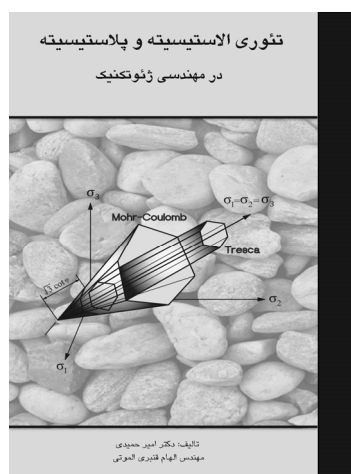


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته
در مهندسی ژئوتکنیک
(ویراست دوم)

تألیف

دکتر امیر حمیدی
(عضو هیأت علمی دانشگاه خوارزمی)
مهندس الهام قنبری الموتی
(کارشناس ارشد مهندسی ژئوتکنیک)

www.simayedanesh.ir



Email : simaye.danesh@yahoo.com
Telegram : [telegram.me/simayedaneshpub](https://t.me/simayedaneshpub)

سرشناسه	: حمیدی، امیر، ۱۳۵۳
عنوان و نام پدیدآور	: تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته در مهندسی ژئوتکنیک / تألیف امیر حمیدی، الهام قنبری
مشخصات نشر	: تهران: سیمای دانش ۱۳۹۴
مشخصات ظاهری	: ۲۹۰ ص
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۱۲۰-۲۵۳-۷
فهرست نویسی	: فیپا
موضوع	: ارتجاع (فیزیک)
موضوع	: پلاستیسیته
موضوع	: خاک - مکانیک
شناسه افزوده	: قنبری، الهام، ۱۳۶۵
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۴ ت ۹ ۸ ح / QA ۹۳۱
رده بندی دیویی	: ۵۳۱/۳۸۲
کتابشناسی ملی	: ۴۰۹۵۰۵۶

تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته در مهندسی ژئوتکنیک

تألیف:

دکتر امیر حمیدی

مهندس الهام قنبری الموتی

ناشر:

انتشارات سیمای دانش

ناشر همکار:

انتشارات آذر

نوبت چاپ:

اول/۱۳۹۶

تیراژ:

۱۱۰۰ نسخه

لیتوگرافی:

باختر

چاپخانه:

مهراد - ۱۱۷۲۰ - ۶۶۴۱

محرافی:

مهراد

شابک:

۹۷۸-۶۰۰-۱۲۰-۲۵۳-۷

قیمت:

۲۰۰۰۰ تومان

کلیه حقوق این اثر برای انتشارات سیمای دانش محفوظ است.

انتشارات سیمای دانش: خیابان انقلاب - ابتدای خیابان ۱۲ فروردین

پلاک ۳۱۸ - تلفن: ۶۶۴۶۴۷۷۹

فروشگاه سیمای دانش: ۶۶۴۶۰۵۴۵

انتشارات آذر: ۶۶۴۶۵۸۳۰

کتابفروشی عصر دانش: ۱ ۶۶۴۹۳۷۰۱

کتابفروشی پرهام: ۶۶۴۶۸۲۳۵

پیشگفتار

امروزه مدلسازی عددی به کمک نرم افزارهای مختلف، نقش بسزایی در تحلیل و طراحی سازه‌های ژئوتکنیکی دارد. به منظور دستیابی به یک طرح مهندسی و کارآمد، به داده‌های معتبری که شامل تنش‌ها و کرنش‌ها می‌باشند نیازمندیم و لازمه این امر پیش بینی دقیق رفتار خاک و اثر متقابل آن بر سازه می‌باشد. در سالهای اخیر مدل‌های رفتاری برای پیش بینی رفتار خاک در شرایط گوناگون توسعه بسیاری یافته‌اند. از جمله این شرایط میتوان به بارگذاری استاتیکی و دینامیکی که منجر به ایجاد تغییرشکلهای الاستیک و پلاستیک در خاک می‌شود، وضعیتهای متفاوت ساختاری خاک مانند سیمانتاسیون، رفتار غیر ایزوتروپ و تغییرات رفتاری با افزایش یا کاهش دما اشاره نمود. مدل رفتاری مناسب نیز با توجه به شرایط مختلفی که برای خاک وجود دارد، متغیر می‌باشند.

از آنجایی که معادلات ریاضی یک مدل رفتاری که در مدلسازی عددی وارد می‌شود عموماً بر اساس تانسورهای تنش و کرنش تعریف می‌شوند تا معرف شرایط رفتاری یک المان از ماده باشد، دانستن مفاهیم مربوط به تانسورها و عملیات ریاضی مربوط به آن اهمیت فراوانی می‌یابد. در این کتاب ابتدا به تعریف مفاهیم مذکور پرداخته می‌شود. سپس مبانی الاستیسیته و مهمترین مدل‌های رفتاری الاستیک معرفی خواهند شد. در بحث پلاستیسیته مدل‌های رفتاری در خصوص فلزات و پس از آن خاکها توصیف می‌گردند. از این جمله می‌توان مدل‌های موهر-کولمب و دراگر-پراگر که امروزه در تمامی نرم افزارهای ژئوتکنیکی کاربرد دارند را ذکر نمود. همچنین مدل‌های پلاستیسیته بر مبنای تئوری حالت بحرانی در خاک و رفتار سخت شونده آن، همانند مدل کم کلی و مدل‌های کلاهدار نیز به تفصیل مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند.

علاوه بر موارد ذکر شده، در دهه‌های اخیر مدلسازی‌های ژئوتکنیکی در موارد خاص تر مورد پژوهش واقع شده است. از جمله این موارد می‌توان به مدلسازی رفتار خاک‌های مخلوط، خاک‌های غیر اشباع، خاکهای سیمانته و مدلسازی رفتار ترمومکانیکی اشاره نمود. در این کتاب نحوه مدلسازی این فرایندها نیز مورد بررسی قرار گرفته و تاثیرات آنها بر پارامترهای مختلف مکانیکی خاک ارزیابی می‌گردد.

کتاب حاضر به دلیل شمول مباحث تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته و مدل‌های رفتاری گوناگون مورد استفاده در مسائل مهندسی ژئوتکنیک، برای دانشجویان مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری این رشته قابل استفاده و کاربرد می‌باشد. همچنین مهندسان طراح نیز می‌توانند در خصوص استفاده از مدل‌های رفتاری مناسب در طرح و آنالیز عددی سازه‌های ژئوتکنیکی، از مدل‌های معرفی شده استفاده

نمایند. در جهت بهبود کیفیت مطالب و ارتقای هر چه بیشتر آن، استفاده از نظرات اساتید محترم دانشگاه و همکاران گرامی باعث کمال افتخار خواهد بود و دوستان می‌توانند هرگونه پیشنهاد خود را به ایمیل (hamidi@khu.ac.ir) ارسال نمایند.

در پایان لازم است از عزیزانی که در جمع بندی و تهیه بخشهای مختلفی از کتاب همکار نموده اند و مجالی برای نام بردن از ایشان نیست قدردانی گردد. در این ارتباط، بویژه از آقایان مهندس تورچی و مهندس خزاعی، کمال تشکر و قدردانی را داریم. امید است این کتاب گامی موثر در استفاده هر چه صحیح تر از مفاهیم تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته در مسائل مهندسی ژئوتکنیک باشد.

امیر حمیدی

الهام قنبری

پاییز ۹۴

فهرست مطالب

فصل یک: کلیات مدلسازی رفتار خاکها.....	۱۵
۱-۱- مقدمه.....	۱۵
۲-۱- تعیین قوانین رفتاری مواد.....	۱۷
۳-۱- قوانین رفتاری، نیاز کلیدی تحلیلهای تنش- کرنش.....	۱۹
فصل دوم: مبانی حساب تانسورها.....	۲۱
۱-۲- مقدمه.....	۲۱
۲-۲- اندیس ها.....	۲۱
۱-۲-۲- اندیس موهومی.....	۲۲
۲-۲-۲- اندیس آزاد.....	۲۲
۳-۲- دلتای کرونکر.....	۲۳
۴-۲- نشان جابجایی.....	۲۴
۵-۲- عملیاتی با استناد از نماد اندیس ها.....	۲۵
۱-۵-۲- جابجایی.....	۲۵
۲-۵-۲- ضرب.....	۲۶
۳-۵-۲- فاکتورگیری.....	۲۶
۴-۵-۲- انقباض.....	۲۶
۶-۲- تانسورها.....	۲۷
۱-۶-۲- مولفه های تانسور.....	۲۷
۲-۶-۲- جمع تانسورها.....	۲۸
۳-۶-۲- حاصلضرب دایادیک، تانسوری یا باز.....	۲۹

۳۰	۲-۶-۴- حاصلضرب دو تانسور.....
۳۱	۲-۶-۵- حاصلضرب اسکالر تانسورها.....
۳۱	۲-۶-۶- ترانسپوز یک تانسور.....
۳۲	۲-۶-۷- تانسور متعامد.....
۳۲	۲-۶-۸- مولفه های تانسور در دستگاه مختصات تبدیل یافته.....
۳۳	۲-۶-۹- تانسورهای متقارن و پادمقارن.....
۳۴	۲-۶-۱۰- بردار دوگان.....
۳۴	۲-۷- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه.....
۳۶	۲-۸- نامتغیرهای یک تانسور.....
۳۸	۲-۹- عملیات ریاضی بر روی تانسورها.....
۴۱	فصل سوم: تغییرشکل ها و تانسور کرنش.....
۴۱	۳-۱- مقدمه.....
۴۱	۳-۲- تعاریف مختلف کرنش.....
۴۱	۳-۲-۱- تعریف کرنش کوشی.....
۴۲	۳-۲-۲- تعریف کرنش گرین.....
۴۲	۳-۲-۳- تعریف کرنش آلمانسی.....
۴۲	۳-۳- تانسور کرنش.....
۴۳	۳-۴- تانسور دوران.....
۴۴	۳-۵- نامتغیرهای تانسور کرنش.....
۴۶	۳-۶- تجزیه تانسور کرنشی.....
۴۷	۳-۶-۱- نامتغیرهای تانسور کرنش انحرافی.....

۴۷	نامتغیر اول تانسور کرنش انحرافی
۴۷	نامتغیر دوم تانسور کرنش انحرافی
۴۸	نامتغیر سوم تانسور کرنش انحرافی
۵۰	کرنش های اصلی
۵۵	تانسور کرنش برای برخی از حالات خاص تغییر شکل
۵۹	فصل چهارم: نیروها و تانسور تنش
۵۹	مقدمه
۶۰	نامتغیرهای تانسور تنش
۶۱	تجزیه تانسور تنش
۶۲	نامتغیرهای تانسور تنش انحرافی
۶۴	تصویر تنش بر یک صفحه
۶۶	مولفه های برشی و نرمال تنش بر یک صفحه
۶۷	تنش های اصلی
۷۵	محاسبه تنش های برشی
۷۳	شرایط خاص اعمال تنش
۷۵	فصل پنجم: آزمونهای آزمایشگاهی برای تعیین پارامترهای مدل رفتاری
۷۵	مقدمه
۷۵	رفتار غیر خطی
۷۷	شکل کلی قوانین رفتاری
۷۷	مشخص نمودن پارامترهای رفتاری
۷۹	مسیر تنش

فصل ششم: مبانی الاستیسیته.....	۸۵
۱-۶- مقدمه.....	۸۵
۲-۶- تئوری انتشار امواج در محیط الاستیک.....	۸۵
۱-۲-۶- روابط تنش-نیرو.....	۸۶
۲-۲-۶- روابط کرنش-تغییر شکل.....	۸۷
۳-۲-۶- روابط تنش-کرنش.....	۸۸
۴-۲-۶- امواج طولی.....	۹۱
۵-۲-۶- موج پیچشی.....	۹۲
۶-۲-۶- سرعت ذرات در ناحیه تحت تنش.....	۹۳
۷-۲-۶- انعکاس امواج الاستیک در انتهای میله.....	۹۵
۸-۲-۶- ارتعاش طولی میله های کوتاه.....	۹۷
۱-۸-۲-۶- میله دو سر آزاد.....	۹۷
۲-۸-۲-۶- میله دو سر گیردار.....	۹۸
۳-۸-۲-۶- شرایط مرزی یک سر گیردار-یک سر آزاد.....	۱۰۰
۹-۲-۶- معادله موج در فضای سه بعدی.....	۱۰۱
۳-۶- مدل های الاستیک مرتبه اول و دوم.....	۱۰۴
۲-۳-۶- مدل الاستیک کوشی.....	۱۰۶
۳-۳-۶- مدل های کوچی مرتبه اول.....	۱۰۷
۴-۳-۶- محاسبه ثوابت α_1 و α_2	۱۰۷
۱-۴-۳-۶- شرایط برش خالص.....	۱۰۷
۲-۴-۳-۶- شرایط تنش هیدرواستاتیک.....	۱۱۱

۱۱۱	حالت کرنش صفحه ای ۳-۴-۳-۶
۱۱۲	حالت تنش صفحه ای ۴-۴-۳-۶
۱۱۳	حالت تنش تک محوری ۵-۴-۳-۶
۱۱۴	حالت کرنش تک محوری ۶-۴-۳-۶
۱۱۵	مدل های الاستیک گرین ۵-۳-۶
۱۱۷	مدل های الاستیک گرین مرتبه اول ۶-۳-۶
۱۱۹	مدل های الاستیک کوشی مرتبه دوم ۷-۳-۶
۱۲۰	آزمایش کرنش تک محوری ۱-۷-۳-۶
۱۲۱	آزمایش برش ساده ۲-۷-۳-۶
۱۲۲	تعیین پارامترهای مدل در شرایط برش خالص ۳-۷-۳-۶
۱۲۲	مدل های الاستیک گرین مرتبه دوم ۸-۳-۶
۱۲۳	شرایط کرنش تک محوری ۱-۸-۳-۶
۱۲۴	شرایط برش ساده ۲-۸-۳-۶
۱۲۷	فصل هفتم: مبانی پلاستیسیته
۱۲۷	مقدمه ۱-۷
۱۲۸	مرور تاریخچه پیدایش و توسعه تئوری پلاستیسیته ۲-۷
۱۲۹	معیار تسلیم ۳-۷
۱۲۹	فضای تنش های- وسترگارد ۴-۷
۱۳۱	معیارهای تسلیم در پلاستیسیته فلزات ۵-۷
۱۳۱	معیار تسلیم ون میزس ۱-۵-۷
۱۳۳	معیار ترسکا ۲-۵-۷

۱۳۵	رفتار پس از تسلیم.....	۶-۷
۱۳۶	تاثیر مسیر تنش.....	۷-۷
۱۳۸	تعیین کرنشهای پلاستیک.....	۸-۷
۱۳۸	۱-۸-۷ رابطه تنش-کرنش لوی-میزس.....	
۱۳۹	۲-۸-۷ رابطه تنش-کرنش پرندتل-ریوس.....	
۱۴۰	۳-۸-۷ تعیین اجزای کرنشهای برشی و حجمی.....	
۱۴۳	۴-۸-۷ کرنش حجمی و سخت شوندگی پلاستیک.....	
۱۴۹	۵-۸-۷ کرنش برشی پلاستیک.....	
۱۵۰	۶-۸-۷ تابع پتانسیل پلاستیک.....	
۱۵۰	۷-۸-۷ تعامد و جریان همبسته.....	
۱۵۳	۹-۷ رفتار پتانسیل پلاستیک.....	
۱۵۵	۱۰-۷ کار پلاستیک.....	
۱۵۵	۱۱-۷ سخت شوندگی پلاستیک.....	
۱۵۶	۱۲-۷ ارتباط تنش-کرنش در پلاستیسیته کلاسیک.....	
۱۵۷	۱۳-۷ شکل سطح تسلیم.....	
۱۵۹	فصل هشتم: کاربرد پلاستیسیته در مدلسازی رفتار مکانیکی خاک ها.....	
۱۵۹	۱-۸ مقدمه.....	
۱۶۰	۲-۸ معیار گسیختگی موهر-کولمب.....	
۱۶۲	۳-۸ تعیین پارامترهای معیار.....	
۱۶۲	۴-۸ مدل دراگر-پراگر.....	
۱۶۲	۵-۸ تعیین پارامترها.....	

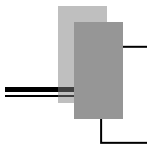
۱۶۳	محدودیت‌های مدل دراگر-پراگر.....	۸-۶-
۱۶۴	بروز رفتار سخت شونده تحت تنش هیدرواستاتیک.....	۸-۷-
۱۶۸	ارتباط تنش-کرنش در معیار دراگر-پراگر.....	۸-۸-
۱۷۱	مبانی حالت بحرانی در خاک‌ها.....	۸-۹-
۱۷۵	مدل الاستوپلاستیک کم کلی.....	۸-۱۰-
۱۷۵	مدل کم کلی.....	۸-۱۰-۱-
۱۷۹	محاسبات مدل کم کلی: سه محوری زهکشی شده فشاری معمولی.....	۸-۱۰-۲-
۱۸۶	محاسبات مدل کم کلی: سه محوری زهکشی نشده فشاری معمولی.....	۸-۱۰-۳-
۱۹۲	نکات تکمیلی در خصوص مدل کم کلی.....	۸-۱۱-
۱۹۲	معادله سطح تسلیم.....	۸-۱۱-۱-
۱۹۵	مدل کم کلی با نسبت فواصل.....	۸-۱۱-۲-
۱۹۶	تعیین معادله رفتاری مدل کم کلی.....	۸-۱۱-۳-
۱۹۸	مدل پلاستیسیته عمومی پاستور و همکاران (۱۹۹۰).....	۸-۱۲-
۱۹۸	مدلسازی رفتار خاکهای رسی.....	۸-۱۲-۱-
۱۹۹	مدلسازی رفتار خاکهای ماسه ای.....	۸-۱۲-۲-
۲۰۰	مدلهای دارای کلاhek.....	۸-۱۳-
۲۰۰	سطح تسلیم ثابت.....	۸-۱۳-۱-
۲۰۱	سطح تسلیم پیش رونده یا کلاhek.....	۸-۱۳-۲-
۲۱۱	فصل نهم: روابط مقاومت-اتساع در خاکها.....	
۲۱۱	مقدمه.....	۹-۱-
۲۱۱	تابع پتانسیل پلاستیک، قانون جریان و ارتباط تنش-اتساع.....	۹-۲-

۲۱۴	۹-۲-۱-ارتباط تنش-اتساع در شرایط کرنش مسطح.....
۲۲۱	۹-۲-۲-معادلات انرژی در مدل کم کلی اولیه و اصلاح شده.....
۲۲۴	۹-۲-۳-مدل تنش-اتساع راو.....
۲۲۷	۹-۳-روابط تنش-اتساع در خاکهای مخلوط درشت دانه.....
۲۳۲	۹-۳-۱-تأثیر تراکم نسبی.....
۲۳۳	۹-۳-۲-تأثیر درصد شن دانه.....
۲۳۵	۹-۳-۳-دانه بندی خاک.....
۲۳۷	۹-۳-۴-تأثیر سیمان‌تاسیون بر اتساع خاکهای مخلوط.....
۲۴۳	فصل دهم: مبانی مدلسازی پیشرفته رفتار مکانیکی خاکها.....
۲۴۳	۱۰-۱-مقدمه.....
۲۴۳	۱۰-۲-مدلسازی رفتار مکانیکی خاکهای سیمانته.....
۲۴۷	۱۰-۲-۱-مرور رفتار خاکهای سیمانته در چارچوب مفاهیم حالت بحرانی.....
۲۵۱	۱۰-۲-۲-ارائه و توسعه یک مدل رفتاری برای خاکهای سیمانته.....
۲۵۹	۱۰-۲-۳-فشار آب حفره ای.....
۲۶۲	۱۰-۲-۴-کرنشهای حجمی.....
۲۶۳	۱۰-۳-مدلسازی رفتار ترمودینامیکی خاکهای رسی.....
۲۶۴	۱۰-۳-۱-تأثیر دما بر خصوصیات فیزیکی و مکانیکی خاک رس.....
۲۶۴	۱۰-۳-۱-۱-تأثیر دما بر وزن مخصوص.....
۲۶۴	۱۰-۳-۱-۲-حدود اتربرگ.....
۲۶۴	۱۰-۳-۱-۳-نفوذ پذیری.....
۲۶۵	۱۰-۳-۱-۴-مقاومت برشی خاک.....

