان بردار تنش را بدست آورد.

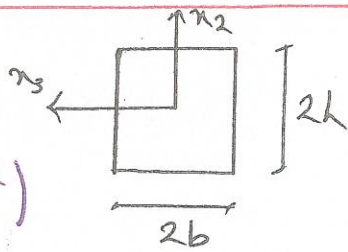
$$t_i = T_{ij} n_j$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \xRightarrow[\text{حساب}]{\text{ماشین}} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 3 \\ 1,732 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{t} = 2,5 i_1 + 3 i_2 + 1,732 i_3}$$

تمرین ۸:





الف) نیروهای مؤثر بر سطوح $x_2=h$، $x_2=-h$ و $x_1=L$ را جداگانه حساب کنید.

ب) جمع نیروی خارجی روی سطوح مختلف به جز سطح $x_1=0$ را بیابید.

الف)

$$T_0 = t_0(1-\frac{x_1}{L}) \qquad \int_\Gamma \underline{t}\, d\Gamma$$

$$T_L = -t_L(\frac{x_1}{L})^2 i_2 \qquad x_2=h \Rightarrow \int_\Gamma t_0(1-\frac{x_1}{L})\underbrace{dA}_{dx_1dx_2}$$

$$\mathcal{T}_0 = [1-(\frac{x_2}{h})^2] \qquad x_2=h \int_0^L\int_{-b}^b t_0 - \frac{t_0 x_1}{L} dx_1dx_2$$

$$\Rightarrow \int_0^L t_0(b+b) - \frac{t_0 x_1(b+b)}{L} dx_1 = t_0L(2b) - \frac{t_0L}{\cancel{2}}(\cancel{2}b) = \boxed{t_0Lb}$$

$$x_2=-h \Rightarrow i_2\int_\Gamma t_L(\frac{x_1}{L})^2 d\Gamma = \int_0^L\int_{-b}^b t_1(\frac{x_1}{L})^2dx_1dx_2$$

$$= \int_0^L t_L(\frac{x_1}{L})^2(2b)dx_1 = t_L\frac{L}{3}2b = \boxed{\frac{2}{3}t_L L b\, i_2}$$

$$x_1=L \Rightarrow \int_\Gamma \mathcal{T}_0[1-(\frac{x_2}{h})^2]d\Gamma = \int_{-h}^h\int_{-b}^b \mathcal{T}_0[1-(\frac{x_2}{h})^2]dx_2dx_3$$

$$= \int_{-h}^h \mathcal{T}_0[1-(\frac{x_2}{h})^2]2b\,dx_2 = 2b\mathcal{T}_0\int_{-h}^h 1-\frac{x_2^2}{h^2}dx_2 =$$

$$2b\mathcal{T}_0[x_2 - \frac{x_2^3}{3h^2}]_{-h}^h = 2b\mathcal{T}_0[2h - [\frac{h^3}{3h^2}+\frac{h^3}{3h^2}]]$$

$$= 2b\mathcal{T}_0[\underbrace{2h-\frac{2}{3}h}_{\frac{4}{3}h}] = \boxed{\frac{8}{3}b\mathcal{T}_0h}$$

ب

مجموع نیروهای خارجی بر سطوح مختلف $= t_0 L b + \frac{2}{3} t L b + \frac{8}{3} b \tau_0 h$

صفحه ۱

مثال ۸: تغییر شکل

$$x_1 = 2X_1 \quad , \quad x_2 = 3X_2 + X_3 \quad , \quad x_3 = X_3 - X_2$$

داده شده است. کرنش محوری در امتداد (۱و۱و۱) را بدست آورید.

تغییر زاویه بین امتدادهای (۱و۱و۱) و (۲-و۱و۱) را به دست آورید.

اگر محیطی که تحت این تغییر شکل قرار می‌گیرد ایزوتروپ با مدول یانگ $E = 10^6\,\frac{kN}{m^2}$ و $G = 4\times10^5\,\frac{kN}{m^2}$ باشد، حداکثر تنش محوری در این ماده در هر نقطه را بدست آورید.

الف)

$$MF(\underline{N}) = \varepsilon_{ij} N_i N_j$$

$$N(1,1,1)$$

$$|N| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i}_3$$

$$\boxed{N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ sym & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i}U_{k,j}\right]$$

$$U_i = x_i - X_i$$

$$U_1 = x_1 - X_1 = 2X_1 - X_1 = X_1$$

$$U_2 = x_2 - X_2 = 3X_2 + X_3 - X_2 = 2X_2 + X_3$$

$$U_3 = x_3 - X_3 = X_3 - X_2 - X_3 = -X_2$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left[U_{1,1} + U_{1,1} + U_{1,1}U_{1,1} + \underbrace{U_{2,1}}_{0}U_{2,1} + \underbrace{U_{3,1}}_{0}U_{3,1}\right]$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left[1+1+1\right] = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{11} = \frac{3}{2}}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left[U_{1,2} + U_{2,1} + U_{1,1}U_{1,2} + U_{2,1}U_{2,2} + U_{3,1}U_{3,2}\right] = 0$$

$$\boxed{\varepsilon_{12} = 0}$$

۲

$$\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\left[\cancel{u_{1,3}}+\cancel{u_{3,1}}+\cancel{u_{1,1}u_{1,3}}+\cancel{u_{2,1}u_{2,3}}+\cancel{u_{3,1}u_{3,3}}\right]$$

$$\boxed{\varepsilon_{13}=0}$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}\left[u_{2,2}+u_{2,2}+u_{1,2}u_{1,2}+u_{2,2}u_{2,2}+u_{3,2}u_{3,2}\right]$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}\left[2+2+(2)^2+(-1)^2\right]=\frac{13}{2}\Rightarrow\boxed{\varepsilon_{22}=\frac{13}{2}}\rightarrow\boxed{\varepsilon_{22}=\frac{9}{2}}$$

غلط

$$\varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\left[u_{2,3}+u_{3,2}+\cancel{u_{1,2}}u_{1,3}+u_{2,2}u_{2,3}+\cancel{u_{3,2}}u_{3,3}\right]$$

$$\varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\left[1-1+(2)(1)\right]=1\Rightarrow\boxed{\varepsilon_{23}=1}$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{2}\left[u_{3,3}+u_{3,3}+u_{1,3}u_{1,3}+u_{2,3}u_{2,3}+u_{3,3}u_{3,3}\right]$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{2}\left[1\right]=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{\varepsilon_{33}=\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&0&0\\0&\frac{13}{2}&1\\0&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$N_1=N_2=N_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

* بافرض اینکه $\varepsilon_{22}=\frac{13}{2}$ است واشتباه نکردیم ادامه ی مسئله

$$MF(\underline{N})=\varepsilon_{ij}N_iN_j=\varepsilon_{11}N_1N_1+\cancel{\varepsilon_{12}N_1N_2}+\cancel{\varepsilon_{13}N_1N_3}$$
$$+\cancel{\varepsilon_{21}N_2N_1}+\varepsilon_{22}N_2N_2+\varepsilon_{23}N_2N_3$$
$$+\cancel{\varepsilon_{31}N_3N_1}+\varepsilon_{32}N_3N_2+\varepsilon_{33}N_3N_3$$

$$MF(\underline{N})=\left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{13}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$+2\left(1\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}$

$$\Rightarrow\boxed{MF(\underline{N})=\frac{7}{2}}$$

۳ ب)

$N(1,1,1) \Rightarrow MF(\underline{N}) = \frac{7}{2} \qquad N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$m(1,1,-2) \Rightarrow MF(\underline{m}) = \varepsilon_{ij} m_i m_j$

$|\vec{m}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

$\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{i}_2 - \frac{2}{\sqrt{6}} \underline{i}_3$

$m_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad m_3 = \frac{-2}{\sqrt{6}}$

$$MF(\underline{m}) = \varepsilon_{ij} m_i m_j = \varepsilon_{11} m_1 m_1 + \varepsilon_{12} m_1 m_2 + \varepsilon_{13} m_1 m_3 + \varepsilon_{21} m_2 m_1 + \varepsilon_{22} m_2 m_2 + \varepsilon_{23} m_2 m_3 + \varepsilon_{31} m_3 m_1 + \varepsilon_{32} m_3 m_2 + \varepsilon_{33} m_3 m_3$$

$$MF(\underline{m}) = \left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{13}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(1 \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) + \left(1 \times \frac{-2}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{-2}{\sqrt{6}} \times \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{MF(\underline{m}) = 1}$$

$\underline{N} \cdot \underline{m} = N_1 m_1 + N_2 m_2 + N_3 m_3$

$\underline{N} \cdot \underline{m} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = 0$

$\underline{N} \cdot \underline{m} = |N||m| \cos\Phi \Rightarrow \boxed{\cos\Phi = 0} \Rightarrow \boxed{\Phi = 90}$

اگر $\underline{N} \cdot \underline{m} \neq 0 \Rightarrow \Phi = \cos^{-1}\left(\frac{\underline{N} \cdot \underline{m}}{|N||m|}\right) \Rightarrow \Phi$ بدست می آید

۴

$$\sqrt{1+2MF(\underline{N})}\sqrt{1+2MF(\underline{M})}\cos\phi = 2\varepsilon_{ij}N_iM_j + \cos\Phi$$

$$2\varepsilon_{ij}N_iM_j = 2[\varepsilon_{11}N_1M_1 + \varepsilon_{12}N_1M_2 + \varepsilon_{13}N_1M_3 + \varepsilon_{21}N_2M_1 + \varepsilon_{22}N_2M_2 + \varepsilon_{23}N_2M_3 + \varepsilon_{31}N_3M_1 + \varepsilon_{32}N_3M_2 + \varepsilon_{33}N_3M_3]$$

$$= 2\left[\left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{13}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(1\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{-2}{\sqrt{6}}\right) + \left(1\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)\right]$$

$$\boxed{2\varepsilon_{ij}N_iM_j = 2\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+2\left(\frac{7}{2}\right)}\sqrt{1+2(1)}\cos\phi = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{8}\sqrt{3}\cos\phi = 2\sqrt{2} \Rightarrow \phi = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{24}}\right)$$

$$\boxed{\phi = 54{,}73^\circ}$$

محاسبه برحسب درجه در ماشین حساب

CASIO 5800

5

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}$$

ج) $E = 10^6 \, kN/m^2$ و $G = 4\times10^5 \, kN/m^2$

* ابتدا e_{ij} را بدست آورده سپس با استفاده از جدول صفحه‌ی 182 جزوه یا صفحه‌ی 259 کتاب مکانیک محیط پیوسته μ و λ را بدست می‌آوریم

طبق جدول $\mu = G \Rightarrow \boxed{\mu = 4\times10^5 \, kN/m^2}$

$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ $\quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \Rightarrow \boxed{\lambda = 4\times10^5}$

$u_1 = x_1$ ، $u_2 = 2x_2 + x_3$ و $u_3 = -x_2$ از الف داریم

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ & e_{22} & e_{23} \\ sym & & e_{33} \end{bmatrix}$$

$e_{11} = u_{1,1} = 1$

$e_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = 0$

$e_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = 0$

$e_{22} = u_{2,2} = 2$

$e_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$

$e_{33} = u_{3,3} = 0$

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}$$

$$T_{11} = \lambda \delta_{11} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11}$$

$$T_{11} = 4\times10^5 (1+2) + 2\times4\times10^5\times1 = (\underbrace{12+8}_{20})10^5 = \boxed{20\times10^5 \ kN/m^2}$$

$$T_{22} = \lambda \delta_{22} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{22}$$

$$T_{22} = 4\times10^5 (1+2) + 2\times4\times10^5\times2 = (12+16)10^5 = \boxed{28\times10^5 \ kN/m^2}$$

$$T_{33} = \lambda \delta_{33} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu \cancel{e_{33}}^{\,0}$$

$$T_{33} = 4\times10^5 (1+2) = \boxed{12\times10^5 \ kN/m^2}$$

★ T_{22} تنش محوری ماکزیمم می باشد.

مثال ۲: تغییر شکل زیر داده شده است:

$x_1=\frac{1}{4}(4X_1-X_2+X_3)$ و $x_2=\frac{1}{4}(X_1+4X_2-X_3)$ و $x_3=\frac{1}{4}(-X_1+X_2+4X_3)$

الف) کرنش محوری در امتداد $\vec{N}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i}_1-2\vec{i}_2-\vec{i}_3)$ را بدست آورید.

ب) تغییر زاویه امتدادهای $\vec{N}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i}_1-2\vec{i}_2-\vec{i}_3)$ و $\vec{N}'=\frac{1}{\sqrt{42}}(\vec{i}_1+4\vec{i}_2-5\vec{i}_3)$ را بدست آورید.

پ) نسبت حجم پس از تغییر شکل به حجم قبل از تغییر شکل را در هر نقطه بدست آورید.

ت) اگر $E=2\times10^5\ N/cm^2$ و $\nu=0.125$ باشد. تانسور تنش را برای تغییر شکل مسئله‌ی حاضر در هر نقطه بیابید.

الف)

* کرنش محوری در امتداد N را بدست آورید یعنی $MF(N)$ را باید بدست آوریم.

$MF(N)=\varepsilon_{ij}N_iN_j$

$\boxed{N_1=\frac{3}{\sqrt{14}} \text{ و } N_2=\frac{-2}{\sqrt{14}} \text{ و } N_3=\frac{-1}{\sqrt{14}}}$

* در این سؤال بردار نرمال واحد را به ما داد اگر سؤال به این صورت بود می‌گفت کرنش محوری در امتداد $N(3,-2,-1)$ باید به این صورت عمل می‌کردیم

$|\vec{N}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{14} \Rightarrow \vec{N}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i}_1-2\vec{i}_2-\vec{i}_3)$

* حالا باید ε_{ij} را بدست آوریم ابتدا باید از تغییر شکل‌ها، تغییر مکان‌ها سپس کرنش‌ها را بدست آوریم

$U_i=x_i-X_i$

$U_1=x_1-X_1=\cancel{X_1}-\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3-\cancel{X_1}=\frac{-1}{4}(X_2+X_3)$

$U_2=x_2-X_2=\frac{1}{4}X_1+\cancel{X_2}-\frac{1}{4}X_3-\cancel{X_2}=\frac{1}{4}(X_1-X_3)$

$U_3=x_3-X_3=-\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\cancel{X_3}-\cancel{X_3}=\frac{1}{4}(-X_1+X_2)$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ sym & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ & & \varepsilon_{33}\end{bmatrix} \text{ و } \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(U_{i,j}+U_{j,i}+U_{k,i}U_{k,j})$$

* از تغییر مکان‌ها کرنش‌ها را بدست می‌آوریم (محاسبه صفحه‌ی بعد)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\cancel{u_{1,1}} + \cancel{u_{1,1}} + \cancel{u_{1,1}}\, u_{1,1} + u_{2,1}\, u_{2,1} + u_{3,1}\, u_{3,1}\right)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{11} = \frac{1}{16}}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left[u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1}\, \cancel{u_{1,2}} + u_{2,1}\, \cancel{u_{2,2}} + u_{3,1}\, u_{3,2}\right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left[-\cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right] = -\frac{1}{32} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{12} = -\frac{1}{32}}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left[u_{1,3} + u_{3,1} + u_{1,1}\, u_{1,3} + u_{2,1}\, u_{2,3} + u_{3,1}\, u_{3,3}\right]$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4} + \frac{-1}{4} + 0 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + 0\right] = -\frac{9}{32} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{13} = -\frac{9}{32}}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left[\cancel{u_{2,2}} + \cancel{u_{2,2}} + u_{1,2}\, u_{1,2} + \cancel{u_{2,2}}\, u_{2,2} + u_{3,2}\, u_{3,2}\right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right] = \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{22} = \frac{1}{16}}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left[u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}\, u_{1,3} + \cancel{u_{2,2}}\, u_{2,3} + u_{3,2}\, \cancel{u_{3,3}}\right]$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left[-\cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\right] = +\frac{1}{32} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{23} = +\frac{1}{32}}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left[\cancel{u_{3,3}} + \cancel{u_{3,3}} + u_{1,3}\, u_{1,3} + u_{2,3}\, u_{2,3} + u_{3,3}\, \cancel{u_{3,3}}\right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right] = \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{33} = \frac{1}{16}}$$

$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ و $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ و $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$

* برای راحتی در محاسبات تانسور کرنش را مخرج کسر را برحسب 32 می نویسیم.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{32} & -\frac{1}{32} & -\frac{9}{32} \\ -\frac{1}{32} & \frac{2}{32} & \frac{1}{32} \\ -\frac{9}{32} & \frac{1}{32} & \frac{2}{32} \end{bmatrix}$$

$$MF(\underline{N}) = \varepsilon_{ij} N_i N_j = \varepsilon_{11} N_1 N_1 + \varepsilon_{12} N_1 N_2 + \varepsilon_{13} N_1 N_3$$
$$+ \varepsilon_{21} N_2 N_1 + \varepsilon_{22} N_2 N_2 + \varepsilon_{23} N_2 N_3$$
$$+ \varepsilon_{31} N_3 N_1 + \varepsilon_{32} N_3 N_2 + \varepsilon_{33} N_3 N_3$$

$N_1 = \frac{3}{\sqrt{14}}$ $N_2 = -\frac{2}{\sqrt{14}}$ $N_3 = \frac{-1}{\sqrt{14}}$

$$MF(\underline{N}) = \left(\frac{2}{32} \times \frac{3}{\sqrt{14}} \times \frac{3}{\sqrt{14}}\right) + \underset{\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}}{2}\left(-\frac{1}{32} \times \frac{3}{\sqrt{14}} \times \frac{-2}{\sqrt{14}}\right) + \underset{\varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}}{2}\left(-\frac{9}{32} \times \frac{3}{\sqrt{14}} \times \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$$
$$+ \left(\frac{2}{32} \times \frac{-2}{\sqrt{14}} \times \frac{-2}{\sqrt{14}}\right) + \underset{\varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}}{2}\left(\frac{1}{32} \times \frac{-2}{\sqrt{14}} \times \frac{-1}{\sqrt{14}}\right) + \left(\frac{2}{32} \times \frac{-1}{\sqrt{14}} \times \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$$

$\boxed{MF(\underline{N}) = \frac{7}{32}}$ ⟶ کرنش محوری در امتداد $\vec{N}$

ب) سؤال در قسمت ب دو امتداد به نام N داده ما برای اینکه اسامی را اشتباه نکنیم اسم امتداد دوم را m می گیریم پس :

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\underline{i}_1 - 2\underline{i}_2 - \underline{i}_3) \Rightarrow \boxed{N_1 = \frac{3}{\sqrt{14}},\ N_2 = \frac{-2}{\sqrt{14}},\ N_3 = \frac{-1}{\sqrt{14}}}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{42}}(\underline{i}_1 + 4\underline{i}_2 - 5\underline{i}_3) \Rightarrow \boxed{m_1 = \frac{1}{\sqrt{42}},\ m_2 = \frac{4}{\sqrt{42}},\ m_3 = \frac{-5}{\sqrt{42}}}$$

* صورت ϕ پس از تغییر شکل را می خواهد

$$\sqrt{1 + 2MF(\underline{N})}\sqrt{1 + 2MF(\underline{m})}\cos\phi = 2\varepsilon_{ij} N_i m_j + \cos\Phi$$

$$\underline{N} \cdot \underline{m} = |N||m|\cos\Phi$$

$$\underline{N} \cdot \underline{m} = N_1 m_1 + N_2 m_2 + N_3 m_3$$

$$\underline{N} \cdot \underline{m} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}} \times \frac{1}{\sqrt{42}}\right) + \left(\frac{-2}{\sqrt{14}} \times \frac{4}{\sqrt{42}}\right) + \left(\frac{-1}{\sqrt{14}} \times \frac{-5}{\sqrt{42}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = |N||m|\cos\Phi \Rightarrow \cos\Phi = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi = 90}$$

اگر $\underline{N} \cdot \underline{m} \neq 0 \Rightarrow \Phi = \cos^{-1}\left(\frac{N \cdot m}{|N||m|}\right)$

$$MF(M)=\varepsilon_{ij}m_i m_j=\varepsilon_{11}m_1m_1+\varepsilon_{12}m_1m_2+\varepsilon_{13}m_1m_3$$
$$+\varepsilon_{21}m_2m_1+\varepsilon_{22}m_2m_2+\varepsilon_{23}m_2m_3$$
$$+\varepsilon_{31}m_3m_1+\varepsilon_{32}m_3m_2+\varepsilon_{33}m_3m_3$$

$m_1=\frac{1}{\sqrt{42}}$, $m_2=\frac{4}{\sqrt{42}}$, $m_3=\frac{-5}{\sqrt{42}}$

$$MF(M)=\left(\frac{2}{32}\times\frac{1}{\sqrt{42}}\times\frac{1}{\sqrt{42}}\right)+\underset{\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}}{2}\left(-\frac{1}{32}\times\frac{1}{\sqrt{42}}\times\frac{4}{\sqrt{42}}\right)+\underset{\varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}}{2}\left(\frac{-9}{32}\times\frac{1}{\sqrt{42}}\times\frac{-5}{\sqrt{42}}\right)$$
$$+\left(\frac{2}{32}\times\frac{4}{\sqrt{42}}\times\frac{4}{\sqrt{42}}\right)+\underset{\varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}}{2}\left(\frac{1}{32}\times\frac{4}{\sqrt{42}}\times\frac{-5}{\sqrt{42}}\right)+\left(\frac{2}{32}\times\frac{-5}{\sqrt{42}}\times\frac{-5}{\sqrt{42}}\right)$$

$$\boxed{MF(M)=\frac{3}{32}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} N_1=\frac{3}{\sqrt{14}},\ N_2=\frac{-2}{\sqrt{14}},\ N_3=\frac{-1}{\sqrt{14}} \\ \hline m_1=\frac{1}{\sqrt{42}},\ m_2=\frac{4}{\sqrt{42}},\ m_3=\frac{-5}{\sqrt{42}} \end{array}}$$

$$2\varepsilon_{ij}N_iM_j=2\big[\varepsilon_{11}N_1m_1+\varepsilon_{12}N_1m_2+\varepsilon_{13}N_1m_3$$
$$+\varepsilon_{21}N_2m_1+\varepsilon_{22}N_2m_2+\varepsilon_{23}N_2m_3$$
$$+\varepsilon_{31}N_3m_1+\varepsilon_{32}N_3m_2+\varepsilon_{33}N_3m_3\big]$$

$$=2\Big[\left(\frac{2}{32}\times\frac{3}{\sqrt{14}}\times\frac{1}{\sqrt{42}}\right)+\left(-\frac{1}{32}\times\frac{3}{\sqrt{14}}\times\frac{4}{\sqrt{42}}\right)+\left(\frac{-9}{32}\times\frac{3}{\sqrt{14}}\times\frac{-5}{\sqrt{42}}\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{32}\times\frac{-2}{\sqrt{14}}\times\frac{1}{\sqrt{42}}\right)+\left(\frac{2}{32}\times\frac{-2}{\sqrt{14}}\times\frac{4}{\sqrt{42}}\right)+\left(\frac{1}{32}\times\frac{-2}{\sqrt{14}}\times\frac{-5}{\sqrt{42}}\right)$$
$$+\left(-\frac{9}{32}\times-\frac{1}{\sqrt{14}}\times\frac{1}{\sqrt{42}}\right)+\left(\frac{1}{32}\times\frac{-1}{\sqrt{14}}\times\frac{4}{\sqrt{42}}\right)+\left(\frac{2}{32}\times\frac{-1}{\sqrt{14}}\times\frac{-5}{\sqrt{42}}\right)$$

$$\boxed{2\varepsilon_{ij}N_iM_j\simeq 0{,}361}$$

$$\sqrt{1+2MF(N)}\sqrt{1+2MF(M)}\cos\phi=2\varepsilon_{ij}N_iM_j+\underbrace{\cancel{\cos\Phi}}_{0}$$

$$\phi=\cos^{-1}\left(\frac{2\varepsilon_{ij}N_iM_j}{\sqrt{(1+2MF(N))(1+2MF(M))}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{0{,}361}{\sqrt{\left(1+2\left(\frac{7}{32}\right)\right)\left(1+2\left(\frac{3}{32}\right)\right)}}\right)$$

$$\phi=\cos^{-1}\left(\frac{0{,}361}{1{,}306}\right)\Rightarrow\boxed{\phi=73{,}95^{\circ}}$$ زاویه پس از تغییر شکل

5 5

پ)

$$dv = J\,dV \Rightarrow$$ رابطه بین تغییر حجم اولیه به حجم ثانویه

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\[2ex] \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\[2ex] \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\[1ex] \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\[1ex] -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}$$

$$J = 1\left(1 - \left(-\frac{1}{16}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \times -\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$J = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{16}\right)}_{\frac{17}{16}} + \underbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right)}_{\frac{3}{64}} + \underbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{5}{64}} = \frac{19}{16} \Rightarrow \boxed{J = \frac{19}{16}}$$

$$dv = \frac{19}{16}\,dV \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dV} = \frac{19}{16}}$$

5 5

6 6

$T_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kk}+2\mu e_{ij}$ $\nu=0/25$ ، $E=2\times10^5$ (ب

* ابتدا λ و μ را از جدول ص 182 جزوه یا ص ۲۵۹ کتاب

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}=\frac{0/25\times2\times10^5}{(1+0/25)(1-2\times0/25)}\Rightarrow\boxed{\lambda=8\times10^4}$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=\frac{2\times10^5}{2(1+0/25)}\Rightarrow\boxed{\mu=8\times10^4}$$

★ حالا باید کرنش های مهندسی را بنویسیم توجه شود ما در قسمت الف کرنش گرین لاگرانژ را بدست آورده بودیم ولی اینجا کرنش مهندسی را می خواهیم چون روابط تعادل برحسب کرنش مهندسی می باشد.

$$u_1=-\frac{1}{4}(x_2+x_3)$$
$$u_2=\frac{1}{4}(x_1-x_3)$$
$$u_3=\frac{1}{4}(-x_1+x_2)$$

از الف

$$e_{11}=\frac{1}{2}(u_{1,1}+u_{1,1})=u_{1,1}=0$$

$$e_{12}=\frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1})=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=0$$

$$e_{13}=\frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1})=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$$

$$e_{22}=u_{2,2}=0$$

$$e_{23}=\frac{1}{2}(u_{2,3}+u_{3,2})=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=0$$

$$e_{33}=\frac{1}{2}(u_{3,3}+u_{3,3})=0$$

$$e_{ij}=\begin{bmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{13}\\ \text{sym}&e_{22}&e_{23}\\ &&e_{33}\end{bmatrix}$$

$$e_{ij}=\begin{bmatrix}0&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0\\-\frac{1}{4}&0&0\end{bmatrix}$$

$$T_{ij}=2\mu e_{ij}+\lambda\delta_{ij}e_{kk}$$

$$T_{11}=2\mu e_{11}+\lambda\delta_{11}(e_{11}+e_{22}+e_{33})=0$$

$$T_{12}=2\mu e_{12}=0$$

$$T_{13}=2\mu e_{13}=2\times8\times10^4\times-\frac{1}{4}=-4\times10^4\ N/cm^2\Rightarrow\boxed{T_{13}=T_{31}}$$

$$T_{21}=2\mu e_{21}+\lambda\delta_{21}=0$$

$$T_{22}=2\mu e_{22}+\lambda\delta_{22}(e_{11}+e_{22}+e_{33})=0$$

$$T_{23}=2\mu e_{23}+\lambda\delta_{23}(\quad)=0$$

$$T_{33}=2\mu e_{33}+\lambda\delta_{33}(e_{11}+e_{22}+e_{33})=0$$

$$T_{ij}=-4\times10^4\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

مثال: تغییر شکل زیر در یک محیط داده شده است:

$$x_1 = X_1 + u_0 e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx_1 - \frac{1}{2}kx_3\right)}$$

$$x_2 = X_2 \quad و \quad x_3 = X_3 + \alpha u_0 e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx_1 - \frac{1}{2}kx_3\right)} \quad و$$

که در آن u_0 و k ثابت های نا صفر بوده و $\alpha = \sqrt{3}$ است.

الف) بردار ها و مقادیر ویژه تانسور کرنش که چپ را در هر نقطه و در هر لحظه بدست آورید.

ب) اگر تانسور تنش برحسب تانسور کرنش به صورت

$$T_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} e_{kk}$$

نوشته شود. نشان دهید که بردارهای ویژه به دست آمده برای تانسور کرنش، بردار های ویژه تانسور تنش نیز هستند. مقادیر ویژه تانسور تنش را بدون حل مسئله مقدار ویژه برای تانسور تنش و فقط با استفاده از مقادیر ویژه تانسور کرنش به دست آورید.

حل:

الف)

$$u_i = x_i - X_i \quad و \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ & e_{22} & e_{23} \\ sym & & e_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_1 = x_1 - X_1 = \cancel{X_1} + u_0 e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx_1 - \frac{1}{2}kx_3\right)} - \cancel{X_1}$$

$$u_1 = u_0 e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx_1 - \frac{1}{2}kx_3\right)}$$

$$u_2 = x_2 - X_2 = X_2 - X_2 = 0$$

$$u_3 = X_3 + \sqrt{3}u_0 e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx_1 - \frac{1}{2}kx_3\right)} - X_3$$

$$u_3 = \sqrt{3}u_0 e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx_1 - \frac{1}{2}kx_3\right)}$$

$$e_{11} = u_{1,1} = u_0 \times \frac{\sqrt{3}}{2}k e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx_1 - \frac{1}{2}kx_3\right)}$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{12} = e_{21} = 0$$

$$e_{13} = e_{31} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u_0 k e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx_1 - \frac{1}{2}kx_3\right)}\right)$$

$$e_{13} = e_{31} = -\frac{1}{4}u_0 k e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx_1 - \frac{1}{2}kx_3\right)} \qquad e_{22} = 0$$

$$e_{23}=e_{32}=\frac{1}{2}(u_{3,2}+u_{2,3})$$

$$e_{23}=\frac{1}{2}(0+0) \Rightarrow e_{23}=e_{32}=0$$

$$e_{33}=u_{3,3}=\sqrt{3}\,u_0 \underset{\text{ضرب در}}{\times} -\frac{1}{2}K e^{(\frac{\sqrt{3}}{2}Kx_1-\frac{1}{2}Kx_3)}$$

$$e_{33}=-\frac{\sqrt{3}}{2}u_0 K e^{(\frac{\sqrt{3}}{2}Kx_1-\frac{1}{2}Kx_3)}$$

★ برای راحتی $\frac{\sqrt{3}}{2}Kx_1-\frac{1}{2}Kx_3=A$

$$(e_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j=0$$

$$e_{ij}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}u_0Ke^A & 0 & -\frac{1}{4}u_0Ke^A \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}u_0Ke^A & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}u_0Ke^A \end{bmatrix}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{4}u_0Ke^A\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$(e_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j=0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}u_0Ke^A\underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{3}-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{3}-\lambda \end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det B=0$$

$$\det B = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\sqrt{3}-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{3}-\lambda)(+2\sqrt{3}\lambda+\lambda^2-0)-0+(-1)(0-(+\lambda))=0$$

$$\Rightarrow 12\lambda+2\sqrt{3}\lambda^2-2\sqrt{3}\lambda-\lambda^3+\lambda=0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+2\sqrt{3}\lambda^2+9{,}53\lambda=0 \;\; \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=5{,}27 \\ \lambda_3=-1{,}8 \end{cases}$$

محاسبه با ماشین حساب casio 5800

λ_1 ، λ_2 و λ_3 مقادیر ویژه هستند

$\lambda_1=0$

$$\frac{1}{4}u_0ke^A(2\sqrt{3}n_1+0-n_3)=0 \Rightarrow 2\sqrt{3}n_1-n_3=0 \quad \text{I}$$

$$\frac{1}{4}u_0ke^A(0+0+0)=0 \Rightarrow 0=0$$

$$\frac{1}{4}u_0ke^A(-n_1+0-2\sqrt{3}n_3)=0 \Rightarrow 2\sqrt{3}n_3+n_1=0 \quad \text{II}$$

$$\text{I}+\text{II} \Rightarrow 2{,}46n_1=4{,}46n_3 \Rightarrow n_1=1{,}81n_3$$

n_2 دلخواه است*

$$\begin{bmatrix} 1{,}81n_3 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}81n_3 \\ 0 \\ n_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} = n_3\begin{bmatrix} 1{,}81 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + n_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 5,27$

$$\frac{1}{4} u_o k e^A \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} - 5,27 & 0 & -1 \\ 0 & -5,27 & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{3} - 5,27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} u_o k e^A (-1,8 n_1 + 0 - n_3) = 0 \Rightarrow -1,8 n_1 - n_3 = 0 \quad \text{I}$$

$$\frac{1}{4} u_o k e^A (0 - 5,27 n_2 + 0) = 0 \Rightarrow -5,27 n_2 = 0 \Rightarrow \boxed{n_2 = 0}$$

$$\frac{1}{4} u_o k e^A (-n_1 + 0 - 8,73 n_3) = 0 \Rightarrow -n_1 - 8,73 n_3 = 0 \quad \text{II}$$

$$\text{I} + \text{II} \Rightarrow -2,8 n_1 - 9,73 n_3 = 0 \Rightarrow -2,8 n_1 = 9,73 n_3$$

$$\boxed{n_1 = -3,47 n_3}$$

$$\begin{bmatrix} -3,47 n_3 \\ 0 \\ n_3 \end{bmatrix} = n_3 \begin{bmatrix} -3,47 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = -1,8$

$$\frac{1}{4} u_o k e^A \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} + 1,8 & 0 & -1 \\ 0 & +1,8 & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{3} + 1,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} u_o k e^A (5,26 n_1 + 0 - n_3) = 0 \Rightarrow 5,26 n_1 - n_3 = 0 \quad \text{I}$$

$$\frac{1}{4} u_o k e^A (0 + 1,8 n_2 + 0) = 0 \Rightarrow 1,8 n_2 = 0 \Rightarrow \boxed{n_2 = 0}$$

$$\frac{1}{4} u_o k e^A (-n_1 + 0 - 1,66 n_3) = 0 \Rightarrow -n_1 - 1,66 n_3 = 0 \quad \text{II}$$

$$\text{I} + \text{II} \Rightarrow 4,26 n_1 - 2,66 n_3 = 0 \Rightarrow 4,26 n_1 = 2,66 n_3$$

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ 0 \\ 1,6 n_1 \end{bmatrix} = n_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1,6 \end{bmatrix} \qquad \boxed{n_3 = 1,6 n_1}$$

ب ۱) جواب صفحه ۲۶۰ کتاب مکانیک محیط پیوسته

قسمت اول

$$(T_{ij} - \lambda_t \delta_{ij}) x_j = 0$$

$$[T'_{ij} - (\lambda_t + p) \delta_{ij}] x_j = 0$$

$$(T'_{ij} - \lambda_{t'} \delta_{ij}) x_j = 0$$

یعنی محورهای اصلی تانسورهای T_{ij} و T'_{ij} برهم منطبق هستند

به همین ترتیب :

$$(e_{ij} - \lambda_e \delta_{ij}) y_j = 0$$

$$[e'_{ij} - (\lambda_e - \tfrac{1}{3} e) \delta_{ij}] y_j = 0$$

$$[e'_{ij} - \lambda_{e'} \delta_{ij}) y_j = 0$$

* یعنی محورهای اصلی تانسورهای e_{ij} و e'_{ij} برهم منطبق اند و بنابراین محورهای اصلی تانسورهای تنش و کرنش در محیط های همسان برهم منطبق می باشند .

قسمت دوم :

فهرست مطالب فصل دوم کتاب تئوری ارتجاعی

* درس تئوری الاستیسیته (ارتجاعی) هدف اصلیش بدست آوردن تنش های کرنش ها و تغییر مکان ها است که تانسور تنش ۶ مجهول ۶ تانسور کرنش ۶ مجهول و تغییر مکان ۳ مجهول جمعاً ۱۵ مجهول دارد، که در این فصل در روش های مختلف این ۱۵ مجهول بدست می آید.

* روش های حل مسائل سه بعدی تئوری ارتجاعی ص ۸۱ کتاب یا ص ۲۲۶ جزوه

* ① روش معکوس: ص ۸۱ کتاب ⇐ درس جواب یا ص ۲۲۶ جزوه

* ② روش نیمه معکوس: ص ۸۱ کتاب یا ص ۲۲۶ جزوه

* ③ روش بسط: ص ۸۱ کتاب که مثال مربوط به آن ص ۸۷ کتاب یا ص 227 جزوه با مثال

* ④ روش تبدیلات انتگرالی: ص ۸۲ کتاب مثال مربوطه ص ۸۸ کتاب یا ص ۲۲۹ جزوه با مثال

* ⑦ روش متغیرهای مختلط و ⑧ روش های حساب تغییرات ⇐ کاری باهاش نداریم

* دو روش می ماند ⑤ روش حل مستقیم ⑥ روش پتانسیل

⑤ روش حل مستقیم: روش ناویه / روش بلترامی میشل

* معادلات ناویه ص ۶۷ کتاب یا ص ۲۵۳ جزوه (رابطه ۲-۸-ب)

* معادلات بلترامی - میشل ص ۷۰ کتاب (رابطه ۲-۲۸) یا ص ۲۱۰ جزوه (تمرین ۱و۲و۳و۴ کتاب از ص ۱۰۱ تا ص ۱۰۶ جزوه حل تمرین)

* عملگر ∇ و ∇^2 در دستگاه استوانه ای ص ۷۱ کتاب یا ص ۲۱۲ جزوه

* عملگر ∇ و ∇^2 در دستگاه کروی ص ۷۲ کتاب

* اصل سوپر پوزیشن ص ۷۶ کتاب یا ص ۲۰۴ جزوه

* اصل سن ونان ص ۷۷ کتاب یا ص ۲۱۱ جزوه

* ⑤ اما روش حل مستقیم به روش ناویه:
① در دستگاه دکارتی (x_1, x_2, x_3)
② در دستگاه استوانه ای (r, θ, z)
③ در دستگاه کروی (r, θ, ϕ)

۵-۲- معادلات ناویه در دستگاه استوانه ای (مثال های حل شده ص ۷۸ کتاب یا ص ۲۱۲ جزوه

مثال ۲-۹ ص ۹۷ - مثال ۲-۱۰ ص ۹۸ کتاب

تمرین ۲-۷ - ص ۱۴۳ کتاب (حل: صفحه ی ۱۴۲ جزوه ی حل تمرین)

تمرین ۲-۱۱- ص ۱۴۳ کتاب (حل: صفحه ی ۱۴۴ جزوه ی حل تمرین)

تمرین ۲-۱۳- ص ۱۴۴ کتاب (حل: صفحه ی ۱۴۶ جزوه ی حل تمرین)

* روابط کرنش - تغییر مکان صفحه ی ۲۳ کتاب

* معادلات ناویه در دستگاه کروی در حالت متقارن مرکزی معادله‌ی حاکم ص ۸۰ کتاب و مثال مربوطه ص ۲۱۹ جزوه

* روابط کرنش - تغییر مکان صفحه‌ی ۲۵ کتاب یا ص ۲۱۶ جزوه

۶- توابع پتانسیل: به جواب معادله‌ی لاپلاس یا تابعی که پتانسیل تولید تغییر مکان را داشته باشد

۱- توابع اسکالر ۲- توابع تغییر مکان ۳- تابع کرنش لاو ۴- بردار گالرکین

۵- توابع هلمهولتز ۶- تابع کرنش نامه ۷- توابع نوبر- پاپکوویچ

۸- توابع نوبر ۹- توابع ترفز ۱۰- توابع نامه ۱۱- توابع پاپکوویچ - گرودسکی

۶-۱- توابع اسکالر ص ۱۰۱ کتاب یا ص ۲۳۴ جزوه

۶-۲- توابع تغییر مکان ص ۱۰۵ کتاب یا ص ۲۳۸ جزوه

۶-۳- تابع کرنش لاو ص ۱۰۷ کتاب یا ص ۲۴۴ جزوه (مثال مسئله‌ی کلوین ص ۱۱۵ کتاب یا ص ۲۴۸ جزوه)

تمرین ۲-۱۹- کتاب که حل آن ص ۱۶۱ جزوه حل تمرین آمده است (دستگاه دکارتی)

تمرین ۲-۲۱- کتاب که حل آن ص ۱۶۴ جزوه حل تمرین آمده است (دستگاه استوانه‌ای)

۶-۴- بردار گالرکین ص ۱۰۹ کتاب یا ص ۲۵۳ جزوه

(مثال ۲-۱۶- مسئله‌ی سروتی ص ۱۲۰ کتاب)

تمرین ۲-۱۶- کتاب جواب در ص ۱۵۰ حل تمرین

۶-۵- توابع هلمهولتز: ص ۱۱۱ کتاب یا ص ۲۵۴ کتاب

مثال ص ۱۶۸ جزوه حل تمرین

۶-۶- تابع کرنش نامه: ص ۱۱۳ کتاب یا ص ۲۵۶ جزوه

تمرین ۲-۱۸ ص ۱۵۵ جزوه‌ی حل تمرین

۶-۷- توابع نوبر- پاپکوویچ: ص ۱۱۴ کتاب یا ص ۲۵۶ جزوه

مثال ۲-۱۷- مسئله بوسینسک ص ۱۲۲ کتاب

۶-۸- توابع نوبر
۶-۹- توابع ترفز ⟸ در کتاب زیاد پرداخته نشده و مهم نیست
۶-۱۰- توابع نامه
۶-۱۱- توابع پاپکوویچ - گرودسکی

★ عملاً از صفحه‌ی ص ۱۲۵ کتاب، دیگر توابع پتانسیل تغییر مکان به بعد مهم نیست

توجه: به نظر من فصل دوم را به این ترتیب که نوشتم بخوانید بهتر است

تمرینات فصل دوم کتاب تئوری ارتجاعی

۲-۱- معادله تعادل استاتیکی یک محیط را در دستگاه مختصات استوانه‌ای برای مسائل صفحه‌ای (در صفحه ۲۵) در حالت متقارن محوری بنویسید.

حل:

الف) معادله‌ی تعادل استاتیکی

در صفحه ۲۵ (بدون متقارن محوری)

$$\mu \nabla^2 \underline{v} + (\lambda+\mu) \nabla \nabla \cdot \underline{u} + \rho \underline{b} = 0$$ معادله ناویه

$$i=r \Rightarrow \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}\right]+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right]+\rho b_r=0$$

$$i=\theta \Rightarrow \mu\left[\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}\right]+(\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right]+\rho b_\theta=0$$

★ کلی‌ترین حالت معادله تعادل استاتیکی در دستگاه مختصات استوانه‌ای برای مسائل متقارن محوری صفحه‌ی 213 جزوه‌ی خودم.

ب) با حالت متقارن محوری

$$i=r \Rightarrow \mu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_r}{dr}\right)\right]+(\lambda+\mu)\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r v_r)\right]+\rho b_r=0$$

* چون فقط نسبت به r مشتق داشتیم به جای $\frac{\partial}{\partial r}$ نوشتیم $\frac{d}{dr}$

۲-۲- معادلات بلترامی - میشل را در حالت تقارن محوری بدست آورید.

حل: معادلات بلترامی - میشل در حالت کلی صفحه ی 210 جزوه

$$\nabla^2 T_{ij} + \frac{1}{1+\nu} T_{kk,ij} = -\rho \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \nabla \cdot b - \rho (b_{i,j} + b_{j,i})$$

* ابتدا باید معادلات را برحسب r و θ و z نوشت سپس تمام مشتقات θ و خوده θ را به علت متقارن محوری بودن حذف کرد

* i و j اندیس آزاد و k اندیس تکرار ⇐ $3^2 = 9$ پس ۹ تا معادله باید بنویسیم که k در آن معادلات از r، θ، z عوض می شود

* ولی چون ۶ تا معادله ی سازگاری داریم و به علت تقارن به جای ۹ معادله ۶ معادله باید بنویسیم.