۲۶۵	 ۱۰-۳-۱-۵-تغییر حجم در شرایط زهکشی شده
۲۶۵	 ۱۰-۳-۱-۶-فشار آب حفره‌ای در شرایط زهکشی نشده
۲۶۶	 ۱۰-۳-۲-مدلسازی رفتار ترمومکانیکی رس اشباع
۲۶۶	 ۱۰-۳-۱-۲-فرضیات مدلسازی رفتاری
۲۶۹	 ۱۰-۳-۲-۲-تعیین کرنش های حجمی
۲۷۲	 ۱۰-۳-۲-۳-تعیین کرنش های برشی
۲۷۲	 ۱۰-۳-۲-۴-قانون جریان
۲۷۴	 ۱۰-۳-۲-۵-سطح تسلیم
۲۷۷	 ۱۰-۳-۳-رفتار ترمومکانیکی خاکهای غیر اشباع
۲۷۷	 ۱۰-۳-۱-مبانی مدل رفتاری ترمومکانیکی حالت غیراشباع
۲۷۸	 ۱۰-۳-۲-اصلاح سخت شوندگی برای مکش
۲۷۹	 ۱۰-۳-۳-اصلاح تابع تسلیم برای مکش
۲۸۳	 منابع و مراجع

فصل اول

کلیات مدلسازی رفتار خاکها

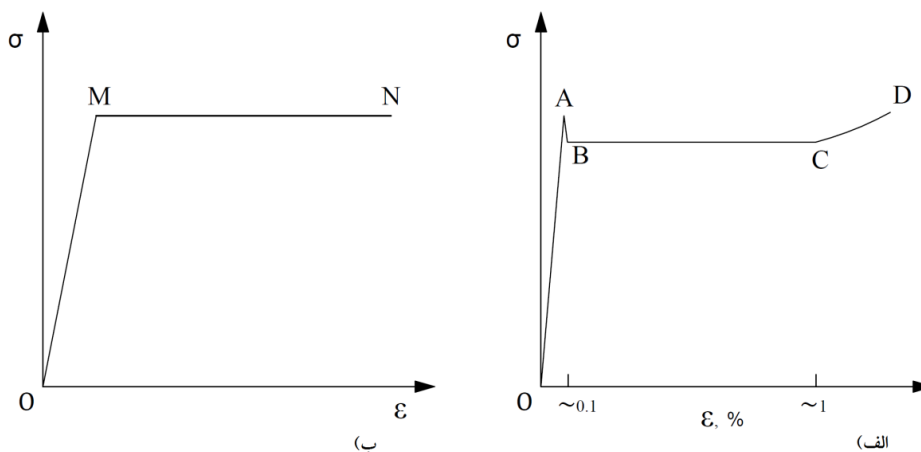


۱-۱ مقدمه

علوم مهندسی با ادراک، تحلیل و پیش بینی ویژگیهای رفتار سازه‌ها و سیستمها همراه شده است. در این راه ناگزیر از شناخت دقیق رفتار موادی هستیم که این سیستمها با استفاده از آنها بنا شده اند. در قدم اول، روش درک رفتار واقعی مواد بر مبنای ساده سازی و به عبارت دیگر مدلهای ساده رفتاری مواد می‌باشد بدین ترتیب که در تحلیل‌ها از مدل‌های ساده شده از رفتار پیچیده و واقعی ماده استفاده می‌گردد. بعبارت دیگر می‌توان با تمرکز بر مفاهیم مورد تاکید در یک مسئله و کنار گذاشتن خصوصیات غیر مرتبط از مدل مفهومی مناسب و سازگار با آن استفاده نمود. در واقع انتخاب نوع مدل رفتاری در یک تحلیل به کاربرد آن وابسته است. برای مثال یک معمار ممکن است یک ساختمان قاب فولادی را با یک سری از فضاها که در آن اسباب، دیوارها و کاربری‌های مختلف قرار داده شده مدلسازی کند، در حالی که یک مهندس سازه ممکن است قاب فولادی را برای محاسبه لنگرهای خمشی در تیرها و ستون‌ها با استفاده از یک سری المانهای خطی مدلسازی کند. مدلسازی می‌تواند بر مبنای ایده آل سازی خصوصیات رفتاری مصالح انجام گیرد. بعنوان مثال رابطه تنش کرنش یک نمونه فولاد نرم تحت کشش ساده در شکل (۱-۱-الف) مشاهده می‌شود. در این شکل OA رفتار خطی اولیه را تا نقطه A نشان می‌دهد. در این نقطه افت ناگهانی در تنش (AB) بدون

کاهش در کرنش می‌شود. سپس تنش در نمونه با افزایش کرنش ثابت باقی خواهد ماند (BC). در نهایت نمونه دچار سخت شوندگی شده و تنش در آن تا لحظه گسیختگی افزایش می‌یابد (CD). با این وجود اگر بخواهیم تحلیل رفتار سازه های فولادی را انجام دهیم این رابطه تنش کرنش با نمودار ایده آل شده در شکل (۱-۱ب) جایگزین خواهد شد. در این شکل رفتار خطی الاستیک اولیه با خط OM مدل سازی شده و از افت ناگهانی مابین تنش تسلیم حد بالا و پایین صرف نظر شده است. همچنین قسمت سخت شوندگی در کرنش نیز حذف می‌گردد و تغییر شکل های پلاستیک در یک تنش ثابت تا کرنش های خیلی زیاد ادامه پیدا می‌کند (MN).

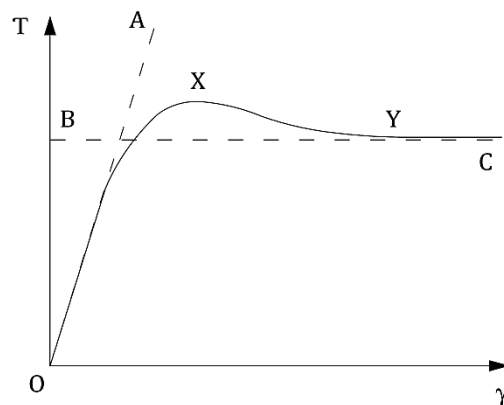
مکانیک خاک کلاسیک از روابط تنش کرنش ایده آل شده مفهومی تری استفاده می‌نماید. نمودار مرسوم تنش برشی در مقابل کرنش برشی برای نمونه خاک در منحنی OXY در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. اگر محاسبات تنش مد نظر باشد، به دست آوردن سختی خاک تحت بارهای سرویس در حالت الاستیک مورد نیاز است که با خط OA قابل تعیین است. اگر محاسبات پایداری مد نظر باشد، گسیختگی خاک همراه با تغییر شکل های زیاد آن مدنظر خواهد بود که باعث در هم شکستن سازه های ژئوتکنیکی می‌شود. لذا از اهمیت رفتار اولیه خاک کاسته شده و ارتباط تنش-کرنش به صورت صلب^۱ و کاملاً پلاستیک^۲ توسط نمودار OBC مدل سازی می‌شود.



شکل ۱-۱: رفتار فولاد نرم تحت کشش ساده

1 Rigid

2 Perfectly Plastic



شکل (۲-۱): رفتار واقعی خاک و مدلسازی ساده شده آن حین برش

۲-۱ تعیین قوانین رفتاری مواد

شکل (۳-۱) نمونه‌ای از ماده تحت بارگذاری تک محوری را نشان می‌دهد که با استفاده از یک فنر شبیه سازی شده است. ارتباط نیرو و تغییر شکل با استفاده از رابطه زیر قابل بیان می‌باشد.

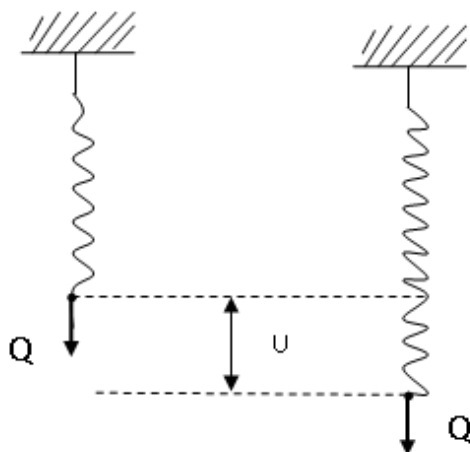
$$ku = Q \quad (۱-۱)$$

در این رابطه k سختی فنر، u تغییر شکل و Q نیروی وارده است. مسلماً در این رابطه پارامتر سختی مشخص کننده وضعیت رفتاری ماده است. مقدار آن با اندازه گیری تغییر شکل تحت یک بار مشخص قابل محاسبه است. حال اگر مطابق شکل (۴-۱) بارگذاری ماده در جهات مختلف انجام گیرد، بار وارده در هر یک از جهات بر تغییر شکل ایجاد شده در جهت دیگر تاثیرگذار خواهد بود. لذا رابطه نیرو- تغییر شکل بصورت زیر تغییر خواهد نمود:

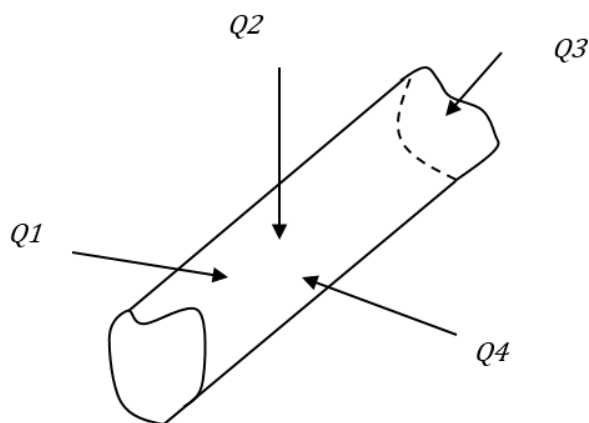
$$\begin{bmatrix} k_{x1} & k_{y1} & k_{z1} \\ k_{x2} & k_{y2} & k_{z2} \\ k_{x3} & k_{y3} & k_{z3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{xn} & k_{yn} & k_{zn} \end{bmatrix}_{n \times 3} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}_{n \times 1} \quad (۲-۱)$$

در این رابطه k_{xi} نشانگر میزان تأثیر نیروی Q_i بر تغییر مکان جهت x یعنی u خواهد بود. به همین ترتیب k_{yi} و k_{zi} نشانگر تأثیر نیرو Q_i بر تغییر مکان جهات y, z یعنی v و w می‌باشند. با توجه به تأثیرگذاری مقدار نیرو بر تغییر شکل هر یک از دیگر جهات، تعیین ماتریس رفتاری $[k]$ در این وضعیت بسیار دشوارتر خواهد بود.

با افزایش تعداد عناصر مجهول در ماتریس رفتاری ماده، نیاز به انجام آزمایشهای بیشتر جهت تعیین مقادیر آنها خواهد بود. در واقع انجام آزمایش تنها روش تعیین درست و دقیق تر پارامترهای یک رابطه رفتاری است. نکته مهم آن است که آزمون مورد استفاده باید بطور صحیح وضعیت بارگذاری و تغییر شکل نمونه خاک را شبیه سازی و مدل سازی نماید. بنابراین در خصوص وضعیت بارگذاری تک محوری، اعمال بار و اندازه گیری تغییر مکان در جهت اعمال بار، رابطه رفتاری را معین خواهد نمود. اما در شرایط تغییر شکل سه بعدی باید با اعمال بارگذاری در جهات مختلف، مقادیر تغییر شکل نظیر در هر جهت تعیین شده تا تعیین عناصر ماتریس رفتاری مورد نظر امکان پذیر گردد.



شکل ۱-۳: بارگذاری تک محوری و مدلسازی آن



شکل ۱-۴: بارگذاری چند محوری

۳-۱ قوانین رفتاری، نیاز کلیدی تحلیل‌های تنش - کرنش

در صورتیکه حالت ساده اعمال تنش تک محوری بر یک میله با سطح مقطع ثابت A و طول l در نظر گرفته شود، رابطه (۳-۱) مقدار تنش σ را مشخص خواهد نمود.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (3-1)$$

به همین ترتیب در صورت ایجاد تغییر شکل u در اثر اعمال این بار، کرنش نظیر بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\varepsilon = \frac{u}{\ell} \quad (4-1)$$

در این معادلات سه مجهول u, ε, σ وجود دارد. اما تنها دو معادله برای آنها در دست است. لذا نیاز به تعیین یک معادله اضافی برای ارتباط تنش و کرنش به عنوان معادله سوم قطعی خواهد بود. این معادله در واقع همان قانون رفتاری ماده تحت بارگذاری خواهد بود. شکل ساده رابطه هوک^۱ این ارتباط را در وضعیت الاستیک خطی نشان می‌دهد که منجر به تعیین تمامی مجهولات خواهد شد.

$$\sigma = E \varepsilon \quad (5-1)$$

پارامتر رفتاری موجود در این رابطه، ضریب الاستیسیته (E) می‌باشد. در حالت کلی معادله تعادل برای المان ماده در شرایط بارگذاری سه بعدی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (6-1)$$

در این رابطه σ_{ij} تانسور تنش و علامت کاما بیانگر مشتق آن نسبت به جهت j است. همینطور F_i برآیند نیروهای خارجی اعمال شده در جهت i خواهد بود. به همین ترتیب می‌توان استنباط نمود که این رابطه حاوی شش مجهول از درایه‌های تانسور تنش و سه معادله تعادل خواهد بود. رابطه کرنش - تغییر شکل نیز در یک ماده به فرم کلی نیز قابل بیان می‌باشد.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7-1)$$

در این رابطه ε_{ij} تانسور کرنش و u_i تغییر مکان نظیر جهت i خواهد بود. این رابطه حاوی نه مجهول که شش مورد آن مربوط به تانسور کرنش ε_{ij} و سه مورد دیگر مربوط به تغییر شکل u_i است، می‌باشد. همچنین این رابطه، شش معادله مستقل برای حل در اختیار قرار خواهد داد.

1 Hooke's Law

بدین ترتیب مجموع دو معادله (۶-۱) و (۷-۱) شامل پانزده مجهول و نه معادله مستقل می‌باشد. به مانند شرایط بارگذاری تک محوری، شش معادله لازم از قانون رفتاری بدست خواهند آمد که از رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (۸-۱)$$

در این رابطه C_{ijkl} بیانگر قانون رفتاری ماده است. این ارتباط شش معادله مستقل در اختیار قرار خواهد داد ولی شامل مجهول جدیدی نیست. در مجموع پانزده معادله و پانزده مجهول موجود حل شده و مقادیر تنش و کرنش حاصل خواهند گردید. بدین ترتیب لزوم دسترسی به قانون رفتاری از توضیحات ذکر شده به وضوح مشخص می‌گردد. با توجه به حضور اندیس‌های متعدد در روابط مرتبط با قوانین رفتاری در فصل بعد قوانین مرتبط با اندیس‌ها مرور و ارائه می‌گردد.

فصل دوم

مبانی حساب تانسورها

۲-۱- مقدمه

در مباحث ریاضی و کاربرد آنها در مهندسی، به کرات از کمیت‌هایی به نام تانسورها استفاده می‌گردد. در واقع تانسورها به منظور بیان هر چه بهتر مفاهیم و فرمولاسیون ریاضیات مورد استفاده در مسائل مهندسی بکار می‌روند. اعداد و اسکالرها تانسور از مرتبه صفر می‌باشند. بردارها تانسورهای مرتبه اول و ماتریس‌ها تانسورهای از مرتبه دوم هستند. تانسورهای از مرتبه بالاتر نماد ریاضی شناخته شده‌ای مثل موارد قبل ندارند ولی در روابط مورد استفاده قرار می‌گیرند. در کاربرد تانسورها، اندیس‌ها نقش اساسی دارند. بنابراین ابتدا به تعریف انواع اندیس‌ها و سپس تانسورها جهت استفاده از آنها در مسائل مدلسازی رفتاری خاک‌ها پرداخته می‌شود.

۲-۲- اندیس‌ها

یک دنباله بصورت مجموع n جمله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \Rightarrow S = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{j=1}^n a_j x_j \quad (۱-۲)$$

همانطور که مشاهده می‌شود با استفاده از اندیس های i و یا j می‌توان عبارت اولیه را به صورت اختصاری بازنویسی نمود. اندیس‌ها معمولاً به دو دسته اندیس آزاد و موهومی تقسیم می‌شوند که در این قسمت مورد اشاره قرار می‌گیرند.

۲-۲-۱- اندیس موهومی^۱

اندیس موهومی اندیسی است که در یک جمله عبارت، دوبار تکرار شده باشد. به عنوان نمونه اندیس های i و j ذکر شده در رابطه (۱-۲) اندیس موهومی خواهند بود. در مورد اندیس های موهومی می‌توان از قانون جمع استفاده نمود. بر اساس قانون جمع^۲ در صورت وجود اندیس موهومی در یک عبارت امکان بسط آن بصورت مجموع جملات وجود دارد. با توجه به وجود سه محور اصلی در دستگاه مختصات دکارتی، معمولاً در کاربردهای مدلسازی و نظریه خمیری، جمع تا سه جمله محدود می‌گردد. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$S = a_i x_i = a_j x_j = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad (2-2)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$S = a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \quad (3-2)$$

$$a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3$$

بطور کلی در صورت وجود n اندیس موهومی در عبارت، 3^n جمله خواهیم داشت. بعنوان مثال عبارت:

$$a_{ijk} x_i x_j x_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ijk} x_i x_j x_k \quad (3-2)$$

شامل ۲۷ جمله می‌باشد.

۲-۲-۲- اندیس آزاد^۳

اگر اندیس در تمامی جملات یک عبارت فقط یک بار تکرار شده باشد، آن را اندیس آزاد می‌نامند. به عنوان مثال در عبارت زیر، i اندیس آزاد و m اندیس موهومی است.

$$x'_i = a_{im} x_m \quad (4-2)$$

1 Dummy Index

2 Summation rule

3 Free index

بسط این عبارت بصورت زیر می‌باشد:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

به همین ترتیب در عبارت زیر، i اندیس آزاد و j اندیس موهومی است:

$$a_i + b_i c_j d_j = 0$$

$$a_1 + b_1(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3) = 0$$

$$a_2 + b_2(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3) = 0 \quad (5-2)$$

$$a_3 + b_3(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3) = 0$$

تذکر: اگر در رابطه‌ای m اندیس آزاد وجود داشته باشد، 3^m معادله نتیجه خواهد شد.

به عنوان مثال در عبارت زیر، i و j اندیس‌های آزاد هستند در حالیکه m اندیس موهومی است. لذا

$$3^2 = 9 \text{ معادله و هر معادله شامل } 3^1 = 3 \text{ جمله خواهد بود.}$$

$$T_{ij} = A_{im}A_{jm} \quad (6-2)$$

$$T_{11} = A_{1m}A_{1m} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13}$$

$$T_{12} = A_{1m}A_{2m} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23}$$

$$T_{13} = A_{1m}A_{3m} = A_{11}A_{31} + A_{12}A_{32} + A_{13}A_{33}$$

همچنین در عبارت زیر i اندیس آزاد اما j و k فاقد تعریف هستند.

$$T_{ij} = T_{ik} \quad (7-2)$$

۳-۲- دلتای کرونکر^۱

نماد دلتای کرونکر نیز به کرات در فرمولاسیون تئوری پلاستیسیته مورد استفاده قرار می‌گیرد و به

قرار ذیل تعریف می‌شود:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (8-2)$$

با توجه به این تعریف می‌توان نوشت:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

¹ kronecker Delta

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\delta_{1m} a_m = \delta_{11} a_1 + \delta_{12} a_2 + \delta_{13} a_3 = a_1$$

$$\delta_{2m} a_m = a_2$$

$$\delta_{3m} a_m = a_3$$

به عبارت دیگر می‌توان گفت:

$$\delta_{im} a_m = a_i \quad (9-2)$$

یعنی در ضرب دلتای کرونگر، اندیس مشترک حذف و اندیس غیرمشترک جایگزین می‌گردد.

$$\delta_{1m} T_{mj} = T_{1j}$$

$$\delta_{im} T_{mj} = T_{ij}$$

$$\delta_{mi} T_{mj} = T_{ij}$$

$$\delta_{ij} \delta_{jm} = \delta_{im}$$

$$\delta_{im} \delta_{mj} \delta_{jn} = \delta_{in}$$

در صورتیکه در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یگه متعامد نظیر محورهای x و y و z با $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ نمایش داده شوند، در خصوص ضرب داخلی دو بردار می‌توان نوشت:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = |\vec{e}_i| |\vec{e}_j| \cos \theta = \delta_{ij} \rightarrow \quad (10-2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_i \vec{e}_i) \cdot (b_j \vec{e}_j) = a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$$

۲-۴- نشان جابجایی^۱

بسته به تعداد جابجایی انجام شده در ترکیب ijk نسبت به فرم ۱، ۲، ۳، به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{زوج} \\ -1 & \text{فرد} \\ 0 & \text{نه زوج نه فرد} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \swarrow i \searrow \\ k \rightarrow j \end{array} \quad (11-2)$$

1 Permutation Symbol

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \quad (۱۲-۲)$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} \quad (۱۳-۲)$$

$$\varepsilon_{iik} = 0 \quad (۱۴-۲)$$

بر این اساس در خصوص ضرب خارجی بردارهای یک‌به‌یک متعامد $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ می‌توان نوشت:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad (۱۵-۲)$$

$$\vec{e}_j \times \vec{e}_k = \varepsilon_{jki} \vec{e}_i \quad (۱۶-۲)$$

$$\Rightarrow \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \varepsilon_{123} \vec{e}_3 = +\vec{e}_3 \quad (۱۷-۲)$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \varepsilon_{321} \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \quad (۱۸-۲)$$

به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_i \vec{e}_i) \times (b_j \vec{e}_j) = a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad (۱۹-۲)$$

تذکر: ارتباط نشان جابجایی با دلتای کرونکر بصورت زیر قابل اثبات می‌باشد:

$$\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \quad (۲۰-۲)$$

۲-۵- عملیاتی با استفاده از نماد اندیس ها

۲-۵-۱- جابجایی

فرض کنید دو معادله ذیل را داشته باشیم:

$$\begin{cases} a_i = v_{im} b_m \\ b_i = v_{in} c_n \end{cases} \quad (۲۱-۲)$$

با جابجایی اندیس i با m در عبارت دوم می‌توان نوشت:

$$i \rightarrow m \Rightarrow$$

$$b_m = v_{mn} c_n \Rightarrow a_i = v_{im} v_{mn} c_n \quad (۲۲-۲)$$

در جابجایی اندیس‌ها نباید اندیس جدید، قبلاً در جمله‌ها وجود داشته باشد وگرنه ممکن است منجر به تغییر نوع اندیس گردد.