* $$\nabla^2 T_{rr} + \frac{1}{1+\nu} (T_{rr,rr} + T_{\theta\theta,rr} + T_{zz,rr})$$

$$= -\rho \frac{\nu}{1-\nu} \underset{1}{\delta_{rr}} b_{r,r} - \underbrace{\rho (b_{r,r} + b_{r,r})}_{-2\rho b_{r,r}}$$

* $$\nabla^2 T_{\theta\theta} + \frac{1}{1+\nu} (T_{rr,\theta\theta} + T_{\theta\theta,\theta\theta} + T_{zz,\theta\theta})$$

$$= -\rho \frac{\nu}{1-\nu} \underset{1}{\delta_{\theta\theta}} b_{\theta,\theta} - \underbrace{\rho (b_{\theta,\theta} + b_{\theta,\theta})}_{-2\rho b_{\theta,\theta}}$$

* $$\nabla^2 T_{zz} + \frac{1}{1+\nu} (T_{rr,zz} + T_{\theta\theta,zz} + T_{zz,zz})$$

$$= -\rho \frac{\nu}{1-\nu} \underset{1}{\delta_{zz}} b_{z,z} - \rho (b_{z,z} + b_{z,z})$$

* $$\nabla^2 T_{r\theta} + \frac{1}{1+\nu} (T_{rr,r\theta} + T_{\theta\theta,r\theta} + T_{zz,r\theta})$$

$$= -\rho \frac{\nu}{1-\nu} \underset{0}{\delta_{r\theta}} b_{r,\theta} - \rho (b_{r,\theta} + b_{\theta,r})$$

$$\nabla^2 T_{rz} + \frac{1}{1+\nu}\left(T_{rr,rz} + T_{\theta\theta,rz} + T_{zz,rz}\right)$$

$$= -\rho \frac{\nu}{1-\nu} \underbrace{\delta_{rz}}_{0} b_{r,z} - \rho\left(b_{r,z} + b_{z,r}\right)$$

$$\nabla^2 T_{\theta z} + \frac{1}{1+\nu}\left(T_{rr,\theta z} + T_{\theta\theta,\theta z} + T_{zz,\theta z}\right)$$

$$= -\rho \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{\theta z} b_{\theta,z} - \rho\left(b_{\theta,z} + b_{z,\theta}\right)$$

* اگر اندیس تکرار k را باز نکنیم (از r و θ و z عوض نشود) می توانیم کلی‌ترین حالت معادلات بلترامی - میشل را در دستگاه مختصات استوانه‌ای نوشت:

$$\begin{cases}
\nabla^2 T_{rr} + \frac{1}{1+\nu} T_{kk,rr} = -\rho \frac{\nu}{1-\nu} b_{r,r} - 2\rho b_{r,r} \\
\nabla^2 T_{\theta\theta} + \frac{1}{1+\nu} T_{kk,\theta\theta} = -\rho \frac{\nu}{1-\nu} b_{\theta,\theta} - 2\rho b_{\theta,\theta} \\
\nabla^2 T_{zz} + \frac{1}{1+\nu} T_{kk,zz} = -\rho \frac{\nu}{1-\nu} b_{z,z} - 2\rho b_{z,z} \\
\nabla^2 T_{r\theta} + \frac{1}{1+\nu} T_{kk,r\theta} = -\rho\left(b_{r,\theta} + b_{\theta,r}\right) \\
\nabla^2 T_{rz} + \frac{1}{1+\nu} T_{kk,rz} = -\rho\left(b_{r,z} + b_{z,r}\right) \\
\nabla^2 T_{\theta z} + \frac{1}{1+\nu} T_{kk,\theta z} = -\rho\left(b_{\theta,z} + b_{z,\theta}\right)
\end{cases}$$

* حالا می توانیم با صفر قرار دادن مشتقات θ معادلات بلترامی-میشل را در حالت متقارن محوری نوشت

$$
\begin{cases}
\nabla^2 \tau_{rr} + \frac{1}{1+\nu}\tau_{kk,rr} = -\rho\frac{\nu}{1-\nu}b_{r,r} - 2\rho b_{r,r} \\
\nabla^2 \tau_{\theta\theta} = 0 \\
\nabla^2 \tau_{zz} + \frac{1}{1+\nu}\tau_{kk,zz} = -\rho\frac{\nu}{1-\nu}b_{z,z} - 2\rho b_{z,z} \\
\nabla^2 \tau_{r\theta} = 0 \\
\nabla^2 \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu}\tau_{kk,rz} = -\rho(b_{r,z} + b_{z,r}) \\
\nabla^2 \tau_{\theta z} = 0
\end{cases}
$$

★توجه: $\tau_{kk} = \tau_{rr} + \underbrace{\tau_{\theta\theta}}_{0} + \tau_{zz}$

۲-۳- معادلات بلترامی-میشل را در حالت تقارن مرکزی بدست آورید.

* در حالت متقارن مرکزی فقط وابسته r کروی یا همان ρ است مثل مثال ۲-۲ (تمرین ۲-۲) عمل کرده ولی فقط به جای r و θ و z باید r و θ و ϕ قرار دهیم و نسبت به θ و ϕ مشتقات صفر است.

$$
\begin{cases}
\nabla^2 \tau_{rr} + \frac{1}{1+\nu}\tau_{kk,rr} = -\rho\frac{\nu}{1-\nu}b_{r,r} - 2\rho b_{r,r} \\
\nabla^2 \tau_{\theta\theta} = 0 \\
\nabla^2 \tau_{zz} = 0 \\
\nabla^2 \tau_{r\theta} = 0 \\
\nabla^2 \tau_{rz} = 0 \\
\nabla^2 \tau_{\theta z} = 0
\end{cases}
$$

۲-۴- اگر a، b، c، d، e و f مقادیر ثابتی باشند، آنگاه روابطی بین آن‌ها را چنان بدست آورید که توزیع تنش‌های زیر در معادلات تعادل و سازگاری صدق نمایند.

الف)

$$T_{11} = a x_1^2 x_2^2 + b x_1 \ ,\quad T_{22} = c x_2^2 \ ,\quad T_{12} = d x_1 x_2$$

$$T_{13} = T_{23} = T_{33} = 0$$

ب)

$$T_{11} = e[x_2^2 + f(x_1^2 - x_2^2)] \ ,\quad T_{22} = e[x_1^2 + f(x_2^2 - x_1^2)]$$

$$T_{33} = ef(x_1^2 + x_2^2) \ ,\quad T_{12} = 2ef x_1 x_2 \ ,\quad T_{13} = T_{23} = 0$$

پ)

$$T_{11} = a x_2 x_3 \qquad T_{12} = d x_3^2$$

$$T_{22} = b x_1 x_3 \qquad T_{13} = e x_2^2$$

$$T_{33} = c x_1 x_2 \qquad T_{23} = f x_1^2$$

* برای حل این مسئله ظاهراً باید روابط بلترامی-میشل را نوشته با فرض صفر بودن b ضرایب را از ۶ معادله بدست آورد علاقمندان می‌توانند چنین کاری را انجام دهند (و چون من علاقمند نیستم)

۲-۵- تانسور تنش زیر به عنوان جواب یک مسئله صفحه ای پیشنهاد شده است:

$$T_{11} = A x_2 + B x_1^2 x_2 + C x_2^2 \qquad -\frac{L}{2} \leq x_1 \leq \frac{L}{2}$$

$$T_{22} = D x_2^3 + E x_2 + F \qquad -\frac{h}{2} \leq x_2 \leq \frac{h}{2}$$

$$T_{12} = (G + H x_2^2)\, x_1$$

$$T_{13} = T_{23} = T_{33} = 0$$

در کتاب نوشته T_{33} که غلطه چون گفته مسئله ی صفحه ای است

که در آن A، B، C، D، E، F، G و H ثابت هستند. شرایط لازم برای قبول بودن تانسور تنش را بیان کنید. اگر شرایط مرزی مسئله به صورت زیر باشد، تعیین کنید که آیا تانسور تنش پیشنهادی در این شرایط صدق می کند.

$T_{12} = 0 \qquad \forall x_1 ,\; x_2 = \pm \frac{h}{2}$

$T_{22} = 0 \qquad \forall x_1 ,\; x_2 = \frac{h}{2}$

$T_{22} = \sigma$ (σ ثابت است) $\qquad \forall x_1 ,\; x_2 = -\frac{h}{2}$

$T_{11} = 0 \qquad \forall x_2 ,\; x_1 = \pm \frac{L}{2}$

حل: من جواب آخرحلم مطمئن نیستم ولی روند حل قطعاً همینه

$$T_{12}(x_1 , \tfrac{h}{2}) = 0 \Rightarrow (G + H(\tfrac{h}{2})^2)\, x_1 = 0 \quad (1)$$

$$T_{12}(x_1 , -\tfrac{h}{2}) = 0 \Rightarrow (G + H(-\tfrac{h}{2})^2)\, x_1 = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow (G + H(\tfrac{h^2}{4}))\, x_1 = 0 \Rightarrow G + \frac{h^2}{4} H = 0 \Rightarrow \boxed{G = -\frac{h^2}{4} H}$$

$$T_{22}(x_1 , \tfrac{h}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{D h^3}{8} + E \frac{h}{2} + F = 0 \quad (3)$$

$$T_{22}(x_1 , -\tfrac{h}{2}) = 0 \Rightarrow -\frac{D h^3}{8} - \frac{E h}{2} + F = -\sigma \quad (4)$$

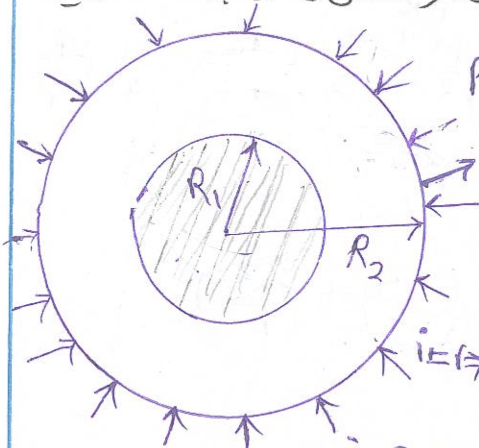
$$(3) + (4) \Rightarrow 2F = -\sigma \Rightarrow \boxed{F = -\frac{\sigma}{2}}$$

$$(3) - (4) \Rightarrow \boxed{\frac{D h^3}{4} + E h = -\sigma} \quad (5)$$

$$T_{11}(\pm \tfrac{L}{2} , x_2) = 0 \Rightarrow A x_2 + B \frac{L^2}{4} x_2 + C x_2^2 = 0 \quad (6),(7)$$

$$(6) \Rightarrow \boxed{C = 0} \qquad (A + B \tfrac{L^2}{4}) = 0 \Rightarrow A = -\frac{B L^2}{4} \Rightarrow (7) \Rightarrow \boxed{A = B = 0}$$

۷-۲- داخل کره مثال (۲-۹) را با جسم صلبی کاملاً پر کرده و سپس فشار P_2 را بر سطح خارجی آن اعمال می کنیم. تغییرمکان ها، کرنش ها و تنش ها را بدست آورید.



حل: $t_i = (t_r = -P_2 , t_\theta = 0 , t_\phi = 0)$

$\underline{n} = (n_r , n_\phi , n_\theta)$

$\underline{n} = (1 , 0 , 0) \qquad r = R_2$

$$t_i = T_{ij} n_j$$

$$i=r \Rightarrow t_r = T_{rr} n_r + T_{r\theta} \cancel{n_\theta} \Rightarrow \boxed{-P_2 = T_{rr}}$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} n_r + T_{\theta\theta} \cancel{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r} = 0}$$

* مسئله متقارن مرکزی است و از طرفی معادله حاکم بر تغییرمکان در حالت متقارن مرکزی در صفحه ی ۹۴ کتاب یا صفحه ی 220 جزوه آمده است.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du_r}{dr}\right) + \frac{\rho}{\lambda+2\mu} b_r(r) = 0$$

همچنین معادله ی دیفرانسیل مستقیم قابل حل بوده

$$u_r = -\int \frac{1}{r^2} \int \frac{\rho}{\lambda+2\mu} \xi^2 b_r(\xi)\, d\xi\, dr + \frac{-A}{r} + B$$

کتاب این منفی را نداشته

$$\boxed{b_r = 0}$$

$$\Rightarrow u_r = -\frac{A}{r} + B$$

* روابط مؤلفه های تانسور کرنش در دستگاه مختصات کروی در صفحه ی ۲۵ کتاب یا 216 جزوه موجود می باشد.

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = +\frac{A}{r^2}$$

$e_{r\theta} = e_{r\phi} = e_{\theta\phi} = 0$ کرنش برشی صفر است

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial \cancel{u_\theta}}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cancel{u_\phi}}{r}\cot\phi = -\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r}$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial \cancel{u_\phi}}{\partial\phi} + \frac{u_r}{r} = -\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r}$$

$$T_{ij}=2\mu e_{ij}+\lambda\delta_{ij}e_{kk} \qquad e_{kk}=e_{rr}+e_{\theta\theta}+e_{\phi\phi}$$

$$e_{kk}=\cancel{\frac{A}{r^2}}-\cancel{\frac{A}{r^2}}^{+\frac{B}{r}}-\frac{A}{r^2}+\frac{B}{r}=-\frac{A}{r^2}+\frac{2B}{r}$$

$$T_{rr}=2\mu e_{rr}+\lambda\delta_{rr}(e_{kk})=2\mu\left(\frac{+A}{r^2}\right)+\lambda\left(-\frac{A}{r^2}+\frac{2B}{r}\right)$$

$$T_{\theta\theta}=2\mu e_{\theta\theta}+\lambda\delta_{\theta\theta}e_{kk}=2\mu\left(-\frac{A}{r^2}+\frac{B}{r}\right)+\lambda\left(-\frac{A}{r^2}+\frac{2B}{r}\right)$$

$$T_{\phi\phi}=2\mu e_{\phi\phi}+\lambda\delta_{\phi\phi}e_{kk}=T_{\theta\theta}$$

$$T_{r\theta}=T_{r\phi}=T_{\phi\theta}=0$$

$$T_{rr}=-P_2 \Rightarrow 2\mu\frac{A}{r^2}-\frac{\lambda A}{r^2}+\frac{2B\lambda}{r}=-P_2 \quad (2) \qquad r=R_2$$

* برای حل کامل این مسئله نیاز به یک شرایط مرزی تنش دیگر داریم تا بتوانیم از دو معادله دو مجهول A و B را بدست آوریم سپس تنش ها، کرنش ها و تغییر مکان را بدست آوریم ولی آن شرایط مرزی تنش در مسئله وجود ندارد ولی به جای آن می توان از شرایط مرزی تغییر مکان استفاده کرد

$$r=R_1 \;,\; \forall\theta \;,\; U_r=0$$

در حالت متقارن مرکزی $\Rightarrow U_r=\frac{A}{r}+B \Rightarrow U_r(r=R_1)=0 \Rightarrow \boxed{\frac{A}{R_1}+B=0}$

$$\Rightarrow \frac{A}{R_1}+B=0 \Rightarrow \boxed{B=-\frac{A}{R_1}} \;\star$$

$$(2)\Rightarrow 2\mu\frac{A}{R_2^2}-\frac{\lambda A}{R_2^2}+\frac{2B\lambda}{R_2}=-P_2$$

$$\Rightarrow 2\mu\frac{A}{R_2^2}-\frac{\lambda A}{R_2^2}+2\left(\frac{-A}{R_1}\right)\frac{\lambda}{R_2}=-P_2$$

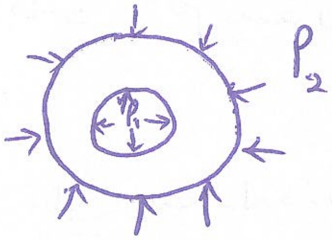
$$\Rightarrow A\left(\frac{2\mu R_1-\lambda R_1-2\lambda R_2}{R_1R_2^2}\right)=-P_2 \Rightarrow \boxed{A=\frac{-P_2R_1R_2^2}{2\mu R_1-\lambda R_1-2\lambda R_2}}$$

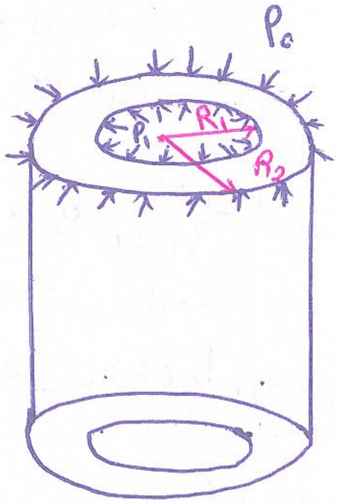
$$\Rightarrow \boxed{B=\frac{+P_2R_1R_2^2}{2\mu R_1^2-\lambda R_1^2-2\lambda R_1R_2}}$$

* با جایگذاری A و B در T_{ij} و U_r تمامی تنش ها و تغییر مکان شعاعی بدست می آید.

۲-۱۱- استوانه‌ای طویل و توخالی با شعاع‌های داخلی R_1 و خارجی R_2 تحت فشار داخلی P_1 و فشار خارجی P_0 قرار دارد. تغییر مکان u_r و تنش T_{rr} را در هر نقطه از این استوانه بدست آورید.

حل:





گام اول: نوشتن شرایط مرزی

★ وجه بیرونی

در جهت افزایش محور r

$\underline{n} = (n_r = 1 \,,\, n_\theta = 0 \,,\, n_z = 0)$ $\quad r = R_2$

$\underline{t} = (t_r = -P_0 \,,\, 0 \,,\, 0)$ $\quad \forall\theta$

$t_i = T_{ij} n_j \qquad i, j = \theta, r, z$

$i = r \Rightarrow t_r = T_{rr} n_r + T_{r\theta} \cancel{n_\theta} + T_{rz} \cancel{n_z} \Rightarrow \boxed{T_{rr} = -P_0}$

$i = \theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} n_r + T_{\theta\theta} \cancel{n_\theta} + T_{\theta \phi} \cancel{n_z} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r} = 0}$

$i = z \Rightarrow t_z = T_{zr} n_r + T_{z\theta} \cancel{n_\theta} + T_{zz} \cancel{n_z} \Rightarrow \boxed{T_{zr} = 0}$

★ وجه داخلی:

در جهت کاهش محور r

$\underline{n} = (n_r = -1 \,,\, n_\theta = 0 \,,\, n_z = 0)$ $\quad r = R_1$

$\underline{t} = (t_r = P_1 \,,\, 0 \,,\, 0)$ $\quad \forall\theta$

$t_i = T_{ij} n_j \qquad i, j = r, \theta, z$

$i = r \Rightarrow \underset{P_1}{t_r} = T_{rr} \underset{-1}{n_r} + T_{r\theta} n_\theta + T_{rz} n_z \Rightarrow \boxed{T_{rr} = -P_1}$

$i = \theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} n_r + T_{\theta\theta} n_\theta + T_{\theta z} n_z \Rightarrow \boxed{T_{\theta r} = 0}$

$i = z \Rightarrow t_z = T_{zr} n_r + T_{z\theta} n_\theta + T_{zz} n_z \Rightarrow \boxed{T_{zr} = 0}$

گام دوم: تشخیص مسئله

* این مسئله از نوع متقارن محوری است چون شرایط بارگذاری و هندسی متقارن است پس وابسته به θ نیست

* معادله‌ی حاکم متقارن محوری در ص ۹۶ کتاب آمده است

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rU_r)\right] + \frac{\rho}{\lambda+2\mu} b_r(r) = 0$$

جواب این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است

$$u_r = \frac{-1}{r}\int r \int \frac{\rho}{\lambda+2\mu} b_r(\xi)\, d\xi\, dr + Ar + \frac{B}{r}$$

$$U_r = Ar + \frac{B}{r} \Longleftarrow b_r = 0$$

* روابط مؤلفه‌های تانسور کرنش در دستگاه مختصات استوانه‌ای در صفحه‌ی ۲۳ کتاب با ... موجود می‌باشد.

$$e_{rr} = A - \frac{B}{r^2} = \frac{\partial U_r}{\partial r}$$

$$e_{zz} = e_{r\theta} = e_{\theta z} = e_{rz} = 0$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$e_{kk} = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz}$$

$$e_{kk} = A - \frac{B}{r^2} + A + \frac{B}{r^2} = 2A$$

$$T_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} e_{kk} \qquad (i, j = r, \theta, z)$$

$$T_{rr} = 2\mu e_{rr} + \lambda \delta_{rr} \underbrace{\cancel{e_{kk}}}_{2A} = 2\mu\left(A - \frac{B}{r^2}\right) + \lambda(2A)$$

گام سوم: اعمال شرایط مرزی

$$r = R_2 \Rightarrow T_{rr} = -P_0 \Rightarrow 2\mu A - 2\mu\frac{B}{r^2} + 2A\lambda = -P_0$$

$$\boxed{2A(\mu+\lambda) - 2\mu\frac{B}{R_2^2} = -P_0} \quad (1)$$

$$r = R_1 \Rightarrow T_{rr} = -P_2 \Rightarrow \boxed{2A(\mu+\lambda) - 2\mu\frac{B}{R_1^2} = -P_2} \quad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow -2\mu\frac{B}{R_2^2} + 2\mu\frac{B}{R_1^2} = -P_0 + P_2$$

$$\Rightarrow -2\mu B\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) = P_2 - P_0$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 R_2^2}\right) = (P_2 - P_0) \times \frac{1}{-2\mu} \Rightarrow \boxed{B = \frac{P_2 - P_0}{-2\mu} \times \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}} \quad (\mathrm{I})$$

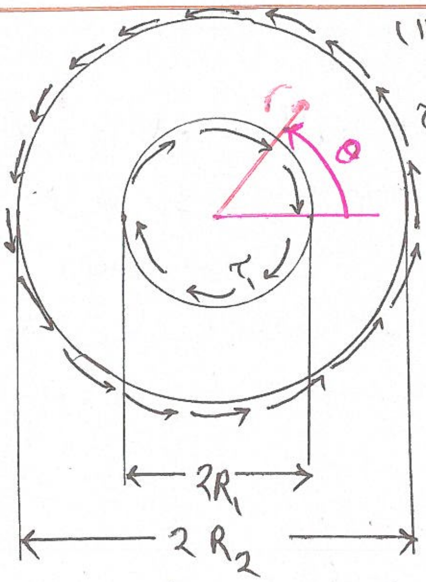
$$\text{(I)},\text{(1)} \Rightarrow 2A(\mu+\lambda) - 2\mu\frac{B}{R_2^2} = -P_0$$

$$\Rightarrow 2A(\mu+\lambda) = 2\mu\frac{B}{R_2^2} - P_0 \Rightarrow A = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\,\frac{B}{R_2^2} - \frac{P_0}{2(\lambda+\mu)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\mu}{(\lambda+\mu)R_2^2} \times \frac{P_2-P_0}{-2\mu} \times \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2-R_2^2} - \frac{P_0}{2(\lambda+\mu)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{P_2-P_0}{-2(\lambda+\mu)}\cdot\frac{R_1^2}{R_1^2-R_2^2} - \frac{P_0}{2(\lambda+\mu)} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{-2(\lambda+\mu)}\left(\frac{R_1^2(P_2-P_0)}{R_1^2-R_2^2} - P_0\right)}$$

★ با جایگذاری A و B در نهایت u_r و T_{rr} بدست می آید



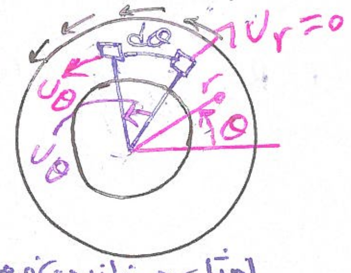
۲-۱۳- استوانه طویل مسئله (۲-۱۱) را در نظر بگیرید. مطابق شکل (۲-۱۴) تنش های برشی τ_1 و τ_2 به ترتیب در مرز داخلی و خارجی بر جسم اعمال می شود. معادله ی دیفرانسیل حاکم بر مسئله را بدست آورده و به روش مستقیم آن را حل نمایید. تنش های $\tau_{r\theta}$ را در هر نقطه از استوانه بدست آورید.

حل: گام اول: تشخیص مسئله

* این مسئله از نوع متقارن محوری وابسته به θ است یعنی متقارن محوری با دوران است اما چرا؟

(۱) تقارن در بارگذاری و هندسه داریم

(۲) $u_\theta \neq 0$ است چون تنش های برشی در راستای θ است در نتیجه باعث ایجاد تغییرمکان در راستای θ می شود (پس با دوران است)



(مثل چرخاندن فرمان)

* در این مثال $u_r=0$ است

* پس دیگر معادله ی دیفرانسیل صفحه ی ۹۴ کتاب حاکم مسئله نیست و باید از معادلات تعادل ناویه در دستگاه مختصات استوانه ای صفحه ی ۷۹ کتاب یا ص ۲۱۳ جزوه بدست آوریم.

* همچنین در صورت سؤال گفته است که استوانه طویل پس تغییرمکان در راستای z (u_z) از نظر فیزیکی ثابت ولی از نظر ریاضی صفر است و تغییرات z هم در راستای z صفر است پس با تمام نکات گفته شده موارد زیر در ص ۷۹ کتاب روابط (ت-۱)، (ث) و (ج) صفر است

$\underset{\text{دوران داریم}}{u_\theta \neq 0}$ ، $\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}=0}_{\text{متقارن محوری}}$ و $\underset{\text{تغییرمکان در راستای r نداریم}}{u_r=0}$ و $\underset{\text{تغییرمکان در راستای z نداریم}}{u_z=0}$ ، $\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}=0}_{\text{تغییرات در راستای z صفر است}}$

* با گذاشتن مقادیر صفر در صفحه ی ۷۹ کتاب تغییرات نسبت به r شده روابط از ∂ به d تغییر کرده و به صورت زیر تغییر می کند.

$$\Rightarrow \mu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_\theta}{dr}\right)\right]+\rho b_\theta=0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_\theta}{dr}\right)=-\frac{\rho}{\mu}b_\theta$$

$$\xRightarrow{\times r} \frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_\theta}{dr}\right)=-\frac{\rho b_\theta}{\mu}\times r \xRightarrow{\times dr} d\left(r\frac{dv_\theta}{dr}\right)=-\frac{\rho b_\theta}{\mu}(r)\,dr$$

$$\xRightarrow{\int} r\frac{dv_\theta}{dr}=\int -\frac{\rho b_\theta(r)}{\mu}dr+A \xRightarrow{\div r} \frac{dv_\theta}{dr}=\frac{1}{r}\int -\frac{\rho b_\theta(\xi)}{\mu}d\xi+\frac{A}{r}$$

$$\xRightarrow{\int} v_\theta=\int\frac{1}{r}\int -\frac{\rho b_\theta(\xi)}{\mu}d\xi+A\ln r+B$$

معادله ی دیفرانسیل حاکم

$\int \frac{U'}{U}du=\ln c$

* r داخل انتگرال با r طرف دیگر مساوی نیست برای اینکه اشتباه نکنیم r داخل پرانتز ξ می نامیم که پس از انتگرال گیری به جای ξ، r می گذاریم (علت یکی نبودن r ها انتگرال گیری نکردن بود)

* در غیاب نیروی حجمی معادله ی بالا به صورت مقابل است $v_\theta=A\ln r+B$

گام دوم: مرتب کردن شرایط مرزی تنش

$\forall\theta$

وجه بیرونی:

$r=R_2$, $\underline{n}=(1,0,0)$, $\underline{t}=(0,+\tau_2,0)$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=r \Rightarrow \underset{0}{t_r}=T_{rr}\underset{1}{n_r}+T_{r\theta}\underset{0}{n_\theta}+T_{rz}\underset{0}{n_z} \Rightarrow \boxed{T_{rr}=0}$

$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}n_r+T_{\theta\theta}n_\theta+T_{\theta z}n_z \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}(r=R_2)=+\tau_2}$ (1)

$i=z \Rightarrow t_z=T_{zr}n_r+T_{z\theta}n_\theta+T_{zz}n_z \Rightarrow 0=0$

وجه داخلی:

$r=R_1$, $\underline{n}=(-1,0,0)$, $\underline{t}=(0,-\tau_1,0)$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}n_r+T_{r\theta}n_\theta+T_{rz}n_z=0 \Rightarrow \boxed{T_{rr}(r=R_1)=0}$

$i=\theta \Rightarrow \underset{-\tau_1}{t_\theta}=T_{\theta r}\underset{-1}{n_r}+T_{\theta\theta}n_\theta+T_{\theta z}n_z \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}(r=R_1)=+\tau_1}$ (2)

$i=z \Rightarrow t_z=T_{zr}n_r+T_{z\theta}n_\theta+T_{zz}n_z \Rightarrow 0=0$ ✓

$T_{ij}=2\mu e_{ij}+\lambda\delta_{ij}e_{kk}$ $\qquad e_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\underset{0}{\frac{\partial v_r}{\partial\theta}}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)=$

$T_{r\theta}=2\mu e_{r\theta}+\lambda\underset{0}{\delta_{r\theta}}e_{kk}$ $\qquad e_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{r}-\frac{A\ln r}{r}-\frac{B}{r}\right)$

پیوست صفحه ۱۱۵ (این مسئله دو روز حل شد جا کم داشتم بخاطر همین این صفحه پیوست شده و صفحه ۱۱۶ نیست).

ادامه ی ۲-۱۳ ⇐

$$T_{r\theta} = 2\mu\, e_{r\theta} = \frac{2\mu}{2r}(A - A\ln r - B)$$

$$T_{r\theta} = \frac{\mu}{r}(A - A\ln r - B)$$

$$T_{r\theta} = T_{\theta r}$$

$$(1) \Rightarrow T_{\theta r}(r=R_2) = +\tau_2 \Rightarrow \frac{\mu}{R_2}(A - A\ln r - B) = +\tau_2 \quad \text{I}$$

$$(2) \Rightarrow T_{\theta r}(r=R_1) = +\tau_1 \Rightarrow \frac{\mu}{R_1}(A - A\ln r - B) = +\tau_1 \quad \text{II}$$

$$\text{I} \Rightarrow \frac{\mu A}{R_2} - \frac{\mu}{R_2}A\ln r - \frac{\mu}{R_2}B = +\tau_2 \xRightarrow{\frac{R_2}{\mu}} A - A\ln r - B = -\frac{\tau_2 R_2}{\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = A - A\ln r + \frac{\tau_2 R_2}{\mu}} \;\star$$

$$\star, \text{II} \Rightarrow \frac{\mu}{R_1}A - \frac{A\mu}{R_1}\ln r - \frac{A\mu}{R_1} + \frac{A\mu}{R_1}\ln r - \frac{\tau_2 R_2}{R_1} = -\tau_1$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{\mu}{R_1} - \frac{\mu}{R_1}\ln r - \frac{\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_1}\ln r\right) = \left(-\tau_1 + \frac{\tau_2 R_2}{R_1}\right)$$

★ A ← بینهایت شد دیگه بگردین دنبال اشکال ولی راه حل صد در صد درسته

ب)

$$F_1 = x_2 r = x_2\sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)} = x_2(x_1+x_2+x_3)^{+\frac{1}{2}}$$

$$F_2 = -x_1 r^2 = -x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -x_1^3 - x_1 x_2^2 - x_1 x_3^2$$

$$F_3 = 0$$

$$(1) \Rightarrow \nabla^2\nabla^2 F_i = -\frac{\rho}{1-\nu} b_i \qquad (i=1,2,3)$$

$$i=1 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{\rho}{1-\nu} b_1$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\Big(\frac{1}{2}x_2(x_1+x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}} + (x_1+x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2}x_2(x_1+x_2+x_3)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x_2(x_1+x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}\Big) = -\frac{\rho b_1}{1-\nu}$$

* به علت حجم بالای مشتق گیری از ادامه ی حل مسئله صرف نظر می شود
یک راه دیگر برای جلوگیری از این حجم مشتقات وجود دارد که برحسب r نوشته
و چون r وابسته x_1 ، x_2 و x_3 است به این شکل مشتق بگیریم

ج)

$$F_1 = F_2 = 0 \quad , \quad F_3 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_3^2 + 2x_2^2 x_3^2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 4x_1^3 + 4x_1 x_2^2 + 4x_1 x_3^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2} = 12x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_2} = 4x_2^3 + 4x_1^2 x_2 + 4x_2 x_3^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} = 12x_2^2 + 4x_1^2 + 4x_3^2$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 4x_3^3 + 4x_1^2 x_3 + 4x_2^2 x_3 \Rightarrow \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2} = 12x_3^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2$$

(1) $\nabla^2\nabla^2 F_i = -\dfrac{\rho b_i}{1-\nu} \qquad i=1,2,3$

$i=1 \Rightarrow \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(0+0+0) = -\dfrac{\rho b_1}{1-\nu} \Rightarrow \boxed{\rho b_1 = 0}$

$i=2 \Rightarrow \boxed{\rho b_2 = 0}$

$i=3 \Rightarrow \left(\dfrac{\partial^2}{\partial X_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial X_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial X_3^2}\right)(12X_1^2+4X_2^2+4X_3^2+12X_2^2+4X_1^2$
$+4X_3^2+12X_3^2+4X_1^2+4X_2^2)$
$= -\dfrac{\rho b_3}{1-\nu}$

$\Rightarrow \left[\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial X_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial X_3^2}\right](12X_1^2+8X_1^2+12X_2^2+8X_2^2+12X_3^2+8X_3^2)$
$= -\dfrac{\rho b_3}{1-\nu}$

$\Rightarrow (40+40+40) = -\dfrac{\rho b_3}{1-\nu} \Rightarrow \boxed{\rho b_3 = 120(\nu-1)}$

(2) $2GU_i = 2(1-\nu)F_{i,jj} - F_{j,ji} \qquad i,j=1,2,3$

$i=1 \Rightarrow 2GU_1 = 2(1-\nu)[F_{1,11}+F_{1,22}+F_{1,33}] - (F_{1,11}+F_{2,21}+F_{3,31})$

$\Rightarrow 2GU_1 = 2(1-\nu)[0+0+0] - (0+0+8X_1X_3)$

$\Rightarrow \boxed{U_1 = \dfrac{-8X_1X_3}{2G} = -4\dfrac{X_1X_3}{G}} \qquad F_{3,31} = \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial X_1 \partial X_3} = 8X_1X_3$

$i=2 \Rightarrow 2GU_2 = 2(1-\nu)(0+0+0) - (F_{1,12}+F_{2,22}+F_{3,32})$

$\Rightarrow 2GU_2 = -(0+0+8X_2X_3) \Rightarrow \boxed{U_2 = -\dfrac{4X_2X_3}{G}}$

$i=3 \Rightarrow 2GU_3 = 2(1-\nu)[F_{3,11}+F_{3,22}+F_{3,33}] - (F_{1,13}+F_{2,23}+F_{3,33})$

$2GU_3 = 2(1-\nu)[12x_1^2+4x_2^2+12x_2^2+4x_3^2+12x_3^2+4x_2^2+4x_1^2 +4x_3^2 +4x_1^2]$

$-[0+0+12x_3^2+4x_2^2+4x_1^2] \Longrightarrow \boxed{U_3 = ?}$

$$\bigstar\; T_{11}=2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 F_1+\left(\nu\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right)$$

$$T_{11}=2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x_1}(0+0+12x_3^2+4x_1^2+4x_2^2)$$

$$+\left(\nu\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)(0+0+4x_3^3+4x_1^2x_3+4x_2^2x_3)$$

$$T_{11}=2(1-\nu)(8x_1)-\nu(8x_3+8x_3+24x_3)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(4x_3^2+4x_1^2x_3+4x_2^2x_3)$$

$$T_{11}=14x_1-16\nu x_1+40\nu x_3-8x_3$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{11}=16(1-\nu)x_1+(40\nu-8)x_3}$$

$$\bigstar\; T_{12}=(1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2F_1+\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2F_2\right)-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right)$$

$$\Rightarrow T_{12}=(1-\nu)(0+0)-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(0+0+12x_3^2+4x_1^2+4x_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{12}=0}$$ بقیه تنش ها نیز بدین صورت بدست می آید

۲-۱۷- نشان دهید که در غیاب نیروهای حجمی، اگر مؤلفه های بردار گالرکین ها رمونیک باشند آنگاه تابع کرنش نامه معادل با منفی دیورژانس بردار گالرکین است

حل:

$$①\ \psi = 2G\phi$$ ⟶ تابع کرنش نامه ص ۱۱۳ کتاب رابطه (۲-۱۲۸)

$$②\ \phi = -\frac{1}{2\mu}\nabla\cdot F$$ ⟶ رابطه (۲-۱۲۵)

$$① \Rightarrow \phi = \frac{\psi}{2G} \quad ③$$

$$③ \text{ و } ② \Rightarrow \frac{\psi}{2G} = -\frac{1}{2\mu}\nabla\cdot F \xrightarrow[\text{است}]{\text{معادل}} \boxed{\psi = -\nabla\cdot F}$$

۲-۱۸- مطلوب است مؤلفه های بردار تغییر مکان و توزیع تنش تعریف شده توسط هر یک از توابع پتانسیل کرنش نامهٔ زیر:

الف) $\psi = A(x_1^2 - x_2^2) + 2Bx_1x_2$

ب) $\psi = cr^n \cos n\theta$ و $r^2 = x_1^2 + x_2^2$

پ) $\psi = c\ln(r + x_3)$ و $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

حل:

★ مؤلفه های بردار تغییر مکان و تنش ها مطابق روابط (۲-۱۲۹) و (۲-۱۳۰) صفحه ی ۱۱۳ کتاب بدست می آید.

$$2Gu_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (۲\text{-}۱۲۹)$$

$$T_{ij} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (۲\text{-}۱۳۰)$$

ادامه ی حل صفحه ی ۱۹

الف)

$$\psi = A(x_1^2 - x_2^2) - 2Bx_1x_2$$

$$2Gu_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

$$i=1 \Rightarrow 2Gu_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 2Ax_1 - 2Bx_2 \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{G}(Ax_1 - Bx_2)}$$

$$i=2 \Rightarrow 2Gu_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -2Ax_2 - 2Bx_1 \Rightarrow \boxed{u_2 = -\frac{1}{G}(Ax_2 + Bx_1)}$$

$$i=3 \Rightarrow 2Gu_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \boxed{u_3 = 0}$$

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_1} = 2A \Rightarrow \boxed{T_{11} = 2A}$$

$$T_{12} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = -2B \Rightarrow \boxed{T_{12} = -2B}$$

$$T_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_2} = -2A \Rightarrow \boxed{T_{22} = -2A}$$

$$\boxed{T_{13} = T_{23} = T_{33} = 0}$$

ب)

$\psi = cr^n \cos n\theta$ و $r^2 = x_1^2 + x_2^2$

* مؤلفه های بردار تغییر مکان و تنش ها برای تابع کرنش لامه در دستگاه مختصات استوانه ای در صفحه ی ۱۱۳ کتاب و در روابط (۲-۱۳۲) و (۲-۱۳۳)

$$2Gu_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} = c n r^{n-1} \cos n\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{u_r = r^{n-1}\frac{c.n}{2G}\cos n\theta}$$

$$2Gu_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\cdot cr^n(-n\sin n\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_\theta = \frac{-c.n.r^{n-1}}{2G}\sin n\theta}$$

$$2Gu_z = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \boxed{u_z = 0}$$

$$T_{rr} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = c.n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta \Rightarrow \boxed{T_{rr} = c.n.(n-1)r^{n-2}\cos n\theta}$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\cdot cnr^{n-1}\cos n\theta + \frac{1}{r^2}\cdot(cr^n(-n^2\cos n\theta))$$

$$\Rightarrow T_{\theta\theta} = cn(r^{n-2} - n.r^{n-2})\cos n\theta \Rightarrow \boxed{T_{\theta\theta} = c.n.r^{n-2}(1-n)\cos n\theta}$$

$$T_{zz} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \boxed{T_{zz} = 0}$$

$$T_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\times cr^n\cdot n(-\sin n\theta)\right)$$

$$\Rightarrow T_{r\theta} = -[c.n\sin n\theta]\frac{\partial r^{n-1}}{\partial r} \Rightarrow \boxed{T_{r\theta} = -c.n.\sin n\theta\, r^{n-2}}$$

$$T_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial z} = 0 \quad , \quad T_{rz} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} = 0 \Rightarrow \boxed{T_{\theta z} = T_{rz} = 0}$$

(ب)

$$\psi = c\ln(r + x_3) \quad , \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$2Gu_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \qquad \Rightarrow r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

نکته:

$$2Gu_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(c\ln\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} + x_3\right)\right) \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

مشتق ⇓

$$\frac{1}{2}(2x_1)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$2Gu_1 = c\Big(\underbrace{\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}}_{u'}\Big)\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+x_3}}_{u}\Big)$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

$$\Rightarrow 2Gu_1 = \frac{cx_1}{r^2 + rx_3} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{c}{2G}\,\frac{x_1}{r^2+rx_3}}$$

دو رادیکال در هم ضرب شد رادیکال حذف شد

رادیکال

در نتیجه

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = r^2$$

$$2Gu_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(c\ln\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+x_3\right)\right)$$

$$2Gu_2 = c\left(\frac{x_2}{r}\right) \times \left(\frac{1}{r+x_3}\right) =$$

$$\Rightarrow 2Gu_2 = c\left(\frac{x_2}{r} \times \frac{1}{r+x_3}\right) \Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{c}{2G}\cdot\frac{1}{r^2+rx_3}}$$

$$2Gu_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c\ln\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+x_2\right)\right)$$

$$2Gu_3 = c\left(\frac{x_3}{r}+1\right)\left(\frac{1}{r+x_3}\right)$$

$$2Gu_3 = c\left(\frac{\cancel{x_3+r}}{r}\right)\left(\frac{1}{\cancel{r+x_3}}\right) = \frac{c}{r} \Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{c}{2G}\cdot\frac{1}{r}}$$

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{C x_1}{r(r+x_3)}\right) \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$T_{11} = \frac{C r(r+x_3) - C x_1\left(2x_1 + x_3 \frac{x_1}{r}\right)}{\left(r(r+x_3)\right)^2} \qquad r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$r(r+x_3) = r^2 + r x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \left((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}\right) x_3$$

نسبت به x_1 مشتق می گیریم

$$\Rightarrow 2x_1 + \left(\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}x_1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right) x_3$$

$$= 2x_1 + \frac{x_1}{r} x_3$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{11} = \frac{C r^2 (r+x_3) - x_1(2x_1 r + x_1 x_3)}{r^2 (r+x_3)^2}}$$

★ بقیه تنش ها نیز به این صورت بدست می آید

$$2Gu_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$2Gu_1 = -\times -\frac{1}{2}(2x_1)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$2Gu_1 = x_1 \times \frac{1}{\sqrt[2]{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}} = \frac{x_1}{r^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{2G}\cdot\frac{x_1}{r^3}}$$

$$2Gu_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial Ln(r+x_3)}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right.$$

$$\Rightarrow 2Gu_2 = \frac{x_2}{(\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)})^3} \Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{1}{2G}\cdot\frac{x_2}{r^3}}$$

$$2Gu_3 = 2(1-\nu)\nabla^2 F_3 - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2}$$

$$\nabla^2 F_3 = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2}$$

$$F_3 = Ln(r+x_3) = Ln\left[\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} + x_3\right] = Ln\left[(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} + x_3\right]$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \left(\frac{1}{\cancel{2}} * \cancel{2}x_3 * (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}} + 1\right) \times \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} + x_3}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \left(\frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}} + 1\right)\cdot\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} + x_3}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \left(\frac{x_3 + (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} + x_3}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

۱۷-۳- مطلوب است مؤلفه‌های بردار تغییرمکان و توزیع تنش تعریف شده توسط هریک از توابع کرنش لاو زیر:

الف) $F_3 = \ln(r+x_3)$

ب) $F_3 = x_1 \ln(r+x_3)$

که در آن $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ می‌باشد.

$$(\ln U)' = \frac{U'}{U}$$

حل: الف)

★ تابع کرنش لاو صفحه‌ی ۱۰۷ کتاب است که مؤلفه‌های تغییرمکان آن از رابطه‌ی (۲-۹۸) و مؤلفه‌های تانسور تنش آن (۲-۱۰۰)

$$2GU_1 = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_3} \quad , \quad 2GU_2 = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_3} \quad , \quad 2GU_3 = \left(2(1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) F_3$$

$$2GU_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial(\ln(r+x_3))}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)$$

توضیح

★ $$\frac{\partial}{\partial x_3}(\ln(r+x_3)) = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\ln\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} + x_3\right)\right)$$

نکته: $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$ و $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\ln\left[(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} + x_3\right]\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\cancel{2}} \times (\cancel{2}x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}} + 1\right) \times \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} + x_3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} + 1\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} + x_3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_3 + \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} \times \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} + x_3} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\times 2x_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x_3}{\sqrt[2]{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}} = -\frac{x_3}{r^3}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = \frac{\partial(\mathrm{Ln}(r+x_3))}{\partial x_1} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+x_3}\right) = \frac{x_1}{r(r+x_3)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{r(r+x_3)}\right) = \frac{r^3+r^2x_3-2rx_1^2\ x_3}{r^3(r+x_3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} = \frac{r^3+r^2x_3-2rx_2^2-x_2^2x_3}{r^3(r+x_3)^2}$$

$$\Rightarrow 2Gu_3 = 2(1-\nu)\left[\frac{r^3+r^2x_3-2rx_1^2-x_1^2x_3}{r^3(r+x_3)^2} + \frac{r^3+r^2x_3-2rx_2^2-x_2^2x_3}{r^3(r+x_3)^2} - \frac{x_3}{r^3}\right] - \frac{x_3}{r^3}$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{1-\nu}{G}\left[\frac{2r^3+2r^2x_3-2r(x_1^2+x_2^2)-x_3(x_1^2+x_2^2}{r^3(r+x_3)^2} - \frac{x_3}{r^3}\right] - \frac{x_3}{r^3}$$

★ مؤلفه‌های تنش:

$$T_{11} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\nu.\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)F_3$$

$$T_{11} = \nu\frac{\partial\nabla^2 F_3}{\partial x_3} - \frac{\partial^3 F_3}{\partial x_3\partial x_1^2}$$

$$\nabla^2 F_3 = \frac{2r^3+2r^2x_3-(2r+x_3)(x_1^2+x_2^2)-x_3(r+x_3^2}{r^3(r+x_3)^2}$$

$$\frac{\partial \nabla^2 F_3}{\partial x_3} = \Big[2r^2 - (x_1^2 + x_2^2) - (r+x_3)^2 - 2x_3(r+x_3)\Big]\left(r^3(r+x_3)^2\right)$$

$$- r^3 \times 2(r+x_3)\Big(2r^3 + 2r^2 x_3 - (2r+x_3)(x_1^2+x_2^2) - x_3(r+x_3)^2\Big]$$

$$\times \frac{1}{\left(r^3(r+x_3)^2\right)^2}$$

★ $$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2} = \frac{r^3 + r^2 x_3 - 2r x_1^2 - x_1^2 x_3}{r^3 (r+x_3)^2}$$

$$\Rightarrow T_{11} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) F_3$$ ⟶ براساس مطالب بالا T_{11} بدست می آید

* به همین طریق T_{22}، T_{33}، T_{12}، T_{23} و T_{31} بدست می آید

مرد می خواد مشتق بگیره
خخخخ

ب): مشابه روش قسمت الف می باشد

۲-۲۱- محیط نیمه بی نهایت ($x_2 \geq 0$) مطابق شکل (۲-۱۵) مفروض است. این محیط تحت اثر بار متمرکز $P i_3$ در نقطه (c و ۰ و ۰) قرار گرفته است (مسئله مندلین). با استفاده از تابع گرنش لاو معرفی شده در زیر توزیع تنش را در این محیط بدست آورید:

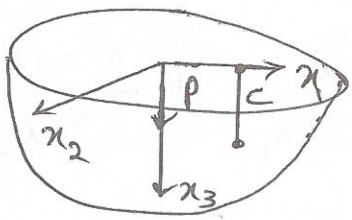
$$F_z = A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_3 \frac{x_3 + c}{R_2} + A_4 \ln(x_3 + c + R_2)$$

$$+ A_5 \left[(x_3 + c) \ln(x_3 + c + R_2) - R_2 \right] + \frac{A_6}{R_2}$$

که در آن:

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (x_3 - c)^2} \quad , \quad R_2 = \sqrt{r^2 + (x_3 + c)^2}$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2$$



حل:

* روابط تابع گرنش لاو در دستگاه مختصات استوانه ای برای بدست آمدن گرنش و توزیع تنش در روابط (۲-۱۰۱-الف) و (۲-۱۰۱-ب) در صفحات ۱۵۸ و ۱۵۹ آمده است

* این سؤال مثل بقیه فقط باید مشتق بگیریم با این تفاوت که اپراتور لاپلاس در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت زیر است

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

* سپس با جایگذاری ∇^2 و F_z در روابط τ_{rr}، $\tau_{\theta\theta}$، τ_{zz}، $\tau_{r\theta}$، $\tau_{\theta z}$ و τ_{rz} بدست می آید.

فقط باید مشتق بگیریم همین

۲-۲۴_ نشان دهید که اگر U_1 و U_2 توابع هارمونیک باشند، آنگاه توابع زیر بی هارمونیک هستند:

الف) $\psi_i = x_i U_1 + U_2$ و $i = 1, 2, 3$

ب) $\chi = (r^2 - r_0^2) U_1 + U_2$ و $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ و $r_0 =$ ثابت

حل:

الف)

$$\nabla^2 U_1 = 0 \qquad \nabla^2 U_2 = 0$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi_1 = \nabla^2 \nabla^2 (x_1 U_1 + U_2) = \nabla^2 (\nabla^2 x_1 U_1 + \nabla^2 U_2)$$

$$\nabla^2 x_1 U_1 = \frac{\partial^2 x_1 U_1}{\partial x_1^2} + \cancel{\frac{\partial^2 x_1 U_1}{\partial x_2^2}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial^2 x_1 U_1}{\partial x_3^2}}^{\,0} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1 U_1}{\partial x_1}\right)$$

$$\nabla^2 x_1 U_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1} \cdot U_1 + x_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(U_1 + x_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)$$

$$= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \cancel{x_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 x_1 U_1 = 2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \quad (1)$$

$$\rightarrow \quad \nabla^2 U_2 = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله}]{(1),(2)} \nabla^2 \nabla^2 \psi_1 = \nabla^2\left(2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + 0\right) = 2 \nabla^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$$

$$= 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2}\right)\right)$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2 U_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0}$$

(ب

$\nabla^2 U_1 = 0 \qquad \nabla^2 U_2 = 0$

$\nabla^2\nabla^2 \chi = 0$ باید ثابت شود

$\underline{\chi} = (r^2 - r_0^2)\, U_1 + U_2$

$r_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ و $r_0 =$ ثابت

$$\nabla^2\nabla^2 \chi = \nabla^2\left(\nabla^2\left[(\nabla^2 - r_0^2)\, U_1\right] + \nabla^2 U_2\right) = \nabla^2(\nabla^2\nabla^2 U_1 - \nabla^2 r_0^2 U_1)$$

$$= \nabla^2(\nabla^2 r^2 U_1 - r_0^2 \nabla^2 U_1) = \nabla^2(\nabla^2 x_1^2 U_1 + \nabla^2 x_2^2 U_1 + \nabla^2 x_3^2 U_1)$$

$$\Rightarrow \nabla^2\nabla^2 \chi = \nabla^2\left[6U_1 + 6\left(x_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\right]$$

$$= 6\nabla^2 U_1 + 6\nabla^2 x_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + 6\nabla^2 x_2\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + 6\nabla^2 x_3\frac{\partial U_1}{\partial x_3}$$

$$\nabla^2 x_1 U_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x_1^2 U_1) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(x_1^2 U_1) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(x_1^2 U_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1^2 U_1\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[2x_1\frac{\partial x_1}{\partial x_1}U_1 + x_1^2\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2x_1 U_1 + x_1^2\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) = 2\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 U_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)$$

$$= 2\left(\cancel{\frac{\partial x_1}{\partial x_1}}^{\,1} U_1 + x_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) + 2x_1\frac{\partial x_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + x_1^2\cancel{\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}}^{\,0}$$

$$\nabla^2 x_1^2 U_1 = 2U_1 + 6x_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1}$$

$$\rightarrow \nabla^2 x_2^2 U_1 = 2U_1 + 6x_2\frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

$$\rightarrow \nabla^2 x_3^2 U_1 = 2U_1 + 6x_3\frac{\partial U_1}{\partial x_3}$$

به همین ترتیب

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(x_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(x_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(x_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}x_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}x_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+x_1\cancel{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\cancel{\frac{\partial x_1}{\partial x_2}}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\cancel{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}}+\cancel{\frac{\partial x_1}{\partial x_3}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\cancel{\frac{\partial u_1}{\partial x_3^2}}=0$$

$$\nabla X_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=0\ ,\quad \nabla^2 X_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=0$$

به همین ترتیب

$$\boxed{\nabla^2\nabla^2 X_i=0}$$

مثال: فرض کنید $\mu\nabla^2\underline{u}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\underline{u})=0$ معادله ناویه باشد به طوری که $\underline{u}=u_j\hat{i}_j$ بوده و λ و μ ثابت هستند. اگر $\underline{u}=\nabla\phi+\nabla\times\underline{\psi}$ یا $u_i=\phi_{,i}+e_{ijk}\vec{\psi}_{k,j}$ باشد به طوری که ϕ یک تابع اسکالر و ψ یک تابع برداری است. با قرار دادن $\underline{u}=\nabla\phi+\nabla\times\psi$ در معادله ناویه را بر حسب ϕ و ψ بنویسید.

$$\nabla\cdot u=\nabla\cdot(\nabla\phi+\nabla\times\psi)=\nabla\cdot\nabla\phi+\cancel{\nabla\cdot\nabla\times\psi}$$

ص ۵۶ کتاب مکانیک محیط پیوسته

$$\mu\nabla^2(\nabla\phi+\nabla\times\underline{\psi})+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla^2\phi)$$

$$\mu\nabla\nabla^2\phi+\mu\nabla^2\nabla\times\psi+(\lambda+\mu)\nabla\nabla^2\phi$$

$$(\lambda+2\mu)\nabla\nabla^2\phi+\mu\nabla^2\nabla\times\underline{\psi}=0$$

32 32

1.69

32 32

تمرینات فصل سوم کتاب تئوری ارتجاعی

۳-۱- حالتی از مسائل تغییر مکان یک بعدی را در نظر بگیرید که در آن:

الف) $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$ و $u_2 = u_3 = 0$

ب) $b_1 = b_1(x_1, x_2, x_3)$

در این وضعیت، مؤلفه‌های تانسورهای تنش، کرنش و تغییر مکان u_1 را بدست آورید.

حل:

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e_{11}(x_1)$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = e_{12}(x_2) \qquad e_{13} = e_{13}(x_3)$$

$$e_{22} = e_{33} = e_{23} = e_{32} = 0$$

روابط تنش کرنش:

$$T_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij} e_{kk} + \frac{E}{1+\nu} e_{ij}$$

$$T_{11} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{11}(x_1) \qquad T_{23} = T_{32} = 0$$

$$T_{22} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{11}(x_1) = T_{33}$$

$$\delta_{12} = 0 \longrightarrow T_{12} = \frac{E}{1+\nu} e_{12}(x_2)$$

$$\delta_{13} = 0 \longrightarrow T_{13} = \frac{E}{1+\nu} e_{13}(x_3)$$

معادلات تعادل:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0$$

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0 \rightarrow b_1 = b_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$\cancelto{0}{\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1}} + \cancelto{0}{\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}} + \rho b_2 = 0 \rightarrow b_2 = 0$$

$$\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0 \longrightarrow b_3 = 0$$

$$T_{11}(x_1) = a x_1^2 + b x_1 + c_1$$

$$T_{12}(x_2) = d x_2^2 + e x_2 + c_2$$

$$T_{13}(x_3) = T x_3^2 + g(x_3) + c_3$$

$$T_{22} = T_{33} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} a x_1^2 + b x_1 + c_1 \right) =$$

$$\frac{\nu}{1-\nu}(a x_1^2 + b x_1 + c_1)$$

$$e_{11}(x_1) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}(a x_1^2 + b x_1 + c_1)$$

$$e_{12}(x_2) = \frac{1+\nu}{E}(d x_2^2 + e x_2 + c_2)$$

$$e_{13}(x_3) = \frac{1+\nu}{E}(F x_3^2 + g x_3 + c_3)$$

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = \int e_1 \, dx_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E\nu}\left(\frac{a x_1^3}{3} + \frac{b x_1^2}{2} + c_1 x\right) + f(x_2, x_3)$$

3 3

۳-۲- روابط تکمیلی حالت کرنش یک بعدی را در حالتی که $e_{11} = e_{11}(x_1, x_2, x_3)$ باشد، و همچنین شرط لازم و کافی را برای اینکه مسئله کاملاً در حالت کرنش یک بعدی قرار بگیرد، بدست آورید.

حل:

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_{12} = e_{31} = e_{23} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow u_1 = u_1(x_1, x_3)$$

$$\Rightarrow u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow u_1 = u_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow u_2 = u_2(x_2) \qquad u_3 = u_3(x_3)$$

$$e_{22} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow u_2 = f(x_2, x_3)$$

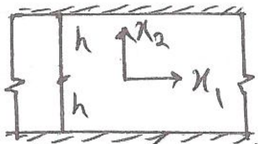
به همین ترتیب $e_{33} = 0 \Rightarrow u_3 = f(x_1, x_2)$

$$e_{11} = e_{31} \Rightarrow u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Rightarrow u_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

3 3

۳-۳- یک صفحه‌ی نازک با ارتفاع $2h$ در امتداد x_2 و ضخامت $t>>2h$ در امتداد x_3 و طول بی نهایت در امتداد x_1 مطابق شکل (۳-۲) مفروض است. این صفحه در $x_2=\pm h$ کاملاً گیردار است و تحت تأثیر وزن خود قرار دارد. تانسورهای تنش، کرنش و مؤلفه‌های بردار تغییرمکان را بدست آورید. (مصالح ارتجاعی، خطی و همسان می باشد).



شکل ۳-۲- صفحه نازک با ارتفاع $2h$ تحت تأثیر وزن خود

$$u_1 = u_2 = 0 \qquad u_3 = u_3(x_3)$$

$$u_3 = (x_1 = \pm h \,,\, x_3) = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \qquad , \quad e_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = 0 \begin{cases} e_{22} = 0 \\ e_{12} = 0 \\ e_{21} = 0 \end{cases}$$

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

$$T_{12} = -4c\,x_1 x_2 - 3D\,x_2^2 - 2H\,x_2$$

طبق شرایط مرزی CB: $\quad x_2 = -\tan\beta\, x_1$

$$x_1 = 0 \Rightarrow T_{11} = a \qquad T_{11}\sin\beta = T_{12}\cos\beta \Rightarrow T_{11} = 0$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow T_{22} = 2j + a \quad \begin{cases} T_{11}\sin\beta + T_{12}\cos\beta = 0 \\ T_{22}\cos\beta + T_{12}\sin\beta = 0 \end{cases} \quad x_2 = -\tan\beta\, x_1$$

$$2c\tan^2\beta\cos\beta\, x_1^2 - \gamma_c x_1 + 4c\,\tan\beta\, x_1^2 - 3D\,\tan^2\beta\, x_1^2 + 2H\tan\beta\, x_1 = 0$$

ضرایب x_1 و x_1^2 برابر صفر است

$$\begin{cases} 2c\tan^2\beta\cos\beta + 4c\tan\beta - 3D\tan^2\beta = 0 \\ -\gamma_c + 2H\tan\beta = 0 \Rightarrow H = \dfrac{\gamma_c}{2\tan\beta} \end{cases}$$

$$D=\frac{2C(\sin\beta+2)}{3\tan\beta}$$

$$Cx_1^2-6D\tan\beta\, x_1^2+2Hx_1-6I\tan\beta\, x_1-2L-\gamma_c x_1+\alpha\sin\beta$$
$$+\left(C\tan\beta\, x_1^2-D\tan^2\beta\, x_1^2+2H\tan\beta\, x_1\right)\cos\beta=0$$

$$x_1^2=2C\sin\beta-6D\tan\beta\sin\beta+4C\tan\beta\cos\beta-3D\tan^2\beta\cos\beta=0$$

$$x_1^1=2H\sin\beta-6I\tan\beta\sin\beta-\gamma_c\sin\beta+2H\tan\beta\cos\beta=0$$

$$x_1=(2L+\alpha)\sin\beta=0\Rightarrow L=-\frac{\alpha}{2}$$

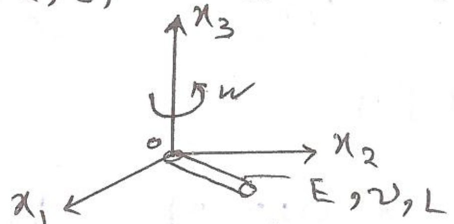
$$6C\sin\beta=9D\tan\beta\sin\beta\Rightarrow D=\frac{2C}{3\tan\beta}$$

$$6H\sin\beta-6I\tan\beta\sin\beta=\gamma_c\sin\beta\Rightarrow H=\frac{\gamma_c}{2\tan\beta}$$

$$I=\frac{4H-\gamma_c}{6\tan\sin\beta}\Rightarrow I=\frac{\gamma_c(1-2\tan\beta)}{12\tan^2\beta\sin\beta}$$

۳-۵- میله‌ای ارتجاعی، خطی و همسان با طول L و شعاع مقطع $r\ll L$ مطابق شکل (۳-۳) به نقطه o وصل شده است. این میله با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور x_3 می‌چرخد. با صرف‌نظر کردن از وزن میله و با شرایط مرزی زیر، تنش‌ها و کرنش‌ها و تغییر مکان‌های نقاط مختلف این میله را بدست آورید.

$u_i=(0,0,0)=0 \qquad i=(1,2,3)$



شکل ۳-۳- میله به طول L و شعاع مقطع $r\ll L$ تحت تأثیر سرعت زاویه‌ای ثابت ω

$$w_{ij}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&w_{33}\end{bmatrix}$$

$$w_{12}=w_{22}=w_{23}=w_{13}=w_{11}=0$$
$$w_{33}=w_{33}(x_3)=w$$
$$w_{33}=w_{33}(x_3)$$

$$T_{33}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}w+\frac{E}{1+\nu}w=\frac{\nu Ew+(1-2\nu)Ew}{(1+\nu)(1-2\nu)}=\frac{(1-\nu)Ew}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$T_{11}=T_{22}=\frac{\nu Ew}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad T_{12}=T_{13}=T_{23}=0$$

$$\begin{cases} \rho b_1 = 0 \\ \rho b_2 = 0 \\ \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow T_{33}(x_3) = 0 + T_0 \qquad T_0 = T_{33}$$

صرف نظر از وزن $b_3 = 0$

$$w_{33}(x_3) = w = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}\left[-\int \rho b_3(x_3)\,dx_3 + \boxed{T_0}\right]$$

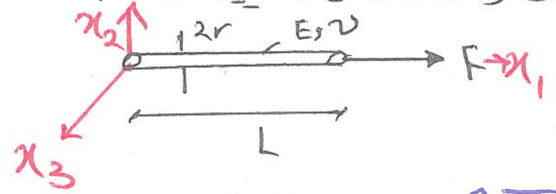
$$T_0 \to \frac{(1-\nu)Ew}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$w_{33}(x_3) = w \quad \text{o K}$$

$$u_3(x_3) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}\int\left[0 + \frac{(1-\nu)Ew}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,dx_3\right]$$

$$u_3(x_3) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}\,\frac{(1-\nu)Ew}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,x_3 = w\,x_3 \quad \checkmark$$

۶-۳- میله مسئله (۳-۵) مطابق شکل (۳-۴) تحت تأثیر نیروی F (در یک سان) حرکت می‌کند. با فرض تنش یک بعدی، تانسور تنش، کرنش و مؤلفه‌های تغییرمکان را بدست آورید.



$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 = \rho a_1$$

$$T_{11}(x_1) = \int \rho a(x_1) + T$$

$$t = \frac{F}{\pi r^2}\,i \qquad n = (1, 0, 0) \qquad T_{11}n_1 + \cancel{T_{12}}n_2 + \cancel{T_{13}}n_3 = \sigma_n$$

$$T_{11}(x_1) = \sigma(x)$$

اعمال شرایط مرزی

$$T_{11}(x_1) = \sigma(x) = \int \rho a(x_1) + T$$

$$\begin{cases} x = L \\ \rho a(x)L + T = b \end{cases} \Rightarrow$$

بقیه تکمیل شود

تمرینات فصل چهارم کتاب تئوری ارتجاعی

۴-۱- در یک مسئله کرنش مسطح در محیط همسان، مؤلفه های تانسور تنش در غیاب نیروهای حجمی به صورت زیر بدست آمده اند:

$T_{11}=ax_2^2$ ، $T_{22}=-ax_1^2$ ، $T_{12}=0$ (a = ثابت)

تغییرمکان های $u_1(x_1,x_2)$ و $u_2(x_1,x_2)$ را بدست آورید.

حل:

* چون این سؤال از نوع کرنش مسطح است پس از روابط تنش کرنش صفحه‌ی ۱۶۸ کتاب استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} e_{11}=\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)T_{11}-\nu T_{22}\right] \\ e_{22}=\frac{1+\nu}{E}\left[\nu T_{11}-(1-\nu)T_{22}\right] \\ e_{12}=\frac{1+\nu}{E}T_{12} \end{cases} \qquad e_{13}=e_{23}=e_{33}=0$$

$$e_{11}=\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)ax_2^2+\nu a x_1^2\right] \qquad e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$e_{22}=\frac{1+\nu}{E}\left[\nu a x_2^2+(1-\nu)ax_1^2\right] \qquad e_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$e_{12}=0 \quad , \quad e_{13}=e_{23}=e_{33}=0$$

$$\Rightarrow u_1=\frac{a(1+\nu)}{E}\int\left[(1-\nu)x_2^2+\nu x_1^2\right]dx_1$$

$$u_1=\frac{a(1+\nu)}{E}\left[(1-\nu)x_2^2x_1+\frac{\nu x_1^3}{3}+F(x_2)\right]$$

ثابت انتگرال گیری که به x_1 وابسته نیست

$$\Rightarrow u_2=\frac{a(1+\nu)}{E}\int\left[\nu x_2^2+(1-\nu)x_1^2\right]dx_2$$

$$u_2=\frac{a(1+\nu)}{E}\left[\frac{\nu x_2^3}{3}+(1-\nu)x_1^2x_2+g(x_1)\right]$$

$$e_{12}=0\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$k=\frac{a(1+\nu)}{E}$$

$\Rightarrow$ صفحه‌ی بعد

$$\Rightarrow 2K(1-\nu)x_1x_2 + \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_1} = -2K(1-\nu)x_2x_1 - \frac{\partial f(x_2)}{\partial x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_2)}{\partial x_2} = -4K(1-\nu)x_1x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial^2 g(x_1)}{\partial x_1^2} + 0 = -4K(1-\nu)x_2 \Rightarrow \frac{\partial g(x_1)}{\partial x_1} = -4K(1-\nu)x_2x_1 + C$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x_1) = -2K(1-\nu)x_2x_1^2 + Cx_1 + D}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_2)}{\partial x_2} + 0 = -4K(1-\nu)x_1 \Rightarrow \frac{\partial f(x_2)}{\partial x_2} = -4K(1-\nu)x_1x_2 + C'$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x_2) = -2K(1-\nu)x_1x_2^2 + C'x_2 + D'}$$

نظر بنده: به نظر من حل این سؤال تا اینجا امکان پذیر است زیرا ضرایب C'، D'، C و D با نوشتن شرایط مرزی امکان پذیر است ولی شاید از نظر ریاضی راهی وجود داشته باشد اما اگر فرض بنده درست باشد جواب U_1 و U_2 به صورت زیر خواهد شد

$$\boxed{U_1(x_1, x_2) = \frac{a(1+\nu)}{E}[(1-\nu)x_2^2x_1 + \frac{\nu x_1^3}{3} - 2K(1-\nu)x_1x_2^2 + C'x_2 + D'}$$

$$\boxed{U_2(x_1, x_2) = \frac{a(1+\nu)}{E}[(\frac{\nu x_2^3}{3} + (1-\nu)x_1^2x_2 - 2K(1-\nu)x_2x_1^2 + Cx_1 + D}$$

۴-۲- در یک محیط همسان، مؤلفه‌های تانسور تنش از حل یک مسئله کرنش مسطح در غیاب نیروهای حجمی به صورت زیر بدست آمده‌اند:

$$T_{11}=ax_2^2+bx_1 \qquad T_{22}=cx_1^2+dx_2 \qquad T_{12}=e(x_1+x_2)$$

که در آن a تا e ثابت هستند. روابط بین این ضرایب ثابت، به منظور برقراری معادلات تعادل و معادله‌ی سازگاری را بدست آورید. مؤلفه‌های بردار تغییرمکان را تعیین کنید.

حل:

* مسئله کرنش مسطح روابط صفحه‌ی ۱۶۸

$$\begin{cases} e_{11}=\dfrac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)T_{11}-\nu T_{22}\right] \\ e_{22}=\dfrac{1+\nu}{E}\left[\nu T_{11}-(1-\nu)T_{22}\right] \\ e_{12}=\dfrac{1+\nu}{E}T_{12} \end{cases} \qquad e_{13}=e_{23}=e_{33}=0$$

$$R_1=R_2=R_3=U_1=U_2=U_3=0 \longrightarrow$$ از شرایط سازگاری کرنش‌ها

$$R_1=0 \Rightarrow \underbrace{\cancel{e_{22,33}}}_{0}+\underbrace{\cancel{e_{33,22}}}_{0}=2\underbrace{\cancel{e_{23,23}}}_{0} \Rightarrow 0=0 \checkmark$$

$$R_2=0 \Rightarrow \underbrace{\cancel{e_{11,33}}}_{0}+\underbrace{\cancel{e_{33,11}}}_{0}=2\underbrace{\cancel{e_{13,13}}}_{0} \Rightarrow 0=0 \checkmark$$

مثلاً $e_{11,33}=0$ چرا؟ $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\dfrac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)T_{11}-\nu T_{22}\right]\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\underbrace{(ax_2^2+bx_1)}_{\text{نسبت به } x_3 \text{ مشتقش صفر}}-\nu\underbrace{(cx_1^2+dx_2)}_{\text{نسبت به } x_3 \text{ مشتقش صفر}}\right]\right)=0$$

$$R_3=0 \Rightarrow e_{11,22}+e_{22,11}=2e_{12,12}$$

$$\cancel{\frac{1+\nu}{E}}\left[(1-\nu)2a\right]+\cancel{\frac{1+\nu}{E}}\left[-2c(1-\nu)\right]=2\left[\underbrace{\cancel{\frac{1+\nu}{E}}}_{0}(0)\right]$$

$$2(1-\nu)\left[c-a\right]=0 \Rightarrow \boxed{a=c}$$

$$u_1=0 \Rightarrow \cancel{e_{11,23}}+\cancel{e_{23,11}}=\cancel{e_{12,13}}+\cancel{e_{13,12}} \Rightarrow 0=0 \checkmark$$

$$u_2=0 \Rightarrow \cancel{e_{22,13}}+\cancel{e_{13,22}}=\cancel{e_{21,23}}+\cancel{e_{23,21}} \Rightarrow 0=0 \checkmark$$

$$u_3=0 \Rightarrow \cancel{e_{33,12}}+\cancel{e_{12,33}}=\cancel{e_{31,32}}+\cancel{e_{32,31}} \Rightarrow 0=0 \checkmark$$

* علت این صفر شدن ها یا خود کرنش صفر است و یا کرنش وجود دارد ولی چون مسئله کرنش مسطح است نسبت به x_3 مشتقشان صفر است.

معادلات تعادل $T_{ij,j}+\cancel{\rho b_i}=\cancel{\rho a_i}$

$i=1 \Rightarrow T_{11,1}+T_{12,2}+\cancel{T_{13,3}}=0$ (1)

$i=2 \Rightarrow T_{21,1}+T_{22,2}+\cancel{T_{23,3}}=0$ (2)

$i=3 \Rightarrow \cancel{T_{31,1}}+\cancel{T_{32,2}}+\cancel{T_{33,3}}=0$

(1) $\Rightarrow b+e=0 \Rightarrow \boxed{b=-e}$

از صفحه ی قبل:

، $\boxed{a=c}$

(2) $\Rightarrow e+d=0 \Rightarrow \boxed{e=-d}$

$\boxed{b=d}$

$$e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)(ax_2^2+bx_1)-\nu(cx_1^2+dx_2)\right]$$

$$u_1=\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)(ax_2^2x_1+\frac{b}{2}x_1^2)-\nu(\frac{ax_1^3}{3}+bx_2x_1)+f_1(x_2)\right]$$

u_2 و μ_1 هم مثل مثال قبل حل می شود

$$e_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\cdots$$

۴-۳- معادله دیفرانسیل $\nabla^2\nabla^2\phi=\nabla^4\phi=0$ را در نظر بگیرید. به روش جداسازی متغیرها فرض کنید:

$$\phi(x,y)=X(x)\,Y(y)$$

معادله حاکم بر $X(x)$ و $Y(y)$ را بدست آورده و آن‌ها را حل نمایید.

$$\nabla^4\phi=0 \Rightarrow \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}=0$$

مشتق مرتبه ۴

$$X^{(4)}(x)\,Y(y)+2X''(x)\,Y''(y)+X(x)\,Y^{(4)}(y)=0$$

معادله‌ی دیفرانسیل حاکم

$$\phi(x,y)=X(x)Y(y) \xrightarrow{\div} \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}+2\frac{X''(x)}{X(x)}\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\frac{Y^{(4)}(y)}{Y(y)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}=-\frac{Y^{(4)}(y)}{Y(y)}-2\frac{X''(x)}{X(x)}\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda$$

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}=\lambda \Rightarrow X^{(4)}(x)-\lambda X(x)=0 \Rightarrow \underbrace{k^4-\lambda=0}_{\text{معادله‌ی مفسر}}$$

$$k^4=\lambda \Rightarrow k=\pm\lambda$$ هر دو مضاعف

$$X(x)=ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x}+\underbrace{cxe^{\lambda x}+Dxe^{-\lambda x}}_{\text{به علت مضاعف بودن}}$$

$$-\frac{Y^{(4)}(y)}{Y(y)}-2\frac{X''(x)}{X(x)}\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda \Rightarrow -\frac{Y^{(4)}(y)}{Y(y)}=\lambda+2\frac{X''(x)}{X(x)}\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\bar\lambda$$

$$-Y^{(4)}(y)=\bar\lambda Y(y) \Rightarrow Y^{(4)}(y)+\bar\lambda Y(y)=0 \Rightarrow k^4+\bar\lambda=0$$

$$\Rightarrow k^4=-\bar\lambda \Rightarrow k=\pm i\bar\lambda$$

$$y=f\cos\bar\lambda y+g\sin\bar\lambda y+hy\cos\bar\lambda y+Jy\sin\bar\lambda y$$

$$\lambda+2\frac{X''(x)}{X(x)}\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\bar\lambda \longrightarrow$$ معادله‌ی دیفرانسیلی که همزمان x و y مشتق داشته باشه

رو بلد نیستم

این حل ادامه دارد

6 6

6 6

7 7

۴-۴- در هریک از حالت‌های زیر تابع $f(y)$ را چنان بدست آورید که $\phi(x,y)$ در معادله‌ی دیفرانسیل $\nabla^2\nabla^2\phi=\nabla^4\phi=0$ صدق کند.

الف) $\phi(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{L}f(y)$

ب) $\phi(x,y)=\cos\frac{n\pi x}{L}f(y)$

پ) $\phi(x,y)=e^{\frac{n\pi x}{L}}f(y)$

حل:

* در تمام مراحل حل $\frac{n\pi}{L}=\alpha_n$ می باشد

الف)

$$\phi(x,y)=[\sin\alpha_n x]f(y)$$

$$\nabla^2\phi=-\alpha_n^2[\sin(\alpha_n x)]f(y)+[\sin(\alpha_n x)]f''(y)$$

$$\nabla^2\nabla^2\phi=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\left(-\alpha_n^2[\sin(\alpha_n x)]f(y)+[\sin(\alpha_n x)]f''(y)\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_n^4[\sin(\alpha_n x)]f(y)-\alpha_n^2[\sin(\alpha_n x)]f''(y)$$

$$-\alpha_n^2[\sin(\alpha_n x)]f''(y)+[\sin(\alpha_n x)]f^{(4)}(y)$$

$$\nabla^2\nabla^2\phi=\sin(\alpha_n x)\left[\alpha_n^4 f(y)-2\alpha_n^2 f''(y)+f^{(4)}(y)\right]=0$$

* آنچه داخل پرانتز است صفر است پس یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه ۴ برای $f(y)$ می شود

* یک معادله مرتبه ۴ و از درجه ۱ خطی، همگن با ضرایب ثابت

$$\beta^4-2\alpha_n^2\beta^2+\alpha_n^4=0$$ ⟶ معادله مشخصه یا همون معادله مفسر

$$(\beta^2-\alpha_n^2)^2=0\Rightarrow\beta^2=\alpha_n^2\Rightarrow\beta=\pm\alpha_n$$ ⟶ ریشه‌ها مضاعف

$$f(y)=Ae^{\alpha_n y}+Be^{-\alpha_n y}+Cye^{\alpha_n y}+Dy^{-\alpha_n y}$$

$$\phi(x,y)=\sin(\alpha_n x)\left(Ae^{\alpha_n y}+Be^{-\alpha_n y}+Cye^{\alpha_n y}+Dy^{-\alpha_n y}\right)$$

$$\phi(x,y)=\left[Ae^{\frac{n\pi}{L}y}+Be^{-\frac{n\pi}{L}y}+Cye^{\frac{n\pi}{L}y}+Dy^{-\frac{n\pi}{L}y}\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

ب)

$$\phi(x,y)=[\cos\alpha_n x]F(y)$$

$$\nabla^4\phi=\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}=0$$

$$\Rightarrow \alpha_n^4[\cos\alpha_n x]F(y)+2[-\alpha_n^2\cos\alpha_n x]F''(y)+[\cos\alpha_n x]F^{(4)}(y)=0$$

$$\Rightarrow [F^{(4)}(y)-2\alpha_n^2F''(y)+\alpha_n F(y)]\cos\alpha_n x=0$$

★ داخل پرانتز صفر

$$F^{(4)}(y)-2\alpha_n^2F''(y)+\alpha_n F(y)=0$$

★ طبق (الف) داریم

$$\phi(x,y)=[Ae^{\frac{n\pi}{L}y}+Be^{-\frac{n\pi}{L}y}+Cye^{\frac{n\pi}{L}y}+Dye^{-\frac{n\pi}{L}y}]\cos\frac{n\pi}{L}x$$

ج)

$$\phi(x,y)=e^{\alpha_n x}F(y)$$

$$\nabla^4\phi=0\Rightarrow\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}=0$$

$$\Rightarrow \alpha_n^4e^{\alpha_n x}F(y)+2\alpha_n^2e^{\alpha_n x}F''(y)+e^{\alpha_n x}F^{(4)}(y)=0$$

$$\Rightarrow[F^{(4)}(y)+2\alpha_n^2F''(y)+\alpha_n^4]e^{\alpha_n x}=0$$

★ داخل پرانتز صفر

$$F^{4}(y)+2\alpha_n^2F''(y)+\alpha_n^4=0$$

$$(\beta^4+2\alpha\beta^2+\alpha_n^4)=0\Rightarrow(\beta^2+\alpha_n^2)^2=0\Rightarrow\beta^2=-\alpha_n^2$$

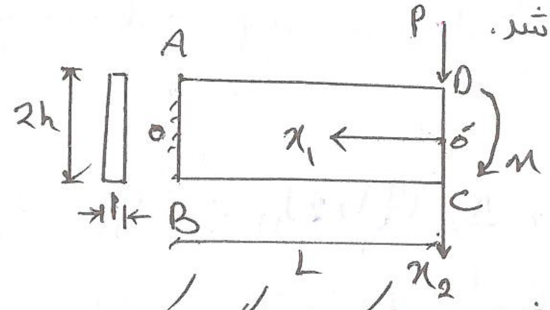
$$\beta=\gamma\pm i\alpha_n \qquad \Rightarrow \beta=\pm i\alpha_n$$

ریشه مضاعف

$$F(y)=A\cos\alpha_n y+B\sin\alpha_n y+Cy\cos\alpha_n y+Dy\sin\alpha_n y$$

$$\beta=\gamma\pm i\alpha \Rightarrow y=e^{\gamma x}[A\cos\alpha y+B\sin\alpha y]$$

۴-۶- تیر طره ای شکل (۴-۱۳) در حالت تنش مسطح داده شده است. اگر وزن مخصوص مصالح ارتجاعی-خطی و همسان تشکیل دهنده این تیر γ باشد و تار میانی oo' در نقطه o گیردار شده باشد، مؤلفه های تانسور تنش و بردار تغییر مکان را در هر نقطه از تیر بدست آورید. تغییر مکان نقطه o' را با نتایج مقاومت مصالح مقایسه کنید. M و P نیرو و لنگر متمرکز مؤثر بر ضلع DC می باشد.



شکل ۴-۱۳- تیر مستطیلی تحت اثر نیروی متمرکز P، لنگر متمرکز M و نیروی حجمی γ در امتداد x_2 با شرط گیرداری در نقطه o ($u_1(L,0)=u_2(L,0)=0$ و $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(L,0)=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(L,0)$)

حل:

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی تنش

وجه AD:

$0<x_1<L$, $x_2=-h$, $\underline{n}=(0,-1)$, $\underline{t}=\underline{0}$

$t_i=T_{ij}n_j \Rightarrow i=1 \Rightarrow \underbrace{t_1}_{0}=T_{11}\underbrace{n_1}_{0}+T_{12}\underbrace{n_2}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,-h)=0}$

$\Rightarrow i=2 \Rightarrow \underbrace{t_2}_{0}=T_{21}\underbrace{n_1}_{0}+T_{22}\underbrace{n_2}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,-h)=0}$

وجه BC:

$0<x_1<L$, $x_2=+h$, $\underline{n}=(0,+1)$, $\underline{t}=\underline{0}$

$t_i=T_{ij}n_j \Rightarrow i=1 \Rightarrow t_1=T_{11}n_1+T_{12}n_2=0 \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,h)=0}$

$i=2 \Rightarrow t_2=T_{21}n_1+T_{22}n_2=0 \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,h)=0}$

وجه Dc :

$x_1=0$, $-h<x_2<+h$, $t_i=(t_1$ و $t_2)$ و $n=(-1,0)$

★ در این وجه از اصل سن ونان استفاده می کنیم یعنی اینکه می توانیم یک نیرو را معادل با چند تا نیروی کوچکتر کنیم (مثلاً $P=10$ را می توان به ده تا یک نیوتنی تبدیل کرد) پس می توان شرایط مرزی تنش را به صورت انتگرال بنویسیم.

$t_i=T_{ij}n_j$

① $i=1 \Rightarrow t_1=T_{11}\underbrace{n_1}_{-1}+T_{12}\underbrace{n_2}_{0} \Rightarrow t_1=-T_{11} \Rightarrow T_{11}=-t_1 \Rightarrow \boxed{-T_{11}=t_1}$

② $i=2 \Rightarrow t_2=T_{21}\underbrace{n_1}_{-1}+T_{22}\underbrace{n_2}_{0} \Rightarrow \boxed{t_2=-T_{21}}$

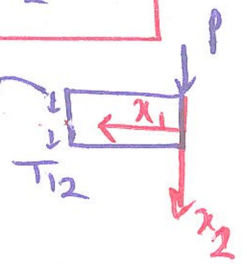
★ طبق اصل سن ونان می خواهیم عمل کنیم و اینکه سه شرط تعادل ΣFx که اینجا میشه ΣFx_1 ، ΣFy اینجا میشه ΣFx_2 و ΣM_{x_3} را می نویسیم

$\Sigma F_{x_1}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h}\underbrace{t_1}_{-T_{11}}dx_2=0 \Rightarrow \boxed{\int_{-h}^{h}T_{11}\,dx_2=0}$

$\Sigma F_{x_2}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h}t_2\,dx_2+P=0$ مثبت

صفحه ی مثبت

پس T_{12} رو به پایین

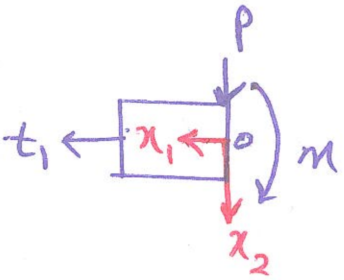


$\int_{-h}^{h}T_{12}\,dx_2+P=0$

$\Rightarrow \boxed{\int_{-h}^{h}T_{12}\,dx_2=-P}$

$\Sigma M_{x_3}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h}t_1x_2\,dx_2-m=0$

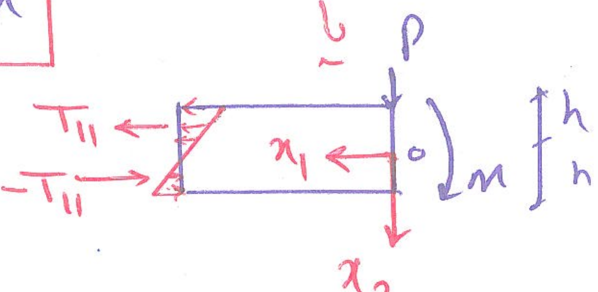
حول نقطه o



$\Rightarrow \int_{-h}^{h}-T_{11}x_2\,dx_2=m$

$\Rightarrow \boxed{\int_{-h}^{h}T_{11}x_2\,dx_2=-m}$

یا



$\Sigma M_{x_3}=0 \Rightarrow \int_{0}^{h}-T_{11}x_2\,dx_2+\int_{0}^{-h}T_{11}x_2\,dx_2-m=0$

$\Rightarrow \int_{0}^{h}-T_{11}x_2\,dx-\int_{-h}^{0}T_{11}x_2\,dx_2=m \Rightarrow \int_{-h}^{h}-T_{11}x_2\,dx_2=m$

گام دوم: حدس Φ و چک کردن $\nabla^4\Phi=0$

★ دوستانی که از اول این حل تمرین و البته جزوه‌ی بنده با بنده همراه بودید من خواهم بگوییم بنده برای حدس Φ یک روش ابتکاری انجام می‌دهم که تقریباً برای تمام شرایط بارگذاری جواب میدهد لازم به ذکر است بنده مسائل کتاب دوم را یکسال پس از گذراندن این درس نوشتم.

★ روش بنده به این صورت که دیاگرام برش سپس خمش را رسم کرده و می‌بینم که تنش نمودارش به چه شکلی است اگر:

① اگر ← M ثابت <= $\sigma = \overbrace{\frac{MC}{I}}^{x\ \text{ثابت}} + \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma = x$ درجه ۱

امثال صفحه‌ی 283 جزوه

در نهایت $\Phi = 3$

پس شد M = ثابت $\Rightarrow \sigma$ = درجه ۱ $\Rightarrow \Phi$ = درجه 3

امثال صفحه‌ی 277 جزوه

② اگر M خطی باشد

M = درجه یک $\Rightarrow \sigma$ = درجه ۲ $\Rightarrow \Phi$ = درجه 4

(امثال ص 290 جزوه)

③ اگر M سهمی باشد (از درجه ۲)

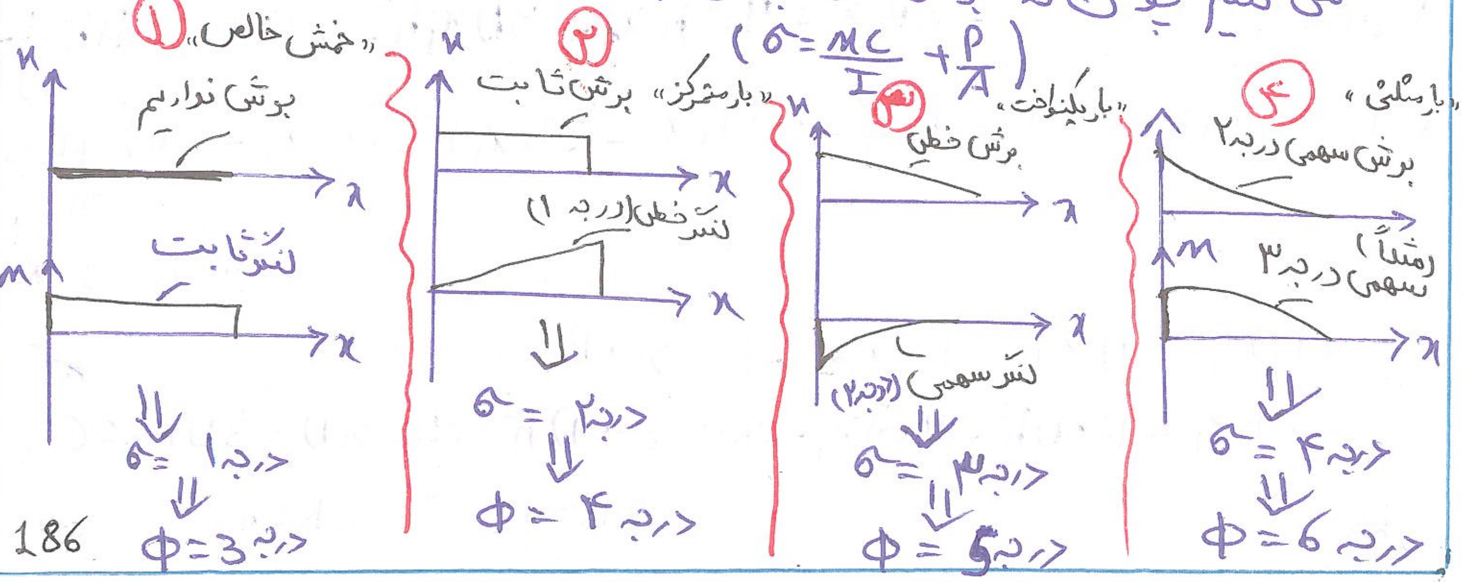
M = درجه ۲ $\Rightarrow \sigma$ = درجه ۳ $\Rightarrow \Phi$ = درجه 5

④ اگر M سهمی باشد (از درجه ۳) (تمرین ۴-۷ که در صفحه‌ی 296 جزوه آمده است)

M = درجه ۳ $\Rightarrow \sigma$ = درجه ۴ $\Rightarrow \Phi$ = درجه 6

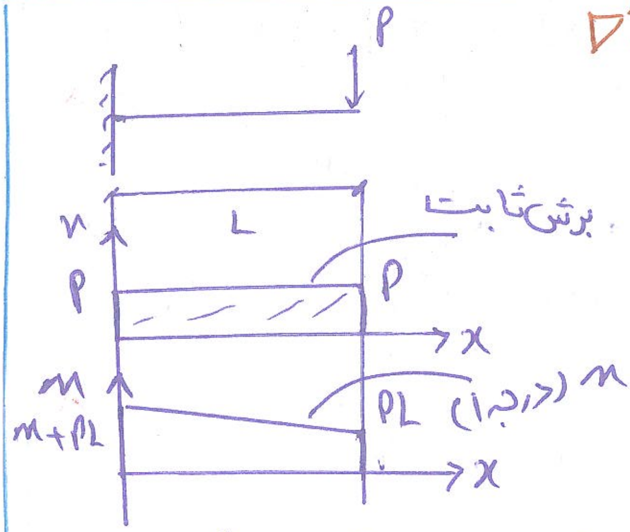
★ لازم به ذکر است که بنده حتماً نمودار برش رسم کرده سپس لنگر را رسم می‌کنیم چون که برش هر درجه‌ای باشد لنگر یک درجه بالاتر است

$$\left(\sigma = \frac{MC}{I} + \frac{P}{A}\right)$$



★ پس گام دوم: حدس Φ و چک کردن $\nabla^4\Phi=0$

★ طبق مطالب گفته شده



برش ثابت $\Rightarrow M$ (درجه ۱) $\Rightarrow \sigma = \dfrac{My}{I} =$ درجه ۲ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Phi = \text{درجه ۴}}$

$$\Phi = Ax_1^4 + Bx_1^3x_2 + Cx_1^2x_2^2 + Dx_1x_2^3 + Ex_2^4 + Fx_1^3 + Gx_1^2x_2 + Hx_1x_2^2 + Ix_2^3 + Jx_1^2 + Kx_1x_2 + Lx_2^2$$

$$\nabla^4\Phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_2^4} = 0$$

$$\Rightarrow 24A + 8C + 24E = 0 \Rightarrow \boxed{-3(A+E) = C}$$ ⊛

$$T_{11} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} = 2Cx_1^2 + 6Dx_1x_2 + 12Ex_2^2 + 2Hx_1 + 6Ix_2 + 2L$$

$$T_{22} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} = 12Ax_1^2 + 6Bx_1x_2 + 2Cx_2^2 + 6Fx_1 + 2Gx_2 + 2J$$

$$T_{12} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2} = -(3Bx_1^2 + 4Cx_1x_2 + 3Dx_2^2 + 2Gx_1 + 2Hx_2 + K)$$

گام سوم: قراردادن تابع تنش ایری در شرایط مرزی

$*\ T_{12}(x_1, -h) = 0 \Rightarrow -3Bx_1^2 + 4Chx_1 - 3Dh^2 - 2Gx_1 + 2Hh - K = 0$ (I)

$*\ T_{12}(x_1, +h) = 0 \Rightarrow -3Bx_1^2 - 4Chx_1 - 3Dh^2 - 2Gx_1 - 2Hh - K = 0$ (II)

★ I و II را جمع می کنیم

$$\Rightarrow -6Bx_1^2 - 6Dh^2 - 4Gx_1 - 2K = 0$$
$$-6Bx_1^2 - 4Gx_1 - (6Dh^2 + 2K) = 0$$

$\Rightarrow \boxed{B = 0}$

★ $\Rightarrow \boxed{3Dh^2 + K = 0}$

$\Rightarrow \boxed{G = 0}$

* I و II را کم می کنیم

$$8chx_1+4Hh=0 \Rightarrow 8ch=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$$
$$4Hh=0 \Rightarrow \boxed{H=0}$$

★ 12 تا ضریب داشتیم با دو شرایط مرزی ۴ تاش صفر شد مونده 8 تا

$$* \; T_{22}(x_1, -h)=0 \Rightarrow 12Ax_1^2+6Fx_1+2J=0 \Rightarrow \boxed{A=F=J=0}$$

$$\Rightarrow * \Rightarrow -3(A+E)+c=0 \Rightarrow \boxed{E=0}$$

$$* \; T_{22}(x_1, +h)=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow \boxed{0=0}$$

* از 12 تا ضریب 8 تا صفر شد مونده ۴ تا (D ، L ، K ، I مونده)

★ حالا از شرایط مرزی انتگرالی استفاده می کنیم.

$$* \int_{-h}^{h} T_{11}\,dx_2=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h}(6Ix_2+2L)\,dx_2$$

$$\Rightarrow \frac{6}{2}Ix_2^2+2Lx_2\Big|_{-h}^{h} \Rightarrow (3Ih^2+2Lh)-(3Ih^2-2Lh)=0$$

$$\Rightarrow 4Lh=0 \Rightarrow \boxed{L=0}$$

$$* \int_{-h}^{+h} T_{12}\,dx_2=-P \Rightarrow \int_{-h}^{+h}\cancel{-}(3Dx_2^2+K)\,dx_2=\cancel{-}P$$

$$\Rightarrow +Dx_2^3+Kx_2\Big|_{-h}^{+h}=P \Rightarrow (Dh^3+Kh)-(-Dh^3-Kh)=P$$

$$\boxed{2Dh^3+2Kh=P} \; ★''$$

$$★', ★'' \Rightarrow \begin{cases} 3Dh^2+K=0 \Rightarrow K=-3Dh^2 \\ 2Dh^3+2Kh=P \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2Dh^3+2(-3Dh^2)h=P \Rightarrow 2Dh^3-6Dh^3=P$$

$$\Rightarrow -4Dh^3=P \Rightarrow \boxed{D=\frac{P}{-4h^3}} \Rightarrow$$

$$K=-3h^2\left(\frac{P}{-4h^3}\right)=\frac{3P}{4h} \Rightarrow \boxed{K=\frac{3P}{4h}}$$

$$*\int_{-h}^{h}(T_{11}x_2\,dx_2)=-M$$

$$\Rightarrow \int_{-h}^{h}(6Dx_1x_2^2+6Ix_2^2)dx_2=-M$$

$$\Rightarrow \left(2\left(\frac{P}{-4\cancel{h^3}}\right)x_1(\cancel{h})^3+2Ih^3\right)$$

$$-\left(2\left(\frac{P}{\cancel{-}4\cancel{h^3}}\right)x_1(\cancel{-}\cancel{h})^3+2I(-h)^3\right)=-M$$

$$\Rightarrow \left(\frac{P}{-2}x_1+2Ih^3\right)-\left(\frac{P}{+2}x_1-2Ih^3\right)=-M$$

$$\underbrace{-Px_1}_{\text{نیرو}}+4Ih^3=-M \quad\Rightarrow\quad 4Ih^3=-M$$

$$\boxed{I=\frac{-M}{4h^3}}$$

★ درنهایت:

$$T_{11}=6\times\frac{P}{-4h^3}x_1x_2^2+6\times\frac{-M}{4h^3}x_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{11}=\frac{3P}{-2h^3}x_1x_2^2-\frac{3M}{2h^3}x_2^2} \quad , \quad \boxed{T_{22}=0}$$

$$T_{12}=-\left(3\left(\frac{P}{-4h^3}\right)x_2^2+\frac{3P}{4h}\right)\Rightarrow \boxed{T_{12}=\frac{3P}{4h^3}x_2^2+\frac{3P}{4h}}$$

گام چهارم: بدست آوردن تغییر مکان ها

★ تغییر مکان ها را از طریق انتگرال گیری از کرنش ها بدست می آوریم.