۲-۵-۲- ضرب

ضرب جملات نیز با روابط زیر قابل تعریف می‌باشد:

$$\begin{cases} p = a_m b_m \\ q = c_m d_m \end{cases} \quad (23-2)$$

در ابتدا با جابجایی اندیس‌ها می‌توان m را به j تبدیل نمود، آنگاه:

$$pq = (a_m b_m)(c_j d_j) = a_m b_m c_j d_j \quad (24-2)$$

در واقع جابجایی اندیس‌ها با این هدف انجام شد که در هر جمله یک اندیس بیش از دو بار تکرار نشده و تعریف اندیس موهومی خدشه‌دار نگردد.

۲-۵-۳- فاکتورگیری

فاکتورگیری و امکان انجام آن از محاسبات مهمی است که با استفاده از اندیس‌ها انجام می‌گیرد. فرض می‌شود که عبارت زیر وجود داشته باشد:

$$T_{ij} n_j - \lambda n_i = 0 \quad (25-2)$$

می‌توان n_i در جمله دوم را با مقدار زیر جایگزین نمود:

$$n_i = \delta_{ij} n_j \quad (26-2)$$

$$\Rightarrow T_{ij} n_j - \lambda \delta_{ij} n_j = 0 \quad (27-2)$$

$$\Rightarrow (T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (28-2)$$

۲-۵-۴- انقباض^۱

انقباض به معنی یکی نمودن دو اندیس و کاهش جملات است. مسلماً این عمل در صورت امکان تساوی دو اندیس مجاز خواهد بود. بعنوان نمونه زمانی که قصد داریم مجموع عناصر قطری یک تانسور از مرتبه دو (ماتریس) را محاسبه نماییم.

$$T_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (29-2)$$

$$T_{ii} = \lambda \theta \delta_{ii} + 2\mu E_{ii} = 3\lambda \theta + 2\mu (E_{11} + E_{22} + E_{33}) \quad (30-2)$$

¹ Contraction

۲-۶- تانسورها

تانسورها مبدل‌ها یا تبدیل‌هایی خطی هستند که می‌توانند فضای محاسبات را تغییر دهند. بعنوان مثال در رابطه زیر A یک تبدیل می‌باشد که فضای مربوط به محاسبات را از مجموعه متغیرهای x به مجموعه متغیرهای z انتقال می‌دهد:

$$Ax = z \quad (۳۱-۲)$$

حال اگر برای مبدل T و به ازای هر دو بردار اختیاری a_1, a_2 و اسکالر α ، شروط زیر ارضا گردند، آن تبدیل یک تبدیل خطی و آن مبدل یک تانسور نامیده می‌شود:

$$\begin{cases} T(a_1 + a_2) = Ta_1 + Ta_2 \\ T(\alpha a_1) = \alpha Ta_1 \end{cases} \quad (۳۲-۲)$$

۲-۶-۱- مولفه های تانسور

در صورتیکه $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ مولفه های بردار یگه در امتداد محورهای مختصات باشند:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad (۳۴-۲)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = a_1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_2 = a_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_3 = a_3$$

در خصوص عملکرد تانسورها بر بردارها، عملکرد زیر بعنوان یک تعریف مدنظر قرار می‌گیرد:

$$\vec{e}_i \cdot T\vec{e}_j = T_{ij} \Rightarrow \quad (۳۵-۲)$$

$$\vec{e}_1 \cdot T\vec{e}_1 = T_{11}$$

$$\vec{e}_2 \cdot T\vec{e}_3 = T_{23}$$

$$\vec{e}_3 \cdot T\vec{e}_1 = T_{31}$$

با توجه به رابطه فوق، معادله زیر نیز در حساب تانسورها در نظر گرفته می‌شود:

$$T\vec{e}_j = T_{mj} \vec{e}_m \quad (۳۶-۲)$$

$$T\vec{e}_1 = T_{m1} \vec{e}_m = T_{11} \vec{e}_1 + T_{21} \vec{e}_2 + T_{31} \vec{e}_3$$

$$T\vec{e}_2 = T_{m2} \vec{e}_m = T_{12} \vec{e}_1 + T_{22} \vec{e}_2 + T_{32} \vec{e}_3$$

$$T\vec{e}_3 = T_{m3} \vec{e}_m = T_{13} \vec{e}_1 + T_{23} \vec{e}_2 + T_{33} \vec{e}_3$$

مثال (۲-۱): تانسور تبدیل که هر بردار مختصات را به تصویر آینه‌ای آن تبدیل می‌نماید را محاسبه نمایید.

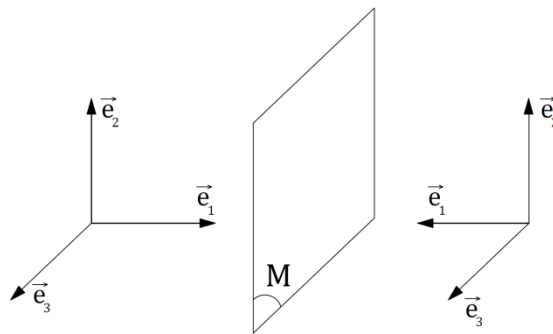
اگر تصویر آینه‌ای بردارهای یک مختصات دکارتی بر اساس شکل (۱-۲) در نظر گرفته شود می‌توان نوشت:

$$M\vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \quad M\vec{e}_1 = M_{11}\vec{e}_1 + M_{21}\vec{e}_2 + M_{31}\vec{e}_3 = -\vec{e}_1$$

$$M\vec{e}_2 = \vec{e}_2 \quad M\vec{e}_2 = M_{12}\vec{e}_1 + M_{22}\vec{e}_2 + M_{32}\vec{e}_3 = +\vec{e}_2$$

$$M\vec{e}_3 = \vec{e}_3 \quad M\vec{e}_3 = M_{13}\vec{e}_1 + M_{23}\vec{e}_2 + M_{33}\vec{e}_3 = +\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



شکل ۱-۲: تصویر آینه‌ای بردارها یک مختصات

۲-۶-۱- جمع تانسورها

جمع دو تانسور بر اساس رابطه زیر تعریف می‌گردد. جمع تانسورها نیز قطعاً یک تانسور را نتیجه خواهد داد.

$$(T + S)_{ij} = \vec{e}_i \cdot (T + S) \vec{e}_j \quad (۳۷-۲)$$

$$= \vec{e}_i \cdot T \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot S \vec{e}_j$$

$$= T_{ij} + S_{ij}$$

$$\Rightarrow [T + S] = [T] + [S] \quad (۳۸-۲)$$

و همچنین:

$$[T + S](\alpha \vec{a}) = [T](\alpha \vec{a}) + [S](\alpha \vec{a}) = \quad (39-2)$$

$$= \alpha [T] \vec{a} + \alpha [S] \vec{a}$$

$$= \alpha ([T] \vec{a} + [S] \vec{a})$$

$$= \alpha [T + S] \vec{a}$$

۲-۶-۲- حاصلضرب دایادیک^۱، تانسوری^۲ یا باز^۳

حاصلضرب دایادیک بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بصورت $\vec{a}\vec{b}$ بعنوان یک تبدیل تعریف می‌گردد و هر برداری چون $\vec{c}$ را بصورت زیر به بردار دیگری تبدیل می‌نماید:

$$(\vec{a}\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (40-2)$$

حاصل ضرب دایادیک دو بردار یک تانسور را نتیجه خواهد داد.

$$(\vec{a}\vec{b})(\alpha \vec{c} + \beta \vec{d}) = \alpha [\vec{b} \cdot (\alpha \vec{c} + \beta \vec{d})] = \alpha [\alpha (\vec{b} \cdot \vec{c}) + \beta (\vec{b} \cdot \vec{d})] \quad (41-2)$$

$$= \alpha \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \beta \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{d}) = \alpha (\vec{a}\vec{b})\vec{c} + \beta (\vec{a}\vec{b})\vec{d}$$

اعضای تانسور حاصلضرب دایادیک به قرار زیر می‌باشند:

$$(\vec{a}\vec{b})_{ij} = \vec{e}_i \cdot (\vec{a}\vec{b}) \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot [\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{e}_j)] = \vec{e}_i \cdot [\vec{a} b_j] = \quad (42-2)$$

$$b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{a}) = a_i b_j$$

$$(\vec{a}\vec{b}) = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} (b_1 \ b_2 \ b_3)$$

$$(\vec{e}_1 \vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\vec{e}_2 \vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = T_{11}(\vec{e}_1 \vec{e}_1) + T_{12}(\vec{e}_1 \vec{e}_2) + T_{13}(\vec{e}_1 \vec{e}_3) + \dots + T_{33}(\vec{e}_3 \vec{e}_3) \Rightarrow$$

$$T = T_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j) \quad (43-2)$$

1 Dyadic product

2 Tensor product

3 Open product

۲-۶-۲- حاصلضرب دو تانسور

اگر S و T دو تانسور باشند، در آن صورت ST و TS به عنوان تبدیل زیر معرفی شده و خود یک تانسور می‌باشند.

$$(TS)\vec{a} = T(S\vec{a}) \quad (44-2)$$

$$(ST)\vec{a} = S(T\vec{a}) \quad (45-2)$$

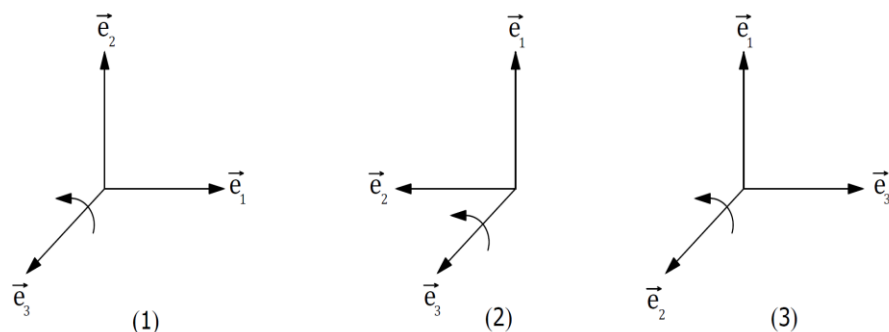
$$(TS)_{ij} = \vec{e}_i \cdot (TS)\vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot [T(S\vec{e}_j)] = \vec{e}_i \cdot [T(S_{mj}\vec{e}_m)] = T_{im}S_{mj} \quad (46-2)$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت نمود:

$$(ST)_{ij} = S_{im}T_{mj} \quad (47-2)$$

$$ST \neq TS \quad (48-2)$$

مثال (۲-۲): یک جسم صلب در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به اندازه 90° حول یک محور دوران می‌نماید. تانسور دوران را محاسبه نماید. محور دوران را $\vec{e}_3$ فرض کنید.



شکل ۲-۲) بردارهای یک‌ه در دستگاه مختصات دکارتی تحت دوران

$$\begin{aligned} R\vec{e}_1 = \vec{e}_2 &= R_{11}\vec{e}_1 + R_{21}\vec{e}_2 + R_{31}\vec{e}_3 \\ R\vec{e}_2 = -\vec{e}_1 &= R_{12}\vec{e}_1 + R_{22}\vec{e}_2 + R_{32}\vec{e}_3 \\ R\vec{e}_3 = \vec{e}_3 &= R_{13}\vec{e}_1 + R_{23}\vec{e}_2 + R_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

حال اگر جسم مجدداً این بار حول $\vec{e}_1$ به همان صورت دوران نماید داریم:

$$S\vec{e}_1 = \vec{e}_1$$

$$S\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \Rightarrow \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S\vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

$$S(R\vec{a}) = (SR)\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{a}$$

$$R(S\vec{a}) = (RS)\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \end{bmatrix} \vec{a}$$

۲-۶-۳- حاصلضرب اسکالر تانسورها

حاصلضرب اسکالر دو تانسور به دو فرم زیر قابل تعریف است:

$$T : V = T_{ij} V_{ij} \quad (۴۹-۲)$$

$$T \cdot V = T_{ij} V_{ji} \quad (۵۰-۲)$$

۲-۶-۴- ترانسپوز^۱ یک تانسور

ترانسپوز یک تانسور مثل T با T^T نشان داده می‌شود و شرط زیر را برآورده می‌نماید:

$$\vec{a} \cdot (T\vec{b}) = \vec{b} \cdot (T^T \vec{a}) \quad (۵۱-۲)$$

لازم به ذکر است که ترانسپوز یک تانسور خود یک تانسور خواهد بود.

اگر $\vec{a}, \vec{b}$ به ترتیب $\vec{e}_i$ و $\vec{e}_j$ در نظر گرفته شوند داریم:

$$\vec{e}_i \cdot (T\vec{e}_j) = \vec{e}_j \cdot (T^T \vec{e}_i) \Rightarrow T_{ij} = T_{ji}^T \quad (۵۲-۲)$$

این رابطه به معنای عوض کردن جای سطر و ستون جهت تعیین ترانسپوز تانسور می‌باشد.

همچنین می‌توان اثبات نمود که رابطه زیر برقرار است:

¹ Transpose

$$(ST)^T = T^T S^T \quad (۵۳-۲)$$

۲-۶-۵- تانسور متعامد^۱

تبدیلی است که طی آن هر بردار طول و زاویه خود را حفظ می‌نماید.

$$|Q\vec{a}| = |\vec{a}| \quad (۵۴-۲)$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(Q\vec{a}, Q\vec{b}) \quad (۵۵-۲)$$

$$\Rightarrow Q\vec{a} \cdot Q\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (۵۶-۲)$$

$$Q\vec{a} \cdot Q\vec{b} = \vec{b} \cdot (Q^T(Q\vec{a})) \quad (۵۷-۲)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot (Q^T Q \vec{a}) \quad (۵۸-۲)$$

$$\Rightarrow \vec{b} \cdot [I - Q^T Q] \vec{a} = 0 \Rightarrow Q^T Q = I \quad (۵۹-۲)$$

می‌توان ثابت نمود که ترانسپوز یک تانسور متعامد خود یک تانسور متعامد است.

$$Q^T Q = Q Q^T = I \quad (۶۰-۲)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$[Q^T Q]_{ij} = [WQ]_{ij} = W_{im} Q_{mj} = Q_{im}^T Q_{mj} = Q_{mi} Q_{mj} = I_{ij} \quad (۶۱-۲)$$

و همچنین:

$$[Q][Q^T] = [I] \Rightarrow |Q||Q^T| = 1 \Rightarrow |Q|^2 = 1 \Rightarrow |Q| = \pm 1 \quad (۶۲-۲)$$

در خصوص تانسورهای متعامد می‌توان تبدیلهای دوران و انعکاس را نام برد. دترمینان ماتریس دوران (+۱) و تانسور انعکاس (-۱) می‌باشد.

۲-۶-۶- مولفه های تانسور در دستگاه مختصات تبدیل یافته

اگر تانسور T در مختصات $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ و فرم تبدیل یافته آن در مختصات $\vec{e}'_i, \vec{e}'_j, T'$ در نظر گرفته شود، می‌توان نوشت:

$$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot T \vec{e}_j \quad (۶۳-۲)$$

1 Orthogonal transformation

$$T'_{ij} = \vec{e}'_i \cdot T \vec{e}'_j \quad (۶۴-۲)$$

$$\Rightarrow T' = Q_{mi} \vec{e}_m \cdot T (Q_{nj} \vec{e}_n) = Q_{mi} Q_{nj} \vec{e}_m \cdot T \vec{e}_n = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \quad (۶۵-۲)$$

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (۶۶-۲)$$

$$\Rightarrow [T]' = [Q]^T [T] [Q] \quad (۶۷-۲)$$

مثال (۳-۲): تانسور T را در مختصات $\vec{e}'_i$ بدست آورید در صورتیکه $\vec{e}'_i$ از دوران $\vec{e}_i$ حول محور $\vec{e}_3$ در خلاف جهت عقربه های ساعت به میزان 90° بدست آمده باشد.

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_2 \quad \vec{e}'_1 = Q_{11}\vec{e}_1 + Q_{21}\vec{e}_2 + Q_{31}\vec{e}_3$$

$$e'_2 = -e_1 \quad \vec{e}'_2 = Q_{12}\vec{e}_1 + Q_{22}\vec{e}_2 + Q_{32}\vec{e}_3 \Rightarrow [Q] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}'_3 = \vec{e}_3 \quad \vec{e}'_3 = Q_{13}\vec{e}_1 + Q_{23}\vec{e}_2 + Q_{33}\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow [T'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲-۶-۷- تانسورهای متقارن^۱ و پادمتقارن^۲

در تانسور متقارن، اعضا نسبت به تغییر جایگاه سطری با ستونی تغییر نمی نمایند. به عبارت دیگر می توان نوشت:

$$T = T^T \Rightarrow T_{ij} = (T)_{ij}^T = T_{ji} \quad (۶۸-۲)$$

در تانسور پادمتقارن، هر درایه سطری قرینه درایه نظیر ستونی آن خواهد بود. بنابراین:

1 Symmetric

2 Anti-symmetric

$$T = -T^T \quad (۶۹-۲)$$

$$T_{ij} = -T_{ji} \Rightarrow T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0 \quad (۷۰-۲)$$

هر تانسور T را می‌توان بصورت مجموع دو تانسور متقارن (T^S) و نامتقارن (T^A) نوشت:

$$T = T^S + T^A \quad (۷۱-۲)$$

در این رابطه داریم:

$$T^S = \frac{1}{2}(T + T^T) \quad (۷۲-۲)$$

$$T^A = \frac{1}{2}(T - T^T) \quad (۷۳-۲)$$

۲-۶-۸- بردار دوگان^۱

ثابت می‌گردد که برای هر تانسور پادمتقارن برداری مانند t^A وجود دارد که می‌توان نوشت:

$$T\vec{a} = t^A \times a \quad (۷۴-۲)$$

۲-۷- مقادیر ویژه^۲ و بردارهای ویژه^۳

اگر رابطه زیر برقرار باشد، $\vec{a}$ یک بردار ویژه و λ یک مقدار ویژه تانسور T می‌باشند.

$$\vec{b} = T\vec{a} = \lambda\vec{a} \quad (۷۵-۲)$$

همچنین در اینصورت می‌توان نوشت:

$$T(\alpha\vec{a}) = \alpha T\vec{a} = \alpha\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\vec{a}) \quad (۷۶-۲)$$

بنابراین مقدار ویژه برای تمامی بردارهای یک جهت ثابت است.

همچنین اگر I تانسور واحد باشد، مقدار ویژه آن برای همه جهات ۱ و ضمناً تمامی بردارها، می‌توانند بردار ویژه آن باشند.

$$I\vec{a} = \vec{a} \quad (۷۷-۲)$$

با توجه به آنکه مقدار ویژه برای تمام بردارهای یک جهت ثابت است، بردار ویژه به طول واحد را ملاک محاسبات در نظر می‌گیریم:

1 Dual vector
2 Eigen values
3 Eigen vectors

$$\vec{n} = \alpha_i \vec{e}_i \quad \& \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2} = 1 \quad (۷۸-۲)$$

همچنین می توان نوشت:

$$T\vec{n} = \lambda\vec{n} = \lambda I\vec{n} \quad (۷۹-۲)$$

$$\Rightarrow [T - \lambda I]\vec{n} = 0 \quad (۸۰-۲)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \alpha_j \vec{e}_j \quad (۸۱-۲)$$

$$[T - \lambda I]\alpha_j \vec{e}_j = 0 \Rightarrow \alpha_j [T\vec{e}_j - \lambda I\vec{e}_j] = 0 \quad (۸۲-۲)$$

طرفین رابطه در $\vec{e}_i$ ضرب داخلی می گردد:

$$\Rightarrow \alpha_j [\vec{e}_i T\vec{e}_j - \lambda \vec{e}_i I\vec{e}_j] = 0 \quad (۸۳-۲)$$

$$\Rightarrow \alpha_j [T_{ij} - \lambda I_{ij}] = 0 \quad (۸۴-۲)$$

$$\Rightarrow \alpha_j [T_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = 0 \quad (۸۵-۲)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 (T_{11} - \lambda) + \alpha_2 T_{12} + \alpha_3 T_{13} = 0 \quad (۸۶-۲)$$

$$\alpha_1 T_{21} + \alpha_2 (T_{22} - \lambda) + \alpha_3 T_{23} = 0 \quad (۸۷-۲)$$

$$\alpha_1 T_{31} + \alpha_2 T_{32} + \alpha_3 (T_{33} - \lambda) = 0 \quad (۸۸-۲)$$

برای آنکه دستگاه جواب غیر صفر داشته باشد، لازم است:

$$|T - \lambda I| = 0 \quad (۸۹-۲)$$

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (۹۰-۲)$$

مثال (۴-۲): در صورتیکه در یک تانسور، $T_{21} = T_{31} = 0$ باشد ثابت نمایید T_{11} مقدار ویژه و $\vec{e}_1$ بردار ویژه T است.

$$T\vec{e}_1 = T_{11}\vec{e}_1 + T_{21}\vec{e}_2 + T_{31}\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow T\vec{e}_1 = T_{11}\vec{e}_1 \Rightarrow \lambda = T_{11} \quad \& \quad \vec{a} = \vec{e}_1$$

مثال (۵-۲): مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تانسور زیر را محاسبه نمایید.

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(2-\lambda)[(3-\lambda)(-3-\lambda)-16]=0 \Rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=5, \lambda_3=-5$$

$$\lambda_1=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow 0\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \quad \alpha_1 = \pm 1$$

$$4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

$$\Rightarrow n_1 = \pm \vec{e}_1$$

$$\lambda_2=5 \Rightarrow \alpha_1=0 \quad \alpha_2=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow n_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_2+\vec{e}_3)$$

$$\lambda_3=-5 \Rightarrow \alpha_1=0 \quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \alpha_3=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad n_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_2+2\vec{e}_3)$$

۲-۸- نامتغیرهای^۱ یک تانسور

مقادیر ویژه تانسور T از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0 \quad (۹۱-۲)$$

این معادله منجر به معادله مشخصه تانسور T با فرم زیر می‌گردد:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (۹۲-۲)$$

در این معادله I_1 , I_2 و I_3 نامتغیرهای تانسور بوده و از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} = \text{Tr}(T) \quad (۹۳-۲)$$

نامتغیر اول trace یا همان مجموع عناصر قطری است.

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \quad (۹۴-۲)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (۹۵-۲)$$

تانسور T در تبدیل نسبت به جهات اصلی خود به فرم زیر در می‌آید. یعنی اگر سه جهت اصلی به عنوان مختصات تبدیل یافته در نظر گرفته شده و تانسور T در آن مختصات بدست آید به شکل زیر خواهد بود:

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (۹۶-۲)$$

بدین ترتیب می‌توان سه نامتغیر را بصورت زیر نیز بیان نمود:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (۹۷-۲)$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \quad (۹۸-۲)$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (۹۹-۲)$$

مثال (۶-۲): نامتغیرها و معادله مشخصه تانسور زیر را محاسبه نمایید:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = 2 + 3 - 3 = 2$$

$$I_2 = (2 \times 3 - 0) + (3 \times (-3) - 4 \times 4) + (2 \times (-3) - 0) = -25$$

$$I_3 = 2 \times (3 \times (-3) - 4 \times 4) = -50$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 25\lambda + 50 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -5$$

۹-۲- عملیات ریاضی بر روی تانسورها

عملیات مختلف ریاضی به شکل زیر بر تانسورها قابل انجام می‌باشند:

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} \quad (۱۰۰-۲)$$

$$\frac{d}{dt}(T + S) = \frac{dT}{dt} + \frac{dS}{dt} \quad (۱۰۱-۲)$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)T) = \frac{d\alpha(t)}{dt}T + \alpha(t)\frac{dT}{dt} \quad (۱۰۲-۲)$$

$$\frac{d}{dt}(TS) = \frac{dT}{dt}S + T\frac{dS}{dt} \quad (۱۰۳-۲)$$

$$\frac{d}{dt}(T\vec{a}) = \frac{dT}{dt}\vec{a} + T\frac{d\vec{a}}{dt} \quad (۱۰۴-۲)$$

$$\frac{d}{dt}(T^T) = \left(\frac{dT}{dt}\right)^T \quad (۱۰۵-۲)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \quad (۱۰۶-۲)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \quad (۱۰۷-۲)$$

تمرینات فصل دوم

۱- حاصل ضرب عبارت برداری زیر را بدست آورید.

$$(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{D}$$

۲- با فرض اینکه ماتریس $[A]$ یک ماتریس 3×3 می باشد، نشان دهید:

$$|\tilde{A}| = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$

۳- نشان دهید که:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

۴- نشان دهید که:

$$\varepsilon_{rst} |\tilde{A}| = \varepsilon_{ijk} A_{ri} A_{sj} A_{tk} = \varepsilon_{ijk} A_{ir} A_{js} A_{kt}$$

۵- عبارت زیر را اثبات کنید:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

فصل سوم

تغییر شکل‌ها و تانسور کرنش

۳-۱- مقدمه

وقتی که جسم تحت تاثیر مجموعه‌ای از نیروهای خارجی قرار گیرد، تغییر شکل خواهد داد. تعیین تغییر شکلها در آنالیزهای رایج در مهندسی ژئوتکنیک اهمیت بسزایی دارند. بطور کلی روشهای مختلفی جهت بیان کرنش وجود دارد که در ذیل ارائه می‌شوند.

۳-۲- تعاریف مختلف کرنش

برای سهولت در درک مفهوم کرنش و تعاریف مختلف آن وضعیت یک بعدی در نظر گرفته می‌شود. میله نازک به طول اولیه ℓ_0 در نظر گرفته شود. پس از اعمال نیروی محوری به آن، طول میله به ℓ افزایش می‌یابد.

۳-۲-۱- تعریف کرنش کوشی^۱

در این تعریف تغییر طول به طول اولیه ملاک تعریف کرنش می‌باشد.

$$\varepsilon^c = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad (۳-۱)$$

¹ Cauchy

۳-۲-۲-تعریف کرنش گرین^۱

تعریف کرنش در این حالت به قرار زیر می‌باشد. همانطور که دیده می‌شود نسبتی از میانگین تغییر طول به طول اولیه میله در تعریف قبلی ضرب شده است.

$$\varepsilon^g = \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{2\ell_0^2} = \left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \right) \left(\frac{\ell + \ell_0}{2\ell_0} \right) \quad (۲-۳)$$

۳-۲-۳-تعریف کرنش آلمانسی^۲

این تعریف بر مبنای طول ثانویه میله بوده و رابطه آن تقریباً شبیه به تعریف کرنش گرین می‌باشد.

$$\varepsilon^a = \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{2\ell^2} = \left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell} \right) \left(\frac{\ell + \ell_0}{2\ell} \right) \quad (۳-۳)$$

همانطور که مشاهده می‌شود در دو تعریف اول ملاک محاسبه کرنش وضعیت اولیه و تغییر شکل نیافته می‌باشد. ولی در تعریف سوم ملاک تعریف کرنش، وضعیت تغییر شکل یافته میله است.

۳-۳-تانسور کرنش^۳

تانسور کرنش با رابطه زیر تعریف می‌گردد:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right) \quad (۴-۳)$$

همانطور که این رابطه نشان می‌دهد، تانسور کرنش شامل ۹ مولفه می‌باشد که به دلیل تقارن آن، به ۶ مولفه کاهش می‌یابد. به علاوه جمله سوم موجود در رابطه نشانگر جملات غیرخطی بوده که در شرایط تغییر شکل بزرگ^۴ وجود دارند. این ترمها نوعی از شرایط غیرخطی بودن^۵ با عنوان غیرخطی بودن هندسی^۶ را ایجاد می‌نمایند که با غیر خطی بودن رفتار ماده متفاوت می‌باشد در صورتیکه مسئله معطوف به تغییر مکانهای کوچک باشد، این ترم حذف خواهد شد.

از ۶ مولفه ذکر شده، ۳ مولفه مربوط به کرنشهای محوری^۷ بوده و به قرار زیر هستند:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (۵-۳)$$

1 Green

2 Almansi

3 Strain Tensor

4 Large deformation

5 Geometrical non-linearity

6 Material non-linearity

7 Axial strains

دقت گردد که در این رابطه u_1 و u_2 و u_3 مولفه های تغییر شکل سیستم می باشند که می توان آنها را با w, v, u نشان داد. همچنین x_1 و x_2 و x_3 نشانگر محورهای مختصات بوده که می توان آنها را نیز با z, y, x نمایش داد. لذا خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1 \quad (۶-۳)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2 \quad (۷-۳)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_3 \quad (۸-۳)$$

همچنین سه مولفه کرنش برشی نیز به ترتیب ذیل به دست می آیند:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (۹-۳)$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \varepsilon_{21} \quad (۱۰-۳)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \varepsilon_{32} \quad (۱۱-۳)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \varepsilon_{31} \quad (۱۲-۳)$$

۳-۴- تانسور دوران

همانند تانسور کرنش، تانسور دوران دارای ۶ مولفه بوده و به قرار زیر می باشند:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (۱۳-۳)$$

با توجه به این رابطه مشخص می شود که این تانسور پادمتقارن بوده و سه مولفه قطری آن صفر می باشند.

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0 \quad (۱۴-۳)$$

در خصوص سه مولفه دیگر می توان نوشت:

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\omega_{21} \quad (۱۵-۳)$$

$$\omega_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\omega_{32} \quad (۱۶-۳)$$

$$\omega_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\omega_{31} \quad (۱۷-۳)$$

$\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ به ترتیب دوران در صفحات XY, XZ, YZ یا به ترتیب حول محورهای Z, Y, X را نشان می‌دهند.

۳-۵- نامتغیرهای تانسور کرنش

همانطور که در فصل قبل ذکر گردید، نامتغیرهای یک تانسور، فرم معادله مشخصه آن را تعیین می‌کنند. در خصوص تانسور کرنش، فرم معادله از قرار زیر می‌باشد:

$$\varepsilon^3 - I_{1\varepsilon} \varepsilon^2 + I_{2\varepsilon} \varepsilon - I_{3\varepsilon} = 0 \quad (۱۸-۳)$$

در این معادله $I_{1\varepsilon}, I_{2\varepsilon}, I_{3\varepsilon}$ سه نامتغیر تانسور کرنش می‌باشند.

این نامتغیرها از روابط زیر قابل محاسبه هستند:

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (۱۹-۳)$$

$$I_{2\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (۲۰-۳)$$

$$I_{3\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{ij} \end{vmatrix} \quad (۲۱-۳)$$

با استفاده از تعریف Trace امکان تعریف مختصر این نامتغیرها و همچنین ارتباط آنها با مفاهیم فیزیکی و مکانیکی ماده وجود خواهد داشت. بدین ترتیب دسته دوم تعریف‌ها برای سه نامتغیر مذکور به قرار زیر می‌باشد:

$$\bar{I}_{1\varepsilon} = I_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = tr(\varepsilon) \quad (۲۲-۳)$$

$$\bar{I}_{2\varepsilon} = I_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} tr(\varepsilon)^2 = \frac{1}{2} (I_{1\varepsilon}^2 - 2I_{2\varepsilon}) \quad (۲۳-۳)$$

$$\bar{I}_{3\varepsilon} = I_3 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{km} \varepsilon_{mi} = \frac{1}{3} tr(\varepsilon)^3 = \frac{1}{3} (I_{1\varepsilon}^3 - 3I_{1\varepsilon} I_{2\varepsilon} + 3I_{3\varepsilon}) \quad (۲۴-۳)$$

همانطور که روابط نشان می‌دهد ارتباط بین دو دسته مذکور توسط روابطی قابل محاسبه می‌باشد. به عنوان اولین ارتباط فیزیکی نامتغیرها با ویژگیهای ماده، مشخص می‌گردد که نامتغیر اول تانسور کرنش، همان کرنش حجمی^۱ خواهد بود. بدیهی است در شرایط زهکشی نشده و عدم امکان تغییر حجم خاک، نامتغیر اول تانسور کرنش صفر خواهد بود.

1 Volumetric strain

مثال (۳-۱): نامتغیرهای دسته اول و دوم را برای تانسور کرنشی زیر محاسبه نمایید:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

نامتغیر اول ($I_{1\varepsilon}$):

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = (5 - 1 + 0) \times 10^{-2} = 4 \times 10^{-2}$$

نامتغیر دوم ($I_{2\varepsilon}$):

$$\begin{aligned} I_{2\varepsilon} &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \\ &= \left[\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right] \times 10^{-4} \\ &= \left[5 \times -1 - (2)^2 + -1 \times 0 - (1)^2 + 5 \times 0 - (2)^2 \right] \times 10^{-4} \\ &= -14 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

نامتغیر سوم ($I_{3\varepsilon}$):

$$\begin{aligned} I_{3\varepsilon} &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times 10^{-6} \\ &= \left[5(-1 \times 0 - 1 \times 1) - 2(2 \times 0 - 1 \times 2) + 2(2 \times 1 + 2 \times 1) \right] \times 10^{-6} \\ &= 7 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

محاسبه نامتغیر اول (I_1):

$$I_1 = \text{tr}(\varepsilon) = (5 - 1 + 0) \times 10^{-2} = 4 \times 10^{-2}$$

محاسبه نامتغیر دوم (I_2):

نامتغیر دوم را می‌توان به دو روش محاسبه نمود:

در روش اول از ارتباط آن با نامتغیرهای دسته اول استفاده می‌گردد:

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_{1\varepsilon}^2 - 2I_{2\varepsilon}) = \frac{1}{2} \left[(4 \times 10^{-2})^2 - 2(-14 \times 10^{-4}) \right] = 22 \times 10^{-4}$$

روش دوم آنست که از مفهوم Trace استفاده نماییم:

$$I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\varepsilon^2) = \frac{1}{2} \text{tr} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-4} = \frac{1}{2} \text{tr} \begin{bmatrix} 33 & 10 & 12 \\ 10 & 6 & 3 \\ 12 & 3 & 5 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$= \frac{1}{2} (33 + 6 + 5) \times 10^{-4} = 22 \times 10^{-4}$$

محاسبه نامتغیر سوم (I_3):

این نامتغیر نیز به دو روش محاسبه می‌شود. در روش اول خواهیم داشت:

$$I_3 = \frac{1}{3} (I_{1\varepsilon}^3 - 3I_{1\varepsilon}I_{2\varepsilon} + 3I_{3\varepsilon})$$

$$= \frac{1}{3} [(4 \times 10^{-2})^3 - 3(4 \times 10^{-2} \times (-14) \times 10^{-4}) + 3 \times 7 \times 10^{-6}] = 84.33 \times 10^{-6}$$

در روش دوم از مفهوم Trace استفاده می‌گردد:

$$I_3 = \frac{1}{3} \text{tr} \begin{bmatrix} 33 & 10 & 12 \\ 10 & 6 & 3 \\ 12 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$= \frac{1}{3} \text{tr} \begin{bmatrix} 209 & 68 & 76 \\ 68 & 17 & 26 \\ 76 & 26 & 27 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$= \frac{1}{3} (209 + 17 + 27) \times 10^{-6} = 84.33 \times 10^{-6}$$

۳-۶- تجزیه^۱ تانسور کرنش

تانسور کرنش را می‌توان با استفاده از رابطه زیر به دو بخش تجزیه نمود:

$$\varepsilon_{ij} = E_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (۲۵-۳)$$

در این رابطه E_{ij} تانسور کرنش انحرافی^۲ و $\frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ تانسور کرنش حجمی^۳ می‌باشند.

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (۲۶-۳)$$

$$\frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - E_{ij} \quad (۲۷-۳)$$

1 Decomposition

2 Deviatoric strain tensor

3 Volumetric strain tensor

دقت در روابط نشان می‌دهد که Trace تانسور کرنش انحرافی صفر می‌باشد. بعبارتی:

$$E_{ii} = \varepsilon_{ii} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ii}^3 = \varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk} = 0 \quad (28-3)$$

بنابراین ویژگی تانسور کرنش انحرافی آن است که مجموع عناصر قطری آن صفر هستند. در خصوص تانسور کرنش حجمی نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} &= \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} = \frac{1}{3} I_{1\varepsilon} \delta_{ij} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} \delta_{ij} + \varepsilon_{22} \delta_{ij} + \varepsilon_{33} \delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (29-3)$$

با توجه به تعریف دلتای کرونکر می‌توان نتیجه گرفت عناصر غیرقطری تانسور کرنشی حجمی که در آنها $i \neq j$ مقداری برابر صفر دارند. در صورتیکه در عناصر قطری که $i = j$ است مقداری برابر $\frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$ خواهند داشت. لذا مجموع عناصر قطری برابر کرنش حجمی خواهد بود.

۳-۶-۱- نامتغیرهای تانسور کرنش انحرافی

با توجه به اهمیت تانسور کرنشی انحرافی به بحث در خصوص نامتغیرهای آن پرداخته می‌شود.

۳-۶-۱-۱- نامتغیر اول تانسور کرنش انحرافی

همانطور که در قسمت قبل ذکر گردید نامتغیر اول این تانسور صفر می‌باشد.

$$\bar{I}_{1E} = I_{1D} = \text{tr}(E) = 0 \quad (30-3)$$

۳-۶-۲- نامتغیر دوم تانسور کرنش انحرافی

نامتغیر دوم تانسور کرنش انحرافی توسط رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\bar{I}_{2E} = I_{2D} = \frac{1}{2} \text{tr}(E)^2 = \frac{1}{2} E_{ij} E_{ji} = \bar{I}_{2\varepsilon} - \frac{\bar{I}_{1\varepsilon}^2}{6} = I_2 - \frac{I_1^2}{6} \quad (31-3)$$

عمده روابط ارائه شده با استفاده از قوانین توصیف شده برای تانسورها در فصل قبل قابل اثبات می‌باشند.

در روابط بالا اندیس D برای نشان دادن تانسور کرنش انحرافی بکار رفته است. مقدار این نامتغیر بر حسب مولفه‌های تانسور کرنش از قرار زیر می‌باشد:

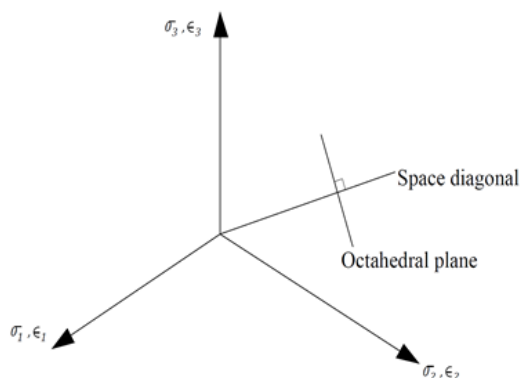
$$I_{2D} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{23}^2 + 2\varepsilon_{13}^2 - 3\left(\frac{\varepsilon_v}{3}\right)^2 \right] \quad (32-3)$$

و یا به عبارت دیگر:

$$I_{2D} = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 \right] + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2 \quad (33-3)$$

در روابط بالا $\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ نمایانگر کرنشی حجمی خواهد بود.

در مفاهیم مهندسی غالباً از پارامتری به نام کرنش برشی اکتاهدرال^۱ استفاده می‌شود که با γ_{oct} نشان داده می‌شود. در واقع این پارامتر تصویر بردار کرنش بر صفحه اکتاهدرال^۲ نشان داده شده در شکل (۱-۳) می‌باشد. صفحه اکتاهدرال صفحه‌ای است که عمود بر نیمساز فضایی^۳ بوده و با هر سه محور زاویه مساوی تشکیل می‌دهد.



شکل ۱-۳: نیمساز فضایی و صفحه اکتاهدرال که بر آن عمود می‌باشد

مقدار کرنش اکتاهدرال برحسب مولفه های تانسور کرنش قابل محاسبه می‌باشد:

$$\gamma_{oct}^2 = \frac{1}{9} \left[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 \right] + \frac{2}{3} \left[(\varepsilon_{12})^2 + (\varepsilon_{23})^2 + (\varepsilon_{13})^2 \right] \quad (34-3)$$

با توجه به رابطه فوق کرنش اکتاهدرال توسط معادله زیر با نامتغیر دوم کرنش انحرافی مرتبط می‌گردد.

$$I_{2D} = \frac{3}{2} \gamma_{oct}^2 \quad (35-3)$$

۳-۱-۶-۳- نامتغیر سوم تانسور کرنش انحرافی

نامتغیر سوم تانسور کرنشی نیز با استفاده از روابط زیر بیان می‌گردند:

1 Octahedral shear strain

2 Octahedral plane

3 Space diagonal

$$\begin{aligned}\bar{I}_{3E} = I_{3D} &= \frac{1}{3} \text{tr}(E)^3 = \frac{1}{3} E_{ik} E_{km} E_{mi} \\ &= \bar{I}_{3\epsilon} - \frac{2}{3} \bar{I}_{1\epsilon} \bar{I}_{2\epsilon} + \frac{2}{27} (\bar{I}_{1\epsilon})^3 = I_3 - \frac{2}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3\end{aligned}\quad (3-36)$$

مثال (۳-۲): تانسور کرنش انحرافی، حجمی و نامتغیرهای تانسور اول را محاسبه نمایید. خاطرنشان می‌شود که از مثال اول سه نامتغیر زیر مشخص می‌باشند:

$$I_1 = 4 \times 10^{-2} \quad ; I_2 = 22 \times 10^{-4}; \quad I_3 = 84.33 \times 10^{-6}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij} &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \quad E_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \\ &= \begin{bmatrix} 0.05 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.01 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(0.04) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.67 & 2 & 2 \\ 2 & -2.33 & 1 \\ 2 & 1 & -1.33 \end{bmatrix} \times 10^{-2}\end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می‌شود نامتغیر اول تانسور مذکور صفر می‌باشد بعبارتی:

$$\begin{aligned}I_{1D} &= \bar{I}_{1E} = 0 \\ I_{2D} &= I_2 - \frac{I_1^2}{6} = (22 - \frac{4^2}{6}) \times 10^{-4} = 19.33 \times 10^{-4} \\ I_{2D} &= \frac{1}{2} \text{tr}(E)^2 = \frac{1}{2} [E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2E_{12}^2 + 2E_{23}^2 + 2E_{13}^2] \\ &= \frac{1}{2} [3.67^2 + 2.33^2 + 1.33^2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 1 + 2 \times 2^2] \times 10^{-4} = 19.33 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

و همچنین نامتغیر سوم به دو روش زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}I_{3D} &= I_3 - \frac{2}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3 = \left(84.33 - \frac{2}{3} \times 4 \times 22 + \frac{2}{27} \times 4^3 \right) \times 10^{-6} \\ &= 30.53 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

و یا با استفاده از مفهوم Trace می‌توان نوشت:

$$I_{3D} = \frac{1}{3} \text{tr}(E)^3$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \text{tr} \begin{bmatrix} 101.47 & 38.69 & 38.71 \\ 38.69 & -14.57 & 19.32 \\ 38.71 & 19.32 & 4.7 \end{bmatrix} \times 10^{-6} = \frac{1}{3} (101.47 - 14.57 + 4.7) \times 10^{-6} \\
 &= 30.53 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

۳-۷- کرنش های اصلی^۱

رابطه زیر ارتباط میان تغییر مکان و کرنشها را نشان می‌دهد:

$$du_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) da_j \quad (37-3)$$

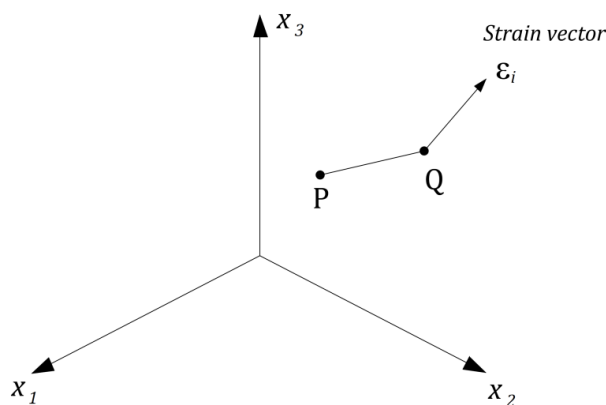
در این رابطه da_j جزء طول المان تغییرشکل یافته است. با تقسیم طرفین بر اندازه بردار طول المان $|da|$ و با فرض صفر بودن تانسور دوران ω_{ij} می‌توان نوشت:

$$\frac{du_i}{|da|} = \varepsilon_{ij} \frac{da_j}{|da|} \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{ij} \ell_j \quad (38-3)$$

در این رابطه ℓ_j بردار کسینوس‌های هادی المان می‌باشند، بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \ell_i \ell_j \quad (39-3)$$

باید توجه داشت هیچ الزامی بر هم جهت بودن بردار کرنش و بردار جهت المان مطابق شکل زیر وجود ندارد.