★ چون مسئله تنش مسطح است از روابط صفحه ی ۱۷۰ کتاب می رویم.

$$e_{11}(x_1,x_2)=\frac{1}{E}(T_{11}-\nu T_{22})$$

$$e_{22}(x_1,x_2)=\frac{1}{E}(-\nu T_{11}+T_{22})$$

$$e_{33}(x_1,x_2)=-\frac{\nu}{E}(T_{11}+T_{22})$$

$$e_{12}(x_1,x_2)=\frac{1+\nu}{E}T_{12} \qquad e_{13}=e_{23}=0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e_{11} = \frac{1}{E}\left(\frac{3P}{-2h^3}x_1 x_2^2 - \frac{3m}{2h^3}x_2^2 - 0\right)$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{E}\int\left(\frac{3P}{-2h^3}x_1 x_2^2 - \frac{3m}{2h^3}x_2^2 - 0\right)dx_1$$

$$\boxed{u_1(x_1, x_2) = \frac{3P}{-4h^3}x_1^2 x_2^2 - \frac{3m}{2h^3}x_1 x_2^2 + f_1(x_2)}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = e_{22} = \frac{1}{E}\left(\cancel{-}\frac{3\nu P}{\cancel{-}2h^3}x_1 x_2^2 + \frac{3\nu m}{2h^3}x_2^2 + 0\right)$$

$$\boxed{u_2(x_1, x_2) = \frac{\nu P}{2Eh^3}x_1 x_2^3 + \frac{\nu m}{2Eh^3}x_2^3 + f_2(x_1)}$$

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\nu}{E}\left(\frac{3P}{-2h^3}x_1 x_2^2 - \frac{3m}{2h^3}x_2^2 + 0\right)$$

$$\boxed{u_3 = \frac{3\nu P}{2Eh^3}x_1 x_2^2 x_3 + \frac{3\nu m}{2Eh^3}x_2^2 x_3 + f_3(x_1, x_2)}$$

* صفحه‌ی $x_3=0$ صفحه‌ی تقارن تیر می‌باشد بنابراین روی این صفحه $u_3=0$ است:

$$u_3(x_1, x_2, 0) = f_3(x_1, x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{3\nu P}{2Eh^3}x_1 x_2^2 x_3 + \frac{3\nu m}{2Eh^3}x_2^2 x_3}$$

$$e_{12} = \frac{1+\nu}{E}T_{12} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1+\nu}{E}\times\left(\frac{3P}{4h^3}x_2^2 + \frac{3P}{4h}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{6Px_1^2 x_2}{-4h^3} - \frac{6m}{2h^3}x_1 x_2 + f_1'(x_2) + \frac{\nu P}{2Eh^3}x_2^3 + f_2'(x_1)\right)$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\left(\frac{3P}{4h^3}x_2^2 + \frac{3P}{4h}\right)$$

$$\frac{3P}{-2h^3}x_1^2x_2 - \frac{3m}{h^3}x_1x_2 + f_1'(x_2) + \frac{\nu P}{2Eh^3}x_2^3 + f_2'(x_1)$$

$$= \frac{3P(1+\nu)}{2h^3E}x_2^2 + \frac{3P(1+\nu)}{2Eh}$$

$$\Rightarrow \frac{3P}{-2h^3}x_1^2x_2 - \frac{3m}{h^3}x_1x_2 + f_2'(x_1)$$

$$= \frac{3P(1+\nu)}{2h^3E}x_2^2 - f_1'(x_2) - \frac{\nu P}{2Eh^3}x_2^3 + \frac{3P(1+\nu)}{2Eh} = A$$

* A باید ثابت باشد تا طرفین برقرار باشند.

$$\frac{3P}{-2h^3}x_1^2x_2 - \frac{3m}{h^3}x_1x_2 + f_2'(x_1) = A \xrightarrow[\text{نسبت به } x_1]{\int}$$

$$f_2(x_1) = Ax_1 + \frac{P}{2h^3}x_1^3x_2 + \frac{3m}{2h^3}x_1^2x_2 + B$$

$$\frac{3P(1+\nu)}{2h^3E}x_2^2 - f_1'(x_2) - \frac{\nu P}{2Eh^3}x_2^3 + \frac{3P(1+\nu)}{2Eh} = A \xrightarrow[\text{نسبت به } x_2]{\int}$$

$$f_1(x_2) = \frac{P(1+\nu)}{2h^3E}x_2^3 + \frac{\nu P}{8Eh^3}x_2^4 + \frac{3P(1+\nu)}{2Eh} - Ax_2 + C$$

* حالا باید $f_1(x_2)$ و $f_2(x_1)$ را در v_1 و v_2 قرار دهیم و ضرایب A و B و C را از شرایط مرزی تکیه‌گاهی بدست آوریم.

ادامه‌ی حل در پیوست

$$u_1 = \frac{3P}{-4h^3}x_1^2 x_2^2 - \frac{3M}{2h^3}x_1 x_2^2 + \frac{P(1+\nu)}{2h^3E}x_2^3 - \frac{\nu P}{8Eh^3}x_2^4 + \frac{3P(1+\nu)}{2Eh} - Ax_2 + C$$

$$u_2 = \frac{\nu P}{2Eh^3}x_1 x_2^3 + \frac{\nu M}{2Eh^3}x_2^3 + Ax_1 + \frac{P}{2h^3}x_1^3 x_2 + \frac{3M}{2h^3}x_1^2 x_2 + B$$

$$u_3 = \frac{3\nu P}{2Eh^3}x_1 x_2^2 x_3 + \frac{3\nu M}{2Eh^3}x_2^2 x_3$$ ✓OK

گام پنجم: قرار دادن شرایط مرزی تکیه‌گاهی در u_1 و u_2 برای بدست آمدن A و B و C

★ از صورت سؤال داریم:

$$u_1(L,0)=0 \Rightarrow \frac{3P(1+\nu)}{2Eh} + C = 0 \quad \boxed{C = -\frac{3P(1+\nu)}{2Eh}}$$

$$u_2(L,0)=0 \Rightarrow \boxed{B=0}$$

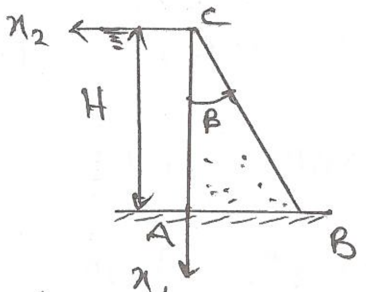
$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(L,0) = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(L,0)$$

$$\Rightarrow 0 = -A + 0 \Rightarrow \boxed{A=0}$$

★ خوب دیگه خوش گذشت A و B و C بدست اومد جایگذاری می‌کنیم داخل u_1 و u_2 در نهایت: u_1 و u_2 بدست می‌آید

۴-۷- سد بتنی با مقطع مثلثی در یک دره با طول زیاد ساخته شده است. این سد در ضلع AB روی شالوده قرار گرفته است. اگر مشخصات مکانیکی مصالح سد E و ν باشد و وزن مخصوص بتن γ فرض شود، توزیع تنش و مؤلفه‌های بردار تغییرمکان را در این سد در اثر فشار هیدرواستاتیک آب پشت سد با وزن مخصوص γ به دست آورید (شکل ۴-۱۴). شرایط مرزی در نقطه A به صورت زیر فرض می‌شود:

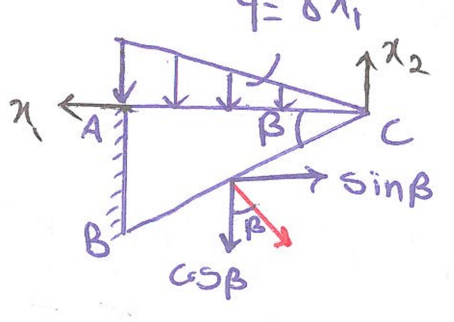
$u_1 = u_2 = u_3 = 0$



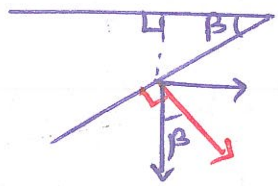
شکل ۴-۱۴- سد بتنی با مقطع مثلثی تحت فشار هیدرواستاتیک

حل: (حل دکتر اسکندری)

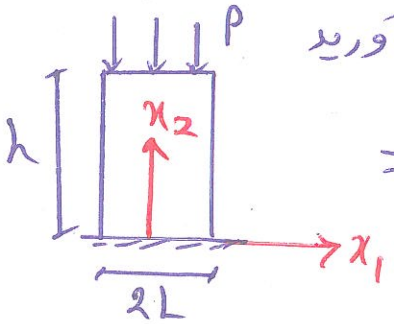
گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی

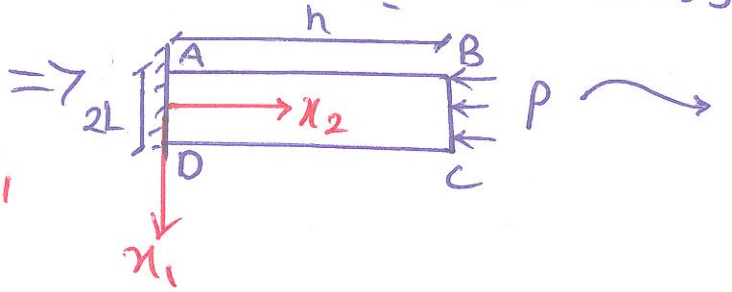


نکته ۱: چطوری فهمیدیم β اونجاست!
زمانی دو زاویه برابر هستند که اضلاع آن‌ها دو به دو بر هم عمود باشند



نکته ۲: از این طرز حل کردن آدم یک نتیجه مهم میگیرد مثلاً اگر سؤال به صورت زیر باشد بگوید ستونی ابعاد L×h و عرض واحد وجود دارد و تحت نیروی فشاری P قرار دارد تنش و تغییرمکان را بدست آورید





اینطوری حل می‌کنیم

اما ادامه صفحه‌ی بعد

توجه: وجه‌های AB و CD باید از اصل سن ونان استفاده کنیم

پس گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی تنش

و به Ac:

$x_2=0$ و $-H<x_1<0$ و $n=(0,1)$ و $\underline{t}=(0,-\gamma x_1)$

$t_i=T_{ij}n_j \Rightarrow i=1 \Rightarrow T_{11}n_1+T_{12}n_2=0 \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,0)=0}$

$i=2 \Rightarrow T_{21}n_1+T_{22}n_2=-\gamma x_1 \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,0)=-\gamma x_1}$

و به Bc:

$x_2=-x_1\tan\beta$ و $n=(-\sin\beta,-\cos\beta)$ و $\underline{t}=(0,0)$

$t_i=T_{ij}n_j \Rightarrow i=1 \Rightarrow T_{11}n_1+T_{12}n_2=0 \Rightarrow -T_{11}\sin\alpha-T_{12}\cos\alpha=0$

$i=2 \Rightarrow -T_{21}n_1-T_{22}n_2=0 \Rightarrow -T_{21}\sin\alpha-T_{22}\cos\alpha=0$

حدس ϕ:

$M=\dfrac{\gamma x_1 x_1 x_2}{2h^3}$ $\quad T_{11}\propto\dfrac{My}{I}=\dfrac{\gamma x_1 x_1}{2}\times\dfrac{x_1}{3}\times\dfrac{x_2}{2}$

متناسب است با

$\Rightarrow$ 4 تنش درجه $\Rightarrow$ 6 درجه ϕ

$\phi(x_1,x_2)=Ax_1^6+Bx_1^5x_2+Cx_1^4x_2^2+Dx_1^3x_2^3+Ex_1^2x_2^4+Fx_1x_2^5$
$+Gx_2^6+Hx_1^5+Ix_1^4x_2+Jx_1^3x_2^2+Kx_1^2x_2^3+Lx_1x_2^4+Mx_2^5+Nx_1^4$
$+Ox_1^3x_2+Px_1^2x_2^2+Qx_1x_2^3+Rx_2^4+Sx_1^3+tx_1^2x_2+Ux_1x_2^2+Vx_2^3$
$+Wx_1^2+Yx_1x_2+Zx_2^2$

چک کردن $\nabla^4\phi=0 \Rightarrow \ldots$

(خودتون مشتق بگیرید
جا گذاشتم)

$$* \; T_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 2Cx_1^4 + 6Dx_1^3x_2 + 12Ex_1^2x_2^2 + 20Fx_1x_2^3 + 30Gx_2^4 + 2Jx_1^3 + 6Kx_1^2x_2 + 12Lx_1x_2^2 + 20Mx_2^3 + 2Px_1^2 + 6qx_1x_2 + 12Rx_2^2 + 2Ux_1 + 6Vx_2 + 2Z$$

$$* \; T_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 30Ax_1^4 + 20Bx_1^3x_2 + 12Cx_1^2x_2^2 + 6Dx_1x_2^3 + 2Ex_2^4 + 20Hx_1^3 + 12Ix_1^2x_2 + 6Jx_1x_2^2 + 2Kx_2^3 + 12Nx_1^2 + 6Ox_1x_2 + 2Px_2^2 + 6Sx_1 + 2tx_2 + 2W$$

$$* \; T_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -(5Bx_1^4 + 8Cx_1^3x_2 + 9Dx_1^2x_2^2 + 8Ex_1x_2^3 + 5Fx_2^4 + 4Ix_1^3 + 6Jx_1^2x_2 + 6Kx_1x_2^2 + 4Lx_2^3 + 3Ox_1^2 + 4Px_1x_2 + 2tx_1 + 8x_2 + Y)$$

گام دوم: اعمال شرایط مرزی تنش و بدست آوردن ضرایب

گام سوم: چون طول زیاد گفته میشه کرنش مسطح و از روابط کرنش مسطح کرنش را بدست می آوریم

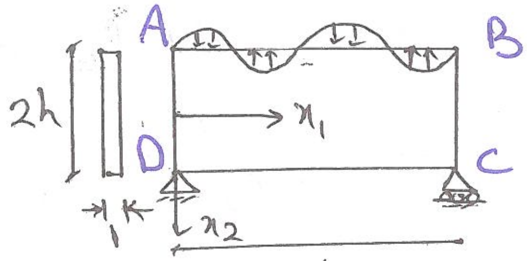
گام چهارم: با انتگرال گیری از کرنش ها، تغییرمکان بدست می آید

گام پنجم: با اعمال شرایط مرزی تغییر مکانی ثابت های انتگرال گیری بدست می آید

(مانند تمرین ۴-۶)

20 20

تمرین ۴-۸ - تیر منشوری با مقطع مستطیلی از مصالح همسان و همگن در دو سر خود بر تکیه‌گاه ساده متکی است و تحت اثر نیروی $q = A\sin\alpha_n x_1$ قرار دارد که در آن A ثابت و $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ (n عدد طبیعی) می‌باشد (شکل ۴-۱۵) اگر E و ν مشخصات مکانیکی مصالح تیر باشند، توزیع تنش و مؤلفه‌های بردار تغییر مکان را در حالت تنش مسطح در این تیر بدست آورید. تابع تنش را به صورت $\Phi = \sin\alpha_n x f(y)$ فرض کنید.



شکل ۴-۱۵ - تیر منشوری تحت نیروی سطحی $q = A\sin\alpha_n x$ (شکل برای $\alpha_n = \frac{4\pi}{L}$ رسم شده است)

حل :

گام اول : مرتب کردن شرایط مرزی

وجه AB :

$0 \leq x_1 \leq L$ و $x_2 = -h$ و $\underline{n} = (0, -1)$ و $\underline{t} = (0, q)$

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1 = T_{11} \underbrace{n_1}_{0} + T_{12} \underbrace{n_2}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1, -h) = 0}$

$i=2 \Rightarrow t_2 = T_{21} \underbrace{n_1}_{0} + T_{22} \underbrace{n_2}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1, -h) = -q}$

وجه DC :

$0 \leq x_1 \leq L$ و $x_2 = +h$ و $\underline{n} = (0, +1)$ و $\underline{t} = \underline{0}$

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1 = T_{11} \underbrace{n_1}_{0} + T_{12} \underbrace{n_2}_{+1} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1, +h) = 0}$

$i=2 \Rightarrow \underbrace{t_2}_{0} = T_{21} \underbrace{n_1}_{0} + T_{22} \underbrace{n_2}_{+1} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1, +h) = 0}$

وجه AD و BC :

$\int_{-h}^{h} T_{11}\, dx_2 = 0$ یا $\boxed{T_{11}(x_1, -h) = 0}$

$\int_{-h}^{h} T_{12}\, dx_2 = -\int_0^L q\, dx_1$

$\int_{-h}^{h} T_{11} x_2\, dx_2 = 0$

★ علت انتگرال‌گیری این هست که بارگذاری یکنواخت نیست دوستان اگر بارگذاری یکنواخت هم باشد باز هم عملاً انتگرال می‌گیریم مثلاً

$\int_0^L q\, dx_1 = q x_1 \Big|_0^L = q(L-0) = qL$ همان نیروی متمرکز

20 20

گام دوم: حدس ϕ و چک کردن $\nabla^4\phi=0$

★ در اینجا سؤال ϕ را به ما داده است پس باید $\nabla^4\phi=0$ کنیم آنگاه یک معادله دیفرانسیل برحسب y بدست می آید.

$$\phi=[\sin(\alpha_n x)]F(y)$$

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-\alpha_n^2[\sin(\alpha_n x)]F(y)+[\sin(\alpha_n x)]F''(y)$$

$$\nabla^2\nabla^2\phi=\alpha_n^4[\sin(\alpha_n x)]F(y)-\alpha_n^2[\sin(\alpha_n x)]F''(y)$$
$$-\alpha_n^2[\sin(\alpha_n x)]F''(y)+[\sin(\alpha_n x)]F^{(4)}(y)$$

$$\nabla^2\nabla^2\phi=\sin(\alpha_n x)\left[\alpha_n^4F(y)-2\alpha_n^2F''(y)+F^{(4)}(y)\right]=0$$

★ آنچه داخل پرانتز است صفر است. پس یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه ۴ برای $F(y)$ می شود.

★ یک معادله مرتبه ۴ معمولی با ضرایب ثابت که $e^{\beta y}$ جوابش است از $e^{\beta y}$ مشتق می گیریم و در رابطه بالا می گذاریم.

$$\beta^4-2\alpha_n^2\beta^2+\alpha_n^4\cancel{\beta^0}=0$$ معادله مشخصه یا همان معادله مفسر

$$(\beta^2-\alpha_n^2)^2=0\Rightarrow\beta^2=\alpha_n^2\Rightarrow\beta=\pm\alpha_n$$ ریشه ها مضاعف

★ ما باید ۴ تا ضریب داشته باشیم.

★ این جواب ها مضاعف هستند پس $ye^{\alpha_n y}$ هم جواب معادله است.

$$F(y)=Ae^{\alpha_n y}+Be^{-\alpha_n y}+Cye^{\alpha_n y}+Dye^{-\alpha_n y}$$

$$\phi(x,y)=\sin(\alpha_n x)\times\left(Ae^{\alpha_n y}+Be^{-\alpha_n y}+Cye^{\alpha_n y}+Dye^{-\alpha_n y}\right)$$

★ چهار ضریب بیشتر نداریم که با نوشتن و اعمال شرایط مرزی بدست می آید

$$*\ T_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\alpha_n^2 \sin(\alpha_n x)\left(Ae^{\alpha_n y} + Be^{-\alpha_n y} + cye^{\alpha_n y} + Dye^{-\alpha_n y}\right)$$

$$*\ T_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sin(\alpha_n x)\left(A\alpha_n^2 e^{\alpha_n y} + B\alpha_n^2 e^{-\alpha_n y} + c\alpha_n^2 y e^{\alpha_n y} + c\, e^{\alpha_n} + D\alpha_n^2 y\, e^{-\alpha_n y} + De^{-\alpha_n y}\right)$$

$$*\ T_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$$T_{12} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(\alpha_n x)\left(A\alpha_n e^{\alpha_n y} - B\alpha_n e^{-\alpha_n y} + c\alpha_n y e^{\alpha_n y} - D\alpha_n y e^{-\alpha_n y}\right)\right)$$

فاکتورگیری

مشتق $2+1$ فاکتورگیری 3

$$T_{12} = -\alpha_n \sin(\alpha_n x)\left(Ae^{\alpha_n y} - Be^{-\alpha_n y} + cye^{\alpha_n y} - Dye^{-\alpha_n y}\right)$$

گام سوم: اعمال شرایط مرزی تنش وبدست آوردن ضرایب

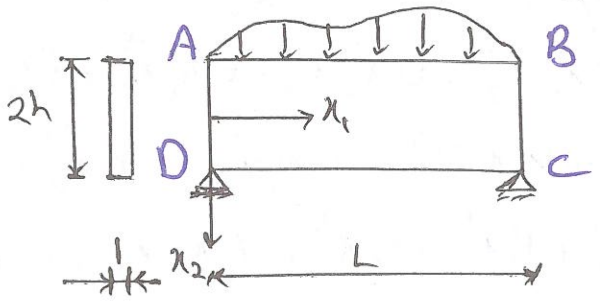
گام چهارم: چون مسئله تنش مسطح است از روابط آن کرنش بدست می آید

گام پنجم: از کرنش ها انتگرال گیری کرده تغییرمکان ها بدست می آید.

گام ششم: با اعمال شرایط مرزی تکیه گاهی ثابت های انتگرال گیری بدست می آید

★ روند حل مثل تمرین ۴-۶

۴-۹- تیر منشوری مسئله (۴-۸) تحت نیروی سطحی $x_2=-h$ ، $q=q(x_1)\,\underline{i}_2$
قرار گرفته است (شکل ۴-۱۶). با استفاده از بسط تابع $q(x_1)$ به سری سینوسی
فوریه، توزیع تنش و بردار تغییرمکان تیر را در حالت تنش مسطح بدست آورید



شکل ۴-۱۶- تیر منشوری تحت نیروی سطحی $q(x_1)$.

حل:

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی تنش

وجه AB:

$0\le x_1\le L$ و $x_2=-h$ و $t_i=(t_1=0\,,\,t_2=+q)$ و $\underline{n}=(0\,,-1)$

بسط تابع سینوسی $q=\frac{1}{L}\int_0^L q(x)\sin\frac{n\pi}{L}x_1\,dx_1$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1=T_{11}\underbrace{\cancel{n_1}}_{0}+T_{12}\underbrace{\cancel{n_2}}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,-h)=0}$

$i=2 \Rightarrow t_2=T_{21}\underbrace{\cancel{n_1}}_{0}+T_{22}\underbrace{\cancel{n_2}}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,-h)=-q}$

وجه DC:

$0\le x_1\le L$ ، $x_2=+h$ ، $t_i=(0\,,0)$ ، $\underline{n}=(0\,,+1)$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=1 \Rightarrow \underbrace{\cancel{t_1}}_{0}=T_{11}\underbrace{\cancel{n_1}}_{0}+T_{12}\underbrace{\cancel{n_2}}_{1} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,+h)=0}$

$i=2 \Rightarrow \underbrace{\cancel{t_2}}_{0}=T_{21}\underbrace{\cancel{n_1}}_{0}+T_{22}\underbrace{\cancel{n_2}}_{1} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,+h)=0}$

وجه‌های AD و BC:

$\int_{-h}^{h}t_1\,dx_2=0$ ، $\int_{-h}^{h}t_2\,dx_2+\int_0^L q\,dx_1=0$

$\int_{-h}^{h}T_{11}\,dx_2=0$ ، $\int_{-h}^{h}T_{12}\,dx_2=-\int_0^L q\,dx_1$ ، $\int_{-h}^{h}T_{11}x_2\,dx_2=0$

$\Downarrow$ $\Sigma F_{x_1}=0$ ، $\Downarrow$ $\Sigma F_{x_2}=0$ ، $\Downarrow$ $\Sigma M_{x_3}=0$ $\int_{-h}^{h}t_1x_2\,dx_2=0$

گام دوم: حدس درجه ϕ و چک کردن در $\nabla^4\phi=0$

* به نظر من بار سهمی و در نهایت لنگر سهموی درجه ۳ داریم ضرب x_2 تنش میشه درجه ۴ و در نهایت ϕ درجه ۶

$$\phi(x_1,x_2)=Ax_1^6+Bx_1^5x_2+Cx_1^4x_2^2+Dx_1^3x_2^3+Ex_1^2x_2^4+Fx_1x_2^5+Gx_2^6$$
$$+Hx_1^5+Ix_1^4x_2+Jx_1^3x_2^2+Kx_1^2x_2^3+Lx_1x_2^4+Mx_2^5+Nx_1^4$$
$$+Ox_1^3x_2+Px_1^2x_2^2+Qx_1x_2^3+Rx_2^4+Sx_1^3+Tx_1^2x_2+Ux_1x_2^2+Vx_2^3$$
$$+Wx_1^2+Yx_1x_2+Zx_2^2$$

$\nabla^4\phi=0 \Longrightarrow \cdots$ چک کردن

$$*\ T_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=2Cx_1^4+6Dx_1^3x_2+12Ex_1^2x_2^2+20Fx_1x_2^3+30Gx_2^4$$
$$+2Jx_1^3+6Kx_1^2x_2+12Lx_1x_2^2+20Mx_2^3+2Px_1^2+6Qx_1x_2$$
$$+12Rx_2^2+2Ux_1+6Vx_2+2Z$$

$$*\ T_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}=30Ax_1^4+20Bx_1^3x_2+12Cx_1^2x_2^2+6Dx_1x_2^3$$
$$+2Ex_2^4+20Hx_1^3+12Ix_1^2x_2+6Jx_1x_2^2+2Kx_2^3+12Nx_1^2+6Ox_1x_2$$
$$+2Px_2^2+6Sx_1+2Tx_2+2W$$

$$*\ T_{12}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}=-(5Bx_1^4+8Cx_1^3x_2+9Dx_1^2x_2^2+8Ex_1x_2^3$$
$$+5Fx_2^4+4Ix_1^3+6Jx_1^2x_2+6Kx_1x_2^2+4Lx_2^3+3Ox_1^2$$
$$+4Px_1x_2+2Tx_1+8x_2+Y$$

گام سوم: اعمال شرایط مرزی و بدست آمدن ضرایب

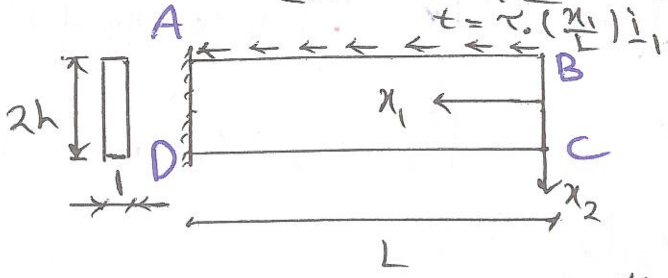
گام چهارم: پس از بدست آمدن تنش ها، کرنش ها را بدست می آوریم

گام پنجم: با انتگرال گیری از کرنش ها، تغییرمکان ها بدست می آید که باید ثابت های انتگرال گیری بدست آید

گام ششم: از طریق شرایط مرزی تکیه گاهی ثابت های انتگرال گیری بدست می آید.

* این مراحل دقیقاً شبیه تمرین ۴-۶ است. واقعاً شرمنده مراحل حل زیاد شما هم لازم نیست همه رو تا آخر حل کنید دو تا رو تا آخر انجام بدید بقیه و بلد باشید.

۴-۱۰- تیر طره ای شکل (۱۷-۴) تحت بردار تنش $t=\tau_0(\frac{x_1}{L})\underline{i}_1$ در ضلع $x_2=-h$ قرار گرفته است. اگر مصالح تیر همسان با ضرایب ν و E باشد، توزیع تنش و مؤلفه های تغییرمکان را در حالت تنش مسطح بدست آورید.



شکل ۴-۱۷- تیر طره ای تحت تنش برشی در ضلع فوقانی

حل:

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی

وجه AB:

$0\le x_1\le L$ و $x_2=-h$ و $\underline{t}_i=(t_1=\tau_0(\frac{x_1}{L})$ و $t_2=0)$ و $\underline{n}=(0,-1)$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1=T_{11}\underbrace{\cancel{n_1}}_{0}+T_{12}\underbrace{\cancel{n_2}}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,-h)=-\tau_0(\frac{x_1}{L})}$

$i=2 \Rightarrow \underbrace{\cancel{t_2}}_{0}=T_{21}\underbrace{\cancel{n_1}}_{0}+T_{22}\underbrace{\cancel{n_2}}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,-h)=0}$

وجه DC:

$0\le x_1\le L$ و $x_2=+h$ و $\underline{t}=0$ و $\underline{n}=(0,+1)$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=1 \Rightarrow \underbrace{\cancel{t_1}}_{0}=T_{11}\underbrace{\cancel{n_1}}_{0}+T_{12}\underbrace{\cancel{n_2}}_{+1} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,+h)=0}$

$i=2 \Rightarrow \underbrace{\cancel{t_2}}_{0}=T_{21}\underbrace{\cancel{n_1}}_{0}+T_{22}\underbrace{\cancel{n_2}}_{+1} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,+h)=0}$

وجه BC:

$x_1=0$ و $-h\le x_2\le h$ و $\underline{t}=(t_1, t_2=0)$ و $\underline{n}=(-1,0)$

$t_i=T_{ij}n_j \Rightarrow i=1 \Rightarrow t_1=T_{11}\underbrace{\cancel{n_1}}_{-1}+T_{12}\underbrace{\cancel{n_2}}_{0} \Rightarrow \boxed{t_1=-T_{11}}$

$i=2 \Rightarrow t_2=T_{21}\underbrace{\cancel{n_1}}_{-1}+T_{22}\underbrace{\cancel{n_2}}_{0} \Rightarrow \boxed{t_2=-T_{21}}$

★ از اصل سن ونان استفاده می کنیم

این شرط مرزی را می توان از اصل سن ونان استفاده نمود $\boxed{T_{21}(x_1,+h)=0}$

$$\Sigma F_{x_1}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} t_1\,dx_2+\int_0^L \tau_0\left(\frac{x_1}{L}\right)dx_1$$

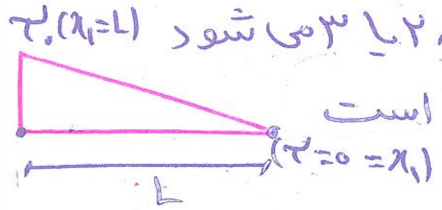
$$\Rightarrow \int_{-h}^{h} -T_{11}\,dx_2+\int_0^L \tau_0\left(\frac{x_1}{L}\right)dx_1 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{11}\,dx_2=\int_0^L \tau_0\left(\frac{x_1}{L}\right)dx_1$$

$$\Sigma F_{x_2}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} t_2\,dx_2=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{12}\,dx_2=0$$ یا $\boxed{T_{21}(x_1,+h)=0}$

$$\Sigma M_{x_3}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{11}\,x_2\,dx_2=0$$

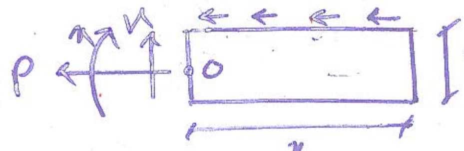
گام دوم: حدس ϕ و چک کردن $\nabla^4\phi=0$

* دوستان این نکته رو یادم رفت بگم دوستانی که نمره ی این فصل را می خواهند حتماً باید رسم دیاگرام های لنگر خمش و برش را بلد باشند حداقل اینکه بدونید لنگر درجه ی چند میشه یا سهمی درجه ۲ یا ۳ می شود



* نیروی $\tau_0(\frac{x_1}{L})$ یک بار مثلثی است چون درجه ۱ است

* این بار تنش باعث ایجاد لنگر شده زیرا اگر



در تیر مقطعی بزنیم به صورت مقابل می شود

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow P=-\int_0^L \tau_0\left(\frac{x_1}{L}\right)dx \quad , \quad \Sigma M=0 \Rightarrow m=\int^L t\,h\,dx_1$$

* پس لنگر درجه ۲ می شود حالا $\sigma=\frac{Mc}{I}$ ⇐ σ درجه ۳ می شود و در نتیجه ϕ درجه ۵

$$\phi=Ax_1^5+Bx_1^4x_2+Cx_1^3x_2^2+Dx_1^2x_2^3+Ex_1x_2^4+Fx_2^5+Gx_1^4+Hx_1^3x_2+Ix_1^2x_2^2$$
$$+Jx_1x_2^3+Kx_2^4+Lx_1^3+Mx_1^2x_2+Nx_1x_2^2+Ox_2^3+Px_1^2+Qx_1x_2+Rx_2^2$$

* $$T_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=2Cx_1^3+6Dx_1^2x_2+12Ex_1x_2^2+20Fx_2^3+2Ix_1^2+6Jx_1x_2+12Kx_2^2+2Nx_1+6Ox_2+2R$$

* $$T_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}=20Ax_1^3+12Bx_1^2x_2+6Cx_1x_2^2+2Dx_2^3+12Gx_1^2+6Hx_1x_2+2Ix_2^2+6Lx_1+2Mx_2+2P$$

* $$T_{12}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}=-(4Bx_1^3+6Cx_1^2x_2+6Dx_1x_2^2+4Ex_2^3+3Hx_1^2+4Ix_1x_2+3Jx_2^2+2Mx_1+2Nx_2+Q)$$

گام سوم: اعمال شرایط مرزی تنش و بدست آوردن ضرایب

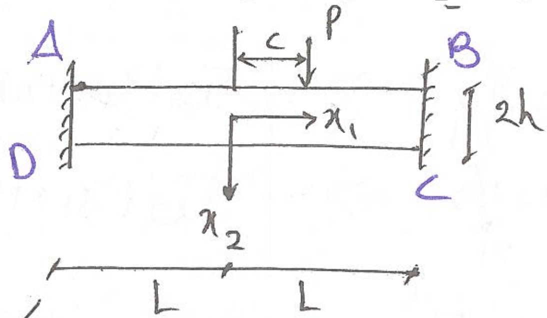
گام چهارم: مسئله تنش مسطح، از روابط مربوط به آن کرنش حاصل می شود.

گام پنجم: با انتگرال گیری از کرنش ها تغییر مکان حاصل می شود

گام ششم: با اعمال شرایط مرزی تکیه گاهی ثابت های انتگرال گیری تغییر مکان بدست می آید

مراحل حل مثال ۴-۶ است

۴-۱۷- تیر منشوری دو سر گیردار با طول $2L$ و ارتفاع $2h$ در حالت تنش مسطح تحت نیروی متمرکز P قرار گرفته است (شکل ۴-۲۶). با فرض همسان بودن مصالح تیر، توزیع تنش ها و مؤلفه های بردار تغییر مکان را بدست آورید.



شکل ۴-۲۶- تیر منشوری تحت نیروی متمرکز

راهنمایی: فرض کنید نیروی ρ روی طول 2ε ($\varepsilon \to 0$) پخش شده است:

$$\rho = \frac{P}{2\varepsilon}$$

حل

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی

$$-L<x_1<L \begin{cases} -L<x_1<0 \\ 0\le x_1<c \\ c\le x_1<L \end{cases} \quad , x_2=-h \quad \text{و} \quad \underline{n}=(0,-1) \quad \text{و} \quad \underline{t}=(0,t_2)$$

$$t_i = T_{ij}\, n_j$$

$$i=1 \Rightarrow \underbrace{t_1}_{0} = T_{11}\underbrace{n_1}_{0} + T_{12}\underbrace{n_2}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{12} = t_1 = 0} \quad \text{یا} \quad T_{12}(x_1,-h)=0$$

$$i=2 \Rightarrow t_2 = T_{21}\underbrace{n_1}_{0} + T_{22}\underbrace{n_2}_{-1} \Rightarrow t_2 = -T_{22}$$

$$\text{اصل سن ونان} \Rightarrow \int_{-L}^{0} \underbrace{t_2}_{0}\, dx_1 + \int_{0}^{c} \underbrace{t_2}_{0}\, dx_1 + \int_{c}^{c+2\varepsilon} \overbrace{t_2}^{-T_{22}\times 1}\, dx_1$$

$$+ \int_{c+2\varepsilon}^{L} \underbrace{t_2}_{0}\, dx_1 + P = 0 \Rightarrow \int_{c}^{c+2\varepsilon} -T_{22}\, dx_1 = -P$$

$$\Rightarrow \int_{c}^{c+2\varepsilon} T_{22}\, dx_1 = P$$

وجه DC: $-L < x_1 < L \,,\, x_2 = +h$ ، $\underline{n} = (0, +1)$ ، $\underline{t} = \underline{0}$

$t_i = T_{ij} n_j$

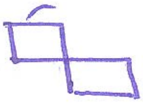
$i=1 \Rightarrow \underset{0}{t_1} = T_{11} \underset{0}{n_1} + T_{12} \underset{+1}{n_2} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1, +h) = 0}$

$i=2 \Rightarrow \underset{0}{t_2} = T_{21} \underset{0}{n_1} + T_{22} \underset{+1}{n_2} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1, +h) = 0}$

گام دوم: حدس ϕ و چک کردن در $\nabla^4 \phi = 0$

لنگرش درجه ۱

درجه ثابت



* در این مثال اگر نمودار برش را ترسیم کنیم خط صاف

$\sigma = \frac{M Y}{I}$ و در نهایت تنش درجه ۲ و در نهایت ϕ از درجه ۴ می شود

$$\phi(x_1, x_2) = A x_1^4 + B x_1^3 x_2 + C x_1^2 x_2^2 + D x_1 x_2^3 + E x_2^4 + F x_1^3 + G x_1^2 x_2 + H x_1 x_2^2 + I x_2^3 + J x_1^2 + K x_1 x_2 + L x_2^2$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow C = -3(E + A)$$

* $T_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 2C x_1^2 + 6D x_1 x_2 + 12E x_2^2 + 2H x_1 + 6I x_2 + 2L$

* $T_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 12A x_1^2 + 6B x_1 x_2 + 2C x_2^2 + 6F x_1 + 2G x_2 + 2J$

* $T_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -(3B x_1^2 + 4C x_1 x_2 + 3D x_2^2 + 2G x_1 + 2H x_2 + K)$

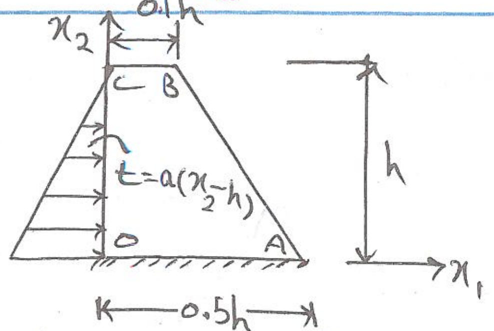
گام سوم: اعمال شرایط مرزی تنش و بدست آوردن ضرایب

گام چهارم: مسئله تنش مسطح از روابط مربوط به آن کرنش حاصل می شود.

گام پنجم: با انتگرال گیری از کرنش ها تغییر مکان حاصل می شود

گام ششم: با اعمال شرایط مرزی تکیه گاهی ثابت های انتگرال گیری تغییر مکان بدست می آید.

مراحل حل مثال ۴-۶ است.



مثال: دیوار حائل شکل مقابل تحت نیروی نشان داده شده قرار دارد. اگر شرایط مرزی در A و o را با

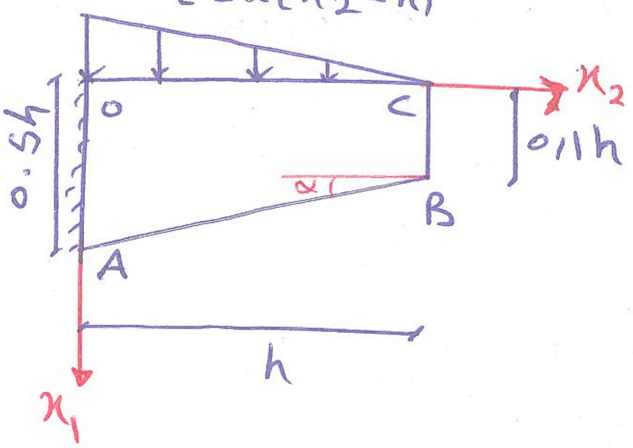
$$u_1(0,0)=u_2(0,0)=0$$

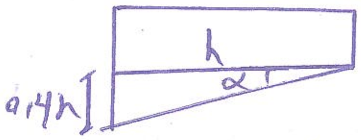
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(0,0)=0$$

جایگزین کنیم، فقط مؤلفه‌های تانسور تنش را در هر نقطه بیابید.