شکل ۳-۲: بردار کرنش و عدم الزام به هم جهت بودن آن با المان (دسای و سیریواردان^۲ ۱۹۸۴)

1 Principal strain

2 Desai and Siriwardane

1 principal directions

اما همواره می‌توان جهاتی را یافت که در خصوص آنها بردار کرنش هم جهت با وضعیت اولیه المان باشند. این جهات به جهات اصلی^۱ تانسور کرنشی معروف می‌باشد. با توجه به این خصوصیت می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_i = \lambda \ell_i = \lambda \delta_{ij} \ell_j \quad (۴۰-۳)$$

با جایگذاری از (۳۸-۳) می‌توان نوشت:

$$(\varepsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \ell_j = 0 \quad (۴۱-۳)$$

و یا به فرم ماتریسی می‌توان نوشت:

$$[[\varepsilon] - \lambda [I]] \{\ell\} = 0 \quad (۴۲-۳)$$

$$\{\ell\}^T = \{\ell_1 \quad \ell_2 \quad \ell_3\} \quad (۴۳-۳)$$

بسط جبری این رابطه به سه معادله زیر تبدیل می‌گردد:

$$(\varepsilon_{11} - \lambda) \ell_1 + (\varepsilon_{12}) \ell_2 + (\varepsilon_{13}) \ell_3 = 0 \quad (a-۴۳-۳)$$

$$\varepsilon_{12} \ell_1 + (\varepsilon_{22} - \lambda) \ell_2 + (\varepsilon_{23}) \ell_3 = 0 \quad (b-۴۳-۳)$$

$$\varepsilon_{13} \ell_1 + \varepsilon_{23} \ell_2 + (\varepsilon_{33} - \lambda) \ell_3 = 0 \quad (c-۴۳-۳)$$

معمولاً برای حل دستگاه و تعیین جهات اصلی با توجه به صفر بودن سمت راست سه معادله نیاز به یک معادله اضافی است که از قرار زیر می‌باشد:

$$\ell_i \ell_i = 1 \Rightarrow \ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 = 1 \quad (۴۴-۳)$$

با توجه به آنکه سمت راست هر سه معادله صفر بوده، برای جلوگیری از صفر شدن ℓ_1 تا ℓ_3 باید شرط زیر برقرار باشد.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (۴۵-۳)$$

این شرط به یک معادله درجه سوم بر حسب λ خواهد شد که همان معادله مشخصه تانسور می‌باشد.

$$\lambda^3 - I_{1\varepsilon} \lambda^2 + I_{2\varepsilon} \lambda - I_{3\varepsilon} = 0 \quad (۴۶-۳)$$

بدین ترتیب مشخص می‌شود که مقادیر ویژه^۱، ریشه های معادله مشخصه تانسور می‌باشند. نکته آنکه در صورتیکه تانسور کرنش به مختصاتی که سه محور آن سه بردار ویژه تانسور هستند تبدیل گردد به فرم زیر تبدیل خواهد شد.

1 principal values

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (۴۷-۳)$$

بزرگترین عنصر قطری کرنش اصلی حداکثر^۱، کوچکترین، کرنش اصلی حداقل^۲ و وسطی کرنش اصلی میانی^۳ خواهند بود.

مثال ۳-۳: کرنشهای اصلی و جهات مربوطه را برای تانسور کرنشی زیر حساب کنید.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

می توان نوشت:

$$I_{1\varepsilon} = 7 \times 10^{-2}$$

$$I_{2\varepsilon} = [(9-1) + (3-0) + (3-0)] \times 10^{-4} = 14 \times 10^{-4}$$

$$I_{3\varepsilon} = 8 \times 10^{-6}$$

بدین ترتیب معادله مشخصه از قرار زیر حاصل می گردد. توجه شود چون همه عناصر تانسور کرنش ضریب 10^{-2} را دارند از محاسبات حذف می گردد.

$$\varepsilon^3 - 7\varepsilon^2 + 14\varepsilon - 8 = 0 \Rightarrow (\varepsilon - 1)(\varepsilon - 4)(\varepsilon - 2) = 0 \Rightarrow \varepsilon = 4, 2, 1$$

در این مقادیر، کرنش اصلی حداکثر، ۴، کرنش اصلی حداقل، ۱ و کرنش اصلی میانی، ۲ خواهد بود که همگی در 10^{-2} ضرب می شوند. حال جهات اصلی مربوطه محاسبه می شوند:

الف- جهت کرنش اصلی حداکثر

$$\varepsilon_1 = 4 \times 10^{-2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (3-4)\ell_1 + \ell_2 + 0\ell_3 &= 0 \\ 1\ell_1 + (3-4)\ell_2 + 0\ell_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

$$0\ell_1 + 0\ell_2 + (1-4)\ell_3 = 0 \Rightarrow \ell_3 = 0$$

از طرفی داریم:

$$\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 = 1 \Rightarrow 2\ell_1^2 = 1 \Rightarrow \ell_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \& \quad \ell_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1 Major principal strain

2 Minor principal strain

3 Intermediate principal strain

بدین ترتیب دو جهت در امتداد اصلی مربوط به کرنش حداکثر از قرار زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{array}{lll} \ell_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \ell_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \ell_3 = 0 \\ \ell_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \ell_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \ell_3 = 0 \end{array}$$

ب- حالت اصلی مرتبط با کرنش حداقل

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= 1.0 \times 10^{-2} \Rightarrow \\ \left. \begin{array}{l} (3-1)\ell_1 + \ell_2 + 0\ell_3 = 0 \\ \ell_1 + (3-1)\ell_2 + 0\ell_3 = 0 \end{array} \right\} & \Rightarrow \ell_1 = \ell_2 = 0 \\ 0\ell_1 + 0\ell_2 + (1-1)\ell_3 &= 0 \end{aligned}$$

معادله سوم نتیجه‌ای در اختیار نمی‌گذارد لذا ℓ_3 با معادله کمکی طول واحد بردار هادی حساب می‌شود.

$$\ell_3 = \pm 1$$

بدین ترتیب دو جهت در امتداد اصلی مربوط به کرنش حداقل محاسبه می‌شوند:

$$\begin{array}{lll} \ell_1 = 0 & \ell_2 = 0 & \ell_3 = +1 \\ \ell_1 = 0 & \ell_2 = 0 & \ell_3 = -1 \end{array}$$

پ- جهات اصلی مربوط به کرنش میانی

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= 2.0 \times 10^{-2} \Rightarrow \\ \left. \begin{array}{l} (3-2)\ell_1 + \ell_2 + 0\ell_3 = 0 \\ \ell_1 + (3-2)\ell_2 + 0\ell_3 = 0 \end{array} \right\} & \Rightarrow \ell_1 = -\ell_2 \\ 0\ell_1 + 0\ell_2 + (1-2)\ell_3 &= 0 \Rightarrow \ell_3 = 0 \\ \Rightarrow \ell_1 &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & \ell_2 &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

لذا دو امتداد منطبق بر جهت مربوط به کرنش اصلی میانی از قرار زیر می‌باشند:

$$\begin{array}{lll} \ell_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \ell_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \ell_3 = 0 \\ \ell_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \ell_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \ell_3 = 0 \end{array}$$

با در نظر گرفتن علامات مثبت و دسته اول از امتدادها می‌توان یک سیستم مختصات جدید به شرح زیر تشکیل داد.

	x_1	x_2	x_3
<i>major</i> x'_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
<i>Intermediate</i> x'_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
<i>Minor</i> x'_3	0	0	1

با قرار دادن بردارهای مذکور به فرم ستونی در ماتریس تبدیل، امکان محاسبه فرم جدید تانسور کرنش در سیستم مختصاتی که محورهای آن منطبق بر جهات اصلی تانسور کرنش است وجود دارد:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فرم تبدیل یافته تانسور کرنش در مختصات جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon'_{ij} = a_{im} a_{jn} \varepsilon_{mn} \quad (48-3)$$

همچنین در فرم ماتریسی نیز می‌توان نوشت:

$$[\varepsilon'] = [a]^T [\varepsilon] [a] \quad (49-3)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

همانطور که مشخص می‌گردد ماتریس حاصله در مختصات جدید یک ماتریس قطری است که عناصر قطری آن کرنش‌های اصلی هستند، توجه شود که ترتیب قرارگیری کرنشهای اصلی در این ماتریس از بزرگ به کوچک نیست بلکه بستگی به آن دارد که جهات اصلی مربوطه به چه ترتیبی در ماتریس انتقال $[a]$ قرار گرفته اند.

۳-۸- تانسور کرنش برای برخی از حالات خاص تغییر شکل

برخی از شرایط خاص تغییر شکل که در آزمایشهای ژئوتکنیک نیز کاربرد دارند مورد توجه بیشتری قرار دارند. در اینجا تانسور کرنش نظیر برخی از این مودهای معروف ارائه می‌گردد.

۳-۸-۱- شرایط کرنش تک محوری

شرایط کرنش تک محوری یعنی فقط در یک جهت امکان تغییر شکل وجود داشته باشد و به وسیله‌ای از ایجاد کرنش در جهات دیگر جلوگیری نمود. تانسور کرنش نظیر برای این شرایط بصورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳-۵۰)$$

۳-۸-۲- شرایط کرنش هیدرواستاتیک

در این وضعیت هیچگونه کرنش انحرافی وجود نخواهد داشت و جسم تنها کرنش حجمی را تجربه خواهد نمود. لذا تانسور کرنش مربوطه به شکل زیر است:

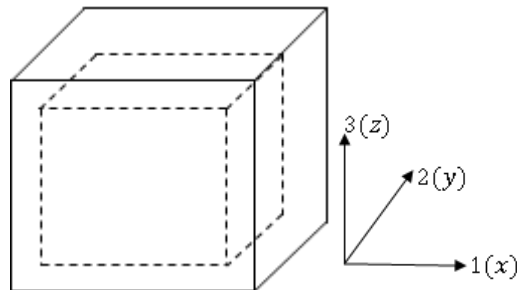
$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad (۳-۵۱)$$

۳-۸-۳- شرایط کرنش سه محوری^۱

در این شرایط مقادیر مختلف کرنش بصورت مستقل در هر یک از سه جهت اعمال می‌شود. مکعب شکل زیر این وضع را بهتر نشان می‌دهد.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (۳-۵۲)$$

¹ Triaxial



شکل ۳-۳: کرنش و تغییر شکل سه محوری

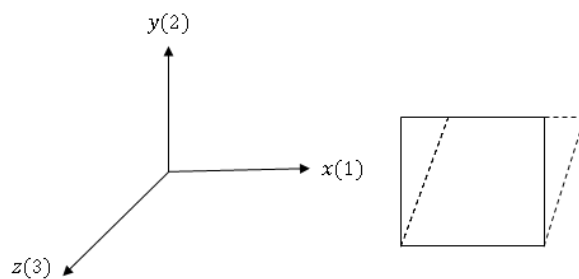
در شرایط خاصی از این حالت با نام شرایط کرنش استوانه ای^۱، دو مولفه از سه مولفه با یکدیگر برابرند. لذا می توان نوشت:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (۵۳-۳)$$

۳-۸-۴- شرایط برش ساده^۲

در این وضعیت المان تنها تحت تاثیر کرنشهای برشی بوده و هیچگونه کرنش حجمی را تجربه نخواهد نمود.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۵۴-۳)$$



شکل ۴-۳: شرایط برش ساده و عدم تغییر حجم المان

1 Clyndrical state of strain

2 Simple shear

تمرینات فصل سوم

۱- نامتغیرهای کرنش و معادله مشخصه را برای تانسور کرنش زیر که حالت کرنش در یک نقطه از محیط متخلخل را نشان می‌دهد، محاسبه کنید.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 8 & -6 & -5 \\ -6 & 12 & -4 \\ -5 & -4 & -9 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

۲- در صورتیکه I_1 و I_2 نامتغیرهای اول و دوم تانسور کرنش باشند ثابت نمایید نامتغیر دوم تانسور کرنش انحرافی (I_{2D}) از رابطه ذیل قابل محاسبه است.

$$I_{2D} = I_2 - \frac{I_1^2}{6}$$

فصل چهارم

نیروها و تانسور تنش

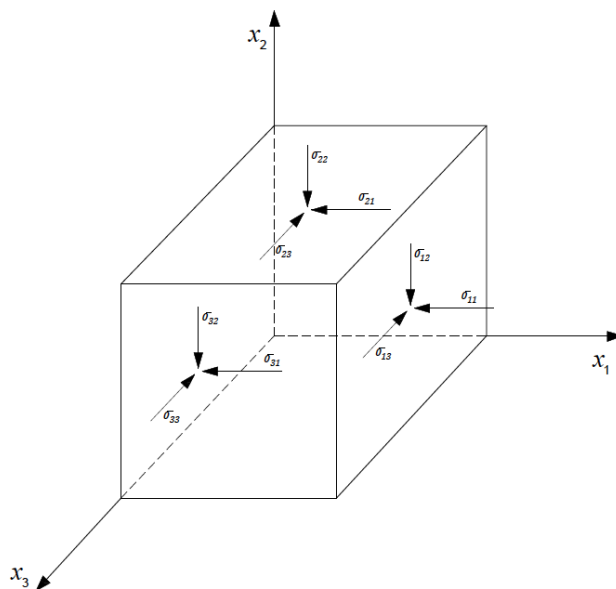


۱-۴- مقدمه

مولفه‌های تانسور تنش در شکل (۱-۴) نشان داده شده است. هر مولفه به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد:

$$\sigma_{ij} = \lim_{A_i \rightarrow 0} \left(\frac{F_j}{A_i} \right) \quad (1-4)$$

در این رابطه F_j مولفه نیرو در جهت j و A_i سطح مقطع عمود بر جهت i است که نیروی F_j روی آن تاثیر می‌نماید.



شکل ۴-۱: وضعیت تنش‌ها در المان خاک

در مکانیک خاک برخلاف مکانیک جامدات، تنشهای فشاری مثبت و تنشهای کششی با علامت منفی در نظر گرفته می‌شوند. در غیاب ممان‌های داخلی، تانسور تنش متقارن بوده و می‌توان نوشت:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (۲-۴)$$

بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

۲-۴- نامتغیرهای تانسور تنش

به مانند تانسور کرنش، نامتغیرهای تانسور تنش را می‌توان به دو روش تعریف نمود. معادله مشخصه تانسور تنش σ_{ij} به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\sigma^3 - I_{1\sigma}\sigma^2 + I_{2\sigma}\sigma - I_{3\sigma} = 0 \quad (۳-۴)$$

در این رابطه می‌توان نوشت:

$$I_{1\sigma} = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (۴-۴)$$

$$I_{2\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (۵-۴)$$

$$I_{3\sigma} = |\sigma_{ij}| \quad (۶-۴)$$

سه پارامتر $I_{1\sigma}$ ، $I_{2\sigma}$ و $I_{3\sigma}$ نامتغیرهای تانسور تنش می‌باشند. روش دیگر جهت تعریف نامتغیرهای تانسور تنش بصورت زیر می‌باشد:

$$\bar{I}_{1\sigma} = J_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{tr}(\sigma) = I_{1\sigma} \quad (۷-۴)$$

$$\bar{I}_{2\sigma} = J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma)^2 = \frac{1}{2} (I_{1\sigma}^2 - 2I_{2\sigma}) \quad (۸-۴)$$

$$\bar{I}_{3\sigma} = J_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ik} \sigma_{km} \sigma_{mi} = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma)^3 = \frac{1}{3} (I_{1\sigma}^3 - 3I_{1\sigma}I_{2\sigma} + 3I_{3\sigma}) \quad (۹-۴)$$

مثال (۱-۴) نامتغیرهای J_1 ، J_2 و J_3 را برای تانسور تنش زیر محاسبه نمایید:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (kN / m^2)$$

$$J_1 = \sigma_{mm} = 3 + 2 + 4 = 9 kN / m^2$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (I_{1\sigma}^2 - 2I_{2\sigma}) = \frac{1}{2} (9^2 - 2(5 + 4 + 12)) = 19.5 \quad (kN / m^2)^2$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (I_{1\sigma}^3 - 3I_{1\sigma}I_{2\sigma} + 3I_{3\sigma}) = \frac{1}{3} (9^3 - 3(9)(21) + 3(8)) = 62 \quad (kN / m^2)^3$$

۳-۴- تجزیه تانسور تنش

می‌توان تانسور تنش را به دو بخش تانسور تنش انحرافی و تانسور تنش هیدرواستاتیک تجزیه کرد.

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{ij} \quad (۱۰-۴)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{nn/3} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{nn/3} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{nn/3} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$[\sigma] = [S] + [P] \quad (۱۱-۴)$$

تانسور تنش هیدرواستاتیک قطری بوده و عناصر قطر آن مساوی و برابر باشند. $\frac{\sigma_{mn}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = p$ می باشد. در خصوص تانسور تنش انحرافی نیز می توان گفت که مجموع عناصر قطری آن (trace) برابر صفر می باشد.

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{ij} \quad (۱۲-۴)$$

$$S_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{ii} = \sigma_{ii} - \sigma_{nn} = 0 \quad (۱۳-۴)$$

۴-۴- نامتغیرهای تانسور تنش انحرافی

نامتغیر اول تانسور تنش انحرافی برابر صفر می باشد. بنابراین:

$$S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \quad (۱۴-۴)$$

نامتغیر دوم تانسور تنش انحرافی با J_{2D} نمایش داده می شود و از قرار زیر است:

$$\begin{aligned} J_{2D} &= \bar{I}_{2S} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} tr(S)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} - \frac{\sigma_{mm}}{3} \delta_{ij} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{\sigma_{mm}}{3} \delta_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} \sigma_{ij} - 2 \sigma_{ij} \frac{\sigma_{mm}}{3} \delta_{ij} + \frac{\sigma_{mm}^2}{9} \delta_{ij} \delta_{ij} \right) \\ &= J_2 - \frac{\sigma_{mm}^2}{3} + \frac{\sigma_{mm}^2}{6} = J_2 - \frac{J_1^2}{6} \end{aligned} \quad (۱۵-۴)$$

در صورتیکه بخواهیم J_{2D} را بر اساس نگارش ماتریسی^۱ محاسبه نماییم می توان نوشت:

$$\begin{aligned} J_{2D} &= \frac{1}{2} tr \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{12}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2 + S_{33}^2] \end{aligned}$$

1 Matrix notation

$$= \frac{1}{2} [(\sigma_{11} - p)^2 + (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2 + 2S_{12}^2 + 2S_{23}^2 + 2S_{13}^2]$$

با توجه به اینکه $S_{12} = \sigma_{12}$ ، $S_{23} = \sigma_{23}$ و $S_{13} = \sigma_{13}$ می‌باشد می‌توان نوشت:

$$J_{2D} = \frac{1}{2} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{13}^2 - 3p^2]$$

با جایگذاری مقدار $p = \frac{\sigma_{ii}}{3}$ خواهیم داشت:

$$= \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2$$

بر اساس تنشهای اصلی می‌توان نوشت:

$$J_{2D} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad (۱۶-۴)$$

با توجه به تعریف نامتغیر دوم تانسور تنش (J_2) می‌توان نوشت:

$$J_{2D} = J_2 - \frac{J_1^2}{6}$$

که مشابه همان مقداری است که بر اساس نگارش اندیسی^۱ از معادله (۱۵-۴) محاسبه گردید. حسن روش دوم تعریف نامتغیرهای تانسور تنش آن است که می‌توان توجیه مناسب مکانیکی آنها را ذکر نمود. در واقع نامتغیر اول تانسور تنش انحرافی همان کرنش حجمی است که قطعاً برای وضعیت تنش محوری اضافی خالص بدون فشار هیدرواستاتیک صفر خواهد بود. نامتغیر دوم تانسور تنش انحرافی را نیز می‌توان به یک پارامتر موثر دیگر به نام تنش برشی اکتاهدرال^۲ مرتبط دانست. تنش برشی اکتاهدرال بر اساس رابطه زیر تعریف می‌گردد:

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \frac{2}{3} [(\sigma_{12})^2 + (\sigma_{23})^2 + (\sigma_{13})^2]$$

بنابراین بر اساس تنشهای اصلی می‌توان نوشت:

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad (۱۷-۴)$$

مقایسه روابط ۱۶-۴ و ۱۷-۴ نشان می‌دهد:

$$J_{2D} = \frac{3}{2} \tau_{oct}^2 \quad (۱۸-۴)$$

1 Index notation

2 Octahedral shear stress

در واقع τ_{oct} مولفه بردار تنش بر صفحه اکتاهدرال^۱ می‌باشد. صفحه اکتاهدرال صفحه‌ای است که با هر سه محور مختصات زوایای مساوی تشکیل می‌دهد و در واقع عمود بر نیمساز فضایی^۲ خواهد بود. نامتغیر سوم تانسور تنش انحرافی نیز به روش زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} J_{3D} = \bar{I}_{3S} &= \frac{1}{3} S_{ij} S_{jm} S_{mi} = \frac{1}{3} tr(S)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\sigma_{ij} - \frac{J_1}{3} \delta_{ij} \right) \left(\sigma_{jm} - \frac{J_1}{3} \delta_{jm} \right) \left(\sigma_{mi} - \frac{J_1}{3} \delta_{mi} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{mi} - \frac{J_1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{2}{3} J_1 \sigma_{im} \sigma_{im} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{9} J_1^2 \sigma_{mm} + \frac{J_1^2}{9} \sigma_{mm} - \frac{J_1^3}{27} \delta_{mm} \right) \\ &= J_3 - \frac{2}{3} J_1 J_2 + \frac{2}{27} J_1^3 \end{aligned} \quad (۱۹-۴)$$

در رابطه با مفهوم فیزیکی نامتغیر سوم تنش در فصول آتی بحث خواهد شد.
مثال ۴-۲: نامتغیرهای تانسور تنش انحرافی را برای تانسور تنش مثال (۱-۴) محاسبه نمایید.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} kN / m^2$$

از مثال (۱-۴) می‌توان نوشت:

$$J_1 = 9 \text{ kN} / m^2$$

$$J_2 = 19.5 \text{ (kN} / m^2)^2$$

$$J_3 = 62 \text{ (kN} / m^2)^3$$

بر این اساس، نامتغیر اول تانسور تنش انحرافی صفر، نامتغیر دوم بر اساس رابطه (۱۵-۴) و نامتغیر سوم بر اساس رابطه (۱۹-۴) قابل محاسبه خواهند بود.

۴-۵- تصویر تنش بر یک صفحه

فرض نمایید تنش در یک نقطه با تانسور تنش σ_{ij} بصورت زیر تعریف گردد:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

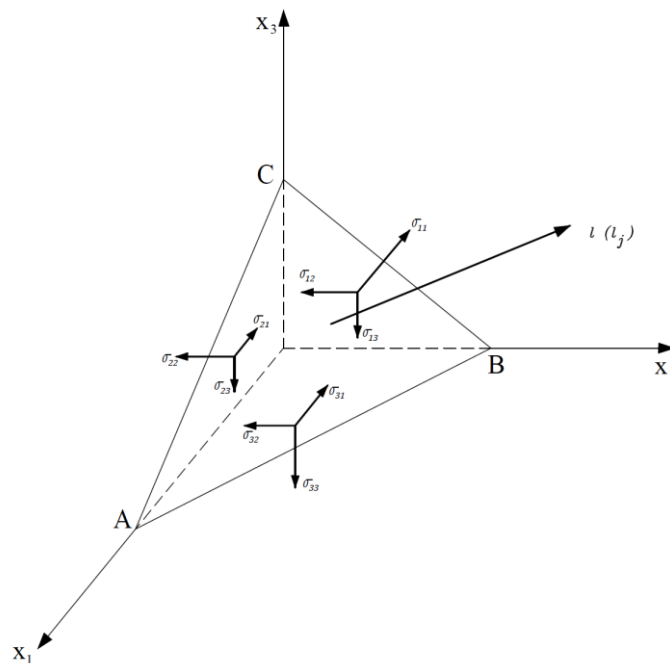
1 Octahedral plane

2 Space diagonal

بردار تنش بر هر صفحه‌ای که از این نقطه عبور می‌نماید با توجه به تعادل نیروها بر اساس شکل (۲-۴) محاسبه می‌گردد.

$$\sigma_i^p = \sigma_{ji} \ell_j = \sigma_{ij} \ell_j \quad (۲۰-۴)$$

در این رابطه l_j ($j=1,2,3$) کسینوسهای هادی^۱ برای نرمال صفحه می‌باشند.



شکل (۲-۴): وضعیت تنش‌ها بر المان هرمی^۲

مولفه‌های بردار تنش بر صفحه ABC بر اساس رابطه (۲۰-۴) بصورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_1^p = \sigma_{11} \ell_1 + \sigma_{21} \ell_2 + \sigma_{31} \ell_3 = \sigma_{11} \ell_1 + \sigma_{12} \ell_2 + \sigma_{13} \ell_3 \quad (۲۱-۴)$$

$$\sigma_2^p = \sigma_{21} \ell_1 + \sigma_{22} \ell_2 + \sigma_{23} \ell_3$$

$$\sigma_3^p = \sigma_{31} \ell_1 + \sigma_{32} \ell_2 + \sigma_{33} \ell_3$$

لازم به ذکر است که در برخی نگارشها تانسور تنش بصورت یک ماتریس سطری بصورت زیر نگاشته می‌شود که این به دلیل تقارن آن و تساوی دو به دوی شش مولفه غیرقطری آن است.

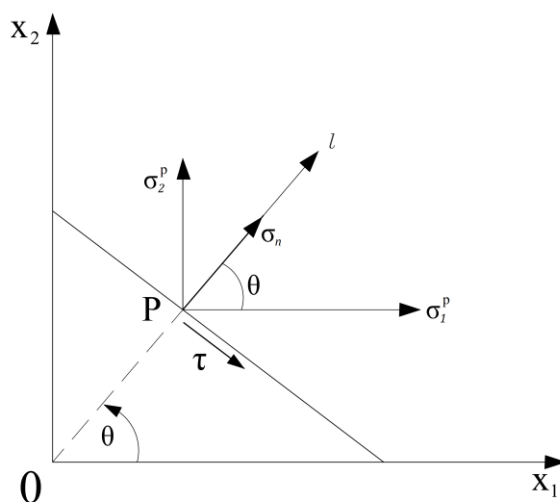
$$\{\sigma\}^T = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13}]$$

1 Direction cosines

2 Tetrahedral element

۴-۶- مولفه های برشی و نرمال تنش بر یک صفحه

شکل (۳-۴) مولفه های برشی (τ) و قائم (σ_n) را بر صفحه دلخواه که از نقطه P می گذرد نشان می دهد. دقت شود که این صفحه موازی محور سوم یعنی x_3 انتخاب شده و نرمال آن با محور x_1 زاویه θ تشکیل می دهد.



شکل (۳-۴): تنش های برشی و نرمال در صفحه گذرنده از نقطه P موازی x_3 (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

مثال (۳-۴): وضعیت تنش در نقطه P را با تانسور تنش زیر نشان می دهیم:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بردار تنش را بر صفحه ای که نرمال آن با محور x_1 زاویه θ تشکیل می دهد محاسبه نمایید.

$$\ell_1 = \cos \theta$$

$$\ell_2 = \sin \theta$$

$$\ell_3 = 0.0$$

با جایگذاری مولفه های تانسور تنش در روابط (۴-۲۱) می توان نوشت:

$$\sigma_1^p = \sigma_{11} \cos \theta + \sigma_{12} \sin \theta = \cos \theta$$

$$\sigma_2^p = \sigma_{21} \cos \theta + \sigma_{22} \sin \theta = 2 \sin \theta$$

$$\sigma_3^p = \sigma_{31} \cos \theta = \cos \theta$$

با توجه به این مقادیر می‌توان مولفه‌های نرمال و برشی بر صفحه را بصورت زیر حساب کرد:

$$\begin{aligned}\sigma_n^p &= \sigma_1^p \cos \theta + \sigma_2^p \sin \theta = \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta \\ &= \cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta \\ \tau^p &= \sigma_1^p \sin \theta - \sigma_2^p \cos \theta = \sigma_{12} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + \sin \theta \cos \theta (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ &= \sin \theta \cos \theta - 2\sin \theta \cos \theta = -\sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

برای سایر صفحات نیز می‌توان به طریق مشابه عمل نمود.

۷-۴- تنش‌های اصلی^۱

برای هر تانسور تنش می‌توان صفحاتی یافت که بردار تنش بطور کامل بر آنها عمود بوده و بنابراین مولفه تنش برشی برابر صفر باشد. این صفحات، صفحات اصلی^۲ و جهت عمود بر آنها جهات اصلی^۳ نامیده می‌شوند. می‌توان حداکثر سه صفحه از این نوع را یافت که مقدار تنش نرمال بر آنها همان تنش اصلی می‌باشد. بدین ترتیب مقدار تنش اصلی را با در نظرگیری اسکالر λ می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\sigma_i = \lambda \ell_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (۲۲-۴)$$

در این رابطه ℓ_i بردار واحد نرمال بر صفحه می‌باشد. لذا داریم:

$$\sigma_i = \lambda \ell_i = \lambda \delta_{ij} \ell_j = \sigma_{ij} \ell_j$$

$\Rightarrow$

$$(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \ell_j = 0$$

$\Rightarrow$

$$([\sigma] - \lambda[I])\{\ell\} = 0 \quad (۲۳-۴)$$

به فرم ماتریسی می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (۲۴-۴)$$

همچنین باید توجه داشت:

$$\ell_i \ell_i = 1 \quad (۲۵-۴)$$

$$\Rightarrow \ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 = 1 \quad (۲۶-۴)$$

1 Principal stresses

2 Principal planes

3 Principal directions

با توجه به معادله (۴-۲۵) و اینکه سه پارامتر ℓ_1 ، ℓ_2 و ℓ_3 نمی‌توانند صفر باشند بنابراین باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (۴-۲۷)$$

با بسط این دترمینان، معادله مشخصه^۱ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\lambda^3 - I_{1\sigma}\lambda^2 + I_{2\sigma}\lambda - I_{3\sigma} = 0 \quad (۴-۲۸)$$

این معادله منجر به سه ریشه می‌شود که همان تنشهای اصلی خواهند بود. جهات اصلی نظیر مقادیر بدست آمده تنشهای اصلی، با جایگذاری λ در معادلات (۴-۲۴) بدست خواهد آمد. در صورتیکه سه جهت اصلی به عنوان محورهای مختصات در نظر گرفته شوند فرم تانسور تنش از قرار زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

ترتیب σ_1 ، σ_2 و σ_3 بر اساس نحوه و ترتیب انتخاب جهات اصلی می‌باشند. تنش بزرگتر را تنش اصلی حداکثر^۲، کوچکترین را تنش اصلی حداقل^۳ و وسطی را تنش اصلی میانی^۴ نامند.

مثال ۴-۴- تانسور تنش در نقطه P بصورت زیر نشان داده می‌شود. تنشها در جهات اصلی را محاسبه نمایید.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} kN / m^2$$

نامتغیرهای تانسور تنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_{1\sigma} = 13 \text{ kN} / m^2$$

$$I_{2\sigma} = 20 + 20 + 12 = 52 (kN / m^2)^2$$

$$I_{3\sigma} = 60 (kN / m^2)^3$$

1 Characteristic equation

2 Major principal stress

3 Minor principal stress

4 Intermediate principal stress

معادله مشخصه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^3 - 13\sigma^2 + 52\sigma - 60 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\sigma = 2,5 \text{ \& } 6 \text{ kN / m}^2$$

$\Rightarrow$

تنش اصلی حداکثر: 6 kN / m^2

تنش اصلی حداقل: 2 kN / m^2

تنش اصلی میانی: 5 kN / m^2

حل تنشهای مذکور را در معادلات مربوط به جهات اصلی جایگزین می‌نماییم.
تنش اصلی حداکثر:

$$\sigma_1 = 6.0 \Rightarrow$$

$$(4-6)\ell_1 - 2\ell_3 = 0$$

$$(5-6)\ell_2 = 0 \Rightarrow \ell_2 = 0$$

$$-2\ell_1 + (4-6)\ell_3 = 0 \Rightarrow \ell_1 = -\ell_3$$

به علاوه $\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 = 1$ به عنوان معادله کمکی وجود دارد.

$$\Rightarrow 2\ell_1^2 = 1 \Rightarrow \ell_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \& \quad \ell_3 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بدین ترتیب دو جهت اصلی که امتداد اصلی مربوط به تنش اصلی حداکثر را تشکیل می‌دهد به دست می‌آیند:

$$\ell_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \ell_2 = 0, \quad \ell_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\ell_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \ell_2 = 0, \quad \ell_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تنش اصلی حداقل:

$$\sigma_3 = 2.0 \Rightarrow$$

$$2\ell_1 - 2\ell_3 = 0$$

$$(5-2)\ell_2 = 0 \Rightarrow \ell_2 = 0$$

$$-2\ell_1 + (4-2)\ell_3 = 0 \Rightarrow \ell_1 = \ell_3$$

همچنین $\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 = 1$ می باشد، لذا:

$$2\ell_1^2 = 1 \Rightarrow \ell_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \& \quad \ell_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لذا جهات اصلی مربوط از قرار زیر می باشند:

$$\begin{aligned} \ell_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \ell_2 = 0 \quad , \quad \ell_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \ell_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \ell_2 = 0 \quad , \quad \ell_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

تنش اصلی میانی:

$$\begin{aligned} \sigma_2 = 5.0 \Rightarrow \\ -\ell_1 - 2\ell_3 = 0 \\ 0\ell_2 = 0 \\ -2\ell_1 - 1\ell_3 = 0 \\ \ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 = 1 \end{aligned}$$

لذا می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \ell_1 = \ell_3 = 0 \quad \& \quad \ell_2 = +1 \\ \ell_1 = \ell_3 = 0 \quad \& \quad \ell_2 = -1 \end{aligned}$$

بدین ترتیب جهات اصلی بصورت زیر نگاشته می شوند، در واقع یکی از دو جهت اصلی برای هر تنش اصلی انتخاب شده است.

$$Major, x'_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$Minor, x'_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$Intermediate, x'_3 (0, 1, 0)$$

بدین ترتیب ماتریس تبدیل بصورت زیر خواهد بود:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

فرم تبدیل یافته تانسور تنش تحت این ماتریس تبدیل بصورت زیر خواهد بود:

$$\sigma'_{ij} = a_{im} a_{jn} \sigma'_{mn} \quad (۲۹-۴)$$

در فرم ماتریس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} [\sigma'] &= [a]^T [\sigma] [a] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۳۰-۴)$$

ترتیب عناصر قطری، وابسته به ترتیب در نظرگیری جهات اصلی در ماتریس تبدیل می‌باشد.

۴-۸- محاسبه تنش های برشی

همانطور که قبلاً ذکر شد مولفه های تنش برشی بر صفحات اصلی برابر صفر می‌باشند. بطور کلی مولفه های تنش بر المان هرمی شکل از قرار زیر تعریف شدند:

$$\begin{aligned} \sigma_i^p &= \sigma_{ij} \ell_j \Rightarrow \\ \sigma_x^p &= \sigma_{xx} \ell_x + \sigma_{xy} \ell_y + \sigma_{xz} \ell_z \\ \sigma_y^p &= \sigma_{yx} \ell_x + \sigma_{yy} \ell_y + \sigma_{yz} \ell_z \\ \sigma_z^p &= \sigma_{zx} \ell_x + \sigma_{zy} \ell_y + \sigma_{zz} \ell_z \end{aligned}$$

که ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z کسینوسهای هادی در جهات x, y, z می‌باشند. بدین ترتیب تنش نرمال σ_n از قرار زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \ell_x \sigma_x^p + \ell_y \sigma_y^p + \ell_z \sigma_z^p \\ &\text{با قرار دادن مقادیر } \sigma_x^p, \sigma_y^p, \sigma_z^p \text{ خواهیم داشت:} \\ \sigma_n &= \ell_x^2 \sigma_{xx} + \ell_y^2 \sigma_{yy} + \ell_z^2 \sigma_{zz} + 2(\ell_x \ell_y \sigma_{xy} + \ell_y \ell_z \sigma_{yz} + \ell_x \ell_z \sigma_{xz}) \end{aligned} \quad (۳۱-۴)$$

با در دست داشتن σ_n ، تنش برشی σ_s از رابطه محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 + \sigma_s^2 &= (\sigma_x^p)^2 + (\sigma_y^p)^2 + (\sigma_z^p)^2 \\ \Rightarrow \sigma_s^2 &= (\sigma_x^p)^2 + (\sigma_y^p)^2 + (\sigma_z^p)^2 - \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (۳۲-۴)$$

حالت خاصی را در نظر بگیرید که مختصات Z, Y, X منطبق بر جهات اصلی در نظر گرفته شده باشند. در این شرایط با توجه به صفر بودن مولفه های تنش برشی می توان نوشت:

$$\sigma_x^p = \ell_x \sigma_{xx} \rightarrow \sigma_1^p = \ell_1 \sigma_{11}$$

$$\sigma_y^p = \ell_y \sigma_{yy} \rightarrow \sigma_2^p = \ell_2 \sigma_{22}$$

$$\sigma_z^p = \ell_z \sigma_{zz} \rightarrow \sigma_3^p = \ell_3 \sigma_{33}$$

$$\sigma_n = \ell_1^2 \sigma_{11} + \ell_2^2 \sigma_{22} + \ell_3^2 \sigma_{33} \quad (۳۳-۴)$$

$$\sigma_s^2 = \ell_1^2 \sigma_{11}^2 + \ell_2^2 \sigma_{22}^2 + \ell_3^2 \sigma_{33}^2 - \left(\ell_1^2 \sigma_{11} + \ell_2^2 \sigma_{22} + \ell_3^2 \sigma_{33} \right)^2 \quad (۳۴-۴)$$

ثابت می گردد که تنش برش ماکزیمم بر صفحاتی به شرح زیر که با محورهای اصلی زوایای $\pm 45^\circ$ تشکیل می دهند، ایجاد می گردد:

$$\ell_1 \left(0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\ell_2 \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\ell_3 \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۳۴-۴) خواهیم داشت:

$$\sigma_{s1} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{33})$$

$$\sigma_{s2} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{33}) \quad (۳۵-۴)$$

$$\sigma_{s3} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22})$$

تنش نرمال نظیر نیز بر اساس رابطه (۳۳-۴) به شرح زیر خواهد بود:

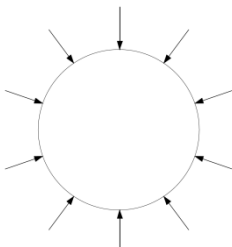
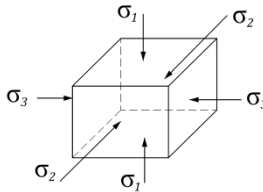
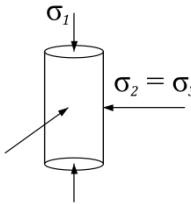
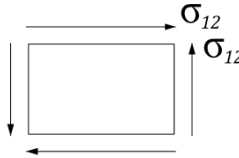
$$\sigma_{n1} = \frac{1}{2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\sigma_{n2} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \quad (۳۶-۴)$$

$$\sigma_{n3} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

۹-۴- شرایط خاص اعمال تنش

معمولاً در آزمایشگاه برای تعیین مدل‌های رفتاری از مسیرهای مشخص تنش استفاده می‌گردد. معمول ترین مسیرهای تنش در مهندسی ژئوتکنیک و تانسورهای تنش نظیر آنها در شکل (۴-۴) نشان داده شده است.

تک محوری		$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
هیدرواستاتیک	 ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$)	$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$
سه محوری حقیقی		$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$
سه محوری استوانه ای		$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$
برش خالص		$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

شکل ۴-۴: شرایط خاص تانسور تنش در المان خاک (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

تمرینات فصل چهارم

- ۱- تانسور تنش در یک نقطه از محیط، توسط تانسور زیر نشان داده شده است. تنش های اصلی و جهات اصلی در این نقطه را محاسبه کنید.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \left(\frac{kN}{m^2} \right)$$

- ۲- برای تانسور زیر، وضعیت تنش در جهات اصلی را محاسبه کنید.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 5 & -1 \\ -4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \left(\frac{kN}{m^2} \right)$$

- ۳- برای تانسور ارائه شده در تمرین دوم، مطلوب است تعیین تانسورهای تنش هیدرواستاتیک و تانسور تنش انحرافی.