حل:

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی تنش





$$\tan\alpha = \frac{0.4h}{h} \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 22^\circ}$$

وجه oc:

$x_1=0 \quad 0\leq x_2\leq h$ ، $\underline{n}=(-1,0)$ و $\underline{t}=(+a(x_2-h),0)$

$$t_i = T_{ij}n_j$$

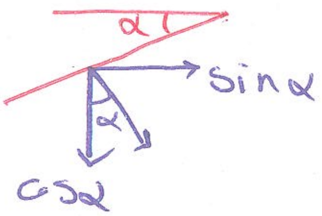
$$i=1 \Rightarrow t_1 = T_{11}\underbrace{n_1}_{-1} + T_{12}\underbrace{n_2}_{0} \Rightarrow T_{11} = -a(x_2-h)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{11}(0,x_2) = -a(x_2-h)}$$

$$i=2 \Rightarrow \underbrace{t_2}_{0} = T_{21}\underbrace{n_1}_{-1} + T_{22}\underbrace{n_2}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{21}(0,x_2)=0}$$

وجه AB:

$\tan\alpha = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2\tan\alpha$ ، $\underline{n}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ، $\underline{t}=\underline{0}$



$$t_i = T_{ij}n_j$$

$$i=1 \Rightarrow \underbrace{t_1}_{0} = T_{11}n_1 + T_{12}n_2$$

$$T_{11}\cos\alpha + T_{12}\sin\alpha = 0 \xRightarrow{\alpha=22^\circ}$$

$$\Rightarrow 0.92T_{11} + 0.37T_{12} = 0$$

$$\Rightarrow 0.92T_{11} = -0.37T_{12} \Rightarrow$$

$$\boxed{T_{12} = -2.48T_{11}}$$

$i=2 \Rightarrow \cancel{t_2}^{0} = T_{21} n_1 + T_{22} n_2 \Rightarrow T_{21}\cos\alpha + T_{22}\sin\alpha = 0$

$\alpha = 22^\circ \Rightarrow 0.92\, T_{21} + 0.37\, T_{22} = 0 \Rightarrow 0.92\, T_{21} = -0.37\, T_{22}$

$$\boxed{T_{22} = -2.48\, T_{21}}$$

و بر CB :

$0 \leq x_1 \leq 0.1h \quad , \; x_2 = h \quad , \; \underline{n} = (0, +1) \; , \; \underline{t} = (t_1, 0)$

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1 = T_{11} \cancel{n_1}^{0} + T_{12} \cancel{n_2}^{+1} \Rightarrow \boxed{t_1 = T_{12}}$

$i=2 \Rightarrow \cancel{t_2}^{0} = T_{21} \cancel{n_1}^{0} + T_{22} \cancel{n_2}^{+1} \Rightarrow \boxed{t_2 = T_{22} = 0}$

★ از اصل سن ونان استفاده می کنیم

$\sum F_{x_2} = 0 \Rightarrow \int_0^{0.1h} t_2 \, dx_1 = 0 \Rightarrow \int_0^{0.1h} T_{22} \, dx_1 = 0$

$\sum F_{x_1} = 0 \Rightarrow \int_0^{0.1h} t_1 \, dx_1 + a(x_2 - h) \times \frac{h}{2} = 0$

$\int_0^{0.1h} T_{12} \, dx_1 = -a(x_2 - h) \times \frac{h}{2}$

$\Rightarrow \int_0^{0.1h} T_{12} \, dx_1 = -a(x_2 - h) \frac{h}{2}$

نکته : درواقع $t_2 = 0$ بود و ما می توانیم از اصل سن ونان استفاده نکنیم و به این صورت هم بنویسیم

$T_{22}(x, h) = 0$

گام دوم: حدس ϕ و چک کردن در $\nabla^4\phi = 0$

روش خودم: بار با صورت مثلث است ⇐ نمودار برش سهمی درجه ۲
⇐ نمودار لنگر خمشی درجه ۳ ⇐ $\sigma = \frac{Mc}{I}$ (M درجه ۳ و c هم یک درجه
اضافه می کند) ⇐ σ درجه ۴ و در نهایت ⇐ $\boxed{\phi = \text{درجه ۶}}$

$$\phi(x_1,x_2) = Ax_1^6 + Bx_1^5x_2 + Cx_1^4x_2^2 + Dx_1^3x_2^3 + Ex_1^2x_2^4 + Fx_1x_2^5 + Gx_2^6$$
$$+ Hx_1^5 + Ix_1^4x_2 + Jx_1^3x_2^2 + Kx_1^2x_2^3 + Lx_1x_2^4 + Mx_2^5 + Nx_1^4$$
$$+ Ox_1^3x_2 + Px_1^2x_2^2 + Qx_1x_2^3 + Rx_2^4 + Sx_1^3 + tx_1^2x_2 + Ux_1x_2^2 + Vx_2^3$$
$$+ Wx_1^2 + Yx_1x_2 + Zx_2^2$$

چک کردن $\nabla^4\phi = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial x_2^4}\right) = 0$

$$360Ax_1^2 + 120Bx_1x_2 + 12Cx_2^2 + 120Hx + 12Ix_2 + 12N$$
$$+ 24Cx_1^2 + 36Dx_1x_2 + 24Ex_2^2 + 12Jx_1 + 12Kx_2 + 4P$$
$$+ 24Ex_1^2 + 120Fx_1x_2 + 360Gx_2^2 + 12Lx_1 + 120Mx_2 + 24R = 0$$

$$* \; T_{11} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = 2Cx_1^4 + 6Dx_1^3x_2 + 12Ex_1^2x_2^2 + 20Fx_1x_2^3 + 30Gx_2^4$$
$$+ 2Jx_1^3 + 6Kx_1^2x_2 + 12Lx_1x_2^2 + 20Mx_2^3 + 2Px_1^2 + 6Qx_1x_2$$
$$+ 12Rx_2^2 + 2Ux_1 + 6Vx_2 + 2Z$$

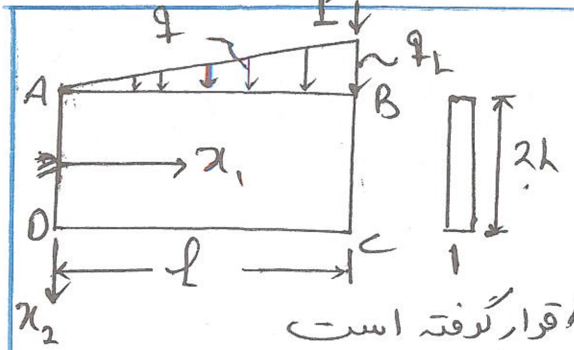
$$* \; T_{22} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} = 30Ax_1^4 + 20Bx_1^3x_2 + 12Cx_1^2x_2^2 + 6Dx_1x_2^3$$
$$+ 2Ex_2^4 + 20Hx_1^3 + 12Ix_1^2x_2 + 6Jx_1x_2^2 + 2Kx_2^3 + 12Nx_1^2 + 6Ox_1x_2$$
$$+ 2Px_2^2 + 6Sx_1 + 2tx_2 + 2W$$

$$* \; T_{12} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2} = -(5Bx_1^4 + 8Cx_1^3x_2 + 9Dx_1^2x_2^2 + 8Ex_1x_2^3$$
$$+ 5Fx_2^4 + 4Ix_1^3 + 6Jx_1^2x_2 + 6Kx_1x_2^2 + 4Lx_2^3 + 3Ox_1^2$$
$$+ 4Px_1x_2 + 2tx_1 + 8x_2 + Y)$$

گام سوم: اعمال شرایط مرزی تنش و بدست آوردن ضرایب

★ ضرایب بدست آید میزان تنش بدست آمده فقط درصورت سؤال تنش را خواسته پس نیازی به محاسبه‌ی تغییر مکان نیست

مراحل مانند تمرین ۴-۶



مسئله چهارم: تیر شکل روبه‌رو با طول l و ارتفاع $2L \gg 1$ ، فقط به نقطه o متکی شده است. این تیر تحت نیروی متمرکز P در نقطه B و نیروی گسترده خطی q روی وجه AB قرار گرفته است تنش‌ها و تغییرمکان‌های تیر را در هر نقطه محاسبه نمایید.

حل:

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی تنش

۱) وجه AB

$$0<x_1<L \ , \ x_2=-h \ , \ \underline{n}=(0,-1) \ , \ \underline{t}=(0,+q)$$

$$t_i=T_{ij}n_j$$

$$i=1 \Rightarrow \underbrace{t_1}_{0}=T_{11}\underbrace{n_1}_{0}+T_{12}\underbrace{n_2}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,-h)=0}$$

$$i=2 \Rightarrow \underbrace{t_2}_{+q}=T_{21}\underbrace{n_1}_{0}+T_{22}\underbrace{n_2}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,-h)=-q}$$

۲) وجه DC:

$$0<x_1<L \ , x_2=+h \ , \underline{n}=(0,+1) \ , \ \underline{t}=\underline{0}$$

$$t_i=T_{ij}n_j$$

$$i=1 \Rightarrow \underbrace{t_1}_{0}=T_{11}\underbrace{n_1}_{0}+T_{12}\underbrace{n_2}_{+1} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,+h)=0}$$

$$i=2 \Rightarrow \underbrace{t_2}_{0}=T_{21}\underbrace{n_1}_{0}+T_{22}\underbrace{n_2}_{+1} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,+h)=0}$$

۳) وجه B: در این وجه باید از اصل سن ونان استفاده کنیم

$$-h<x_2<h \ , x_1=L \ , \ \underline{n}=(1,0) \ , \ \underline{t}=(0,t_2)$$

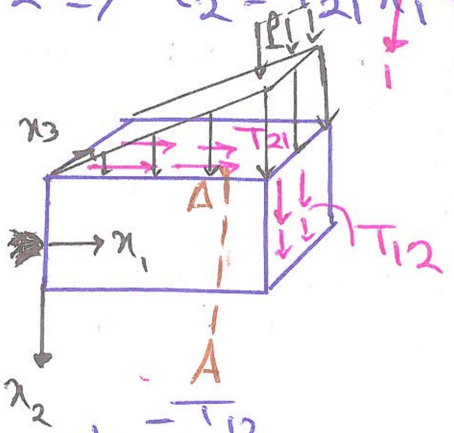
$$t_i=T_{ij}n_j$$

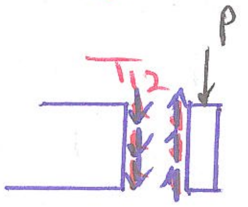
$$i=1 \Rightarrow \underbrace{t_1}_{0}=T_{11}\underbrace{n_1}_{1}+T_{12}\underbrace{n_2}_{0} \Rightarrow t_1=T_{11}(L,x_2)=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} t_1\,dx_2 \times 1=0$$

$$\Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{11}\,dx_2=0$$

$$i=2 \Rightarrow t_2 = T_{21}\overset{1}{n_1} + T_{22}\overset{0}{n_2} \Rightarrow T_{21}(L, x_2) = t_2$$

$$T_{21} = T_{12}$$





A-A مقطع

$$\int_{-h}^{h} \overset{-T_{12}}{t_2}\, dx_2 \times 1 + P = 0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{12}\, dx_2 = +P$$

$$\sum M_{x_3} \Rightarrow \int_{-h}^{h} \overset{-t_1}{T_{11}}\, x_2\, dx_2 = 0$$

چون لنگر گیری در راستای بعد سوم است و طول آن واحد است (لنگر گیری حول AB)

★ در ضمن چون $l \gg 2h$ است پس مسئله تنش مسطح است و از روابط تنش مسطح باید استفاده کنیم.

گام دوم: حدس ϕ نوشتن $\nabla^4\phi = 0$

★ از روش خودم: همان چیزی که صفحه‌ی 152 جزوه‌ی حل تمرین گفتم

بارمثلث → دیاگرام برش سهمی درجه ۲ ⇒ دیاگرام لنگر درجه ۳ ⇒ $\sigma = \frac{Mc}{I}$ درجه ۴ میشه

⇒ ϕ درجه ۶ خواهد شد

★ ϕ درجه ۶، $\nabla^4\phi = 0$، $T_{11} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}$، $T_{22} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}$ و $T_{12} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_2}$

را در صفحه‌ی 208، جزوه‌ی حل تمرین نوشتم دقیقاً مثل همون میشه

گام سوم: اعمال شرایط مرزی تنش و بدست آوردن ضرایب

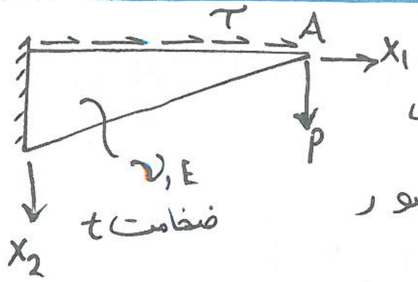
گام چهارم: بدست آوردن تغییر مکان ها

گام پنجم: قراردادن شرایط مرزی تکیه گاهی برای بدست آوردن ضرایب

مراحل حل مانند تمرین ۴-۶ است که در صفحه‌ی 184 جزوه‌ی حل تمرین آمده است

توصیه مهم: دوستان من اگر سر جلسه‌ی امتحان باشم تا گام سوم پیش رفته سپس جا گذاشته و بقیه سؤالات را حل کرده در آخر برای تکمیل به این سؤال بازمی گردم.

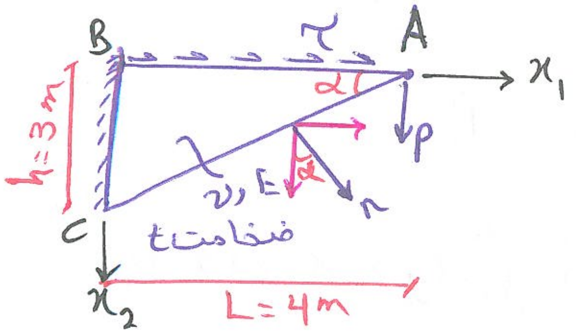
مثال: تیر یک سر گیردار شکل مقابل تحت اثر نیروی متمرکز $\bar{P}$ در نقطه A و نیروی برشی ثابت τ در روا در طول روی وجه AB قرار دارد. مولفه‌های تانسور تنش را در دستگاه دکارتی بدست آورید.



حل:

★ چون در صورت سؤال ابعاد تیر را به ما نداده است این ابعاد فرض می شود

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی تنش



وجه AB:

$0 < x_1 < 4$ و $x_2 = 0$ و $\underline{t} = (t_1 = \tau , t_2 = 0)$ و $\underline{n} = (0, -1)$

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=1 \Rightarrow \underset{\tau}{t_1} = T_{11} \underset{0}{n_1} + T_{12} \underset{-1}{n_2} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1, 0) = -\tau}$

$i=2 \Rightarrow \underset{0}{t_2} = T_{21} \underset{0}{n_1} + T_{22} \underset{-1}{n_2} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1, 0) = 0}$

وجه AC:

★ این وجه علاوه براینکه نکته دیوار حائل وسد را دارد بلکه بایدا از اصل سن ونان نیز استفاده کرد.

$\tan\alpha = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = x_1 \tan\alpha$

$\tan\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4} x_1$

$\underline{n} = \sin\alpha \, \underline{i}_1 + \cos\alpha \, \underline{i}_2$ و $\underline{t} = (t_1, t_2)$

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1 = T_{11} n_1 + T_{12} n_2$

$i=2 \Rightarrow t_2 = T_{21} n_1 + T_{22} n_2$

$$\xrightarrow{+}\sum F_{x_1}=0 \Rightarrow \int_0^3 t_1\times 1\times dx_1=0 \Rightarrow \int_0^3 (T_{11}n_1+T_{12}n_2)\,dx_1=0$$

$$\int_0^3 T_{11}\sin\alpha\, dx_1+\int_0^3 T_{12}\cos\alpha\, dx_1=0$$

$$\downarrow^{+}\sum F_{x_2}=0 \Rightarrow \int_0^4 t_2\, dx_2\times 1+P=0 \Rightarrow \int_0^4 (T_{21}n_1+T_{22}n_2)\,dx_2=-P$$

$$\int_0^4 T_{21}\sin\alpha\, dx_2+T_{22}\cos\alpha\, dx_2=-P$$

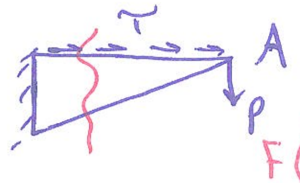
$$\sum M_{AB}=0 \Rightarrow \int_0^3 t_1\times x_2\times 1\times dx_2+\int_0^4 t_2\times x_1\times 1\times dx_1=0$$

$$\Rightarrow \int_0^3 T_{11}\sin\alpha\, x_2\, dx_2+\int_0^3 T_{12}\cos\alpha\, x_2\, dx_2$$
$$+\int_0^4 T_{21}\sin\alpha\, x_1\, dx_2+\int_0^4 T_{22}\cos\alpha\, x_1\, dx_2=0$$

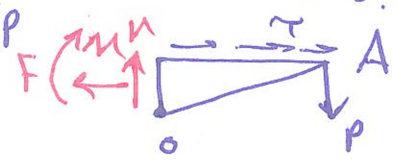
گام دوم: حدس ϕ و نوشتن $\nabla^4\phi=0$

★ برای حدس زدن ϕ باید حواسمان باشد که در تیر هم [illegible] داریم و هم نیروی متمرکز که نیروی برشی باعث ایجاد تنش برشی (τ) و نیروی متمرکز باعث ایجاد تنش نرمال (σ) خواهد شد.

★ پس باید یکبار ϕ را برای نیروی برشی و بار دیگر برای ϕ حدس بزنیم و هر کدام بیشتر شد آن ϕ مورد نظر است.



حدس ϕ برای نیروی برشی: نیروی برشی



نیروی برشی یکنواخت ⇐ لنگر درجه ۱ ⇐ تنش درجه ۲ ⇐ ϕ درجه ۴

حدس ϕ برای بار متمرکز:

بار متمرکز ⇐ برشی یکنواخت ⇐ لنگر درجه ۱ ⇐ تنش درجه ۲ ⇐ ϕ درجه ۴

★ هر دو حالت ϕ درجه ۴ شد پس ϕ نهایی درجه ۴ در نظر گرفته می شود

$$\Phi = Ax_1^4 + Bx_1^3x_2 + Cx_1^2x_2^2 + Dx_1x_2^3 + Ex_2^4 + Fx_1^3 + Gx_1^2x_2$$
$$+ Hx_1x_2^2 + Ix_2^3 + J\cancel{x}_1^2 + Kx_1x_2 + Lx_2^2$$

$$T_{11} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} = 2Cx_1^2 + 6Dx_1x_2 + 12Ex_2^2 + 2Hx_1 + 6Ix_2 + 2L$$

$$T_{22} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} = 12Ax_1^2 + 6Bx_1x_2 + 2Cx_2^2 + 6Fx_1 + 2Gx_2 + 2J$$

$$T_{12} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -3Bx_1^2 + 4Cx_1x_2 + 3Dx_2^2 + 2Gx_1 + 2Hx_2 + K)$$

گام سوم: اعمال شرایط مرزی تنش و بدست آوردن ضرایب

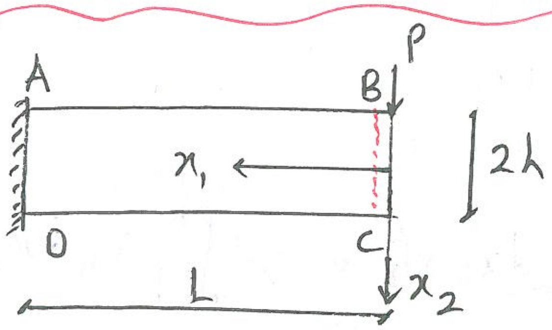
گام چهارم: جایگذاری ضرایب در T_{11}، T_{22} و T_{12} و بدست آمدن مؤلفه‌های تانسور تنش.

★ بقیه همش انتگرال‌گیری هست و به‌عهده خواننده

روند حل مانند تمرین ۴-۶

مروری به مثال‌های حل شده کتاب :

★ در این بخش مثال‌های ۴-۵ ، ۴-۶ و ۴-۷ را شرایط مرزی و حرس‌های آن‌ها را دقیق‌تر مورد بررسی قرار می‌دهیم .



مثال ۴-۵ :

گام اول : نوشتن شرایط مرزی تنش

① وضعیت مرزی

② بودار نرمال

③ بودار تنش

وجه AB :

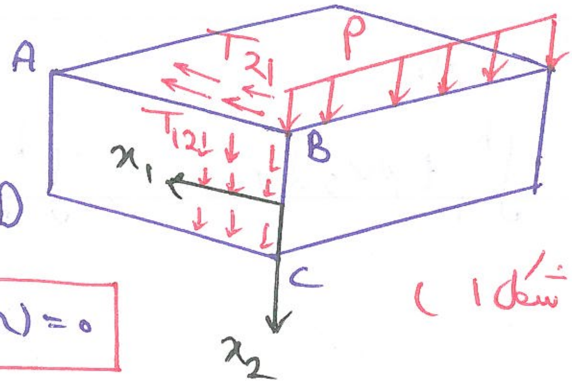
$0<x_1<L$ ، $x_2=-h$ و $\underline{n}=(n_1=0 , n_2=-1)$ و $t(t_1=0 , t_2=0)$

★ چون در سؤال گفته شده است که در وجه BC نیرو وارد می‌شود و $0<x_1<L$ است (یعنی مساوی L نیست) پس بردار نیرو صفر است $\Leftarrow \underline{t}=\underline{0}$.

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=1 \Rightarrow \underset{0}{t_1}=T_{11}\underset{0}{n_1}+T_{12}\underset{-1}{n_2} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,-h)=0}$

$i=2 \Rightarrow \underset{0}{t_2}=T_{21}\underset{0}{n_1}+T_{22}\underset{-1}{n_2} \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,-h)=0}$



(شکل ۱)

وجه BC :

$x_1=0$ و $-h<x_2<h$ ، $n(-1,0)$ ، $t=(t_1=0 , t_2)$

$t_i=T_{ij}n_j$

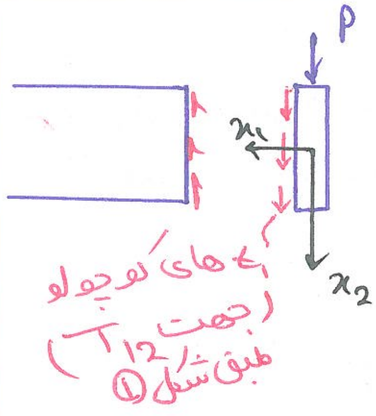
$i=1 \Rightarrow T_{11}n_1+T_{12}\underset{0}{n_2}=\overset{t_1}{0}$

$i=2 \Rightarrow T_{21}\underset{-1}{n_1}+T_{22}\underset{0}{n_2}=t_2$

$\Rightarrow \boxed{T_{11}(0,x_2)=0}$ یا $\boxed{t_1=T_{11}}$

$t_2=-T_{21}$

استفاده از اصل سن ونان



★ طبق اصل سن ونان ما می توانیم نیروی P را به نیروهای خیلی کوچولو تبدیل کرده و با هم جمع بزنیم.

نوشتن تعادل معادلات
$$\begin{cases} \sum F_{x_1}=0 \\ \sum F_{x_2}=0 \\ \sum M_B=0 \end{cases}$$

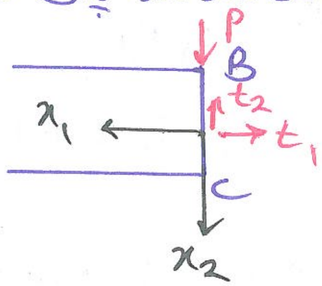
$$\overset{+}{\leftarrow} \sum F_{x_1}=0 \Rightarrow t_1=0 \xrightarrow[\text{سن ونان}]{\text{اصل}} \int_{-h}^{h} -t_1\, dx_2 \times 1=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{11}\, dx_2=0$$

$$+\!\downarrow \sum F_{x_2}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} t_2 \times 1 \times dx_2 + P=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{12}\, dx_2=-P$$

★ برای $\sum M$ حول نقطه B لنگر می گیریم چون در نقطه B لنگر t_2 و P صفر خواهد شد پس فقط t_1 لنگر دارد.

$$\sum M_B=0$$

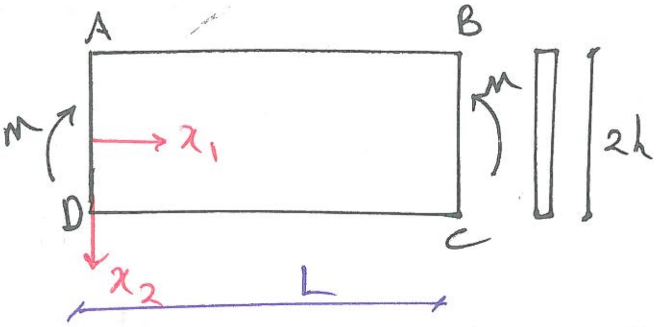
$$\int_{-h}^{h} t_1 \times 1 \times x_2\, dx_2=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{11}\, x_2\, dx_2=0$$



درس ۵:

بار متمرکز ⇐ برش یکنواخت ⇐ لنگر خطی درجه ۱ ⇐ تنش درجه ۲ ⇐ ϕ درجه ۴

مثال ۴-۴ :



وجه AB :

$0<x_1<L$, $x_2=-h$, $n(0,-1)$, $\underline{t}=0$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1=T_{11}n_1+T_{12}n_2 \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,-h)=0}$

$i=2 \Rightarrow t_2=T_{21}n_1+T_{22}n_2 \Rightarrow \boxed{T_{22}(x_1,-h)=0}$

وجه DC : مثل وجه AB فقط (x_1,h) می شود

وجه BC : $x_1=L$, $-h<x_2<h$, $n(+1,0)$, $\underline{t}=(t_1,0)$

$t_2=0$ چون نیروی برشی در این جهت نداریم.

$t_1=T_{ij}n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1=T_{11}\overset{1}{\cancel{n_1}}+T_{12}\overset{0}{\cancel{n_2}} \Rightarrow t_1=T_{11}$

$i=2 \Rightarrow t_2=T_{21}n_1+T_{22}n_2 \Rightarrow \boxed{T_{21}(L,x_2)=0}$

طبق اصل سن ونان داریم

$\Sigma F_{x_1}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} t_1\times 1\times dx_2=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{11}\,dx_2=0$

$\Sigma F_{x_2}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} t_2\times 1\times dx_1=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{12}\,dx_1=0$

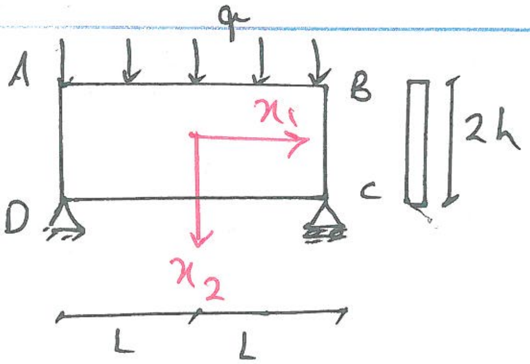
$+\curvearrowleft \Sigma M_A=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} -t_1\times x_2\,dx_2+M=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} -T_{11}\,x_2\,dx_2=-M$

$\Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{11}\,x_2\,dx_2=M$

لنگر ثابت $\Leftarrow$ تنش درجه ۱ $\Leftarrow$ ϕ درجه ۳

$\sigma=\frac{Mc}{I}$

مثال ۴-۷:



وجه AB:

$-L<x_1<L$ ، $x_2=-h$ ، $\underline{n}=(0,-1)$ و $\underline{t}=(0,t_2)$

$t_2=q$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1=T_{11}\underbrace{n_1}_{0}+T_{12}\underbrace{n_2}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{12}(x_1,-h)=0}$

$i=2 \Rightarrow t_2=T_{21}n_1+T_{22}n_2 \Rightarrow T_{22}(x_1,-h)=-q$

وجه BC:

$x_1=L$ ، $-h<x_2<h$ ، $n(1,0)$ و $t(t_1,t_2)$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=1 \Rightarrow t_1=T_{11}n_1+T_{12}n_2 \Rightarrow \underline{t_1=T_{11}}$

$i=2 \Rightarrow t_2=T_{21}n_1+T_{22}n_2 \Rightarrow \underline{t_2=T_{21}}$

$\Sigma F_{x_1}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} t_1\,dx_2=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{11}\,dx_2=0$

$\Sigma F_{x_2}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} t_2\,dx_2+qL=0$

$\int_{-h}^{h} T_{12}\,dx_2=-qL$

$\Sigma M_{AB}=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} t_1 x_2\,dx_2=0 \Rightarrow \int_{-h}^{h} T_{11} x_2\,dx_2=0$

★ علت لنگرگیری حول AB این است که q و t_2 حول AB لنگر ندارند.

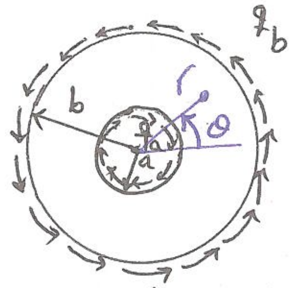
حدس ϕ:

بارگذاری یکنواخت ⇐ برش خطی درجه ۱ ⇐ لنگر سهمی درجه ۲ ⇐ تنش درجه ۳

⇐ ϕ درجه ۵

تمرینات فصل پنجم کتاب تئوری ارتجاعی

۵-۱- دیسک توخالی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مطابق شکل (۵-۲۴) تحت تنش های برشی q_a و q_b قرار گرفته است. تابع تنش ایری و مؤلفه های تانسور تنش را در این دیسک بدست آورید.



شکل ۵-۲۴- دیسک توخالی تحت تنش های برشی داخلی و خارجی

حل:

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی تنش

وجه بیرونی

$\forall\theta$
$$r=b \;,\; \underline{n}=(1,0) \;,\; \underline{t}=(t_r=0 \;,\; t_\theta=q_b)$$

$$t_i=T_{ij}\,n_j$$

$$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}\underset{1}{n_r}+T_{r\theta}\underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{rr}=0}$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}\underset{1}{n_r}+T_{\theta\theta}\underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}=q_b}$$

وجه داخلی:

$\forall\theta$
$$r=a \;,\; \underline{n}=(-1,0) \;,\; \underline{t}=(t_r=0 \;,\; t_\theta=-q_a)$$

$$t_i=T_{ij}\,n_j$$

$$i=r \Rightarrow \underset{0}{t_r}=T_{rr}\underset{-1}{n_r}+T_{r\theta}\underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{rr}=0}$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}\underset{-1}{n_r}+T_{\theta\theta}\underset{0}{n_\theta} \Rightarrow -q_a=-T_{\theta r} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}=q_a}$$

گام دوم: حدس ϕ و تشخیص نوع مسئله

نظر خودم: از نظر من این مسئله از نوع متقارن محوری است بدون وابسته به θ چون بارگذاری و هندسه متقارن است پس از جدول ۲۳۲ کتاب یا 316 جزوه ردیف ها ۱ و ۲ و ۴ جدول را بدین داریم

$$\phi(r) = Ar^2 + B\,Lnr + Cr^2 Lnr$$

★ اما مشکل این جا هست که در صفحه ی قبل $T_{\theta r}(r=b)=q_b$ و $T_{\theta r}(r=a)=q_a$ است پس تنش برشی داریم ولی در جدول ردیفهای ۱ و ۲ و ۴ $T_{r\theta}$ برابر صفر است یعنی ایده آل تنش برشی صفر است.

★ این مثال دقیقاً شبیه مثال ۲-۱۳ است متقارن محوری وابسته به θ پس بر عبارت متقارن محوری با دوران است که نکته ی آن صفحه ی 311 جزوه است که در صفحه ی ۲۲۷ کتاب آمده است. دکتر اسکندری سر کلاس ما فرمودند ما در این درس با متقارن محوری با دوران کاری نداریم به همین دوتا از ردیفها های جدول که باید به متقارن محوری با دوران اختصاص داده شود نیست

$$\Rightarrow \phi(r,\theta) = d_0'\theta r^2 + b_0'\theta\,Lnr + c_0'\theta r^2 Lnr + a_0'\theta \qquad (\text{رابطه } ۵-۳۹)$$

★ به علت محدود بودن شعاع $b_0' c_0' = 0$ است و تأثیری در تابع تنش ندارد.

$$\Rightarrow \phi(r,\theta) = d_0'\theta r^2 + a_0'\theta \longrightarrow \text{ردیفهای ۳ از ۵ جدول}$$

$$T_{rr} = 0 + 2d_0'\theta \Rightarrow T_{rr} = 2d'\theta$$

$$T_{\theta\theta} = 0 + 2d_0'\theta \Rightarrow T_{\theta\theta} = 2d'\theta$$

$$T_{r\theta} = \frac{a_0'}{r^2} - d_0'$$

$$2\mu U_r = 0 + (\chi-1)r\theta\, d_0'$$

$$2\mu U_\theta = -\frac{a_0'}{r^2} - d_0'(\chi+1)r\,Lnr$$

★ تنش مسطح (به علت ضخامت کم) $\Rightarrow$ $\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$

★ در این سؤال مثل سؤال تمرین ۲-۱۳ تغییر مکان در راستای θ (U_θ) داریم ولی در راستای شعاع تغییر مکان نداریم (U_r) پس در $\theta=\alpha+2\pi$ و $\theta=\alpha$ هم U_r صفر است

$$U_r(\theta=2\pi) - U_r(\theta=0) = 0 \Rightarrow d_0'\frac{3-\nu}{1+\nu}r(2\pi) - d_0'\frac{3-\nu}{1+\nu}r(0) = 0 \Rightarrow \boxed{d_0'=0}$$

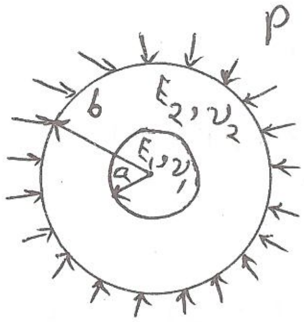
$$\Rightarrow 2\mu U_\theta = -\frac{a_0'}{r^2} \Rightarrow U_\theta = -\frac{1}{2\mu}\cdot\frac{a_0'}{r^2}$$

پس $T_{rr}=0$ و $T_{\theta\theta}=0$ و $T_{r\theta} = \frac{a_0'}{r^2}$

$$r=a \Rightarrow T_{r\theta} = q_a \Rightarrow \frac{a_0'}{a^2} = q_a \Rightarrow a_0' = q_a a^2$$

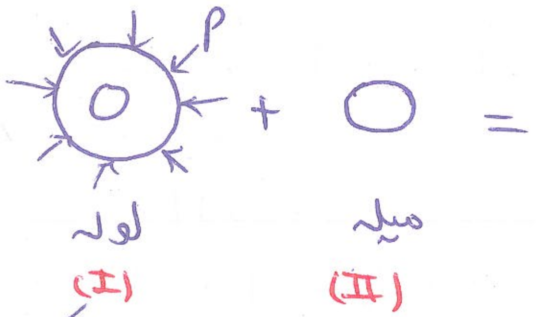
$$r=b \Rightarrow T_{r\theta} = q_b \Rightarrow \frac{a_0'}{b^2} = q_b \Rightarrow a_0' = q_b b^2$$

۵-۲- میله‌ای به شعاع a در داخل لوله‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b قرار گرفته است. مصالح میله ارتجاعی خطی با ضریب یانگ E_1 و ضریب پواسون ν_1 و مصالح لوله با خصوصیات مکانیکی E_2 و ν_2 می‌باشد. این مجموعه مطابق شکل (۵-۲۵) تحت فشار خارجی P قرار گرفته است. تغییرمکان نقاط مختلف میله و لوله را تحت این بارگذاری بدست آورید.



شکل ۵-۲۵- مجموعه‌ی میله به شعاع a و لوله به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b تحت فشار خارجی P

★ برای حل این مسئله از اصل سوپرپوزیشن استفاده می‌کنیم.



★ پس این سؤال را یکبار در حالت (I) و باردیگر در حالت II حل می‌کنیم.

پس گام اول (I): نوشتن یا مرتب کردن شرایط مرزی تنش

و به بیرونی:

$r=b$ و $\underline{n}=(1,0)$ و $\underline{t}=(-P,0)$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}\underbrace{n_r}_{1}+T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{rr}=-P}$

$i=\theta \Rightarrow \underbrace{t_\theta}_{0}=T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{1}+T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}=0}$

و به داخلی:

$r=a$ و $\underline{n}=(-1,0)$ ، $\underline{t}=\underline{0}$

$t_i=T_{ij}n_j \Rightarrow i=r \Rightarrow \underbrace{t_r}_{0}=T_{rr}\underbrace{n_r}_{-1}+T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{rr}=0}$

$i=\theta \Rightarrow \underbrace{t_\theta}_{0}=T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{-1}+T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}=0}$

گام دوم (I) : تشخیص مسئله و درست Φ و نوشتن تنش ها از جدول

* این مسئله قطعاً متقارن محوری است پس وابسته به θ نیست پس ردیف های ۱، ۲ و ۴ جدول را هم برای Φ و برای تنش ها برمی داریم

$$\Phi(r) = Ar^2 + B\ln r + Cr^2\ln r$$

$$T_{rr} = 2A + B\frac{1}{r^2} + -C(2\ln r + 1)$$

$$T_{r\theta} = 0$$

$$T_{\theta\theta} = 2A + \frac{-B}{r^2} + C(2\ln r + 3)$$ ⟵ * از $T_{\theta\theta}$ در شرایط مرزی تنش شرطی نداریم پس فعلاً با $T_{\theta\theta}$ کاری نداریم

گام سوم (I) : اعمال شرایط مرزی تنش

$$r = b \Rightarrow T_{rr} = -P \Rightarrow 2A + \frac{B}{b^2} - C(2\ln b + 1) = -P \quad (1)$$

$$r = a \Rightarrow T_{rr} = 0 \Rightarrow 2A + \frac{B}{a^2} - C(2\ln a + 1) = 0 \quad (2)$$

* در این دو معادله سه مجهول داریم پس نیاز به یک معادله دیگر داریم

گام چهارم (I) : استفاده از تفسیر مکان برای ایجاد یک معادله دیگر

* دوباره از جدول استفاده می کنیم، ستون (4) $2\mu U_\theta^{**}$ را انتخاب کرده و ردیفهای (1) و (2) و (4) رامی نویسیم

$$2\mu U_\theta^{**} = 0 + 0 + C(\chi+1)r\theta \Rightarrow U_\theta = \frac{Cr\theta}{2\mu}(\chi+1)$$

تنش مسطح $\chi = \frac{3-\nu_2}{1+\nu_2} \Rightarrow U_\theta = \frac{Cr\theta}{2\mu_2}\left(\frac{3-\nu_2}{1+\nu_2}+1\right) = \frac{Cr\theta}{2\mu}\;\frac{3-\nu_2+1+\nu_2}{1+\nu_2}$

(ایاس جدول نوشته شده است)

$$\Rightarrow U_\theta = \frac{4Cr\theta}{2\mu(1+\nu)} \quad *$$

جدول ص 182 همین جزوه

$$\Rightarrow \mu = \frac{E}{2(1+\nu_2)}$$

$$*,** \Rightarrow \boxed{U_\theta = \frac{4Cr\theta}{E_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E} = \frac{1}{2\mu(1+\nu_2)} \quad **$$

* $U_\theta = 0$ و از طرفی $\theta = \alpha$ و $\theta = \alpha + 2\pi$ نیز $U_\theta = 0$ می دهند پس اختلاف بین :

$$U_\theta(\theta = 2\pi) - U_\theta(\theta = 0) = 0 \Rightarrow \frac{4Cr\theta}{E_2} = 0 \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

گام پنجم (I) : بدست آوردن ضرایب A و B

$$\begin{cases} 2A + \dfrac{B}{b^2} = -P \\ 2A + \dfrac{B}{a^2} = 0 \end{cases} \quad -$$

$$B\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = -P \Rightarrow B\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}\right) = -P$$

$$\Rightarrow \boxed{B = -\frac{Pa^2b^2}{(a^2-b^2)}}$$

$$\Rightarrow 2A + \frac{-Pa^2b^2}{(a^2-b^2)} \times \frac{1}{b^2} = -P \Rightarrow 2A = -P + \frac{Pa^2}{(a^2-b^2)}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{-P(a^2-b^2) + Pa^2}{(a^2-b^2)} = \frac{+Pb^2}{a^2-b^2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{Pb^2}{2(a^2-b^2)}}$$

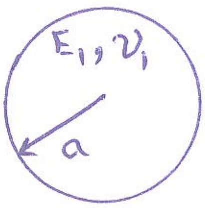
$$2\mu \overset{**}{u}{}_r^{(I)} = A(\chi - 1)r - B\frac{1}{r} + \underbrace{C}_{0}(\chi-1) r \ln r - r$$

$$2\mu u_r^{(I)} = \frac{Pb^2}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{3-\nu_2}{1+\nu_2} - 1\right) r + \frac{Pa^2b^2}{(a^2-b^2)} \frac{1}{r}$$

$$\boxed{u_r^{(I)} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{Pb^2}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{3-\nu}{1+\nu} - 1\right) r + \frac{Pa^2b^2}{(a^2-b^2)} \frac{1}{r}\right]} \quad , \quad \boxed{u_\theta^{(I)} = 0}$$

★ حالا قسمت دوم مسئله حل میشه

گام اول II : مرتب کردن شرایط مرزی تنش



$$t_i = T_{ij} n_j \quad , \quad r = a \quad , \quad \underline{n} = (-1, 0) \quad , \quad \underline{t} = \underline{0}$$

$$i = r \Rightarrow t_r = T_{rr} \underbrace{n_r}_{-1} + T_{r\theta} \underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{rr} = 0}$$

$$i = \theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} n_r + T_{\theta\theta} n_\theta \Rightarrow \boxed{T_{\theta r} = 0}$$

گام دوم II: حدس ϕ و نوشتن تنش ها از جدول و تشخیص مسئله:

* متقارن محوری ردیف های ۲،۸ و ۴

$$\phi(r) = A'r^2 + B'\,Lnr + C'r^2\,Lnr$$

$$\tau_{rr} = 2A' + B'\frac{1}{r^2} + C'(2Lnr+1)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2A' + \frac{B'}{r^2} + C'(2Lnr+3)$$

گام سوم II: اعمال شرایط مرزی تنش

$$r=a \Rightarrow \begin{cases} \tau_{rr} = 2A' + B'\frac{1}{a^2} - C'(2Lna+1) \\ 2\mu \overset{**}{u}_r = A'(\chi-1)a - B'\frac{1}{a^2} + C'\left((\chi-1)r\,Lnr - r\right) \end{cases}$$

اگر u_r هم مساوی صفر باشد

گام چهارم II: استفاده از تفسیر مکان برای ایجاد یک معادله دیگر

* دوباره از جدول استفاده می کنیم ستون (6) $2\mu\overset{**}{u}_\theta$ را انتخاب کرده ردیف ها (1)، (2) و (4) را می نویسیم.

$$\Rightarrow u_\theta = \frac{4C'r\theta}{E_1}$$ از I داریم

* $u_\theta=0$ و از طرفی $\theta=\alpha$ و $\theta=\alpha+2\pi$ نیز $u_\theta=0$ می دهند پس اختلاف بین:

$$u_\theta(\theta=2\pi) - u_\theta(\theta=0) = 0 \Rightarrow \frac{4C'r\theta}{E_1} = 0 \Rightarrow \boxed{C'=0}$$

گام پنجم II: بدست آوردن A' و B' از ★

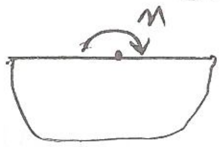
گام آخر: $I + II$

$$u_r = u_r^{I} + u_r^{II}$$

$$u_\theta = u_\theta^{I} + u_\theta^{II}$$

7 7

۵-۵- صفحه ی نیمه متناهی شکل (۵-۲۶) تحت لنگر متمرکز M قرار دارد. تابع تنش ایری و توزیع تنش را در این صفحه بدست آورید.



شکل ۵-۲۶- صفحه ی نیمه متناهی تحت لنگر متمرکز M

★ این مسئله جز مسائل بدون مشخصه طول می باشد بنابراین از معادلات ابعادی تابع تنش ایری را بدست می آوریم.

✱ برای بدست آوردن ϕ شبیه مثال ۵-۷ ص ۳۳۹ کتاب که در جزوه صفحه ی 333 حل شده عمل می کنیم یعنی لنگر M خط بر واحد ضخامت

$$[M]=\frac{FL}{L}=F \quad ①, \quad [\phi]=F \quad ②, \quad ①,② \Rightarrow \left[\frac{\phi}{M}\right]=1=f(\theta)$$

صفحه ی 328 جزوه گفته شد

علت چون θ بی بعد است

$$\phi = M f(\theta)$$

✱ پس از جدول تابع تنش ایری ردیف هایی که فقط وابسته به θ هستند را بر می داریم یعنی ردیف های ۳ و ۲۰ و ۲۱ جدول را بر می داریم

$$\phi = M(A\theta + B\cos 2\theta + C\sin 2\theta)$$

$$\tau_{rr} = M\left(0 - 4B\frac{\cos 2\theta}{r^2} - 4C\frac{\sin 2\theta}{r^2}\right) = \frac{-4M}{r^2}(B\cos 2\theta + C\sin 2\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = M\left(\frac{A}{r^2} - 2B\frac{\sin 2\theta}{r^2} + 2C\frac{\cos 2\theta}{r^2}\right) = \frac{M}{r^2}(A - 2B\sin 2\theta + 2C\cos 2\theta)$$

$$\tau_{\theta\theta} = M(0+0+0) = 0$$

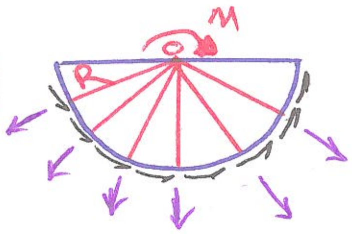
$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = M(A\theta + B\cos 2\theta + C\sin 2\theta) \\ \tau_{rr} = \frac{-4M}{r^2}(B\cos 2\theta + C\sin 2\theta) \\ \tau_{r\theta} = \frac{M}{r^2}(A - 2B\sin 2\theta + 2C\cos 2\theta) \\ \tau_{\theta\theta} = 0 \end{cases}$$

7 7

* ضرایب A، B و C با نوشتن تعادل نیرو ها را در نیم دایره ای به شعاع R می نویسیم:

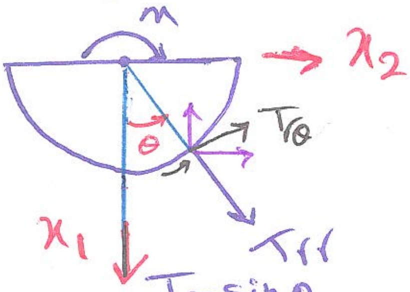
★ در شکل الف یک نیم دایره کوچک در شکل جدا کردیم.

(الف)



* اگر نسبت به مرکز O لنگر بگیریم تنش های شعاعی T_{rr} از مبدأ می گذرد پس گشتاور را ایجاد نمی کند. تنها چیزی که گشتاور را ایجاد می کند $T_{r\theta}$ است.

(ب)



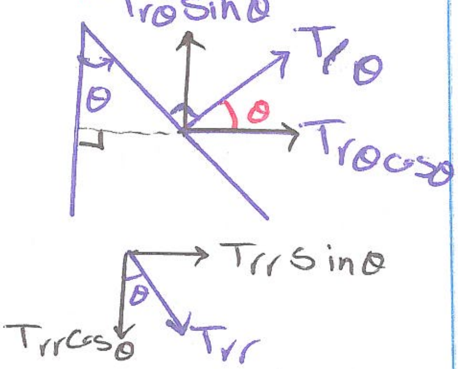
$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} R\,T_{r\theta}\cdot 1\times R\,d\theta = M$$

گشتاور

تنش ضرب

(سطح) میشه نیرو

(پ)



★ در شکل (ب) اومدیم $T_{r\theta}$ را با اینکه می دانیم به صورت منحنی شکل به سطوح وارد می شود به صورت یک بردار صاف نشان دادیم چون در یک المان کوچک مثلاً کمان $d\theta$ برابر یک خط صاف است.

* در شکل (پ) $T_{r\theta}$ را تجزیه کردم و همچنین θ را از یک قضیه هندسی (زمانی دو زاویه با هم برابرند که دو ضلع آن دو به دو بر هم عمود باشند) مکانش را بدست آوردم.

* حالا از استاد ΣF_x و ΣF_y تعادل را می نویسیم

$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (T_{rr}\sin\theta + T_{r\theta}\cos\theta)R\,d\theta = 0 \iff \Sigma F_{x_2}=0$$

$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (T_{rr}\cos\theta - T_{r\theta}\sin\theta)R\,d\theta = 0 \iff \Sigma F_{x_1}=0$$

خلاف محور x_1

$$* \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R\, T_{r\theta}\, R\, d\theta = m \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{m}{r^2}\cdot r^2 (A - 2B\sin 2\theta + 2C\cos 2\theta)\, d\theta = m$$

$$\boxed{R = r}$$

$$\Rightarrow A\theta + \frac{2B}{2}\cos 2\theta + \frac{2C}{2}\sin 2\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A\pi}{2} + B\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}\times 2}_{-1} + 2C\underbrace{\sin 2\times\frac{\pi}{2}}_{0}\right) - \left(-\frac{A\pi}{2} + B\underbrace{\cos -\frac{\pi}{2}\times 2}_{-1} + 2C\underbrace{\sin 2\times\frac{-\pi}{2}}_{0}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2A\pi}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{\pi}}$$

$$* \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (T_{rr}\sin\theta + T_{r\theta}\cos\theta)\, R\, d\theta = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4m}{R^2}\times R(B\cos 2\theta + C\sin 2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{m}{R^2}\times R(A - 2B\sin 2\theta + 2C\cos 2\theta)\cos\theta\, d\theta = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4m}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (B\underbrace{\sin\theta\cos 2\theta}_{\text{تابع فرد}} + C\overbrace{\sin\theta\sin 2\theta}^{\text{تابع زوج}})\, d\theta$$

$$+ \frac{m}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (A\underbrace{\cos\theta}_{\text{زوج}} - 2B\underbrace{\sin 2\theta\cos\theta}_{\text{فرد}} + 2C\underbrace{\cos 2\theta\cos\theta}_{\text{زوج}})\, d\theta =$$

نکته:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

* تک تک انتگرال می گیرم آخر سر جمع می زنم

$$\int \sin\theta\cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\underbrace{\sin(-\theta)}_{-\sin\theta} + \sin 3\theta\Big]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\Big[+\cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Big[\Big(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \frac{1}{3}\underbrace{\cos\Big(\frac{3\pi}{2}\Big)}_{0}\Big) - \Big(\underbrace{\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)}_{0} - \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}\Big)\Big] = 0$$

10 10

★ دوستان این انتگرال که صفحه‌ی ۹ گرفتم بعدش یادم اومد که در ریاضیات داشتیم که اگر بازه‌ی انتگرال گیری متقارن باشد و تابع فرد باشد انتگرال صفر می‌شود ولی اگر تابع زوج باشد می‌توان دو برابر نصف بازه انتگرال گیری، می‌توان انتگرال گرفت پس همین کار را می‌کنیم.

$$\Rightarrow -\frac{4m}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (C\sin\theta\sin2\theta)\,d\theta \quad ☆$$

$$+\frac{m}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (A\cos\theta + 2C\cos\theta\cos2\theta)\,d\theta = 0$$

$$* \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\sin2\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\sin2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(-\theta) - \cos3\theta]\,d\theta = [\sin\theta - \tfrac{1}{3}\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$= [(\sin\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{3}\sin\tfrac{\pi}{2}) - 0] = \frac{2}{3}$$

$$* \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = 2\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0) = 2$$

$$* 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos2\theta\,d\theta = 2\times2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(-\theta) + \cos3\theta]\,d\theta = 2[\sin\theta + \tfrac{1}{3}\sin3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2[(\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1} + \tfrac{1}{3}\underbrace{\sin\tfrac{3\pi}{2}}_{-1}) - (0 - 0)] = 2[1 + \tfrac{-1}{3}] = 2\times\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

* مقادیر انتگرال جایگذاری در ☆

$$\Rightarrow -\frac{4m}{R}\left(\frac{2}{3}C\right) + \frac{2m}{R}A + \frac{4m}{3R}C = 0 \quad \xrightarrow{} A = \frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow -\frac{8m}{3R}C + \frac{4m}{3R}C = -\frac{2m}{R}\times\frac{1}{\pi} \Rightarrow -\frac{4m}{3R}C = -\frac{2m}{R}\times\frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{2C}{3} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \boxed{C = \frac{3}{2\pi}}$$

10 10

$$* \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (T_{rr}\cos\theta - T_{r\theta}\sin\theta) R\,d\theta = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4m}{r^2}\times r\,(B\cos 2\theta + C\sin 2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{m}{r^2}\times r\,(A - 2B\sin 2\theta + 2C\cos 2\theta)\sin\theta\,d\theta = 0$$

$$-\frac{4m}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\overbrace{B\cos 2\theta\cos\theta\,d\theta}^{\text{زوج}}_{\frac{4}{3}B} + \overbrace{C\sin 2\theta\cos\theta}^{\text{فرد}}_{0})\,d\theta$$

$$-\frac{m}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{\cancel{A\sin\theta}}_{\text{فرد}}^{0} - \underbrace{2B\sin 2\theta\sin\theta}_{\text{زوج}} + \underbrace{\cancel{2C\cos 2\theta\sin\theta}}_{\text{فرد}}^{0})\,d\theta = 0$$

$$-2B\times\frac{2}{3}$$

* مقادیر دو انتگرال باقی مانده را از صفحه‌ی ۱۰ داشتیم

$$-\frac{4m}{r}\times\frac{4}{3}B - \frac{m}{r}\times -2B\times\frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

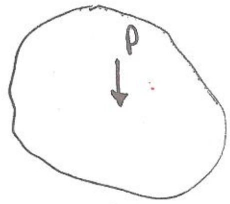
* دوستان ضرایب A، B و C را بدست آوردم ولی این حجم انتگرال گیری قطعاً اشتباه خواهد داشت بنده فقط قصدم روند حل مسئله هست

$$T_{rr} = -\frac{4m}{r^2}\left(\frac{3}{2\pi}\sin 2\theta\right) \Rightarrow T_{rr} = \frac{-6m}{\pi r^2}\sin 2\theta$$

$$T_{r\theta} = \frac{m}{r^2}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{2\times 3}{2\pi}\cos 2\theta\right) \quad \text{و} \quad T_{r\theta} = 0$$

$$\phi = m\left(\frac{\theta}{\pi} + \frac{3}{2\pi}\sin 2\theta\right)$$

۵-۶- صفحه‌ی نامتناهی شکل (۵-۲۷) تحت نیروی P در یک نقطه قرار گرفته است. تابع تنش و توزیع تنش را در نقاط مختلف صفحه بیابید.



شکل ۵-۲۷- صفحه‌ی نامتناهی تحت اثر نیروی P

حل: مسئله از نوع بدون مشخصه طول

$$\left.\begin{array}{l}[P]=\frac{N}{L}\\ N=[\Phi]\\ [r]=L\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\frac{\Phi}{Pr}\right]=1 \Rightarrow \frac{\Phi}{Pr}=f(\theta) \Rightarrow \Phi = Pr\, f(\theta)$$

* جملات ۸ و ۹ را از جدول برمی‌داریم

$$\Phi = Pr(C\theta\sin\theta + D\theta\cos\theta)$$

$$\tau_{rr} = P\left(2C\frac{\cos\theta}{r} - 2D\frac{\sin\theta}{r}\right) \quad \text{و} \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta\theta} = 0$$

* اگر شرایط مرزی شبیه شرایط مرزی صفحه ۲۴۱ کتاب باشد آنگاه

$$C = -\frac{1}{\pi} \quad \text{و} \quad D = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{rr} = -\frac{2P}{\pi}\,\frac{\cos\theta}{2} \quad , \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta\theta} = 0$$

$$[P] = N \Rightarrow [P] = [\Phi] \Rightarrow \frac{P}{[\Phi]} = 1 = f(\theta)$$

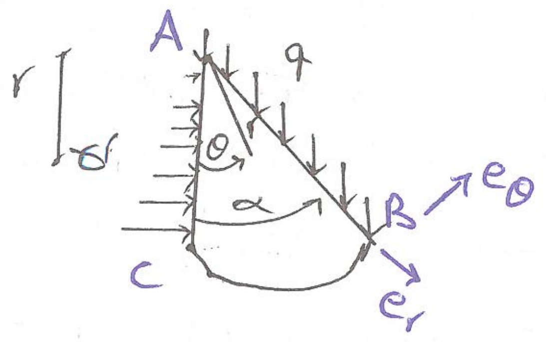
$$P = [\Phi$$

$$[P] = N \Rightarrow P = [\Phi] \Rightarrow \frac{[\Phi]}{P} = 1 = f(\theta)$$

$$[\Phi] = P\,1\,f(\theta) \Rightarrow$$ تو جدول هر چی توابع θ داریم برمی‌داریم از ردیف‌های ۳، ۲۰، ۲۱

برای شرایط مرزی هم یک مقطع دایره‌ای به شعاع r دور P زده مثل دیسک میشه

۵-۷- گوه‌ی شکل (۵-۲۸) تحت اثر نیروی گسترده q در $\theta=\alpha$ و فشار سیال با وزن مخصوص γ در $\theta=0$ قرار دارد. توزیع تنش در نقاط مختلف این گوه را بدست آورید.



★ e_r و e_θ همان i_r و i_θ هستند و در جهت افزایش r و θ هستند

حل:

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی تنش

ضلع AB

$n=(0,1)$ در جهت افزایش θ ، $t_r = q\cos\theta\, i_r$ ، $t_\theta = -q\sin\theta\, i_\theta$ طبق شکل پایین

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=r \Rightarrow t_r = T_{rr}\underbrace{n_r}_{0} + T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{1} \Rightarrow \boxed{T_{r\theta} = q\cos\theta}$

$i=\theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{0} + T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{1} \Rightarrow \boxed{T_{\theta\theta} = -q\sin\theta}$

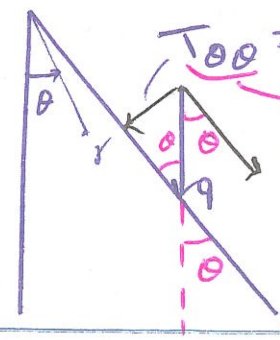
ضلع AC:

$n=(0,-1)$ در جهت کاهش θ ، $t_\theta = \gamma_w r$ در جهت افزایش θ ، $t_r = 0$

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=r \Rightarrow \underbrace{t_r}_{0} = T_{rr}\underbrace{n_r}_{0} + T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{r\theta} = 0}$

$i=\theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{0} + T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{\theta\theta} = -\gamma_w r}$



$T_{\theta\theta} = -q\sin\theta$ صفحه‌ی θ مثبت ولی در جهت کاهش θ پس یک منفی داریم

$T_{\theta r} = q\cos\theta$ صفحه‌ی θ مثبت و در جهت افزایش r پس علامت مثبت

* با ترکیب شرایط مرزی تنش معنی ی قبل Φ را حدس می زنیم

* پس ردیف ها یی را انتخاب می کنیم که برای $T_{\theta\theta}$ $f(r)\sin\theta$ و برای $T_{\theta r}$ $f(r)\cos\theta$ مشترک باشند را برای ردیف Φ و T_{rr} ، $T_{r\theta}$ ، $T_{\theta\theta}$ ، $2\mu u_r^{**}$ و $2\mu v_\theta^{**}$ انتخاب می کنیم ؛ در نتیجه ردیف های ۷ ، ۱۱ و ۱۳ جدول می شود

$$T_{\theta\theta} = f(r)\sin\theta$$
$$T_{\theta r} = f(r)\cos\theta \Rightarrow$$

* ردیف ۹ $T_{\theta\theta}$ و $T_{r\theta}$ آن صفر است شاید می توانند باشد ولی به نظر می رسد

* ردیف ۹ قابل قبول نیست.

$$\Phi = Ar^3\sin\theta + Br\ln r\sin\theta + \frac{C}{r}\sin\theta$$

$$T_{rr} = 2Ar\sin\theta + \frac{B}{r}\sin\theta - \frac{2C}{r^3}\sin\theta$$

$$T_{r\theta} = -2Ar\cos\theta - \frac{B}{r}\cos\theta + \frac{2C}{r^3}\cos\theta$$

$$T_{\theta\theta} = 6Ar\sin\theta + \frac{B}{r}\sin\theta + \frac{2C}{r^3}\sin\theta$$

$$2\mu u_r^{**} = (\chi-2)Ar^2\sin\theta + \frac{1}{2}B\left[-(\chi+1)\theta\cos\theta + (\chi-1)\ln r\sin\theta - \sin\theta\right] + \frac{C}{r^2}\sin\theta$$

$$2\mu v_\theta^{**} = -(\chi+2)Ar^2\cos\theta + \frac{1}{2}B\left[(\chi+1)\theta\sin\theta - (\chi-1)\ln r\cos\theta + \cos\theta\right] + \frac{-C}{r^2}\cos\theta$$

* با فرض تغییر مکان صلب و ضخامت کم تنش مسطح

$$\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

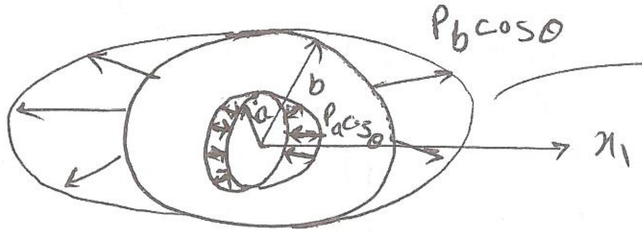
گام سوم: اعمال شرایط مرزی تنش و بدست آوردن ضرایب A ، B و C

$$\star \Rightarrow \begin{cases} T_{r\theta} = 0 \\ T_{r\theta} = q\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & -2Ar\cancel{\cos}\theta - \frac{B}{r}\cancel{\cos}\theta + \frac{2C}{r^3}\cancel{\cos}\theta = 0 \\ & -2Ar\cancel{\cos\theta} - \frac{B}{r}\cancel{\cos\theta} + \frac{2C}{r^3}\cancel{\cos\theta} = q\cancel{\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} T_{\theta\theta} = -q\sin\theta \\ T_{\theta\theta} = -\gamma_w r \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & 6Ar\cancel{\sin}\theta + \frac{B}{r}\cancel{\sin}\theta + \frac{2C}{r^3}\cancel{\sin}\theta = -q\cancel{\sin}\theta \\ & 6Ar\sin\theta + \frac{B}{r}\sin\theta + \frac{2C}{r^3}\sin\theta = -\gamma_w r \end{aligned}$$

* از روابط بالا A ، B و C بدست می آید

۵-۸- دیسک نازک و توخالی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b تحت تنش های شعاعی $P_a \cos\theta$ در وجه داخلی و $P_b \cos\theta$ در وجه خارجی قرار گرفته است (شکل ۵-۲۹). تابع تنش ایری و مؤلفه های تانسور تنش در این دیسک را بیابید.



شکل را باید بکشید!
لطفاً به کتاب مراجعه شود

شکل ۵-۲۹- دیسک توخالی تحت تنش های شعاعی با توزیع کسینوس

حل:

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی

وجه داخلی:

$\forall\theta$

$r=a \;,\; \underline{n}=(-1,0) \;,\; t_r=-P_a\cos\theta$

$t_\theta=0$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}\underbrace{n_r}_{-1}+T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{rr}(r=a)=P_a\cos\theta}$

$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{-1}+T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}(r=a)=0}$

وجه بیرونی:

$\forall\theta$

$r=b \;,\; \underline{n}=(1,0) \;,\; t_r=P_b\cos\theta$

$t_\theta=0$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}\underbrace{n_r}_{1}+T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{rr}(r=b)=P_b\cos\theta}$

$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{1}+T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{1} \Rightarrow \boxed{T_{r\theta}(r=b)=0}$

گام دوم: حدس Φ

$\Rightarrow T_{rr}=P(r)\cos\theta$ با استفاده از T_{rr}، Φ را حدس می زنیم

* در جدول دنبال T_{rr} هایی می گردیم که $P(r)\cos\theta$ داشته باشند (مثلاً $\frac{1}{r^2}\cos\theta$)

که ردیف های ۱۰،۸،۶ و ۱۲ را برمی داریم و Φ، T_{rr}، $T_{\theta r}$ و $T_{\theta\theta}$ را می نویسیم

$$\phi = Ar^3\cos\theta + Br\theta\sin\theta + Cr\ln r\cos\theta + \frac{D}{r}\cos\theta$$

$$\tau_{rr} = 2Ar\cos\theta + 2B\frac{\cos\theta}{r} + C\frac{\cos\theta}{r} - 2D\frac{\cos\theta}{r^3}$$

$$\tau_{r\theta} = 2r\sin\theta + 0 + C\frac{\sin\theta}{r} - \frac{2D\sin\theta}{r^3}$$

$$\tau_{\theta\theta} = 6Ar\cos\theta + 0 + \frac{\cos\theta}{r} + 2D\frac{\cos\theta}{r^3}$$

گام سوم: اعمال شرایط مرزی و بدست آوردن A، B، C و D

$$\tau_{rr}(r=a) = P_a\cos\theta \Rightarrow 2Aa\cancel{\cos\theta} + \frac{2B\cancel{\cos\theta}}{a} + C\frac{\cancel{\cos\theta}}{a} - \frac{2D\cos\theta}{a^3} = P_a\cancel{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \left(2Aa + \frac{2B}{a} + \frac{C}{a} - \frac{2D}{a^3}\right) = P_a \quad (1) \times a \rightarrow$$ برای ساده سازی

$$\tau_{rr}(r=b) = P_b\cos\theta \Rightarrow \left(2Ab + \frac{2B}{b} + \frac{C}{b} - \frac{2D}{b^3}\right) = P_b \quad (2) \times b$$

$$\tau_{r\theta}(r=a) = 0 \Rightarrow 2aA\cancel{\sin\theta} + C\frac{\cancel{\sin\theta}}{a} - 2D\frac{\cancel{\sin\theta}}{a^3} = 0$$

$$\Rightarrow 2aA + \frac{C}{a} - \frac{2D}{a^3} = 0 \quad (3) \times a$$

$$\tau_{r\theta}(r=b) = 0 \Rightarrow \left(2bA + \frac{C}{b} - \frac{2D}{b^3}\right) = 0 \quad (4) \times b$$

$$\begin{matrix} 1-2 \\ 3-4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2A(a^2-b^2) + 2B(1-1) + 2B(1-1) + C(1-1) - 2D\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = P_a a - P_b b \\ 2A(a^2-b^2) + C(1-1) - 2D\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0 \quad (5) \end{cases}$$

$$P_a a - P_b b = 0 \Rightarrow \frac{P_a}{a} = \frac{P_b}{b} \quad (6)$$

$$(5) \Rightarrow A = \frac{2D\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)}{2(a^2-b^2)} = \frac{-D}{a^2b^2} \quad (7)$$

$$2\mu u_r = A(\chi-2)r^2\cos\theta + \frac{B}{2}\left[(\chi-1)\theta\sin\theta + (\chi+1)\ln r\cos\theta - \cos\theta\right]$$
$$+\frac{C}{2}\left[(\chi+1)\theta\sin\theta + (\chi-1)\ln r\cos\theta - \cos\theta\right] + D\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu} \rightsquigarrow$ تنش مسطح

$$2\mu u_\theta = A(\chi-2) - r^2\sin\theta + \frac{B}{2}\left[(\chi-1)\theta\cos\theta - (\chi+1)\ln r\sin\theta - \sin\theta\right]$$
$$+\frac{C}{2}\left[(\chi+1)\theta\cos\theta - (\chi-1)\ln r\sin\theta - \sin\theta\right] + D\frac{\sin\theta}{r^2}$$

* u_r و u_θ اختلافشان در $\theta=\alpha$ و $\theta=2\pi+\alpha$ برابر صفر است

$u_r(\theta=\frac{\pi}{2}) - u_r(\frac{5\pi}{2}) = 0$ $\qquad \frac{\pi}{2}+2\pi = \frac{5\pi}{2}$

* چون خواستیم از دست Ln راحت بشیم $\alpha=\frac{\pi}{2}$ را انتخاب کردیم

$$\Rightarrow \frac{B}{2}\left[(\chi-1)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{C}{2}\left[(\chi+1)\frac{\pi}{2}\right] - \frac{B}{2}\left[(\chi-1)\frac{5\pi}{2}\right] - \frac{C}{2}\left[(\chi+1)\frac{5\pi}{2}\right] = 0$$

$$\frac{B}{2}(\chi-1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{C}{2}(\chi+1)\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{B}{\cancel{2}}\times\cancel{\frac{\pi}{2}}(\chi-1)(1-5) = \frac{C}{\cancel{2}}\times\cancel{\frac{\pi}{2}}(\chi+1)(5-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{-B(\chi-1)}{(\chi+1)}} \quad (8)$$

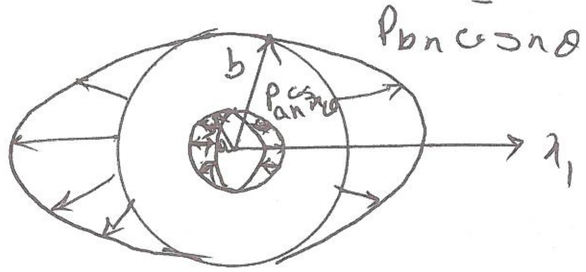
$u_\theta(\theta=\frac{\pi}{2}) - u_\theta(\frac{5\pi}{2}) = 0 \Rightarrow 0=0$

* با قراردادن 7 و 8 در 1، 2، 3، 4 مقادیر A و B و C و D بدست می آید و تابع تنش ϕ و توزیع تنش به دست می آید

سؤالات 5-10 و 5-11 هم به این صورت حل می شود

۵-۹- دیسک مسئله (۵-۸) را در نظر می گیریم. اگر تنش های شعاعی $P_{an}\cos n\theta$ و $P_{bn}\cos n\theta$ به ترتیب بر وجه داخلی و خارجی اثر کنند، توزیع تنش ایجادشده در این دیسک را بدست آورید.

حل:



$$\text{بارخارجی}\begin{cases} P_{an}\cos n\theta \\ P_{bn}\cos n\theta \end{cases}$$

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی

وبه داخلی:

$\forall\theta$

$r=a\,,\quad \underline{n}=(-1,0)\,,\quad t_r=-P_{an}\cos n\theta$

$t_\theta=0$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}n_r+T_{r\theta}n_\theta \Rightarrow \boxed{T_{rr}(r=a)=P_{an}\cos n\theta}$

$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}n_r+T_{\theta\theta}n_\theta \Rightarrow \boxed{T_{r\theta}(r=a)=0}$

وبه بیرونی:

$\forall\theta$

$r=b\,,\quad \underline{n}=(1,0)\,,\quad t_r=P_{bn}\cos n\theta$

$t_\theta=0$

$t_i=T_{ij}n_j$

$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}n_r+T_{r\theta}n_\theta \Rightarrow \boxed{T_{rr}(r=b)=P_{bn}\cos n\theta}$

$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}n_r+T_{\theta\theta}n_\theta \Rightarrow \boxed{T_{r\theta}(r=b)=0}$

گام دوم: حدس ϕ

★ ϕ را از طریق $T_{rr}=f(r)_n\cos n\theta$ حدس می زنیم پس ردیفهای ۲۲، ۲۴، ۲۶ و ۲۸ جدول را برمی داریم و ϕ_n ، T_{rr} ، $T_{\theta r}$ و $T_{\theta\theta}$ را می نویسیم.

$$\phi_n=Ar^n\cos n\theta+Br^{n+2}\cos n\theta+\frac{C}{r^n}\cos n\theta+\frac{D}{r^{n-2}}\cos n\theta$$

$$T_{rr}=\left[A(-n)(n-1)r^{n-2}+B(-n-1)(n-2)r^n+C(-n-1)n\times\frac{1}{r^{n+2}}+\frac{D}{r^n}(-n-2)(n-1)\right]\cos n\theta$$

$$T_{\theta r}=\left[An(n-1)r^{n-2}+B(n+1)nr^n+C(n-1)\frac{1}{r^{n+2}}+\frac{D}{r^n}(-n)(n-1)\right]\sin n\theta$$

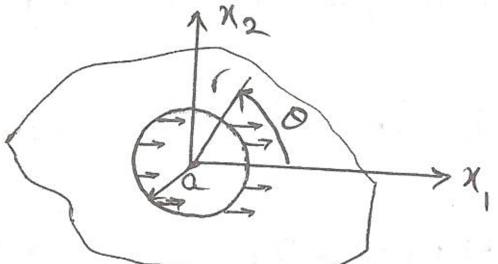
$$T_{\theta\theta}=\left[An(n-1)r^{n-2}+B(n+2)(n+1)r^n+C(n+1)n+\frac{1}{r^{n+2}}+\frac{D(n-1)(n-2)}{r^2}\right]\cos n\theta$$

★ با اعمال شرایط مرزی ← ضرایب A و B و C و D بدست می آید

۵-۱۲ - صفحه ای نامتناهی دارای سوراخی دایره ای شکل به شعاع a مفروض است. این صفحه درون به سوراخ تحت تنش های ثابت P_a در جهت محور x قرار گرفته است (شکل ۵-۳۱). تابع تنش ایری و مؤلفه های تانسور تنش را بدست آورید. باید توجه داشت که در بی نهایت همه ی مؤلفه های تنش و تغییر شکل صفر هستند.

**

V وعددو مرور



شکل ۵-۳۱- صفحه ی نامتناهی با سوراخی به شعاع a تحت تنش های ثابت P_a

حل:

گام اول: تشخیص نوع حل مسئله

★ دوستان چیزی که خودم حدس می زنم هرگاه نیرو در جهت محورهای $x_1 x_2$ وارد شود نه در راستای r و θ باید تنش ها را توسط ماتریس تبدیل دستگاه استوانه ای به دستگاه $r\theta$ آورد. رفرنس حل این سؤال مثال ۵-۱۵ ص ۲۵۴ کتاب است

$r \to \infty \qquad v_r = v_\theta = 0 \quad , \quad T_{rr} = T_{r\theta} = T_{\theta\theta} = 0$

$$\bar{T} = A T A^T \qquad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} T_{11} = P_a & T_{12} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & +\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_a\cos\theta & 0 \\ -P_a\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a\cos^2\theta & -\frac{P_a}{2}\sin 2\theta \\ -\frac{P_a}{2}\sin 2\theta & P_a\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$★ \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \quad , \quad ★ \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

$\Rightarrow T_{rr} = \frac{P_a}{2}(1+\cos 2\theta) \quad , \quad T_{r\theta} = -\frac{P_a}{2}\sin 2\theta \quad , \quad T_{\theta\theta} = \frac{P_a}{2}(1-\cos 2\theta)$

★ پس در جدول در مرحله ی اول به دنبال T_{rr} ، $T_{r\theta}$ و $T_{\theta\theta}$ هایی می گردیم که فقط وابسته به r باشند که ردیف های ۱ و ۲ و ۴ جدول می شود

★ در مرحله ی دوم به دنبال ردیف هایی می گردیم که T_{rr} و $T_{\theta\theta}$ آن ها وابسته به $g(r)\cos 2\theta$ باشد و همزمان $T_{r\theta}$ آن ها وابسته به $g(r)\sin 2\theta$ است

نکته مهم: اگر یک وقتی مثلاً T_{rr} وابسته به $g(r)\cos 2\theta$ بود ولی $T_{\theta\theta}$ صفر بود و $T_{\theta r}$ هم وابسته به $g(r)\sin 2\theta$ بود آنگاه آن ردیف هم قبول است (هر چی شبیه این قبول است)

$$\Phi = Ar^2 + B\ln r + Cr^2\ln r + Dr^2\cos 2\theta + Er^4\cos 2\theta + \frac{F\cos 2\theta}{r^2} + G\cos 2\theta +$$

مرحله‌ی اول: ردیف‌های ۱و۲و۴ ~ دوم: ~ ۱۴،۱۶،۱۸و۲۰ ~

$$\tau_{rr} = 2A + \frac{B}{r^2} + C(2\ln r + 1) - 2D\cos 2\theta + 0 - \frac{6F}{r^4}\cos 2\theta - \frac{4G}{r^2}\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = 0 + 0 + 0 + 2D\sin 2\theta + 6Er^2\sin 2\theta - \frac{6F}{r^4}\sin 2\theta - \frac{2G}{r^2}\sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2A - \frac{B}{r^2} + C(2\ln r + 3) + 2D\cos 2\theta + 12Er^2\cos 2\theta + \frac{6F}{r^4}\cos 2\theta + 0$$

* برای محدود باقی ماندن تنش‌ها در بینهایت باید $C=0$ باشد

گام دوم: اعمال شرایط مرزی

$$r = a, \quad \tau_{rr} = \frac{P_a}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = -\frac{P_a}{2}\sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{P_a}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$r \to \infty, \quad \tau_{rr} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta\theta} = 0 \qquad u_r = u_\theta = 0$$

$$r = a, \quad \underline{n}(1, 0)$$

$$t_i = \tau_{ij} n_j$$

$$i = r \Rightarrow t_r = \tau_{rr} n_r + \tau_{r\theta} n_\theta \Rightarrow \frac{B}{a^2} + 2A = \frac{P_a}{2}$$

$$-\frac{B}{a^2} + 2A = \frac{P_a}{2}$$

$$\tau_{\theta\theta} \Rightarrow \frac{4G}{a^2} + 2D + \frac{6F}{a^4} = -\frac{P_a}{2}$$

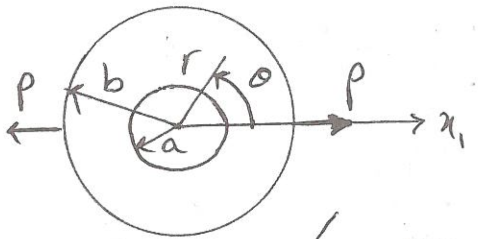
$$2F + 6D = -\frac{P_a}{2}$$

$$\tau_{r\theta} \Rightarrow \frac{G}{a^2} - F + \frac{3F}{a^4} = \frac{P_a}{4}$$

$$A = D = 0$$

$$B = \frac{P_a a^2}{2} \qquad F = -\frac{P_a a^4}{12}$$

ل ۵-۱۴- مسئله (۵-۱۳) را در حالتی که دیسک تحت نیروهای متمرکز خارجی P قرار دارد (شکل ۵-۳۳) حل نمایید.



شکل ۵-۳۳- دیسک توخالی تحت نیروهای متمرکز خارجی

شرایط مرزی

$r=a \rightarrow t_r=0 \rightarrow T_{rr}=0 \qquad T_{r\theta}=0$

$t_\theta=0 \qquad T_{\theta\theta}=0$

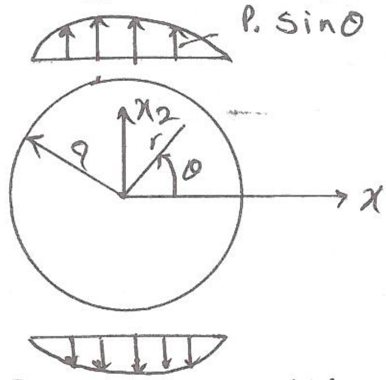
نیروی متمرکز را در فاصله 2β توزیع می‌کنیم

$\begin{cases} r=b \\ \theta=0,2\pi \end{cases} \qquad P_b=\frac{P}{2b\beta}$

$$P_b=\frac{P}{2b\beta}\sum_{n=0}^{\infty} P_{bn}\cos n\theta$$

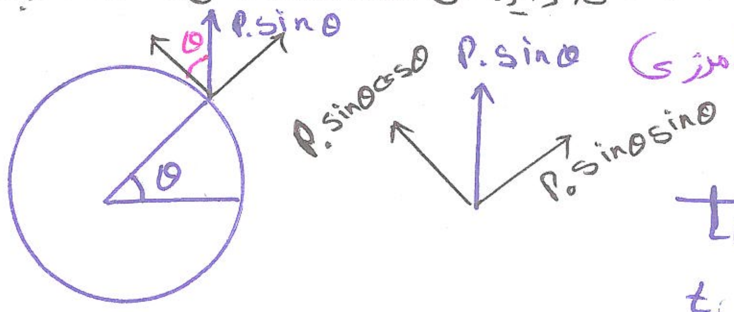
$$P_{bn}=\frac{P}{n\pi\frac{b}{3}}\sin n\beta \begin{cases} n=2 \\ n=1 \end{cases}$$

۵-۱۵ - صفحه‌ی دایره‌ای به شعاع a مطابق شکل (۵-۳۴) تحت تنش کشش $P_0 \sin\theta$ در امتداد x_2 در وجه خارجی قرار گرفته است. تابع تنش ایری و مؤلفه‌های تانسور تنش را بدست آورید.



شکل ۵-۳۴ - صفحه دایره ای تحت تنش های کشش خارجی

حل: گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی



* قبلش باید $P_0 \sin\theta$ را تجزیه کنیم

$$t_\theta = P_0\sin\theta\cos\theta = \frac{P_0}{2}\sin 2\theta$$

$$t_r = P_0\sin^2\theta = \frac{P_0}{2}[1-\cos 2\theta]$$

$r=a$ ، $n=(1,0)$

$$t_i = T_{ij}n_j \Rightarrow i=r \Rightarrow t_r = T_{rr}\underset{1}{n_r} + T_{r\theta}\underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{rr} = \frac{P_0}{2}(1-\cos 2\theta)}$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r}\underset{1}{n_r} + T_{\theta\theta}\underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r} = \frac{P_0}{2}\sin 2\theta}$$

گام دوم: حدس ϕ

* دوستان به رابطه‌ی روبرو دقت کنید ببینید چیکار کردم

$$T_{rr} = \frac{P_0}{2}(1-\cos 2\theta) = \frac{P_0}{2} - \frac{P_0}{2}\cos 2\theta \Rightarrow T_{rr} = f(r) + g(r)\cos 2\theta$$

$$T_{\theta r} = \frac{P_0}{2}\sin 2\theta = 0 + \frac{P_0}{2}\sin 2\theta \Rightarrow T_{\theta r} = \underset{f(r)}{0} + g(r)\sin 2\theta$$

* پس در این جا دو ترم داریم یکی $f(r)$ و دیگری $g(r)\cos 2\theta$ (که در) مرحله‌ی اول برای $f(r)$ T_{rr} هایی که فقط وابسته به r هستند و همزمان $T_{\theta r}$ آن ها نیز صفر است را بررسی داریم

* در مرحله‌ی دوم برای $g(r)$ (ترم دوم): در جدول ردیف هایی را بررسی داریم که T_{rr} آن ها وابسته به r و $\cos 2\theta$ باشد و همزمان $T_{\theta r}$ آن ها وابسته به r و $\sin 2\theta$ باشد.

$f(r) = Ar^2 + B\ln r + Cr^2\ln r$ ⟶ ردیف‌های ۱، ۲، ۴ جدول

$$\left.\begin{array}{l} g(r)\cos 2\theta \\ g(r)\sin 2\theta \end{array}\right. \Rightarrow \left\{ Dr^2\cos 2\theta + \frac{E}{r^2}\cos 2\theta + F\cos 2\theta \right.$$

⟶ ردیف های ۱۴، ۱۸ و ۲۰ جدول

ادامه ی تمرین ۵ حل:

★ پس در نهایت ϕ به صورت زیر می شود

$$\phi = Ar^2 + B\ln r + Cr^2\ln r + Dr^2\cos 2\theta + \frac{E}{r^2}\cos 2\theta + F\cos 2\theta$$

$$T_{rr} = 2A + \frac{B}{r^2} + C(2\ln r + 1) - 2D\cos 2\theta - 6E\frac{\cos 2\theta}{r^4} - 4F\frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

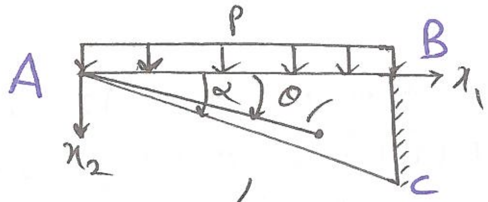
$$T_{r\theta} = 0 + 0 + 0 + 2D\sin 2\theta - 6E\frac{\sin 2\theta}{r^4} - 2F\frac{\sin 2\theta}{r^2}$$

$$T_{\theta\theta} = 2A - \frac{B}{r^2} + C(2\ln r + 3) + 2D\cos 2\theta + 6E\frac{\cos 2\theta}{r^4} + 0$$

✱ برای محدود ماندن تنش ها در بینهایت $C=0$ است

✱ با اعمال شرایط مرزی ضرایب بدست می آید.

۵-۱۶- صفحه ی نازک مثلث شکل مطابق شکل (۵-۳۵) تحت اثر نیروی گسترده ی یکنواخت P در رو به بالای خود قرار گرفته است. توزیع تنش در این صفحه را بیابید.



شکل ۵-۳۵- صفحه نازک مثلثی تحت نیروی گسترده یکنواخت

حل:

* این مثال مشابه مثال ۵-۱۵ و تمرین ۵-۱۲ حل می شود

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی

وجه AB

$\theta = 0 \quad \forall r$ و $\underline{t} = (0, P)$ و $\underline{n}(0, -1)$

در جهت کاهش θ

$t_i = T_{ij} n_j$

$i = r \Rightarrow t_r = T_{rr} \underbrace{n_r}_{0} + T_{r\theta} \underbrace{n_\theta}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{r\theta}(r, \theta = 0) = 0}$

$i = \theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} \underbrace{n_r}_{0} + T_{\theta\theta} \underbrace{n_\theta}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = -P}$

وجه AC:

$\theta = \alpha \quad \forall r$ ، $\underline{t} = \underline{0}$ و $\underline{n} = (0, 1)$

در جهت افزایش θ

$t_i = T_{ij} n_j$

$i = r \Rightarrow t_r = T_{rr} \underbrace{n_r}_{0} + T_{r\theta} \underbrace{n_\theta}_{1} \Rightarrow \boxed{T_{r\theta}(r, \theta = \alpha) = 0}$

$i = \theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} n_r + T_{\theta\theta} \underbrace{n_\theta}_{1} \Rightarrow \boxed{T_{\theta\theta}(r, \theta = \alpha) = 0}$

★ ضلع AB ← T در دستگاه کارتزین

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} = 0 & T_{12} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = P \end{bmatrix}$$

$$T_{\text{در دستگاه استوانه‌ای}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+P\sin\theta \\ 0+0 & P\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\sin^2\theta & 0+P\sin\theta\cos\theta \\ P\sin\theta\cos\theta & P\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\tau_{rr}=P\sin^2\theta=\frac{P(1-\cos 2\theta)}{2} \quad \text{و} \quad \tau_{r\theta}=P\sin\theta\cos\theta=\frac{P}{2}\sin 2\theta$$

گام دوم: حدس ϕ

* دقیقاً مثل تمرین ۵-۱۵ با همان توضیحات

$$\phi=Ar^2+B\ln r+Cr^2\ln r+Dr^2\cos 2\theta+\frac{E}{r^2}\cos 2\theta+F\cos 2\theta$$

$$\tau_{rr}=2A+\frac{B}{r^2}+C(2\ln r+1)-2D\cos 2\theta-\frac{6E}{r^4}\cos 2\theta-4F\frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

$$\tau_{r\theta}=0+0+0+2D\sin 2\theta-\frac{6E}{r^4}\sin 2\theta-\frac{2F}{r^2}\sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta\theta}=2A-\frac{B}{r^2}+C(2\ln r+3)+2D\cos 2\theta+\frac{6E}{r^4}\cos 2\theta+0$$

* برای محدود ماندن تنش ها در بینهایت $C=0$ است

* با اعمال شرایط مرزی ضرایب بدست می آید

* $\tau_{r\theta}(r,\theta=0)=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow$ چیزی نمی دهد

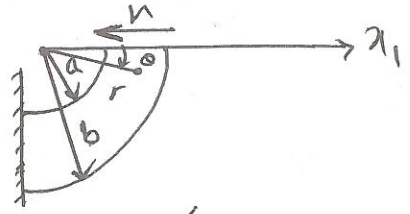
$$\begin{cases}
* \ \tau_{r\theta}(r,\theta=\alpha)=0 \Rightarrow 2D\sin 2\alpha-\frac{6E}{r^4}\sin 2\alpha-\frac{2F}{r^2}\sin 2\alpha=0 \\
* \ \tau_{\theta\theta}(r,\theta=0)=-P \Rightarrow 2A-\frac{B}{r^2}+2D+\frac{6E}{r^4}=-P \\
* \ \tau_{\theta\theta}(r,\theta=\alpha)=0 \Rightarrow 2A-\frac{B}{r^2}+2D\cos 2\alpha+\frac{6E}{r^4}\cos 2\alpha=0
\end{cases}$$

با این سه معادله و شرایط مرزی تغییر مکان

A، B و D و E بدست می آید

برای تغییر مکان دوباره باید به جدول مراجعه کنیم

۵ - ۱۸ - تیر نازک با مقطع مستطیلی به صورت ربع دایره، مطابق شکل (۵-۳۷) تحت نیروی برشی V قرار گرفته است. توزیع تنش و تغییر شکل های نقاط مختلف آن را بدست آورید



شکل ۵-۳۷- تیر نازک با مقطع مستطیلی به صورت ربع دایره

حل: گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq r \leq b$

$\theta = 0 \qquad n = (0, 1) \qquad t_r = -V$

$t_\theta = 0$

$t_i = T_{ij} n_j$

$i = r \Rightarrow t_r = T_{rr} n_r + T_{r\theta} n_\theta \Rightarrow T_{r\theta} = -V$

$i = \theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} n_r + T_{\theta\theta} n_\theta \Rightarrow T_{\theta\theta} = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-T_{rr} \sin\theta + T_{r\theta} \cos\theta) R\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (T_{rr} \cos\theta + T_{r\theta} \sin\theta) R\, d\theta = -V$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (T_{r\theta} R) R\, d\theta = 0$$

گام دوم: حدس ϕ

★ این یک مسئله بدون مشخصه طول است پس می توان از طریق معادله ابعادی ϕ را حدس زد

$[V] = \frac{F}{L} \Rightarrow \left[\frac{\phi}{Vr}\right] = 1 \Rightarrow \phi = V r f(\theta)$

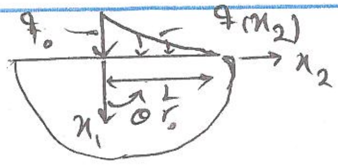
$\phi = F$

$$\phi = Vr(C\theta \sin\theta + D\theta \cos\theta)$$

$$T_{rr} = V\left(2C \frac{\cos\theta}{r} + 2D \frac{\sin\theta}{r}\right)$$

★ بقیه رو بلدید.

مثال: نیم صفحه شکل مقابل با پهنای زیاد تحت نیروی گسترده



$q(x_2) = q_0\left(1 - \frac{x_2^2}{L^2}\right)$ و $0 < x_2 < L$

$q(x_2) = 0$ $\quad x_2 > L$

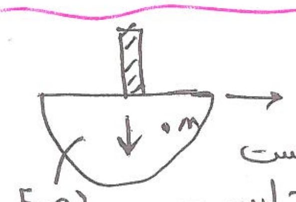
تنش های از این نیم صفحه را با استفاده از تابع تنش ایری بدست آورید.