- ۴- عبارت های زیر را برای متغیرهای تانسور تنش انحرافی S_{ij} استخراج نمایید.

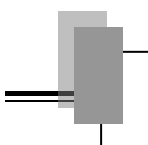
$$J_{1D} = S_{ii} = tr(S) = 0$$

$$J_{2D} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} tr(S^2) = J_2 - \frac{J_1^2}{6}$$

$$J_{3D} = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jm} S_{mi} = \frac{1}{3} tr(S^3) = J_3 - \frac{2}{3} J_1 J_2 + \frac{2}{27} J_1^3$$

فصل پنجم

آزمونهای آزمایشگاهی برای تعیین پارامترهای مدل رفتاری



۵-۱- مقدمه

رفتار غیرخطی در بسیاری موارد به عنوان خمیدگی و انحنا در ارتباط بین تنش و کرنش و منحنی نظیر آن تلقی می‌گردد. در صورتیکه رفتار غیرخطی بعلا تغییرات زیاد در هندسه مدل باشد بعنوان غیرخطی بودن هندسی^۱ و در صورتیکه بدلیل رفتار ماده باشد غیرخطی بودن مصالح^۲ یا ماده نامیده می‌شود.

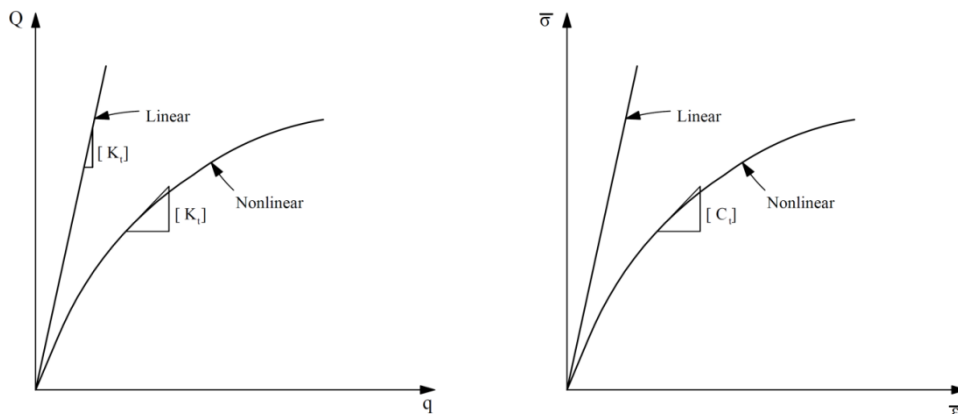
۵-۲- رفتار غیر خطی

شکل (۵-۱) شرایط کلی برای ارتباط نیرو و تغییر شکل را ارائه می‌نماید. در فرم نمودی، این ارتباط بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$[k_t]\{dq\} = \{dQ\} \quad (۵-۱)$$

1 Geometric non-linearity

2 Material non-linearity



شکل ۵-۱: ارتباط خطی و غیر خطی نیرو-تغییر شکل و تنش-کرنش (دسای و سیریاردان ۱۹۸۴)

در شرایط رفتار خطی، ماتریس رفتاری یا سختی مماسی در هر نقطه، $[k_t]$ با ماتریس سختی اولیه $[k_i]$ برابر است. در مباحث عددی و روش المان محدود، ماتریس سختی $[k_t]$ بصورت زیر بیان می‌گردد.

$$[k_t] = \iiint_V [B]^T [C_t] [B] dV \quad (۲-۵)$$

در این رابطه $[B]$ ماتریس ارتباط کرنش - تغییر شکل و V حجم محدوده یا المان موردنظر می‌باشد. در این رابطه ماتریس $[C_t]$ رابطه رفتاری و بیانگر ارتباط تنش-کرنش بوده و به فرم زیر نشان داده می‌شود:

$$\{d\sigma\} = [C_t] \{d\varepsilon\} \quad (۳-۵)$$

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^t d\varepsilon_{kl} \quad (۴-۵)$$

در این روابط $\{d\varepsilon\}, \{d\sigma\}$ جزء بردار تنش و کرنش و C_{ijkl}^t تانسور رفتاری خواهد بود. تغییرات سطح نیرو و تنش حین اعمال بار بر ماده سبب می‌گردد تا سختی ماده در هر لحظه تغییر می‌نماید بنابراین می‌توان نوشت:

$$[k_t] = [k_t(C_t)] \quad (۵-۵)$$

یا:

$$(C_t) = [C_t(\sigma)] \quad (۶-۵)$$

علاوه بر این موضوع، وضعیت تنشهای در محل، دانسیته مصالح، درصد آب و نسبت تخلخل، نوع بارگذاری استاتیکی و دینامیکی، نرخ بارگذاری و مسیر تنش، ناپیوستگی‌ها و درزه و ترک بر رفتار مصالح تاثیرگذار می‌باشد.

۵-۳- شکل کلی قوانین رفتاری

شکل کلی قوانین رفتاری به صورت زیر نگاشته می‌شود:

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 0 \quad (5-7)$$

که σ تنش، $\dot{\sigma}$ کرنش، $\dot{\varepsilon}$ نرخ تنش و ε نرخ کرنش می‌باشند. برای تعیین قوانین رفتاری باید مراحل زیر را لحاظ نمود.

الف- مشخص نمودن فرمولاسیون ریاضی مدل

ب- تعیین پارامترهای موثر در مدل رفتاری

ج- تعیین پارامترها از آزمونهای آزمایشگاهی و ارزیابی صحت عملکرد مدل^۱ که خود شامل دو مرحله می‌باشد:

د- پیشبینی صحیح و کمی داده‌های آزمایشگاهی که پارامترهای مدل از طریق آنها تعیین شده است به انضمام تعدادی دیگر که در تعیین پارامترهای مدل بکار گرفته نشده‌اند و یا تحت مسیرهای تنش دیگر انجام گرفته‌اند.

ه- بکارگیری مدل رفتاری در یک راه حل بسته^۲ و یا یک مسئله مقدار مرزی^۳ که به روش عددی حل می‌گردد و صحت سنجی عملکرد مناسب مدل با نتایج ابزار گذاری و رفتارسنجی.

۵-۴- مشخص نمودن پارامترهای رفتاری

هنگامی که پارامترهای یک مدل رفتاری مورد محاسبه قرار می‌گیرند نیاز به داده‌های آزمایشگاهی احساس می‌شود. بدین ترتیب لازم است تا آزمایشهای مناسب برای محاسبه این پارامترها انجام و نحوه محاسبات از نتایج این آزمایشها اعلام گردند. این موضوع از مهمترین مراحل در محاسبات مربوط به یک مدل رفتاری است. برای محاسبه پارامترهای مدل رفتاری باید شرایط آزمایشگاهی متناسب با وضعیت المان خاک در خلال بارگذاری لحاظ شود. آزمایش فشار هیدرواستاتیک، سه محوری معمولی، برش ساده و فشار تک محوری نمونه‌هایی از این موارد می‌باشند. در ذیل مرور مختصری بر این آزمایشها می‌شود:

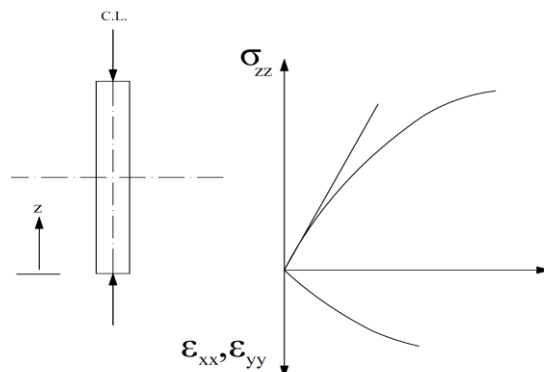
- آزمون فشار تک محوری^۴: در این آزمایشها یک نمونه یا سطح مقطع مدور یا مربعی بصورت محوری تحت بارگذاری قرار می‌گیرد. نمودارهای مستخرج از این آزمایش شامل نمودار تنش محوری- کرنش محوری و کرنش جانبی-کرنش محوری بوده و به صورت شکل (۵-۲) داده می‌شوند:

1 Verification

2 Closed form solution

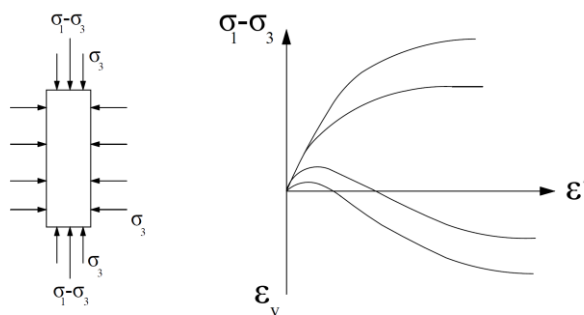
3 Boundary value problem

4 Uniaxial



شکل ۲-۵: نمودارهای مستخرج از نتایج آزمایش فشار تک محوری

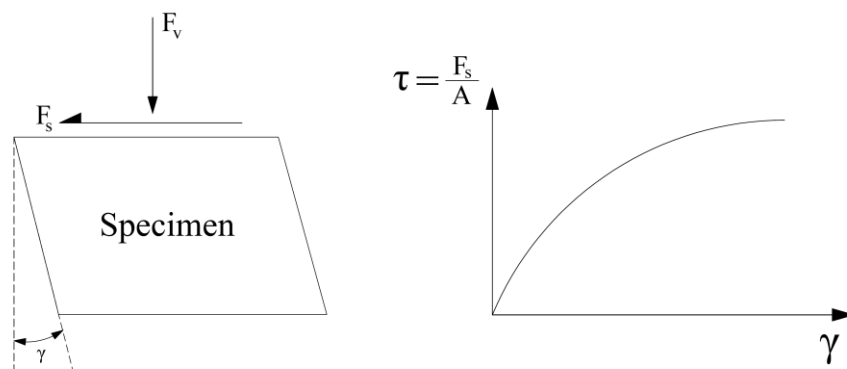
آزمایش سه محوری معمولی^۱: در این آزمایش، ابتدا فشار همه جانبه^۲ بوسیله مایع درون سلول به نمونه اعمال می‌شود و سپس تنش محوری اضافی توسط پیستون بارگذاری وارد می‌شود. آزمایش را می‌توان در شرایط زهکشی شده یا زهکشی نشده انجام داد و در نتیجه آن کرنشهای حجمی یا فشار آب منفذی را محاسبه نمود. نمودارهای مستخرج از این آزمایش شامل نمودار تنش انحرافی-کرنش محوری و کرنش حجمی-کرنش محوری در شرایط زهکشی شده و فشار حفره‌ای اضافی-کرنش محوری در شرایط زهکشی نشده بصورت شکل (۳-۵) هستند.



شکل ۳-۵: نمونه آزمایشی و نمودارهای مستخرج از آزمایش سه محوری معمولی

- برش ساده: در آزمایش برش ساده که توسط روسکو^۳ ابداع گردید امکان تعیین رفتار تنش-کرنش خاک بصورت نمودار تنش برشی-کرنش برشی در شکل (۴-۵) وجود خواهد داشت.

1 Conventional triaxial test
2 Confining pressure
3 Roscoe



شکل ۴-۵: شرایط بارگذاری در آزمایش برش ساده و نمودار تنش- کرنش مستخرج از آن

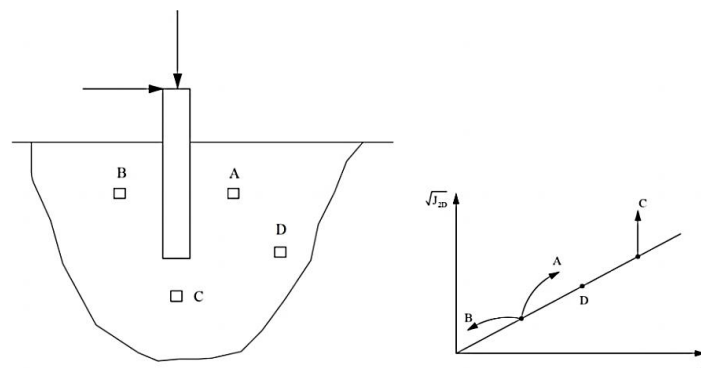
- سه محوری واقعی^۱: با توجه به آنکه خاک در شرایط حقیقی در وضعیت تنش چندمحوره قرار دارند، آزمایش سه محوری واقعی به نحو مناسبی می‌تواند شرایط حقیقی خاک در محل را شبیه سازی نماید. در آزمایش سه محوری واقعی امکان بارگذاری خاک در راستای هر یک از سه محور و اندازه گیری کرنش در سه راستای مذکور وجود دارد. نمونه خاک در این آزمایش بصورت مکعبی بوده و در داخل یک قاب قرار می‌گیرد. نیرو از طریق سه جک هیدرولیکی در سه راستای متفاوت به آن اعمال شده و تغییر شکلها توسط سنسورهای LVDT^۲ در هر جهت تعیین و قرائت می‌گردد.

۵-۵-مسیر تنش

خاک در وضعیت واقعی بارگذاری تحت تاثیر مسیرهای مختلف تنش قرار می‌گیرد. به عنوان نمونه می‌توان شرایط بارگذاری را در خصوص یک شمع تحت بار محوری و جانبی مطابق شکل (۵-۵) در نظر گرفت. همچنین در این شکل، مسیر تنش حین بارگذاری برای چند نقطه مختلف ارائه شده است.

1 True triaxial

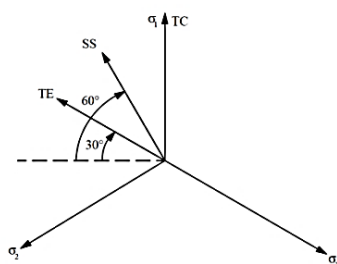
2 Linear Variable Differential Transducer



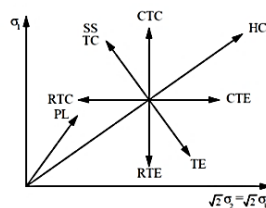
شکل ۵-۵: شرایط واقعی بارگذاری المان خاک در محل (دسای و سیریاردان ۱۹۸۴)

بدین ترتیب لازم است تا برای شبیه سازی صحیح رفتار خاک بویژه در مسائلی که اندرکنش آن با بارگذاری یک سازه همراه است، رفتار خاک تحت مسیرهای تنش اصلی و مهم بررسی و کارایی مدل رفتاری در شرایط مختلف ارزیابی می گردد. این موضوع مستلزم آزمایش نمونه های خاک تحت تاثیر مسیرهای مختلف تنش است. آزمایش سه محوری واقعی آزمونی است که می توان بوسیله آن رفتار خاک را حین اعمال مسیرهای تنش مختلف بررسی و ارزیابی نمود. در این قسمت نقش و تاثیر مسیر تنش بر خاک و رفتار آن مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرد.

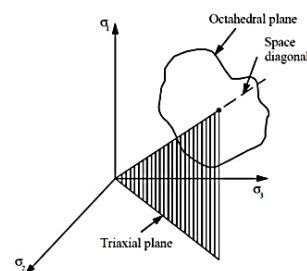
شکل (۵-۶) وضعیت مسیر تنش در وضعیتهای مختلف بارگذاری را در صفحه تنشهای اصلی ارائه می نماید. این شرایط در دو وضعیت صفحات سه محوری و اکتاهدال نشان داده شده است. در آزمایش سه محوری مرسوم دو تنش از سه تنش اصلی با هم مساوی هستند. لذا در حالت سه محوری نمونه استوانه ای یکی از تنش های اصلی $\sqrt{2}$ برابر محور افقی قرار خواهد داشت. صفحه اکتاهدال نیز بر نیمساز فضایی عمود و سه محور با آن زوایای برابر تشکیل می دهند.



(ج)



(ب)



(الف)

شکل ۵-۶ وضعیت مسیر تنش

(الف) در فضای تنش های اصلی (ب) تصویر مسیر تنش بر صفحه سه محوری (ج) مسیر تنش در صفحه اکتاهدال (دسای و سیریاردان ۱۹۸۴)

- مسیر تنش هیدرواستاتیک یار فشار هیدرواستاتیک (HC): نمونه تحت تنش هیدرواستاتیک یا وضعیت تنش ایزوتروپ بارگذاری شده و بارگذاری در امتداد نیمساز فضایی تحت تاثیر تنش میانگین $p = \frac{J_1}{3}$ ادامه پیدا می نماید. در شرایط تنش فشاری هیدرواستاتیک هیچگونه کرنش برشی ایجاد نمی شود و بنابراین برای تعیین ویژگیهای حجمی و بویژه محاسبه مدول بالک K مناسب می باشد. در صورتیکه شرایط بصورت زهکشی نشده برقرار باشد، می توان اندازه گیریها را بر اساس فشار آب حفره ای نیز انجام داد.

- مسیر تنش فشار سه محوری معمولی^۱ (CTC): در سه محوری معمولی ابتدا نمونه استوانه ای تحت فشار همه جانبه تحکیم یافته و سپس با اعمال تنش محوری اضافی فشاری به گسیختگی می رسد. تحت این شرایط بارگذاری نرخ تغییرات در تنش برشی اکتاهدرال و تنش نرمال اکتاهدرال یا همان تنش میانگین بصورت زیر خواهد بود:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \Delta \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Delta \sigma_1 \quad (۸-۵)$$

$$\Rightarrow \sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \Delta \sigma_{oct} = \frac{\Delta J_1}{3} = \frac{\Delta \sigma_1}{3} \quad (۹-۵)$$

- کشش سه محوری کاهش یافته^۲ (RTE): در دستگاه سه محوری واقعی ابتدا نمونه در شرایط فشار ایزوتروپ بارگذاری می گردد. سپس σ_2 و σ_3 ثابت و σ_1 کاهش پیدا می کند. لذا در این شرایط σ_2 و σ_3 به تنشهای اصلی حداکثر و میانی و σ_1 به تنش اصلی حداقل تبدیل خواهد شد. در این شرایط تنش های برشی و محوری اکتاهدرال با همان دو رابطه قبل قابل بیان است. گرچه تنش برشی اکتاهدرال افزایش و تنش محوری اکتاهدرال کاهش خواهد داشت.

$$\Delta \tau_{oct} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta \sigma_1 \quad \Delta \sigma_{oct} = \frac{\Delta \sigma_1}{3} \quad (۱۰-۵)$$

- کشش سه محوری معمولی^۳ (CTE): در آزمایش سه محوری کششی معمولی ابتدا نمونه تحت فشار ایزوتروپ تحکیم می یابد. سپس دو تنش σ_2 و σ_3 افزایش و σ_1 ثابت نگاه داشته می شوند. لذا در این حالت σ_2 و σ_3 تنشهای اصلی حداکثر و میانی و σ_1 تنش اصلی حداقل خواهد بود. در این حالت تنش برشی اکتاهدرال از رابطه ذیل محاسبه می شود. تنش نرمال اکتاهدرال نیز به قرار زیر قابل محاسبه است.