مسئله را برای حالتی که $L \to \infty$ ساده نمایید.

$$q(x_2) = q_0\left(1 - \cancel{\frac{x_2^2}{\infty}}\right) \Rightarrow q(x_2) = q_0 \Rightarrow$$ بار یکنواخت

★ حالا این سؤال دقیقاً شد سؤال صفحه ی 334 جزوه => جواب اونجاست

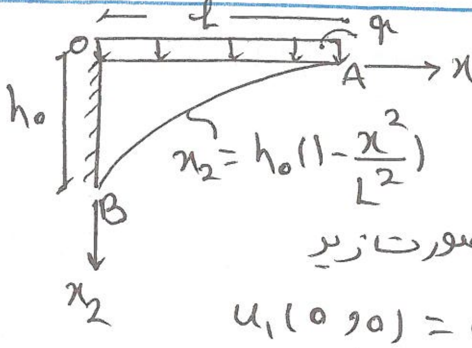
مثال: دیوار طویلی با مقطع نشان داده شده روی زمین اجرا شده است. اگر وزن واحد طول دیوار $\frac{kN}{m}$ باشد و اگر ضریب زلزله 0.15 باشد، تنش در هر نقطه ی عمومی M را به دست آورید. محیط خاکی ایزوتروپ با ضریب یانگ و پواسون E و ν است



(نیروی افقی ناشی از زلزله در واحد طول برابر حاصل ضرب ضریب زلزله در وزن واحد طول دیوار است)

★ حل: این مثال دقیقاً حل مثال ۵-۹ صفحه ی ۲۴۳ کتاب است

همان نیروی زلزله می باشد

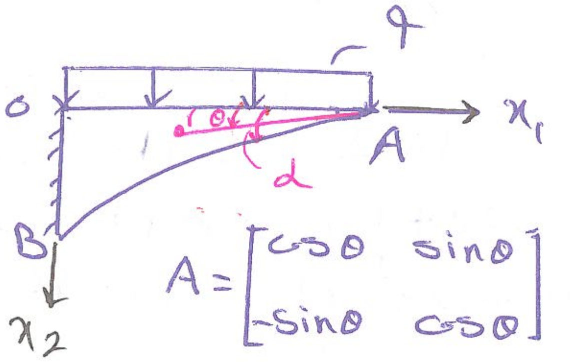


مثال: تیر شکل روبه‌رو با پهنای واحد تحت نیروی ثابت q در طول تیر قرار دارد. با استفاده از تابع تنش ایری، تنش‌ها و تغییر مکان‌های هر نقطه را به دست آورید. شرایط در مرز OB به صورت زیر است.

$$u_1(0,0)=u_2(0,0)=0$$
$$u_1(0,h_0)=0$$

حل: گام اول: تبدیل نیروها از دستگاه دکارتی به دستگاه استوانه‌ای

★ مثل مثال ۵-۱۵ و تمرین ۵-۱۲



$$T=\begin{bmatrix} T_{11}=0 & T_{12}=0 \\ T_{21}=0 & T_{22}=q \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}=AT A^T=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}=\begin{bmatrix} 0+0 & 0+q\sin\theta \\ 0+0 & q\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q\sin^2\theta & 0+q\sin\theta\cos\theta \\ q\sin\theta\cos\theta & q\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$T_{rr}=q\sin^2\theta=\frac{q}{2}(1-\cos 2\theta)\ ,\ T_{r\theta}=\frac{q}{2}\sin 2\theta$$

$$T_{\theta\theta}=q\cos^2\theta=\frac{q}{2}(1+\cos 2\theta)$$

گام دوم: مرتب کردن شرایط مرزی

و به OA:

$\underline{t}=(t_r, t_\theta)$ $\quad$ $\underline{n}=(n_r, n_\theta)$

$$\theta=0\ ,\ \underline{t}=(0,q)\ ,\ \underline{n}=(0,-1)$$

در جهت کاهش θ

$\forall r$

$$t_i=T_{ij}n_j$$

$$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}\underbrace{n_r}_{0}+T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{r\theta}(r,\theta=0)=0}$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{0}+T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{-1} \Rightarrow \boxed{T_{\theta\theta}(r,\theta=0)=-q}$$

وجه AB: (این معادله‌ی خط‌منو نشت انداخته ولی شرایط مرزی رومی‌نویسم)

$\theta = \alpha \quad , \underline{t} = 0 \quad , \underline{n} = (0, 1)$ در جهت افزایش θ

$\forall r$

$$t_i = T_{ij} n_j$$

$$i = r \Rightarrow t_r = T_{rr} n_r + T_{r\theta} n_\theta \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}(r, \theta = \alpha) = 0}$$

$$i = \theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} n_r + T_{\theta\theta} n_\theta \Rightarrow \boxed{T_{\theta\theta}(r, \theta = \alpha) = 0}$$

گام سوم: حدس ϕ

دقیقاً مثل تمرین ۵-۱۵ با همان توضیحات

$$\phi = Ar^2 + B\ln r + Cr^2 \ln r + Dr^2 \cos 2\theta + \frac{E}{r^2}\cos 2\theta + F\cos 2\theta$$

$$T_{rr} = 2A + \frac{B}{r^2} + C(2\ln r + 1) - 2D\cos 2\theta - \frac{6E}{r^4}\cos 2\theta - \frac{4F}{r^2}\cos 2\theta$$

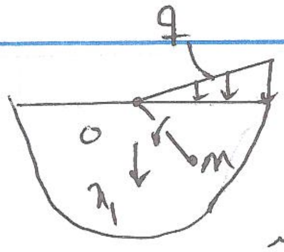
$$T_{r\theta} = 0 + 0 + 0 + 2D\sin 2\theta - \frac{6E}{r^4}\sin 2\theta - \frac{2F}{r^2}\sin 2\theta$$

$$T_{\theta\theta} = 2A - \frac{B}{r^2} + C(2\ln r + 3) + 2D\cos 2\theta + \frac{6E}{r^4}\cos 2\theta + 0$$

* برای محدود ماندن تنش‌ها در بینهایت $D = 0$ است

گام چهارم: با اعمال شرایط مرزی تنش و تغییر مکان ضرایب بدست می‌آید (مثل ص ۱۹۷)

u_r



مسئله پنجم: نیم صفحه با ضخامت زیاد تحت نیروی گسترده q با تغییرات خطی در سمت راست محور ox_1 و در سطح نیم صفحه قرار دارد. تنش ها در هر نقطه ی m از نیم صفحه را بدست آورید.

$$q = \frac{N}{L^2} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} \Rightarrow \frac{N}{qL^2} = \frac{\text{نیرو}}{\frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} \times \text{سطح}} = 1 = f(\theta)$$

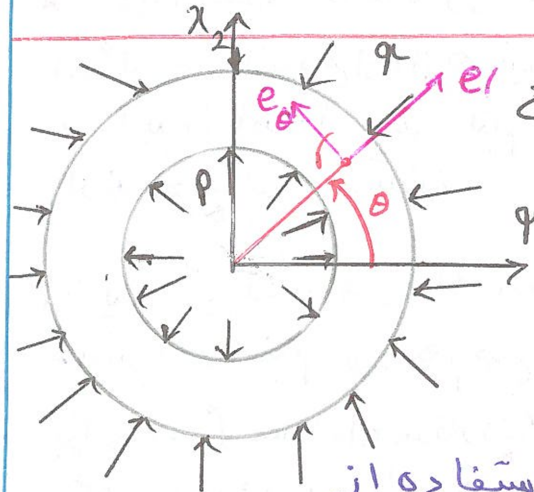
$$\frac{N}{qL^2} = f(\theta) \Rightarrow \frac{[\Phi]}{qr^2} = f(\theta) \Rightarrow [\Phi] = q\,r^2 f(\theta)$$

$N = [\Phi]$

$L = r$

بقیه حل دقیقاً مانند مثال ۵-۵ ص ۲۳۴ کتاب یا 32 جزوه

مثال های حل شده فصل پنجم کتاب تئوری ارتجاعی



مثال ۵-۲ ص ۲۲۲: یک لوله استوانه‌ای از مصالح همسان با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b تحت فشار یکنواخت داخلی p و خارجی q قرار دارد (شکل ۵-۱)، تنش های نقاط مختلف استوانه

حل:

★ کتاب با استفاده از روابط حل کرده ولی ما با استفاده از جدول حل می کنیم.

★ مسئله از نوع متقارن محوری بدون دوران است.
(۱) بارگذاری متقارن (۲) هندسه متقارن
(فشار همه جانبه)

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی

وجه خارجی: $\underline{n} = (n_r = 1, n_\theta = 0)$ ، $r = b$ ($\forall \theta$) و $\underline{t} = (t_r = -q, t_\theta = 0)$

در جهت افزایش r است — در جهت کاهش r

قضیه $n_r^2 + n_\theta^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = 0$ مسئله دو بعدی است و $n_r = 1$ عمود بر صفحه $\Rightarrow n_\theta = 0$ مجبور است صفر باشد

$t_i = T_{ij} n_j$

$i = r \Rightarrow \underset{-q}{t_r} = T_{rr} \underset{1}{n_r} + T_{r\theta} \underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{rr}(r = b, \theta) = -q}$

$i = \theta \Rightarrow \underset{0}{t_\theta} = T_{\theta r} \underset{1}{n_r} + T_{\theta\theta} \underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}(r = b, \theta) = 0}$

توجه: چون مسئله متقارن محوری بدون دوران است باید تنش برش صفر باشد.

وجه داخلی: $\underline{n} = (n_r = -1, 0)$ و $\underline{t} = (t_r = p, t_\theta = 0)$ و $r = a$ ($\forall \theta$)

در جهت کاهش r — در جهت افزایش p

$t_i = T_{ij} n_j$

$i = r \Rightarrow \underset{p}{t_r} = T_{rr} \underset{-1}{n_r} + T_{r\theta} \underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{rr}(r = a, \theta) = -p}$

$i = \theta \Rightarrow \underset{0}{t_\theta} = T_{\theta r} \underset{-1}{n_r} + T_{\theta\theta} \underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}(r = a, \theta) = 0}$

گام دوم: حدس تابع ϕ از جدول ص ۲۳۳ کتاب و یا صفحه‌ی ۳۱۶ جزوه

★ چون مسئله ما متقارن محوری است و فقط تغییر مکان شعاعی داریم و مسئله‌ی ما تابعی از θ نیست پس می‌آییم در جدول و ردیف‌هایی که فقط r دارند را انتخاب می‌کنیم (یعنی ردیف‌هایی که r به علاوه θ، $\cos\theta$ و ... دارند حساب نیستند).

$$\phi(r,\cancel{\theta}) = \phi(r)$$

★ پس ردیف‌های ۱، ۲ و ۴ را انتخاب می‌کنیم و هرکدام را ضریب در ضریب می‌کنیم و باهم جمع می‌زنیم.

$$\phi = c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_1 r^2 \ln r$$

برای تمام مسائل متقارن محوری بدون دوران همین ϕ بدست می‌آید.

گام سوم: بدست آوردن تنش‌ها از جدول

★ برای اینکار همان ردیف‌هایی که انتخاب کرده بودیم برای ϕ را برای ستون T_{rr}، $T_{\theta\theta}$ و $T_{\theta r}$ نیز انتخاب می‌کنیم.

★ پس ردیف‌های ۱، ۲ و ۴ جدول را انتخاب می‌کنیم. (به ترتیب ۲،۱ و ۴ نوشته شده)

و به داخلی $r=a \Leftarrow$

$$T_{rr} = \frac{c_3}{a^2} + c_1(1+2\ln a) + 2c_2 = -P$$

★

و به خارجی $r=b \Leftarrow$

$$T_{rr} = \frac{c_3}{b^2} + c_1(1+2\ln b) + 2c_2 = -q$$

★ در این دو معادله سه مجهول داریم پس نیاز به یک معادله دیگر داریم.

گام چهارم: استفاده از تغییرمکان برای ایجاد یک معادله دیگر

★ دوباره از جدول استفاده کرده و ستون ۴، $2\mu \overset{**}{U_\theta}$ را انتخاب کرده و ردیف‌های ۱، ۲ و ۴ را می‌نویسیم.

$$2\mu \overset{**}{U_\theta} = 0 + 0 + c_1(\chi+1) r\theta \Rightarrow U_\theta = \frac{c_1 r\theta}{2\mu}(\chi+1)$$

تنش مسطح $\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu} \Rightarrow U_\theta = \frac{c_1 r\theta}{2\mu}\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}+1\right) = \frac{c_1 r\theta}{2\mu}\,\frac{3-\nu+1+\nu}{1+\nu}$

$$\Rightarrow U_\theta = \frac{4c_1 r\theta}{2\mu(1+\nu)} \quad (1)$$

جدول ص ۱۸۲ جزوه

$$\Rightarrow \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \quad (2)$$

$$\Rightarrow (1),(2) \Rightarrow U_\theta = \frac{4c_1 r\theta}{E}$$

* $U_\theta=0$ است و از طرفی $\theta=\alpha$ و $\theta=\alpha+2\pi$ اختلاف تغییرمکان‌هایشان نیز صفر است در نتیجه:

$$U_\theta(\theta=2\pi)-U_\theta(\theta=0)=0 \Rightarrow \frac{4C_1 r\times 2\pi}{E}=0 \Rightarrow \boxed{C_1=0}$$

گام پنجم: بدست آوردن ضرایب C_2 و C_3

* C_1 را در ★ قرار می‌دهیم. ص ۲۵۲

$$\begin{cases} \dfrac{C_3}{a^2}+2C_2=-p & \times -1 \\[2mm] \dfrac{C_3}{b^2}+2C_2=-q \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -\dfrac{C_3}{a^2}-2C_2=+p \\[2mm] \dfrac{C_3}{b^2}+2C_2=-q \\ \hline C_3\left(-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)=p-q \end{array}$$

$$\Rightarrow C_3\times\frac{(a^2-b^2)}{a^2b^2}=p-q \Rightarrow C_3=\frac{(p-q)a^2b^2}{a^2-b^2}$$

$$\frac{1}{a^2}\times\frac{(p-q)a^2b^2}{a^2-b^2}+2C_2=-p \Rightarrow \frac{(p-q)b^2}{a^2-b^2}+q=-2C_2$$

$$\Rightarrow \frac{(p-q)b^2+p(a^2-b^2)}{a^2-b^2}=-2C_2 \Rightarrow \frac{pb^2-qb^2+pa^2-pb^2}{a^2-b^2}=-2C_2$$

$$\Rightarrow C_2=\frac{pa^2 qb^2}{2(a^2-b^2)}$$

گام ششم: جایگذاری C_2 و C_3 در ★ و بدست آوردن τ_{rr}، $\tau_{\theta\theta}$ و $\tau_{r\theta}$

$\boxed{\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=0} \Rightarrow$ از جدول

$$\tau_{rr}=\frac{(p-q)a^2b^2}{a^2-b^2}\times\frac{1}{r^2}+\frac{\cancel{2}(pa^2-qb^2)}{\cancel{2}(a^2-b^2)} \Rightarrow \boxed{\tau_{rr}=\frac{(p-q)b^2a^2}{r^2(a^2-b^2)}+\frac{pa^2-qb^2}{(a^2-b^2)}}$$

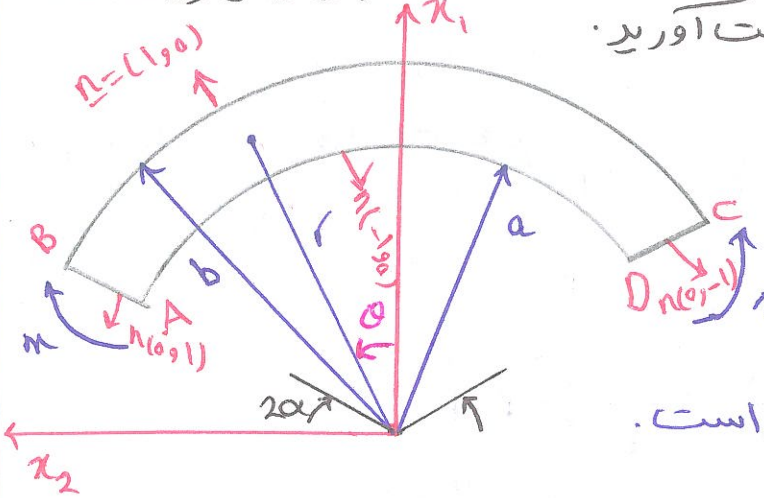
$$\tau_{\theta\theta}=\frac{\cancel{2}(pa^2-qb^2)}{\cancel{2}(a^2-b^2)}-\frac{(p-q)a^2b^2}{a^2-b^2}\times-\frac{1}{r^2}$$

$$\boxed{\tau_{\theta\theta}=\frac{pa^2-qb^2}{a^2-b^2}+\frac{(p-q)a^2b^2}{r^2(a^2-b^2)}}$$

* پس از روابط استفاده نمی‌کنیم بلکه حل می‌نویسیم.

مثال ۵-۳: تیر خمیده تحت اثر لنگر خمشی ص ۲۲۴ کتاب

قسمتی از یک لوله استوانه‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b از مصالح همسان، مطابق شکل (۵-۲) تحت لنگر خمشی m در دو سر قرار گرفته است. مؤلفه های تانسور تنش را بدست آورید.



حل:

$\underline{n}=(n_r, n_\theta)$

$r = n(1,0)$ در جهت افزایش r است

$n(-1,0) \Leftarrow$ در جهت کاهش r است

$n(0,1) \Leftarrow$ در جهت افزایش θ است

$n(0,-1) \Leftarrow$ " " کاهش θ است

★ t_r در جهت r و t_θ در جهت θ است.

گام اول: تشخیص نوع مسئله

* مسئله متقارن محوری است چون اگر در هر قسمت مقطع بزنیم m را می بینیم یعنی هر θ همان m را دارد یعنی تابع ای θ نیست و همچنین هندسه و بارگذاری نیز متقارن هستند. پس متقارن محوری بدون دوران است

* فقط m است که عامل تنش است و خود m وابسته به θ نیست پس تنش ها نیز وابسته به θ نیستند پس متقارن محوری است اگر دایره ای کامل نباشد

گام دوم: مرتب کردن شرایط مرزی تنش

وجه BC:

$r=b \quad \forall\theta \qquad n=(1,0) \quad$ و $\quad \underline{t}=\underline{0}=(t_r=0, t_\theta=0)$

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=r \Rightarrow \underset{0}{t_r} = T_{rr}\underset{1}{n_r} + T_{r\theta}\underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{rr}(r=b,\theta)=0}$ (1)

$i=\theta \Rightarrow \underset{0}{t_\theta} = T_{\theta r}\underset{1}{n_r} + T_{\theta\theta}\underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}(r=b,\theta)=0}$

وجه AD:

$\forall\theta \quad r=a \quad$ و $\quad \underline{n}=(-1,0) \quad$ و $\quad \underline{t}=\underline{0}=(t_r=0, t_\theta=0)$

$t_i = T_{ij} n_j$

$i=r \Rightarrow \underset{0}{t_r} = T_{rr}\underset{-1}{n_r} + T_{r\theta}\underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{rr}(a,\theta)=0}$ (2)

$i=\theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} n_r + T_{\theta\theta} n_\theta \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}(a,\theta)=0}$

وجه DC :

$a<r<b \;,\; \theta=-\alpha \quad , \quad \underline{n}=(n_r=0 \,,\, n_\theta=-1)$

$t=(t_r \,,\, t_\theta)$

$$t_i = T_{ij}\, n_j$$

$$i=r \Rightarrow t_r = T_{rr}\underbrace{n_r}_{0} + T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{-1} \Rightarrow \boxed{t_r=-T_{r\theta}}$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} n_r + T_{\theta\theta} n_\theta \Rightarrow \boxed{t_\theta=-T_{\theta\theta}}$$

* $T_{r\theta}$ ایده‌آل صفر است پس تنش برشی صفر است.
* اما برای وجه DC و AB باید از اصل سن ونان استفاده کنیم.

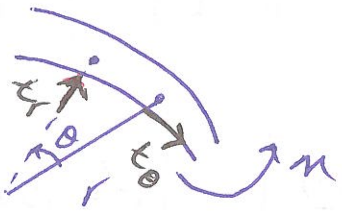
کل بارگذاری $\left\{ \begin{array}{l} t_r \\ t_\theta \\ M \end{array} \right.$

$$\Sigma F_r = 0 \Rightarrow \int_a^b t_r \times 1 \times dr = 0 \Rightarrow \int_a^b -T_{r\theta}\, dr = 0 \Rightarrow \int_a^b T_{r\theta}\, dr = 0 \quad \mathrm{I}$$

$$\Sigma F_\theta = 0 \Rightarrow \int_a^b t_\theta \times 1 \times dr = 0 \Rightarrow \int_a^b -T_{\theta\theta}\, dr = 0 \Rightarrow \int_a^b T_{\theta\theta}\, dr = 0 \quad \mathrm{II}$$

$$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow \int_a^b t_\theta \times \underbrace{r}_{\text{بازوی گشتاور}} \times \underbrace{1}_{\text{بعد طول}} \times \underbrace{dr}_{\text{وجه انتگرال}} = M \Rightarrow \int_a^b -T_{\theta\theta}\, r\, dr = M$$

$$\Rightarrow \int_a^b T_{\theta\theta}\, r\, dr = -M \quad \mathrm{III}$$



* t_r در جهت محور r و t_θ در جهت محور θ است

گام سوم: بدست آوردن ϕ، T_{rr}، $T_{\theta\theta}$ و $T_{r\theta}$ از جدول

* ردیف های ①، ② و ④ جدول برای متقارن محوری بدون دوران

$$\phi = a' r^2 + b' \operatorname{Ln} r + c' r^2 \operatorname{Ln} r$$

$$T_{rr} = 2a' + \frac{b'}{r^2} + 2c' \operatorname{Ln} r + c'$$

$$T_{\theta\theta} = 2a' - \frac{b'}{r^2} + 2c' \operatorname{Ln} r + 3c'$$

$$T_{\theta r} = 0$$

گام چهارم: قرار دادن T_{rr} و $T_{\theta\theta}$ در شرایط مرزی تنش

$$\text{II} \Rightarrow \int_a^b \left(2a' - \frac{b'}{r^2} + 2c'\ln r + 3c'\right) dr = 0$$

$$\text{III} \Rightarrow \int_a^b r\left(2a' - \frac{b'}{r^2} + 2c'\ln r + 3c'\right) dr = -m$$

$$① \Rightarrow T_{rr}(b,\theta) = 0 \Rightarrow 2a' + \frac{b'}{b^2} + 2c'\ln b + c' = 0$$

$$② \Rightarrow T_{\theta\theta}(a,\theta) = 0 \Rightarrow 2a' + \frac{b'}{a^2} + 2c'\ln a + c' = 0$$

نکته: $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$

$$\text{II} \Rightarrow \int_a^b \left(2a' - \frac{b'}{r^2} + 2c'\ln r + 3c'\right) dr = 0$$

$$\Rightarrow \left[2a'r + \frac{b'}{r} + 2c'r\ln r - 2c'r + 3c'r\right]_a^b = 0$$

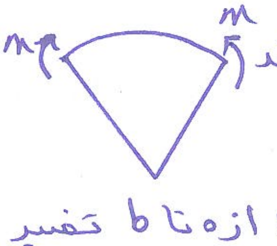
$$\Rightarrow [2a'b + \frac{b'}{b} + 2c'b\ln b - 2c'b + 3c'b - 2a'a - \frac{b'}{b}$$
$$- 2c'a\ln a + 2c'a - 3c'a]$$

* با ادامه‌ی حل مسئله در نهایت

$$\boxed{b' = -4m\frac{a^2b^2\ln\frac{b}{a}}{F}}$$

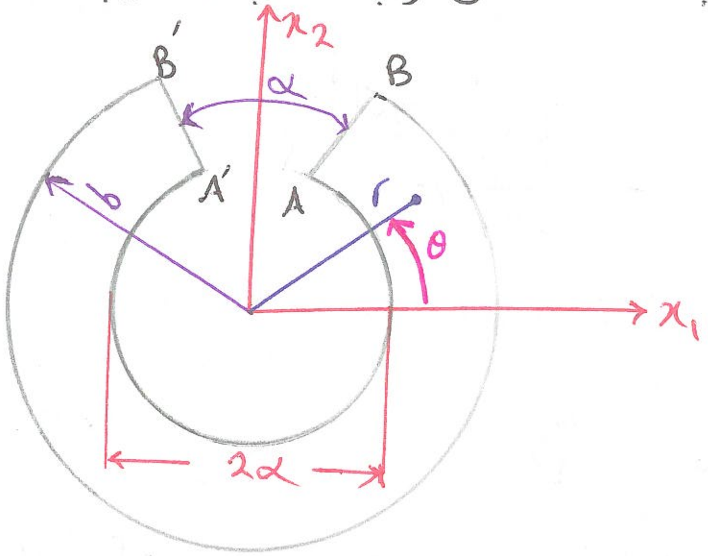
* $F = (b^2-a^2)^2 - 4a^2b^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2$

$$\boxed{a' = m\frac{(b^2-a^2) + 2(b^2\ln b - a^2\ln a)}{F}} \qquad \boxed{c' = -2m\frac{b^2-a^2}{F}}$$

اگر شکل ما گوه باشد  تحت گشتاور m قرار گیرد در

این چنین مسئله‌ای چون r از a تا b تغییر می‌کند و r در دامنه است ضرایب b' و c' صفر است چون $\ln 0$ و $\frac{1}{r=0}$ بی نهایت می‌شود و تنش بی نهایت وجود ندارد پس باید ضرایب صفر شود که تنش بدست آوریم.

مثال ۵-۴ صفحه ۲۲۵: حلقه‌ی شکل (۵-۳) دارای شکافی به زاویه‌ی α می‌باشد. لنگر خمشی لازم جهت اتصال وجه AB به $A'B'$ را بدست آورید.



حل:

★ از نظر مفهوم این شکل مانند مثال ۵-۳ است با این تفاوت M را در شکل نگفته ولی از ما خواسته این لنگر (M) را بدست بیاریم.

★ پس مسئله متقارن محوری است و تمام مسیر حل مثل (مثال ۵-۳) است اما برای محاسبه M از u_θ استفاده کرده و ردیف‌های ۱، ۲ و ۴ جدول را نیز داریم و اگر مسیر حل صفحه 252 جزوه حل تمرین را دوباره طی کنیم به می رسیم که C_1 در مثال ۵-۳ بدست آمده است $u_\theta = \frac{4C_1 r\theta}{E}$

که با جایگذاری C_1 در u_θ خواهیم داشت.

$$u_\theta = 8M\frac{b^2-a^2}{F}\cdot\frac{r\theta}{E}$$

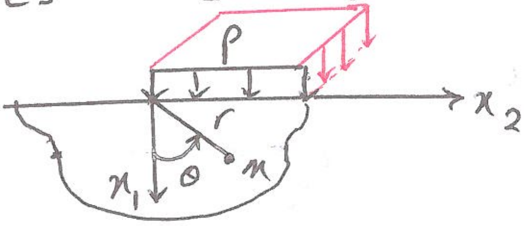
★ اختلاف تغییرمکان وجه AB نسبت به وجه $A'B'$ با قرار دادن 2π به جای θ بدست می‌آید که برحسب r برابر αr می‌باشد:

$$\Delta u_\theta = u_\theta(\theta=2\pi) \Rightarrow 8M\frac{b^2-a^2}{F}\ \frac{r(2\pi)}{E} = \alpha r$$

که در نهایت M بدست می‌آید

$$\boxed{M = \frac{\alpha F E}{16\pi(b^2-a^2)}}$$

مثال ۵-۵ ص ۳۴ کتاب: صفحه‌ی نیمه متناهی تحت اثر نیروی گسترده به شدت P قرار گرفته است (شکل ۵-۶). تابع تنش ایری و توزیع تنش را در این صفحه بدست آورید.



شکل ۵-۶- صفحه‌ی نیمه‌متناهی تحت نیروی گسترده P در نیمی از آن

حل:

گام اول: نوشتن معادله ابعادی

$$[P]=\frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}=\frac{N}{L^2}$$

* θ بی بعد است. تمام متغیرهای تابع نمایی بی بعد اند که با رادیان می سنجیم.
* زاویه‌ی مرکزی ضرب در شعاع می شود طول قوس پس باید زاویه مرکزی باید بی بعد باشد که طول قوس واحدش مثلاً سانتی متر شود.
* دیمانسیون بی بعد را با 1 نمایش می دهیم. $[r]=L$ و $[\theta]=1$
* با این ها معادله‌ی ابعادی می خواهیم بسازیم.

$$[P]=\frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}=\frac{N}{L^2}\Rightarrow\frac{N}{PL^2}\Rightarrow\left[\frac{\Phi}{Pr^2}\right]=\frac{\cancel{\text{نیرو}}}{\frac{\cancel{\text{نیرو}}}{\cancel{L^2}}\times\cancel{L^2}}=1$$

بی بعد است تابعی از θ است.

* در دستگاه استوانه‌ای $L=r$ است.

$$\frac{\Phi}{Pr^2}=f(\theta)\qquad\boxed{\Phi=Pr^2f(\theta)}$$

قیافه و ظاهر Φ باید بر حسب r^2 و تابعی از θ باشد.

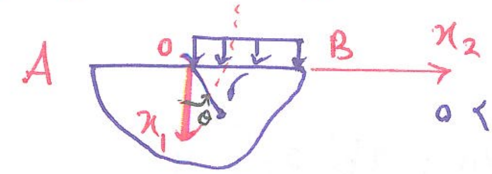
گام دوم: پیدا کردن Φ از جدول

* ردیف های ۱، ۵، ۱۴ و ۱۵ و با ضرایب مجهول ضرب و سپس جمع می زنیم.

$$\Phi=P(a'r^2+b'r^2\theta+c'r^2\cos2\theta+D'r^2\sin2\theta)$$

$$\begin{cases}T_{rr}=P(2a'+2b'\theta-2c'\cos2\theta-2d'\sin2\theta)=2P(a'+b'\theta-c'\cos2\theta-d'\sin2\theta)\\ T_{r\theta}=P(0-b'+2c'\sin2\theta-2d'\cos2\theta)=P(-b'+2c'\sin2\theta-2d'\cos2\theta)\\ T_{\theta\theta}=P(2a'+2b'\theta+2c'\cos2\theta+2d'\sin2\theta)=2P(a'+b'\theta+c'\cos2\theta+d'\sin2\theta)\end{cases}$$

گام سوم: نوشتن شرایط مرزی تنش



و به OB: $n=(n_r=0 , n_\theta=1)$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $0<r<\infty$

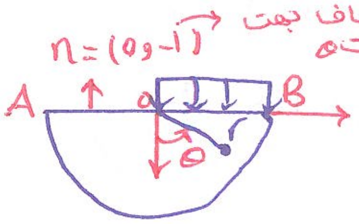
$$\underline{t}=(t_r=0 \;,\; t_\theta=-P)=-Pe_\theta$$

در جهت کاهش θ (خلاف جهت حرکت θ)

$$t_i=T_{ij}n_j$$

$$i=r \Rightarrow \cancel{t_r}=T_{rr}\cancel{n_r}+T_{r\theta}\cancel{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{r\theta}(r,\tfrac{\pi}{2})=0} \quad (1)$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}n_r+T_{\theta\theta}n_\theta \Rightarrow \boxed{T_{\theta\theta}(r,\tfrac{\pi}{2})=-P} \quad (2)$$



و به OA: $\underline{t}=(0,0)$ و $\theta=-\frac{\pi}{2}$ و $0<r<\infty$ و $n=(\overset{n_r}{0},\overset{n_\theta}{-1})$

$$t_i=T_{ij}n_j$$

$$i=r \Rightarrow \cancel{t_r}=T_{rr}\cancel{n_r}+T_{r\theta}\cancel{n_\theta} \Rightarrow \boxed{T_{r\theta}(r,-\tfrac{\pi}{2})=0} \quad (3)$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}n_r+T_{\theta\theta}n_\theta \Rightarrow \boxed{T_{\theta\theta}(r,-\tfrac{\pi}{2})=0} \quad (4)$$

* اعمال شرایط مرزی تنش

(1)* $T_{r\theta}(r,\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow P(-b'+2c'\sin 2\frac{\pi}{2}-2D\cos 2\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow P(-b'+2D)=0 \Rightarrow -b'+2d'=0 \Rightarrow \boxed{2d'=b'}$

(2)* $T_{\theta\theta}(r,\frac{\pi}{2})=-P \Rightarrow 2P(a'+b'\frac{\pi}{2}+c'\cos\pi+d'\sin\pi)=-P$

$\Rightarrow \boxed{2a'+\pi b'-2c'=-1}$

(3)* $T_{r\theta}(r,-\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow P(-b'+2c'\sin(-\pi)-2D'\cos(-\pi)) \Rightarrow -b'+2d'=0$

$\Rightarrow \boxed{2d'=b'}$

(4)* $T_{\theta\theta}(r,-\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow 2P[a'-b'\frac{\pi}{2}+c'\cos(-\pi)+d'\cancel{\sin(-\pi)}]=0$

$\Rightarrow \boxed{2a'-b'\pi-2c'=0}$

$$\begin{cases} 2d' = b' \\ 2a' + \pi b' - 2c' = -1 \quad \text{I} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d' = b' \\ 2a' - \pi b' - 2c' = 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

$$\text{I}, \text{II} \begin{cases} 2a' + \pi b' - 2c' = -1 \\ 2a' - \pi b' - 2c' = 0 \end{cases}$$

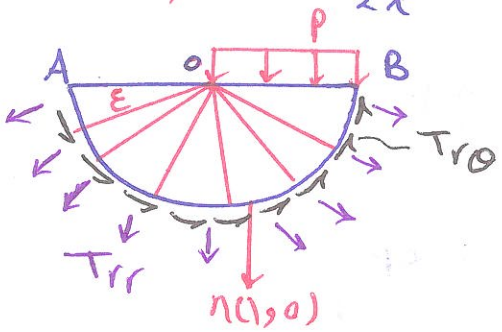
$$\text{I}, \text{II} \Rightarrow 4a' - 4c' = -1 \Rightarrow 4a' = -1 + 4c' \Rightarrow 4a' + 1 = 4c'$$

$$\Rightarrow c' = \left(a' + \frac{1}{4}\right) \quad \star$$

$$\text{II}, \star \Rightarrow 2a' - \pi b' - 2\left(a' + \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow 2a' - \pi b' - 2a' - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -\pi b' = \frac{1}{2} \Rightarrow b' = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow 2d' = -\frac{1}{2\pi} \Rightarrow d' = -\frac{1}{4\pi}$$



* یک نیم دایره کوچک در شکل جدا می کنیم.
* تنها مجهول باقی مانده a' است.
* پس به دنبال شرایط مرزی جدید هستیم.

و به $\widehat{AB}$: (منحنی AB)

$r = \varepsilon$ و $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $\underline{n} = (n_r = 1, n_\theta = 0)$ و $\underline{t} = (t_r, t_\theta)$

★ البته در شکل $T_{r\theta}$ را می توان t_θ و T_{rr} را t_r نام گذاری کرد.

$$t_i = T_{ij} n_j$$

$$i = r \Rightarrow t_r = T_{rr} \underset{1}{n_r} + T_{r\theta} \underset{0}{n_\theta} \Rightarrow \boxed{t_r = T_{rr}}$$

$$i = \theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r} n_r + T_{\theta\theta} n_\theta \Rightarrow \boxed{t_\theta = T_{\theta r}}$$

اصل سن ونان:

ادامه صفحه ی بعد

اصل سن ونان
راه اول: تعادل در دستگاه استوانه‌ای

$$\Sigma F_r=0 \Rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} t_r \times 1 \times d\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_{rr}\, d\theta = 0}$$

چون روی θ عوض می‌شود

$$\Sigma F_\theta=0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t_\theta \times 1 \times d\theta - P\varepsilon = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_{\theta r}\, d\theta = P\varepsilon}$$

★ نیروی P از نوع θ است چون بار گسترده است و ما تعادل نیرو نوشتیم باید ضرب در ε طول بارگذاری شود تا تبدیل به بار متمرکز شود و از طرفی در صورت سؤال θ در جهت خلاف عقربه ساعت مثبت است ولی بارگذاری در جهت عقربه ساعت است.

المان گیری انتگرال

$$\Sigma M_o=0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t_\theta \times \varepsilon \times 1 \times \varepsilon\, d\theta\, \cancel{dr} = P\varepsilon \times \frac{\varepsilon}{2}$$

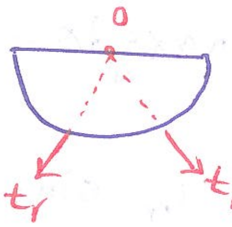
بردار تنش در جهت θ — بازوی لنگر — (dr=1) می باشد

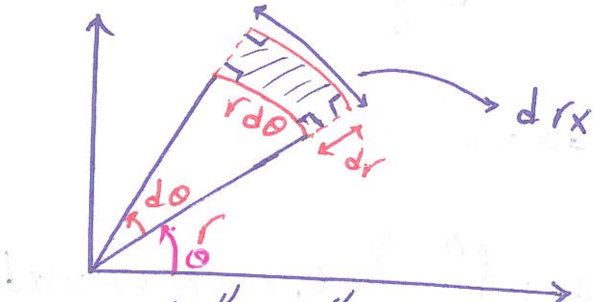
$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_{\theta r}\, \varepsilon \times \varepsilon\, d\theta = P\varepsilon \times \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \boxed{a' = -\frac{1}{4}}$$

نیروی متمرکز — بازوی لنگر

با جایگذاری $T_{\theta r}$ و انتگرال گیری از آن سایر ضرایب باقی مونده بدست می آید

★ t_r هم لنگر ایجاد نمی کند





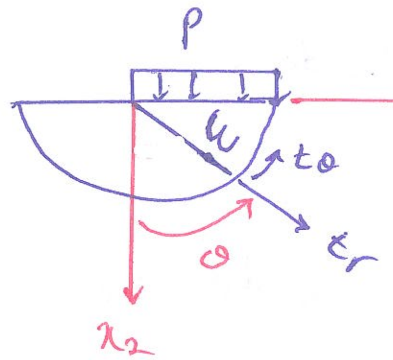
$$dr \times r d\theta \xrightarrow{r=\varepsilon} \varepsilon\, d\theta\, dr \xrightarrow[\text{واحد}]{dr=1} \varepsilon\, d\theta$$

المان گیری انتگرال
(مساحت المان استوانه‌ای)

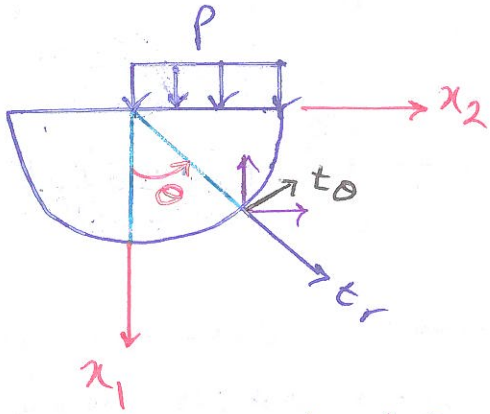
راه دوم: نوشتن معادلات تعادل در دستگاه دکارتی

اصل سن ونان

(الف)



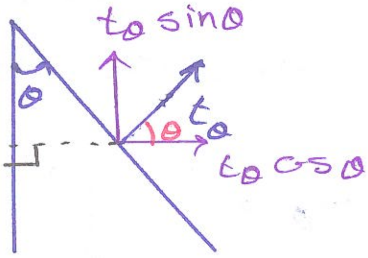
(ب)



* در شکل (الف) یک نیم دایره کوچک در شکل جدا کردیم.

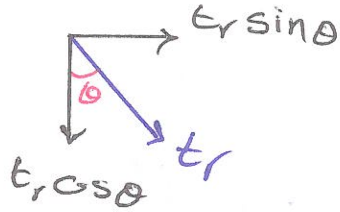
* در شکل (ب) t_θ را با وجود آنکه می دانیم به صورت منحنی شکل به سطوح وارد می شود به صورت یک بردار صاف نشان دادیم چون در یک المان کوچک مثلاً المان $d\theta$ برابر یک خط صاف است.

(پ)



* در شکل (پ) t_θ را تجزیه کردم و همچنین θ را از یک قضیه هندسی (زمانی دو زاویه با هم برابرند که دو ضلع آن دو به دو برهم عمود باشند) مکانش را بدست آوردم.

(ت)



* در شکل (ت) t_r نیز تجزیه شده است.

* حال معادلات تعادل $\sum F_{x_1}=0$ ، $\sum F_{x_2}=0$ و $\sum M_0=0$ را می نویسیم.

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_{x_1}=0 \Rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} t_r \sin\theta \times \underset{x_1}{\varepsilon} d\theta + \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} t_\theta \cos\theta \times \varepsilon \times 1\, d\theta = 0$$

از صفحه 260 داریم $t_r = T_{rr}$ ، $t_\theta = T_{\theta r}$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_{rr} \sin\theta\, \varepsilon\, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_{\theta r} \cos\theta\, \varepsilon\, d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (T_{rr}\sin\theta + T_{\theta r}\cos\theta)\,\varepsilon\, d\theta = 0 \quad (1)$$

$$+\downarrow \sum F_{x_2}=0 \quad \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} -t_\theta \sin\theta \times \varepsilon \times 1 \times d\theta + \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} t_r \cos\theta \times \varepsilon \times 1 \times d\theta$$

$$+P\varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (T_{rr}\cos\theta - T_{\theta r}\sin\theta)\,\varepsilon\, d\theta = -P\varepsilon \quad (2)$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \tau_\theta \times \varepsilon \times 1 \times \varepsilon\, d\theta\, \cancel{dr} = P\varepsilon \times \frac{\varepsilon}{2}$$

المان گیری انتگرال

$(dr=1)$

بردار تنش — بازوی گشتاور — مساحت المان استوانه‌ای — می‌باشد

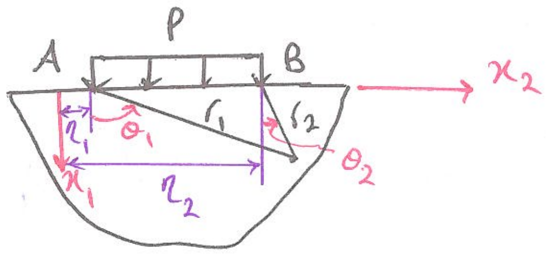
$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tau_{\theta r}\, \varepsilon \times \varepsilon\, d\theta = P\varepsilon \times \frac{\varepsilon}{2} \quad (3) \quad \Rightarrow \quad a' = -\frac{1}{4}$$

★ τ_r چون از مرکز یعنی نقطه‌ی o می‌گذرد نسبت به نقطه o لنگر ایجاد نمی‌کند.

* چون تنها ضریب مجهول a' بود همین معادله ۳ برای محاسبه‌ی آن کافی بود ولی برای تکمیل شدن بحث معادلات ① و ② راهم نوشتم

مثال ۵-۶-۵ ص ۲۳۸: صفحه ی نیمه متناهی شکل (۵-۸) تحت اثر بار گسترده ی یکنواخت محدود قرار گرفته است. تابع تنش ایری و توزیع تنش در محیط صفحه را بدست آورید.

حل:



گام اول: تشخیص نوع مسئله

* مسئله با مشخصه طول

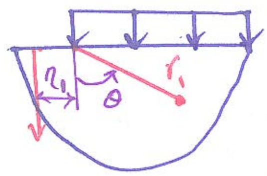
=

گام دوم:

* این مسئله را می توان به دو شکل زیر تبدیل کرد

* جواب این دو شکل را داریم از مثال قبل فقط کافی است ϕ شکل ① را منهای ϕ شکل 2 کنیم.

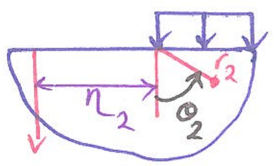
شکل ۱



−

$$\phi = P(Ar^2 + Br^2\theta + cr^2\cos 2\theta + Dr^2\sin 2\theta)$$

شکل ۲



$$B = -\frac{1}{2\pi} \quad \text{و} \quad D = -\frac{1}{4\pi} \quad \text{و} \quad c = A + \frac{1}{4}$$

$$A = -\frac{1}{4}$$

داده های مثال قبل

$$\phi = P\Big[A(r_1^2 - r_2^2) - \frac{1}{2\pi}(r_1^2\theta_1 - r_2^2\theta_2) + (A+\frac{1}{4})(r_1^2\cos 2\theta_1 - r_2^2\cos 2\theta_2)$$
$$- \frac{1}{4\pi}(r_1^2\sin 2\theta_1 - r_2^2 \sin 2\theta_2)\Big]$$

از طرفی $r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2$

$\star$ $r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2 = \underbrace{\ell_2 - \ell_1}_{\text{طول بارگذاری}}$

$\Big\} \Rightarrow$ از نظر هندسی هر دو ارتفاع نقطه مورد نظر هستند.

$$\Rightarrow r_1^2\sin 2\theta_1 - r_2^2\sin 2\theta_2 = 2r_1\sin\theta_1\cos\theta_1 - 2r_2\sin\theta_2\cos\theta_2$$

$$= 2\sin\theta_1 \underbrace{r_1\cos\theta_1}_{\text{طبق}\star:\alpha} - 2\sin\theta_2 \underbrace{r_2\cos\theta_2}_{\text{طبق}\star:\alpha} = 2\alpha\underbrace{(r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2)}_{\ell_2 - \ell_1}$$

$$r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2 = 2\alpha(R_2 - R_1)$$

$$r_1^2 \cos 2\theta_1 - r_2^2 \cos 2\theta_2 = \frac{r_1^2(1-\cos^2\theta_1)}{2} - \frac{r_2^2(1-\cos^2\theta_2)}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \Rightarrow 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{r_1^2}{2} - \frac{r_1^2\cos^2\theta_1}{2} - \frac{r_2^2}{2} - \frac{r_2^2\cos^2\theta_2}{2}$$

$$= \frac{r_1^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{r_2^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{r_2^2}{2}\right)$$

پس $\Phi = P\left[A(r_1^2 - r_2^2) - \frac{1}{2\pi}(r_1^2\theta_1 - r_2^2\theta_2) + (A+\frac{1}{4})(r_2^2 - r_1^2)\right.$

$$\left. - \frac{1}{2\pi}(R_2 - R_1) r_1 \cos\theta_1\right]$$

$$r_1^2 - r_2^2 \Rightarrow T_{rr_1} - T_{rr_2} \Rightarrow 2a - 2a = 0 \Rightarrow \begin{cases} T_{rr} = 0 \\ T_{r\theta} = 0 \\ T_{\theta\theta} = 0 \end{cases}$$

$r_1^2\theta_1 - r_2^2\theta_2$ تنها قسمتی که به ما تنش می دهد *

$$\Phi = -\frac{P}{2\pi}(r_1^2\theta_1 - r_2^2\theta_2)$$

$$T_{rr} = -\frac{P}{\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

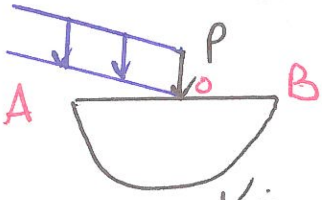
$$T_{r\theta} = 0$$

$$T_{\theta\theta} = -\frac{P}{\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$T_{rr} = P\left[(2A - 2A) + \left(-\frac{1}{2\pi}\right)(2\theta_1 - 2\theta_2) + (2A - 2A) + 0\right)$$

$$T_{rr} = -\frac{P}{\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

مثال ۵-۷ ص ۲۳۹: صفحه‌ی نیمه متناهی شکل (۵-۴-الف) تحت اثر نیروی P (نیروی گسترده‌ی خطی بر واحد ضخامت) قرار گرفته است. تابع تنش ایری و توزیع تنش را در این صفحه بدست آورید.



شکل ۵-۴-الف

حل:

گام اول: تشخیص مسئله و حدس Φ

$$[P]=\frac{N}{L}$$

$$[r]=L \quad , \quad [\Phi]=N \quad , \quad [\theta]=1$$

$$\left[\frac{\Phi}{Pr}\right]=1 \Rightarrow \frac{\Phi}{Pr}=f(\theta) \Rightarrow \Phi=Pr\,f(\theta)$$

★ جملات 8 و 9 را از جدول بر می‌داریم (جملاتی که همزمان r و θ داشته باشند)

$$\Phi=Pr(C\theta\sin\theta+D\theta\cos\theta)$$

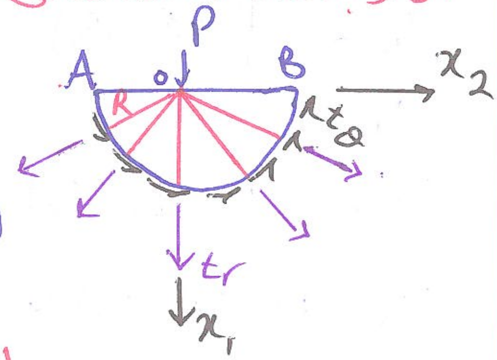
$$T_{rr}=P\left(2C\frac{\cos\theta}{r}-2D\frac{\sin\theta}{r}\right) \quad , \quad T_{r\theta}=T_{\theta\theta}=0$$

گام دوم: بدست آوردن ضرایب C , D

★ دو مجهول داریم پس نیاز به دو معادله داریم

از وجه AB استفاده می‌کنیم و مانند مثال ۵-۵ عمل می‌کنیم

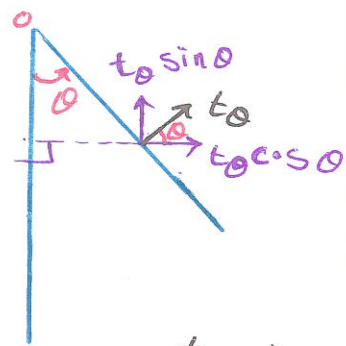
اصل کوشی برای وجه $\overset{\frown}{AB}$



$$r=R \quad , \quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2} \quad , \quad \underline{n}=(1,0) \quad , \quad \underline{t}=(t_r,t_\theta)$$

$$t_i=T_{ij}n_j$$

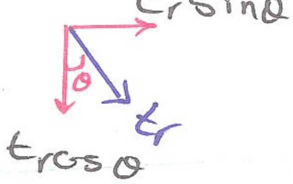
$$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}\underbrace{n_r}_{1}+T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \underline{t_r=T_{rr}}$$



$$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{1}+T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}$$

★ طبق جدول $T_{\theta r}=0$ است پس در نتیجه $\boxed{t_\theta=0}$

★ پس $t_r=T_{rr}$ و $t_\theta=0$ است.



معادلات تعادل   مساحت المان استوانه ای

$\xrightarrow{+}\sum F_{x_1}=0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t_r \sin\theta \times R\,dr\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t_\theta \cos\theta \times R\times 1 \, d\theta = 0$

$dr \to 1$ واحد $t_\theta = 0$

$t_r = T_{rr}$

$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_{rr}\sin\theta \times R\,d\theta = 0$ (1)

خلاف جهت x_2

$+\uparrow \sum F_{x_2}=0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t_r \cos\theta\, R\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -t_\theta \sin\theta \times R \times d\theta + P = 0$

$t_\theta \to 0$

$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_{rr}\cos\theta\, R\,d\theta = -P$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow C = -\frac{1}{\pi}$, $D = 0$

★ برای این سؤال $\sum M$ لازم نبود ولی برای تکمیل شدن بحث ذکر می شود.

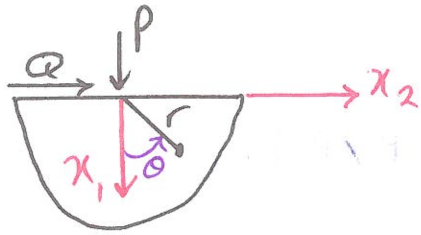
$\sum M_0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \checkmark$

توجه: P لنگر ایجاد نمی کند

t_r هم لنگر ایجاد نمی کند.

t_θ فقط لنگر ایجاد می کند که خودش صفر است پس $0=0 \checkmark$

مثال ۵ - ۸ ص ۲۴۲ : صفحهٔ نیمه متناهی شکل (۵-۱۱-الف) تحت اثر نیروهای متمرکز P و Q قرار دارد. تابع تنش ایری و توزیع تنش در صفحه را بدست آورید.



شکل ۵-۱۱-الف - صفحهٔ نیمه متناهی تحت اثر نیروهای P و Q

حل :

★ معادلات ابعادی این مسئله مانند مثال (۵-۷) می باشد، در نتیجه تابع تنش ایری به صورت زیر در می آید:

$$\Phi = Pr(C\theta\sin\theta + D\theta\cos\theta)$$

★ مؤلفه های تانسور تنش مانند مثال (۵-۷) برابرانند با:

$$T_{rr} = P\left(2C\frac{\cos\theta}{r} - 2D\frac{\sin\theta}{r}\right) \quad , \quad T_{r\theta} = T_{\theta\theta} = 0$$

★ معادلات تعادل مانند صفحه 267 جزوه حل تمرین است فقط برای $\sum F_{x_1}=0$ باید نیروی Q را لحاظ کنیم.

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_{x_1}=0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_{rr}\sin\theta\, R\,d\theta + Q = 0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_{rr}\sin R\,d\theta = -Q \quad \text{I}$$

$$+\downarrow\sum F_{x_2}=0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_{rr}\cos\theta\, R\,d\theta = -P \quad \text{II}$$

★ ضرایب C, D با معادلات I و II بدست می آید:

$$C = -\frac{1}{\pi} \quad , \quad D = \frac{1}{\pi}\frac{Q}{P}$$

★ نتایج نهایی به صورت زیر در می آید:

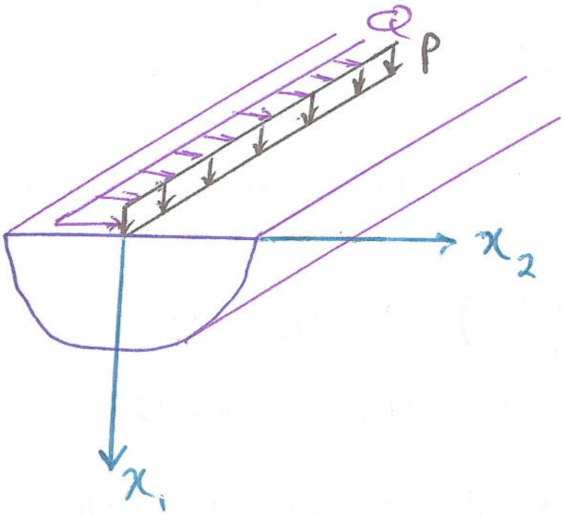
$$\Phi = -\frac{P}{\pi}r\theta\sin\theta + \frac{Q}{\pi}r\theta\cos\theta$$

$$T_{rr} = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{2Q}{\pi}\frac{\sin\theta}{r} \quad , \quad T_{r\theta} = T_{\theta\theta} = 0$$

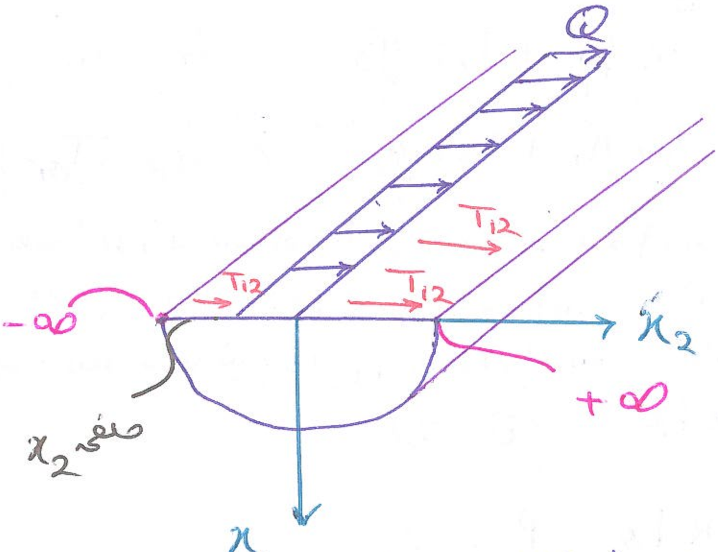
* در کتاب به این نکته اشاره شده است که با وجود نیروی برشی Q، تنش های برشی τ_{13} صفر است، اما τ_{12} یعنی تنش برشی در دستگاه کارتزین $x_1 x_2$ مخالف صفر بوده و در هر سطح موازی محور x_1 و به فاصلهٔ d از آن، تعادل نیروهای برشی به صورت زیر برقرار است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_{12}(d, x_2)\, dx_2 = -Q$$

* اما شرح و درک جملهٔ بالا را می توان در شکل ذیل مشاهده کرد.



الف) نیروی P و Q همزمان

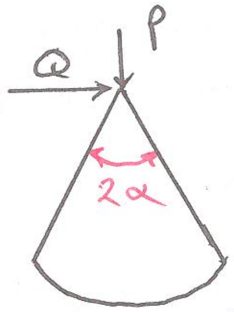


* τ_{12} ← صفحهٔ x_1 و امتداد x_2

یادآوری: صفحهٔ x_2، صفحه ای است که بردار عمود بر آن در امتداد محور x_2 باشد

* دوستان حل این مسئله تا همین صفحهٔ 268 جزوه حل تمرین ۱ است.

مثال ۵ـ۹ـ ص ۲۴۳: گوه‌ای به زاویه 2α تحت اثر بار قائم و افقی P و Q واقع شده است (شکل ۵ـ۱۲). تابع تنش ایری و توزیع تنش را بدست آورید.



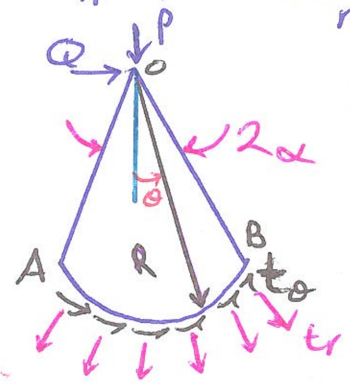
شکل ۵ـ۱۲ـ گوهٔ نامتناهی با زاویهٔ 2α
تحت بارهای P و Q

حل:

★ با توجه به مبانی مثال (۵ـ۷)، در اینجا نیز می‌توان از نتایج آن استفاده کرد.

$$\phi = Pr(C\theta\sin\theta + D\theta\cos\theta)$$

$$T_{rr} = P\left(2C\frac{\cos\theta}{r} - 2D\frac{\sin\theta}{r}\right) \quad ، \quad T_{r\theta}=T_{\theta\theta}=0$$



★ با نوشتن معادله تعادل در گوه‌ای به شعاع R داریم

و به AB:

$$r=R \quad و \quad -\alpha<\theta<\alpha \quad ، \quad \underline{n}=(n_r=1, n_\theta=0)$$

$$\underline{t}=(t_r, t_\theta)$$

$$t_i = T_{ij}n_j$$

$$i=r \Rightarrow t_r = T_{rr}\underbrace{n_r}_{1} + T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{t_r=T_{rr}}$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{1} + T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \xRightarrow{T_{\theta r}=0} \boxed{t_\theta=0}$$

★ همانطور که مشاهده می‌شود روند حل مانند مثال ۵ـ۷ است که این مراحل در صفحه‌ی 262 جزوه حل تمرین است با این تفاوت که $-\alpha<\theta<\alpha$ عوض می‌شود و نیروی Q نیز داریم پس معادلات تعادل را خواهیم داشت:

$$\sum F_{x_1}=0 \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha}(T_{rr}\sin\theta)R\,d\theta = -Q \quad (1)$$

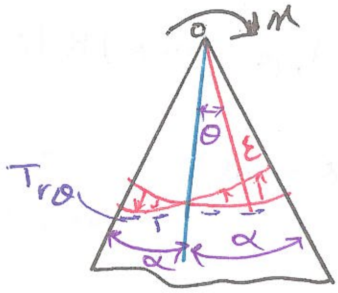
$$\sum F_{x_2}=0 \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha}(T_{rr}\cos\theta)R\,d\theta = -P \quad (2)$$

★ با برقراری روابط (1) و (2) ضرایب C و D و در نهایت تابع تنش ایری و مؤلفه‌های تنش بدست می‌آید.

$$C = \frac{-1}{2\alpha+\sin2\alpha} \quad و \quad D=\frac{1}{2\alpha-\sin2\alpha}\frac{Q}{P}$$

توجه: همین مثال را برای $\alpha=\frac{\pi}{2}$ در حالت $Q=0$ ساده کرده و با نتایج مسئلهٔ (۵ـ۶) مقایسه نمایید. واضح است که شرایط مرزی در $\theta=\pm\alpha$ و نیز در $r\to\infty$ همگی برقرارند.

مثال ۵-۱۰-ص۲۴۴ - تابع تنش ایری و توزیع تنش در گوه شکل (۱۴-۵) را برای لنگر M مؤثر بر رأس گوه بدست آورید:



شکل ۵-۱۴- گوه‌ای با زاویهٔ 2α تحت اثر لنگر M

حل:

* این مسئله از دسته مسائل بدون مشخصهٔ طول می‌باشد، بنابراین با استفاده از معادلات ابعادی به جستجوی تابع تنش ایری می‌پردازیم. دیمانسیون لنگر M از نوع نیرو می‌باشد:

$$[M]=\frac{FL}{L}=F \quad \text{و} \quad [F]=\Phi$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\Phi}{M}\right]=1 \Rightarrow \Phi=M f(\theta)$$

* پس از جدول تابع تنش ایری ردیف هایی که فقط وابسته به θ هستند را بر می‌داریم یعنی ردیف های ۳، ۲۰ و ۲۱ جدول را بر می‌داریم.

$$\Phi=M(B\theta+C\sin 2\theta+D\cos 2\theta)$$

* مؤلفه های تانسور تنش عبارت اند از:

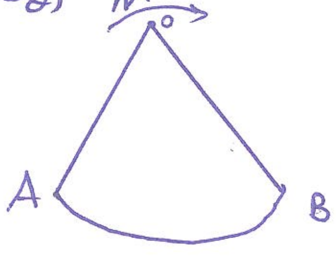
$$T_{rr}=-\frac{4M}{r^2}(C\sin 2\theta+D\cos 2\theta)$$

$$T_{r\theta}=\frac{M}{r^2}(B+2C\cos 2\theta-2D\sin 2\theta)$$

$$T_{\theta\theta}=0$$

* ضرایب B، C و D با نوشتن تعادل گوه‌ای به شعاع R و برقراری شرایط مرزی در $\theta=\pm\alpha$ بدست می‌آیند. تعادل گوه به شعاع R است (مانند مثال ۸-۹ فقط اینجا به جای P و Q در معادلات M داریم)

$-\alpha<\theta<\alpha$ و $r=R$ و $n=(n_r=1, n_\theta=0)$ و $\underline{t}=(t_r, t_\theta)$



$$t_i=T_{ij}n_j$$

$$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}\overset{1}{n_r}+T_{r\theta}\underset{0}{\cancel{n_\theta}} \Rightarrow \boxed{t_r=T_{rr}}$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}\underset{1}{n_r}+T_{\theta\theta}\underset{0}{\cancel{n_\theta}} \quad \boxed{t_\theta=T_{\theta r}}$$

* مشابه حل صفحه 262 جزوه حل تمرین

$$\xrightarrow{+}\sum F_{x_1}=0 \int_{-\alpha}^{\alpha}(\tau_{rr}\sin\theta+\tau_{r\theta}\cos\theta)R\,d\theta=0$$

$$+\!\downarrow \sum F_{x_2}=0 \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha}(\tau_{rr}\cos\theta-\tau_{r\theta}\sin\theta)R\,d\theta=0$$

$$\sum M_0=0 \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha}(\underbrace{R}_{\text{بازو لنگر}}\tau_{r\theta})R\,d\theta=M$$

در صفحه 262 بار گسترده داشتیم ولی اینجا لنگر است

$$\star \Rightarrow \boxed{D=0} \quad , \quad \boxed{C=\frac{1}{2(\sin 2\alpha-2\alpha\cos 2\alpha)}}$$

$$\boxed{B=\frac{-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-2\alpha\cos 2\alpha}}$$

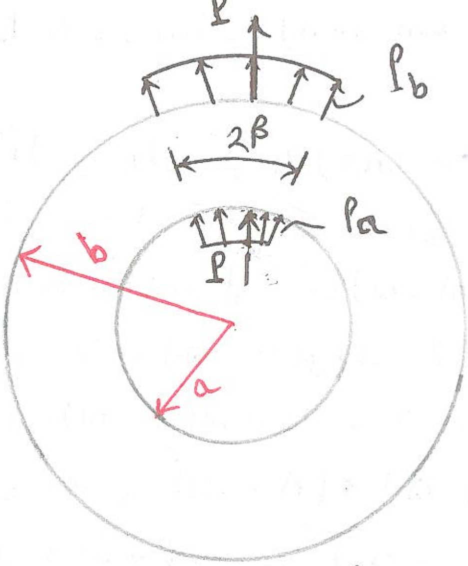
مثال ۵ ـ ۱۱ ـ مشابه این مثال در تمرینات آخر فصل حل شده است

★ مانند تمرین ۵ ـ ۱۸ است.

مثال ۵ ـ ۱۲ ـ این مثال هم مانند تمرین ۵ ـ ۹ است

مثال ۵ - ۱۳ - دیسک نازک و توخالی شکل (۵ - ۱۶) را در نظر می‌گیریم. این دیسک مطابق شکل تحت اثر نیروهای متمرکز P قرار گرفته است. تابع تنش ایری و توزیع تنش در این دیسک را بدست آورید.

★ P_a و P_b را صورت سؤال نداده است شکل اصلی فقط دوتا نیروی متمرکز P دارد



شکل ۵ - ۱۶ - دیسک توخالی تحت اثر نیروهای متمرکز P

حل:

★ برای حل این مسئله ابتدا هریک از نیروهای متمرکز را در فاصله زاویه‌ای بسیار کوچک 2β توزیع می‌کنیم. در این صورت تنش های P_b و P_a برابرانو با:

$$P_a = \frac{P}{2a\beta} \quad \text{و} \quad P_b = \frac{P}{2b\beta}$$

★ علت اینکه π در مخرج نوشته نشده چون فاصله زاویه‌ای بسیار کوچک مد نظر ماست وقتی یک المان خیلی کوچک در نظر بگیریم انحنا به صورت سطح صاف در نظر گرفته می شود.

★ حال برای آنکه بارگذاری را به صورت متقارن بسط دهیم (مانند ۵ - ۱۵ کتاب) از سری کسینوسی فوریه استفاده می کنیم.

یادآوری: فرم سینوس برای توابع فرد و فرم کسینوس برای توابع زوج مورد استفاده قرار می گیرد.

$$P_a = \frac{P}{2a\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{an} \cos n\theta \qquad , P_{an} = \frac{P}{n\pi a\beta} \sin n\beta$$

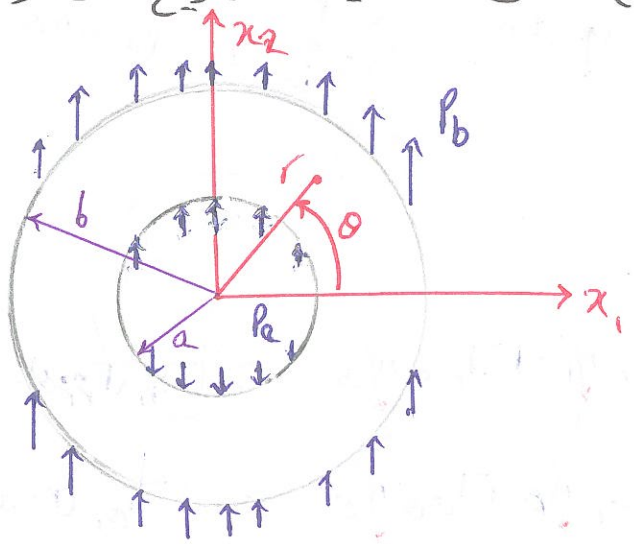
$$P_b = \frac{P}{2b\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{bn} \cos n\theta \qquad , P_{bn} = \frac{P}{n\pi b\beta} \sin n\beta$$

★ کتاب P_{an} و P_{bn} را بارشهای (تنش‌شعاعی) سینوسی در نظر گرفت

★ به این ترتیب اگر حل مسئله را برای هر n ($P_{an} \cos n\theta$ و $P_{bn} \cos n\theta$) داشته باشیم با استفاده از اصل برهم نهی ، اجتماع جواب‌های جواب مسئله است. حل مسئله برای جملات سینوسی در مثال های (۵-۱۱) و (۵-۱۲) آمده است و برای جملات کسینوسی به تمرین‌های (۵-۸) و (۵-۹) رجوع کنید. تمرین (۵-۸) مربوط به $n=1$ و تمرین (۵-۹) مربوط به $n \geq 2$ می باشد. بنابراین با جمع جواب‌های تمرین های (۵-۸) و (۵-۹) و همچنین جواب مربوط به $n=0$ ، جواب مسئله اخیر بدست می آید. در تمرین (۵-۸) بجای P_a و P_b باید به ترتیب $\frac{P}{\pi a\beta} \sin\beta$ و $\frac{P}{\pi b\beta} \sin\beta$ و در تمرین (۵-۹) بجای P_a و P_b به ترتیب $\frac{P}{n\pi a\beta}$ و $\frac{P}{n\pi b\beta} \sin n\beta$ قرار می دهیم. در حالت $n=0$ ، $P_a = \frac{P}{\pi a}$ و $P_{b_0} = \frac{P}{\pi b}$ می باشد و جواب آن همان جواب مثال (۵-۲) است. تکمیل حل مثال به خواننده واگذار می شوند.

★ پس معلوم شد جواب های سینوسی و کسینوسی جواب مسئله ما ست.

مثال ۵ - ۱۴- لوله ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b تحت اثر بارگذاری به شدت p_a و p_b به ترتیب در داخل و خارج در جهت x_2 واقع شده است (شکل ۵ - ۱۷). تابع تنش ایری، توزیع تنش و تغییر مکان آنرا بدست آورید.



شکل ۵ - ۱۷ - لوله طویل تحت نیروهای سطحی در داخل و خارج در جهت x_2

حل:

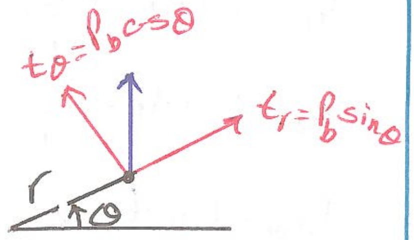
★ ابتدا ارتباط p_a و p_b را به منظور برقراری شرط تعادل می نویسیم:

$$2\pi a p_a = 2\pi b p_b \Rightarrow p_a a = p_b b$$

گام اول: مرتب کردن شرایط مرزی تنش

و به بیرون:

$$\forall\theta ,\ r=b \quad \underline{n}=(n_r=1 ,\ n_\theta=0) ,\quad t_r = p_b \sin\theta$$
$$t_\theta = p_b \cos\theta$$



★ در اینجا t_r و t_θ پس از تجزیه نیروی p_b در جهت افزایش r و θ هستند پس علامتشان مثبت است.

$$t_i = T_{ij} n_j$$

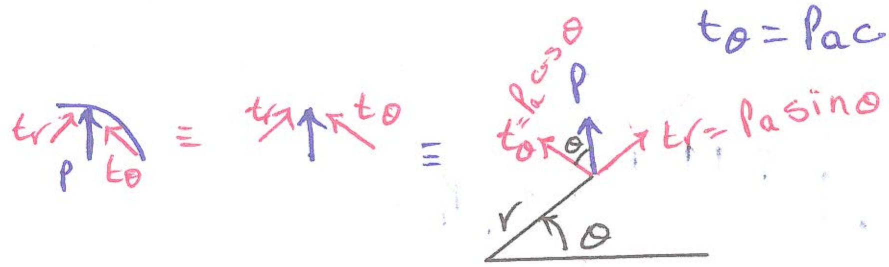
$$i=r \Rightarrow t_r = T_{rr}\underbrace{n_r}_{1} + T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{rr}(r=b ,\ \theta) = p_b \sin\theta}$$

$$i=\theta \Rightarrow t_\theta = T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{1} + T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}(r=b ,\ \theta) = p_b \cos\theta}$$

وجه داخلی:

$\forall\theta,\ r=a,\ \underline{n}=(n_r=-1,\ n_\theta=0)$, $t_r=P_a\sin\theta$

$t_\theta=P_a\cos\theta$



$t_i=T_{ij}n_j$

$i=r \Rightarrow t_r=T_{rr}\underbrace{n_r}_{-1}+T_{r\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{rr}(r=a,\theta)=-P_a\sin\theta}$

$i=\theta \Rightarrow t_\theta=T_{\theta r}\underbrace{n_r}_{-1}+T_{\theta\theta}\underbrace{n_\theta}_{0} \Rightarrow \boxed{T_{\theta r}(r=a,\theta)=-P_a\cos\theta}$

گام دوم: حدس ϕ و مؤلفه‌های تنش

* با ترکیب شرایط مرزی تنش ϕ را حدس می‌زنیم،

* پس ردیف‌هایی را انتخاب می‌کنیم که $f(r)\sin\theta$ برای T_{rr} و $f(r)\cos\theta$ برای $T_{\theta r}$ مشترک باشند

$T_{rr}=f(r)\sin\theta$

$T_{\theta r}=f(r)\cos\theta$

را برای ردیف ϕ، T_{rr}، $T_{r\theta}$، $T_{\theta\theta}$، $2\mu u_r^{**}$ و $2\mu u_\theta^{**}$ انتخاب می‌کنیم. درنتیجه ردیف‌های ۷، ۹ و ۱۱ و ۱۳ قابل قبول هستند.

$$\phi=Ar^3\sin\theta+Br\theta\cos\theta+Cr\ln r\sin\theta+\frac{D}{r}\sin\theta$$

$$T_{rr}=\left(2Ar-\frac{2B}{r}+\frac{C}{r}-\frac{2D}{r^3}\right)\sin\theta$$

$$T_{r\theta}=\left(-2Ar-\frac{C}{r}+\frac{2D}{r^3}\right)\cos\theta$$

$$T_{\theta\theta}=\left(6Ar+\frac{C}{r}+\frac{2D}{r^3}\right)\sin\theta$$

$$2Gu_r=A(\chi-2)r^2\sin\theta+\frac{B}{2}\left[(\chi-1)\theta\cos\theta-(\chi+1)\ln r\sin\theta+\sin\theta\right]$$
$$+\frac{C}{2}\left[-(\chi+1)\theta\cos\theta+(\chi-1)\ln r\sin\theta-\sin\theta\right]+\frac{D}{r^2}\sin\theta$$

$$2Gu_\theta=-A(\chi+2)r^2\cos\theta+\frac{B}{2}\left[-(\chi-1)\theta\sin\theta-(\chi+1)\ln r\cos\theta-\cos\theta\right]$$
$$+\frac{C}{2}\left[(\chi+1)\theta\sin\theta+(\chi-1)\ln r\cos\theta+\cos\theta\right]-\frac{D}{r^2}\cos\theta$$

★ در حالت کرنش مسطح ($x=3-4\nu$) می باشد. اگر با توجه به تنش های بدست آمده شرایط مرزی را برقرار می کنیم:

$$\star\ 2Aa-\frac{2B}{a}+\frac{C}{a}-\frac{2D}{a^3}=P_a$$

$$\star\ -2Aa-\frac{C}{a}+\frac{2D}{a^3}=P_a$$

$$\star\ 2Ab-\frac{2B}{b}+\frac{C}{b}-\frac{2D}{b^3}=P_b$$

$$\star\ -2Ab-\frac{C}{b}+\frac{2D}{b^3}=P_b$$

$$\Rightarrow B=-P_a a=-P_b b$$

$B \Rightarrow A$ و C و D بدست می آید

★ مقادیر تغییر مکان ها تک مقدار نبوده و شرط تک مقدار بودن تغییر مکان ها با رابطه زیر بدست می آید

$$\begin{cases}2Aa+\frac{C}{a}-\frac{2D}{a^3}=-P_a\\ 2Ab+\frac{C}{b}-\frac{2D}{b^3}\end{cases}$$

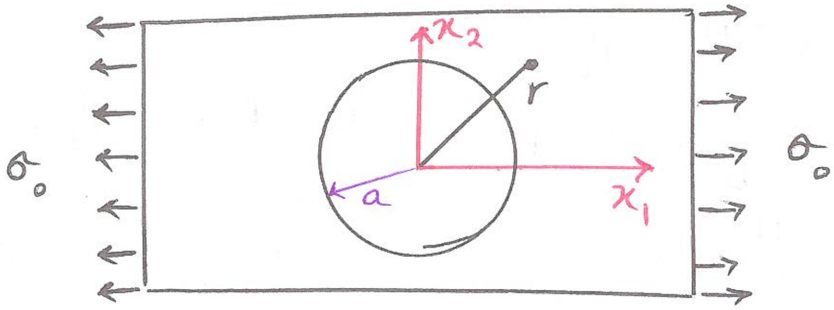
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{B}{2}(x-1)-\frac{C}{2}(x+1)=0\\ C=-\frac{x-1}{x+1}P_a a\end{cases}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{x+1}\ \frac{P_a a^3-P_b b^3}{b^4-a^4}}$$

و

$$\boxed{D=\frac{1}{x+1}\ \frac{a^3b^3(P_a b-P_b a)}{b^4-a^4}}$$

مثال ۵ - ۱۵ - صفحه ای نامتناهی به ضخامت کم با یک سوراخ دایره ای شکل به شعاع a مفروض است. این صفحه در بی نهایت تحت کشش ثابت σ_0 در راستای x_1 قرار گرفته است (شکل ۵ - ۱۸) توزیع تنش در این صفحه را بدست آورید.



شکل ۵ - ۱۸ - صفحهٔ نامتناهی با سوراخ دایره ای تحت تنش های کششی ثابت σ_0

حل:

گام اول: تبدیل نیروها از دستگاه دکارتی به دستگاه استوانه ای از طریق ماتریس تبدیل

$$\bar{T} = A T A^T \quad , \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} \\ T_{r\theta} & T_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_0 \cos^2\theta & -\sigma_0 \sin\theta\cos\theta \\ -\sigma_0 \sin\theta\cos\theta & \sigma_0 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_{rr} = \dfrac{\sigma_0}{2}(1+\cos 2\theta) \Rightarrow T_{rr} = f(r) + g(r)\cos 2\theta & \text{(الف)} \\ T_{\theta\theta} = \dfrac{\sigma_0}{2}(1-\cos 2\theta) \Rightarrow T_{\theta\theta} = f(r) + g(r)\cos 2\theta & \text{(ب)} \\ T_{r\theta} = -\dfrac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta \Rightarrow T_{r\theta} = \underbrace{f(r)}_{0} + g(r)\sin 2\theta & \text{(پ)} \end{cases}$$

گام دوم: حدس ϕ

★ از روابط (الف) و (ب) نتیجه می شود که T_{rr} و $T_{\theta\theta}$ حاصل جمع دو تابع اند به طوری که این دو تابع نسبت به r ثابت و نسبت به θ تابع $\cos 2\theta$ می باشند. همچنین از رابطهٔ (پ) در می یابیم که $T_{r\theta}$ به صورت یک تابع از $\sin 2\theta$ است.

* براساس روابط (الف)، (ب) و (پ) دو ترم داریم، یکی $f(r)$ و دیگری $g(r)\cos 2\theta$ که در مرحله اول برای $f(r)$ T_{rr}، $T_{\theta r}$ و $T_{\theta\theta}$ هایی که فقط وابسته به r هستند را می نویسیم. در نتیجه ردیف های 1 و 2 و 4 جدول خواهد شد.

* در مرحله دوم برای $g(r)$ (ترم دوم)، در جدول ردیف هایی را بررسی داریم که T_{rr} آن ها وابسته به r و $\cos 2\theta$ باشد و همزمان $T_{\theta r}$ آن نیز وابسته به $\cos 2\theta$ و r باشد و همچنین به طور همزمان $T_{r\theta}$ آن به $\sin 2\theta$ و r وابسته باشد که براین اساس ردیف های ۱۴، ۱۶، ۱۸ و ۲۰ را می نویسیم.

$$f(r) = c_1 + c_2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 r^2 \ln r$$

$$g(r) = \left(B_1 + B_2 r^2 + B_3 r^4 + \frac{B_4}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\phi = c_1 + c_2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 r^2 \ln r + B_1 \cos 2\theta + B_2 r^2 \cos 2\theta + B_3 r^4 \cos 2\theta + \frac{B_4}{r^2}\cos 2\theta$$

$$T_{rr} = \frac{c_2}{r^2} + 2c_3 + c_4(1 + 2\ln r) - \left(\frac{4B_1}{r^2} + 2B_2 - 8B_3 r^2 + \frac{6B_4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$T_{\theta\theta} = -\frac{c_2}{r^2} + 2c_3 + c_4(3 + 2\ln r) + \left(2B_2 + 12B_3 r^2 + \frac{6B_4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$T_{r\theta} = 2\left(-\frac{B_1}{r^2} + B_2 + 3B_3 r^2 - \frac{3B_4}{r^4}\right)\sin 2\theta$$

* ثابت های c_i و B_i با استفاده از شرایط مرزی بدست می آیند.

* برای محدود باقی ماندن تنش ها در بی نهایت داریم:

$$c_4 = B_3 = 0$$

گام سوم: شرایط مرزی تنش

* در وجه داخلی سوراخ در $r=a$ هیچ گونه تنش وجود ندارد:

$$r=a, \ \forall\theta, \quad n=(-1,0) \quad , \quad t_r = t_\theta = 0$$

$$T_{rr} = T_{r\theta} = 0$$

$$T_{rr}=\frac{C_2}{a^2}+2C_3-\left(\frac{4B_1}{a^2}+2B_2+\frac{6B_4}{R^4}\right)\cos 2\theta=0$$

$$T_{r\theta}=2\left(-\frac{B_1}{a^2}+B_2-\frac{3B_4}{a^4}\right)\sin 2\theta=0$$

* روابط بدست آمده به ازای کلیهٔ مقادیر θ باید برقرار باشند، در نتیجه به سه رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{C_2}{a^2}+2C_3=0$$

$$\frac{4B_1}{a^2}+2B_2+\frac{6B_4}{a^4}=0 \qquad \text{I}$$

$$-\frac{B_1}{a^2}+B_2-\frac{3B_4}{a^4}=0$$

* همچنین در $r\to\infty$ تنش‌ها به صورت روابط (الف) تا (پ) هستند:

$$T_{rr}=2C_3-2B_2\cos 2\theta=\frac{\sigma_0}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$T_{\theta\theta}=2C_3+2B_2\cos 2\theta=\frac{\sigma_0}{2}(1-\cos 2\theta) \qquad \text{II}$$

$$T_{r\theta}=2B_2\sin 2\theta=-\frac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta$$

* از روابط I و II ثابت‌های مسئله بدست می‌آید:

$$B_1=\frac{\sigma_0}{2}a^2,\quad B_2=-\frac{\sigma_0}{4},\quad B_4=-\frac{\sigma_0}{4}a^2,\quad C_2=-\frac{\sigma_0}{2}a^2,\quad C_3=\frac{\sigma_0}{4}$$

* بنابراین شکل نهایی مؤلفه‌های تانسور تنش عبارت اند از:

$$T_{rr}=\frac{\sigma_0}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_0}{2}\left(1-\frac{4a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$T_{\theta\theta}=\frac{\sigma_0}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma_0}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$T_{r\theta}=-\frac{\sigma_0}{2}\left(1+\frac{2a^2}{r^2}-\frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta$$

* $T_{\theta\theta}$ در $\theta=\frac{\pi}{2}$ ماکزیمم و برابر $3\sigma_0$ می‌شود، یعنی تنش در جهت محور x_1، در انتهای قطر قائم تا ۳ برابر افزایش می‌یابد. تغییرات تنش‌های T_{rr} و $T_{\theta\theta}$ در $\theta=0$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ در شکل (۵ - ۱۹) صفحه 257 کتاب آمده است.

مثال ۵-۱۶- صفحهٔ دایره‌ای شکل با ضخامت بسیار کم و با شعاع a مورد نظر است. این صفحه تحت اثر نیروی فشاری P در امتداد قطر قرار می‌گیرد (شکل ۵-۲۰). مؤلفه‌های تانسور تنش را در دستگاه $x_1 x_2$ محاسبه کنید.

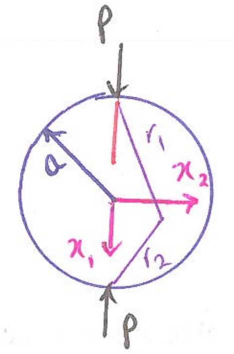
حل:

★ برای تعیین توزیع تنش در این صفحهٔ دایره‌ای، فرض می‌کنیم که این صفحه جزیی از یک محیط نیمه متناهی بوده و نیروی P به آن اثر می‌کند (شکل ۵-۲۱-الف). همچنین برای تأثیر نیروی P-، این صفحه را جزیی از یک محیط نیمه متناهی دیگر فرض می‌کنیم (شکل ۵-۲۱-ب). در نهایت به منظور حذف تنش‌های مجموع دو حالت اخیر در مرز $r=a$، حالت سوم، همان صفحه دایره‌ای با شرایط مرزی ناشی از مجموع دو حالت اول و دوم را مورد توجه قرار می‌دهیم (شکل ۵-۲۱-پ).

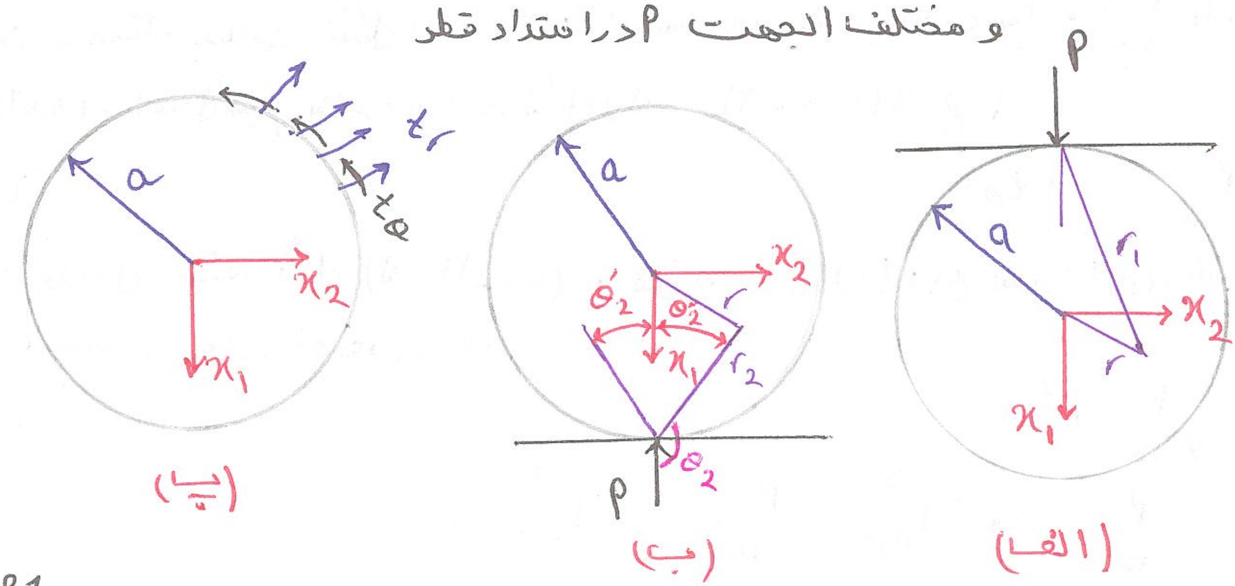
بنا براین حل این مسئله، منجر به حل مسائل اشکال (۵-۲۱-الف، ب و پ) می‌شود.

نظر خودم: (شکل ۵-۲۱-پ) از نظر من بخاطر این است که می‌خواهد نیروی P را تجزیه کند مثل مثال ۵-۱۴ یا تمرین ۵-۷

★ تابع تنش ایری مربوط به مسائل حالت‌های اول و دوم با استفاده از مثال (۵-۷) به ترکیب عبارت اندازه



شکل ۵-۲۰- صفحهٔ دایره‌ای شکل تحت اثر نیروی مساوی و مختلف الجهت P در امتداد قطر



(الف) $\phi_1 = -\frac{P}{\pi} r_1 \theta_1 \sin\theta_1$

(ب) $\phi_2 = -\frac{P}{\pi} r_2 \theta_2' \sin\theta_2'$

* که در آن $\theta_2' = \pi - \theta_2$ است. با قرار دادن $\theta_2 - \pi$ بجای θ_2' در (ب)، تابع ϕ_2 برحسب θ_2 برابر است با:

(پ) $\phi_2 = \frac{P}{\pi} r_2 \theta_2 \sin\theta_2 - P r_2 \sin\theta_2$

* جملهٔ دوم در رابطهٔ (پ) در تعیین تنش‌ها بی‌اثر می‌باشد (چون در جدول ردیف $r\sin\theta$ وجود ندارد پس تمامی تنش‌های ناشی از آن صفر است).
مؤلفه‌های تانسور تنش ناشی از ϕ_1 و ϕ_2 به صورت‌های زیر هستند:

(ت) $T_{rr}^{(1)} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos\theta_1}{r_1}$ و $T_{r\theta}^{(1)} = T_{\theta\theta}^{(1)} = 0$

(ث) $T_{rr}^{(2)} = \frac{2P}{\pi} \frac{\cos\theta_2}{r_2}$ و $T_{r\theta}^{(2)} = T_{\theta\theta}^{(2)} = 0$

* که در آن بالانویس‌های (۱) و (۲) به ترتیب مربوط به توابع تنش ϕ_1 و ϕ_2 می‌باشند. با جمع حالت‌های (الف) و (ب) تنش‌های مرزی در $r=a$ را بدست می‌آوریم.
با توجه به شکل‌های (۵-۲۱- الف و ب)، شعاع‌های r_1 و r_2 در $r=a$ برابرند با:

(ج) $r_1 = 2a\cos\theta_1$

(چ) $r_2 = 2a\sin\theta_1 = -2a\cos\theta_2$

* این تنش‌ها در شکل (۵-۲۲) نشان داده‌اند. براساس روابط (ج) و (چ)، نقاطی که بر روی محیط قرار گرفته‌اند، تحت فشار هیدروستاتیک بوده و برای رسیدن به شرایط مرزی مسئله مطابق شکل (۵-۲۰) لازم است که فشار هیدروستاتیک $\frac{P}{\pi a}$ را به صفحهٔ دایره‌ای اعمال کنیم. بنابراین در شکل (۵-۲۱-پ) داریم:

(ح) $t_r = \frac{P}{\pi a}$ و $t_\theta = 0$

* برای حل مسئله شکل (۵-۲۱-پ) با شرایط مرزی (ح) تابع تنش ایری و تنش‌های آن به صورت زیر خواهد بود:

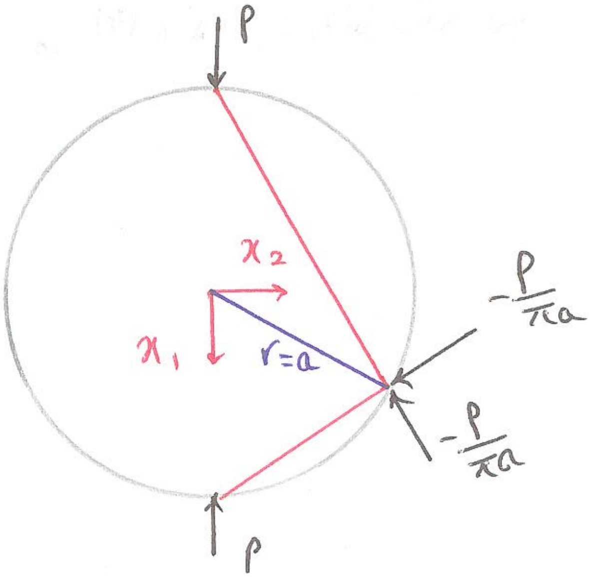
(خ) $\phi_3 = \frac{P}{2\pi a} r^2$

$T_{rr}^3 = \frac{P}{\pi a}$ و $T_{\theta\theta}^3 = \frac{P}{\pi a}$ و $T_{\theta\theta}^3 = 0$

* با جمع جواب های ۳ حالت اول، دوم و سوم، جواب مسئله اصلی عبارت خواهد بود از:

(ز)
$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = -\frac{P}{\pi} r_1 \theta_1 \sin\theta_1 + \frac{P}{\pi} r_2 \theta_2 \sin\theta_2 + \frac{P}{2\pi a} r^2$$

که در آن $(r_1$ و $\theta_1)$، $(r_2$ و $\theta_2)$ و ۱ در شکل (۵-۲۱) نشان داده شده اند.
بدین ترتیب مؤلفه های تانسور تنش برابر اند با:



شکل ۵-۲۲- تنش های ناشی از نیروهای P_{i_1} و $-P_{i_1}$ در مرز $r=a$

(ژ)
$$T_{rr} = \frac{P}{\pi}\left(-2\frac{\cos\theta_1}{r_1} + 2\frac{\cos\theta_1}{r_2} + \frac{1}{a}\right)$$

(س)
$$T_{\theta\theta} = \frac{P}{\pi a}(0+0+1) = \frac{P}{\pi a}$$

(ش)
$$T_{r\theta} = 0$$

★ برای بیان تنش ها در دستگاه مختصات x_1, x_2، می توانیم تانسور تنش مربوط به هر یک از دستگاه های (r_1, θ_1) و (r_2, θ_2) و (r, θ) را به طور جداگانه با استفاده از رابطه $T = A^T T A$ به دستگاه x_1x_2 تبدیل نمود و سپس نتایج را با یکدیگر جمع کرد. با انجام این کار مؤلفه های تانسور تنش در دستگاه x_1x_2 بدست خواهد آمد.

یادآوری: $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$$T_{11}=\frac{2P}{\pi}\left[-\frac{(x_1+a)^3}{r_1^4}-\frac{(x_1-a)^2}{r_2^4}+\frac{1}{2a}\right] \qquad \text{(ص)}$$

$$T_{12}=\frac{2P}{\pi}x_2\left[-\frac{(x_1+a)^2}{r_1^4}+\frac{(x_1-a)^2}{r_2^4}\right] \qquad \text{(ض)}$$

$$T_{22}=\frac{2P}{\pi}\left[-\frac{(x_1+a)x_2^2}{r_1^4}-\frac{(x_1-a)x_2^2}{r_2^4}+\frac{1}{2a}\right] \qquad \text{(ط)}$$

★ شکل ۵ - ۲۳ ص ۲۴۱ کتاب را نیز نگاه کنید