1 Conventional triaxial compression

2 Reduced triaxial extension

3 Conventional triaxial extension

$$\Delta \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Delta \sigma_2 \quad \Delta \sigma_{oct} = \frac{2}{3} \Delta \sigma_2 \quad (11-5)$$

- فشار سه محوری کاهش یافته^۱ (RTC): در این آزمایش ابتدا نمونه تحت شرایط فشار ایزوتروپ بارگذاری شده و سپس تحت σ_1 ثابت، σ_2 و σ_3 کاهش می‌یابند بر این اساس تغییرات در تنشهای برشی افزایش و تنش محوری اکتاهدرال کاهش از قرار ذیل خواهند بود:

$$\Delta \tau_{oct} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta \sigma_2 \quad \Delta \sigma_{oct} = \frac{2}{3} \Delta \sigma_2 \quad (12-5)$$

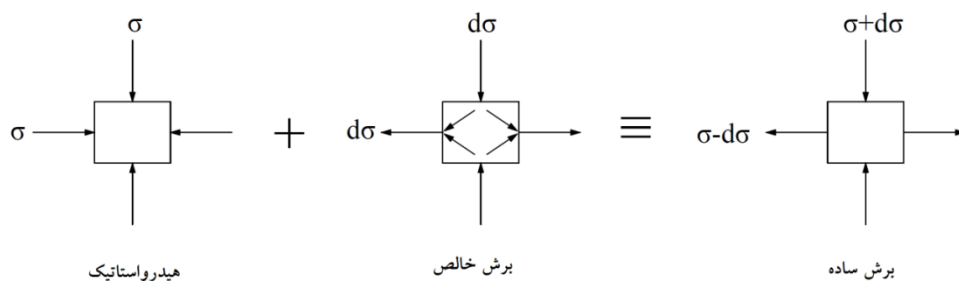
- سه محوری فشاری^۲ (TC) و سه محوری کششی^۳ (TE): در این آزمایش بارگذاری به قسمی اعمال می‌گردد که همواره در صفحه اکتاهدرال قرار خواهیم داشت. به عبارت دیگر، تنش محوری اکتاهدرال همواره ثابت باقی خواهد ماند. در سه محوری فشاری σ_1 افزایش می‌یابد در حالیکه σ_2 و σ_3 به اندازه نصف افزایش آن کاهش می‌یابند. به عبارت دیگر اگر افزایش σ_1 به اندازه $\Delta \sigma_1$ باشد کاهش σ_2 و σ_3 به مقدار $\Delta \sigma_1/2$ خواهد بود. در حالت سه محوری کششی σ_1 به اندازه $\Delta \sigma_1$ کاهش و σ_2 و σ_3 هر یک به مقدار $\Delta \sigma_1/2$ افزایش خواهند داشت. بدین ترتیب σ_{oct} در هر دو حالت ثابت باقی خواهند ماند. همانطور که قبلاً ذکر گردید آزمون HC شرایط خالص تغییر حجم را ارائه می‌دهد حال آنکه TC و TE بیانگر شرایط تنش برشی خالص است. بدین ترتیب این دو تست برای یافتن مدول برشی مصالح بسیار مناسب خواهند بود. جزء تغییرات در تنش برشی اکتاهدرال در شرایط فشاری افزایشی و در شرایط کششی و از قرار زیر خواهد بود.

$$\Delta \tau_{oct} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta \sigma_1 \quad (13-5)$$

برش ساده^۴ آزمایش برش ساده نیز در صفحه اکتاهدرال انجام می‌گیرد. لذا تنش نرمال اکتاهدرال ثابت باقی خواهد ماند. بر خلاف TC و TE در آزمایش برش ساده یکی از تنشها مثل σ_2 ثابت نگاه داشته شده و برای دوتای دیگر یکی افزایش و دیگری کاهش خواهد یافت. مقدار این نمو برابر قبل ولی در خلاف جهت است یعنی $\Delta \sigma_1 = -\Delta \sigma_3$ در این آزمایش تغییر در تنش برشی اکتاهدرال افزایشی و به فرم زیر بیان می‌گردد.

$$\Delta \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Delta \sigma_1 \quad (14-5)$$

-
- 1 Reduced triaxial compression
 - 2 Triaxial compression
 - 3 Triaxial extension
 - 4 Simple shear



شکل ۵-۷: شرایط برش ساده بصورت ترکیب فشار هیدرواستاتیک و برش خالص

بارگذاری متناسب^۱ (PL): طی این آزمون نسبتی از تنشهای اصلی $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ثابت باقی می ماند. عموماً برای تعیین تاثیر تنش اصلی میانی σ_2 ، نسبت b با تعریف زیر در نظر گرفته شده و ثابت فرض می شود.

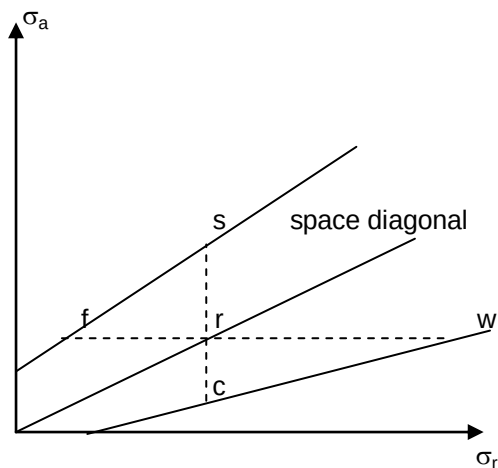
$$b = \frac{\sigma_{(intermediate)} - \sigma_{(minor)}}{\sigma_{(major)} - \sigma_{(minor)}} \quad (۱۵-۵)$$

b برای سه محوری مرسوم CTC صفر و برای CTE برابر واحد خواهد بود.

1 Proportional loading

تمرینات فصل پنجم

- ۱- کدامیک از مسیرهای تنش در شکل زیر، مبین آزمایش Reduced Triaxial Extension (RTE) است؟



- ۲- خاک ماسه‌ای با زاویه اصطکاک 30° درجه و تحکیم شده تحت فشار همه جانبه 200 کیلوپاسکال، تقریباً تحت چه تنش محوری در آزمایش سه محوری RTE گسیخته خواهد شد؟
- ۳- در شرایط ذکر شده در سوال ۲، تنش محوری اضافی برای گسیختگی نمونه در آزمایش سه محوری CTC چقدر است؟

فصل ششم

مبانی الاستیسیته

۶-۱- مقدمه

رفتار الاستیک به مفهوم برگشت پذیری تغییرشکلهای ایجاد شده در ماده در خلال پروسه بارگذاری و باربرداری است. در مفهوم دقیقتر، رفتار الاستیک حاکی از بازگشت کل انرژی اعمال شده حین بارگذاری در طی باربرداری و به عبارت دیگر عدم وجود میرایی انرژی می باشد. در این فصل به مفاهیم و مبانی رفتار الاستیک پرداخته می شود. از آنجا که الاستیسیته همواره با تغییرشکلهای کوچک در ماده همراه است، در تمامی موارد ذکر شده در این فصل، اساس بر تغییر مکانهای بسیار کوچک در پروسه بارگذاری می باشد.

۶-۲- تئوری انتشار امواج در محیط الاستیک

اگر تنش به صورت ناگهانی به یک جسم اعمال شود، در ابتدا قسمتی از جسم که به منبع اغتشاش نزدیک تر است، تحت تاثیر واقع می شود. بدین ترتیب مولکولهای ماده در مجاورت آن بخش، انرژی جنبشی کسب نموده که مولکول به مولکول به بخشهای مجاور منتقل می گردد. بدین ترتیب در اثر انتشار انرژی، تغییر شکل در جسم گسترش می یابد. این موضوع انتشار امواج تنش نام دارد. طبیعت انتشار امواج در یک محیط الاستیک موضوع این بخش می باشد. عموماً مسئله انتشار امواج به چند حالت عمده به شرح زیر تقسیم می شود:

الف) امواج تنش الاستیک در یک میله

ب) امواج تنش در یک محیط الاستیک بی نهایت

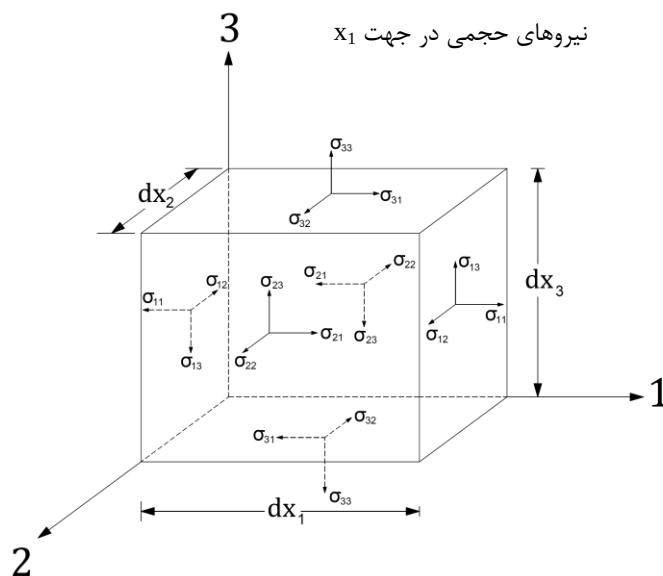
ج) امواج تنش در یک محیط الاستیک نیمه بی نهایت در این کتاب دو حالت "الف" و "ب" مورد بررسی قرار می گیرد. اما قبل از آن لازم است که تعاریف اساسی تنش، کرنش و پارامترهای مربوط که در یک محیط الاستیک دخیل هستند مورد بحث قرار گیرد.

۶-۲-۱- روابط تنش-نیرو

شکل (۶-۱) المانی از ماده که تحت تاثیر نیروهای عمودی و برشی قرار گرفته را نشان می دهد. با نوشتن معادلات تعادل در جهات مختلف، امکان تعیین فرم کلی معادله تعادل سه بعدی جسم، تحت تاثیر مجموعه تنشها وجود دارد:

معادله تعادل در جهت X_1 یا X :

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - (\sigma_{11}) dx_2 dx_3 + \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \cdot dx_3 - (\tau_{21}) dx_1 \cdot dx_3 \\ & + \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - (\tau_{31}) dx_1 \cdot dx_2 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (۶-۱)$$



شکل (۶-۱): وضعیت تنشها بر صفحات مختلف یک المان حین بارگذاری

پس از ساده سازی رابطه فوق برای جهت x_1 داریم:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \quad (2-6)$$

در این رابطه X_1 بیانگر نیروهای حجمی^۱ در جهت x_1 می باشد. به همین ترتیب در جهت x_2 یا y :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \quad (3-6)$$

و در جهت x_3 یا z :

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0 \quad (4-6)$$

فرم اندیسی معادلات بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_j = 0 \quad (5-6 \text{ الف})$$

و یا:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad (5-6 \text{ ب})$$

لازم به ذکر است که اگر بر المان مذکور نیروی خارجی نیز وارد شود، برای هر جهت می توان آن را سمت راست معادله گذاشت یا در نیروهای حجمی جهت مربوطه ادغام کنیم. بدین ترتیب می توان نوشت:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (6-6)$$

فرم دیگر معادله تعادل به صورت زیر قابل نگارش می باشد:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (7-6)$$

معادله تعادل دینامیکی نیز به صورت زیر قابل بیان می باشد:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i \quad (8-6)$$

این معادلات ارتباط تنشها و نیروها را نشان می دهند. عبارت دیگر بوسیله این معادلات که روابط دسته اول نامیده می شوند، امکان تعیین تنشها از روی نیروهای اعمال شده بر جسم مهیا خواهد بود.

۲-۲-۶ روابط کرنش-تغییر شکل

کرنشهای محوری یا نرمال به صورت روابط زیر قابل محاسبه می باشند:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9-6 \text{ الف})$$

1 Body force

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (۶-۹-ب)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (۶-۹-ج)$$

در این روابط ε_x ، ε_y و ε_z کرنش نرمال به ترتیب در جهات x ، y و z می‌باشد و u ، v و w نیز به ترتیب تغییرشکل در جهات x ، y و z است. در خصوص مولفه های کرنش برشی نیز می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (۶-۱۰-الف)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (۶-۱۰-ب)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۶-۱۰-ج)$$

بدین ترتیب فرم اندیسی ارتباط کرنش-تغییرشکل به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \longrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

برای منظور نمودن شرایط تغییر شکل های بزرگ، عبارت ذکر شده بصورت زیر تصحیح می‌گردد:

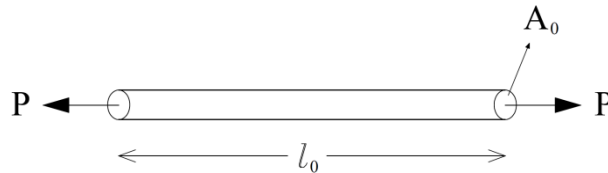
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right) \quad (۶-۱۱)$$

در روابط ذکر شده که در این فصل به عنوان روابط دسته دوم شناخته می‌شوند در صورتیکه مشتقات نسبت به وضعیت تغییر شکل یافته جسم باشد، در مکانیک جامدات تانسور کرنش آلمانسی و در هیدرودینامیک تانسور کرنش اویلری نامیده می‌شود اما اگر مشتقات نسبت به وضعیت جسم قبل از تغییر شکل باشد در مکانیک جامدات تانسور کرنش گرین و در هیدرودینامیک تانسور کرنش لاگرانژی نامیده می‌شود.

۶-۲-۳- روابط تنش-کرنش

دسته روابط سوم، ارتباط تنشهای وارده بر جسم با کرنشهای ایجاد شده را بیان می‌نمایند. وجود این روابط در تعیین مجهولات مسائل مکانیک جامدات الزامی می‌باشد. در میله شکل (۶-۲) با طول l_0

و سطح مقطع A_0 که تحت بارگذاری محوری P قرار گرفته است، دسته اول و دوم روابط به شرح زیر برای تعیین مجهول مسئله یعنی تغییر شکل میله Δl کافی نمی‌باشند.



شکل ۶-۲) نمایی از میله تحت بارگذاری تک محوری

ارتباط تنش و نیرو به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \quad (۱۲-۶)$$

ارتباط کرنش و تغییر شکل نیز به فرم ذیل خواهد بود:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (۱۳-۶)$$

برای یافتن Δl باید ε را از دسته روابط دیگری به دست آوریم که ارتباط بین تنش و کرنش را تعیین می‌کنند و به روابط رفتاری معروفند. این دسته از روابط دسته سوم معادلات خواهند بود که به شکل کلی زیر می‌باشند:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (۱۴-۶)$$

C_{ijkl} در شرایط کلی شامل حداکثر ۸۱ پارامتر مستقل می‌باشد. اما با فرضیاتی خاص، تعداد پارامترهای مستقل مورد نیاز برای تبیین آن کاهش خواهد یافت. برخی از این فرضیات و تعداد پارامترهای رفتاری نظیر به شرح زیر می‌باشند:

$$1- C_{ijkl} = C_{klij} \quad \rightarrow \quad 45 \text{ parameters}$$

$$2- \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{ijkl} = C_{jikl} \\ C_{ijkl} = C_{ijlk} \end{array} \right. \rightarrow \quad 36 \text{ parameters}$$

$$3- \text{One plane of symmetry} \rightarrow 13 \text{ parameters}$$

$$4- \text{Two or three Planes of symmetry} \rightarrow 9 \text{ parameters}$$

$$5- \text{Similar symmetry about two planes} \rightarrow 6 \text{ parameters}$$

$$6- \text{Similar symmetry about three planes} \rightarrow 3 \text{ parameters}$$

$$7- \text{Similar symmetry about all planes} \rightarrow 2 \text{ parameters}$$

در شرایط آخر که در واقع ماده همگن و ایزوتروپ مد نظر می‌باشد، تنها دو پارامتر مستقل برای تبیین ماتریس رفتاری کفایت می‌نماید. در ماده همگن و الاستیک، کرنش‌های نرمال و تنش نرمال به وسیله قانون هوک^۱ با یکدیگر مرتبط می‌گردند که با توجه به شکل (۶-۱) توسط روابط زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (۶-۱۵)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (۶-۱۶)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (۶-۱۷)$$

و E مدول الاستیسیته و ν نسبت پواسون می‌باشد. تنش برشی و کرنش برشی نیز توسط روابط زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (۶-۱۸)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (۶-۱۹)$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (۶-۲۰)$$

γ_{xy} ، γ_{yz} و γ_{zx} کرنش‌های برشی می‌باشند. مدول برشی G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۶-۲۱)$$

روابط (۶-۱۵) تا (۶-۱۷) با هم ترکیب شده و به صورت تغییرات تنش محوری بر حسب کرنش محوری نوشته می‌شوند:

$$\sigma_x = \lambda \bar{\varepsilon} + 2G \varepsilon_x \quad (۶-۲۲)$$

$$\sigma_y = \lambda \bar{\varepsilon} + 2G \varepsilon_y \quad (۶-۲۳)$$

$$\sigma_z = \lambda \bar{\varepsilon} + 2G \varepsilon_z \quad (۶-۲۴)$$

که در آن:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (۶-۲۵)$$

λ ضریب لامه^۲ بوده و به راحتی با داشتن E و ν برای هر مصالحی به دست می‌آید. همچنین $\bar{\varepsilon}$ کرنش حجمی است که برابر مجموع سه مولفه کرنش نرمال $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ می‌باشد.

ارتباط تانسورهای تنش و کرنش با استفاده از دو پارامتر الاستیک E, ν برای حالت همگن و ایزوتروپ به صورت زیر می‌باشد:

1 Hooke's Law

2 Lamé's constant

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (۲۶-۶)$$

۴-۲-۶- امواج طولی

شکل (۳-۶) یک میله با سطح مقطع عرضی A می‌باشد. مدول الاستیسیته و وزن مخصوص مصالح میله به ترتیب E و γ در نظر گرفته می‌شوند. فرض می‌شود که تنش در مقطع $a-a$ به میزان σ افزایش یابد. میزان افزایش تنش در مقطع $b-b$ ، $(\partial\sigma/\partial x)\Delta x$ خواهد بود. بر اساس قانون دوم نیوتن خواهیم داشت:

$$\Sigma F = ma \quad (۲۷-۶)$$

در نتیجه برآیند نیروها در جهت x به صورت زیر خواهد بود:

$$-\sigma A + \left(\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot \Delta x \right) A = \frac{(A\Delta x \gamma)}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (۲۸-۶)$$

که در آن $\gamma A \Delta x$ وزن میله و g شتاب ثقل می‌باشد. u تغییر مکان در جهت x و t زمان می‌باشد. رابطه (۲۸-۶) بر فرضیاتی استوار است که از این قرار می‌باشند: الف) تنش در تمام سطح مقطع عرضی میله یکنواخت می‌باشد و ب) سطح مقطع در زمان انتشار موج ثابت باقی می‌ماند. پس از ساده سازی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \quad (۲۹-۶)$$

$\rho = \frac{\gamma}{g}$ دانسیته مصالح میله می‌باشد. براساس قانون هوک داریم:

$$\sigma = E \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \rightarrow \quad (۳۰-۶)$$

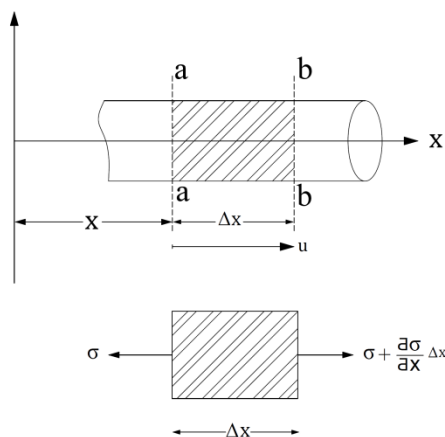
با جایگذاری در رابطه (۲۸-۶) داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{E}{\rho} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (۳۱-۶)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (v_c^2) \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (۳۲-۶)$$

رابطه (۳۲-۶) معادله موج یک بعدی می باشد. عبارت v_c سرعت انتشار امواج تنش طولی می باشد که به خصوصیات مصالح وابسته است و از رابطه زیر به دست می آید:

$$V_c = \sqrt{E/\rho} \quad (۳۳-۶)$$



شکل (۳-۶): انتشار امواج طولی در یک میله یک بعدی (داس^۱ ۱۹۹۰)

۵-۲-۶- موج پیچشی^۲

شکل (۴-۶) میله ای را نشان می دهد که گشتاور T در فاصله ای برابر با x از انتهای میله بر آن اعمال می شود و در این نقطه به میزان زاویه θ دوران می کند. گشتاور در فاصله ای برابر با $x + \Delta x$ برابر با $T + (\partial T / \partial x) \Delta x$ خواهد بود و دوران آن به میزان $\theta + (\partial \theta / \partial x) \Delta x$ خواهد بود. با اعمال قانون دوم نیوتن می توان نوشت:

$$-T + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \Delta x \right) = \rho J \Delta x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (۳۴-۶)$$

$$T = GJ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (۳۵-۶)$$

که در آن J ممان اینرسی قطبی مقطع میله خواهد بود. با جایگذاری (۳۵-۳) در (۳۴-۳) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (۳۶-۶)$$

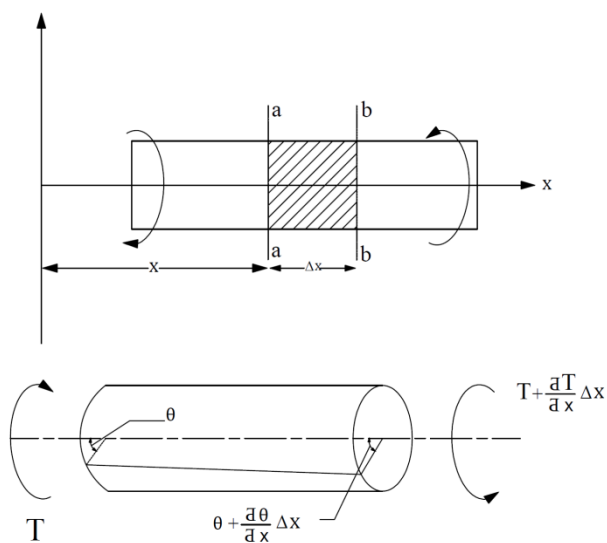
1 Das

2 Torsional wave

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v_s^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (۳۷-۶)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (۳۸-۶)$$

v_s سرعت امواج پیچشی می باشد.



شکل ۴-۶: امواج پیچشی در یک میله (داس ۱۹۹۰)

۶-۲-۶- سرعت ذرات در ناحیه تحت تنش

دانستن تفاوت بین سرعت انتشار امواج طولی (v_c) و سرعت ذرات در ناحیه تحت تنش موضوع مهمی محسوب می شود. برای ایجاد تمایز بین این دو، پالس تنش فشاری با شدت σ_x و مدت زمان اعمال t' را در نظر بگیرید (شکل ۵-۶ الف) که در انتهای یک میله وارد می شود (شکل ۵-۶ ب). زمانی که این پالس تنش وارد می شود قسمت کوچکی از میله تحت فشار قرار می گیرد. با گذشت زمان این فشار به نواحی بعدی انتقال می یابد. در بازه زمانی Δt تنش در مسافت زیر حرکت می کند:

$$\Delta x = V_c \cdot \Delta t \quad (۳۹-۶)$$

در هر زمانی که $t > t'$ باشد، قسمتی از طول میله به اندازه $\bar{x}$ تشکیل ناحیه فشرده شده را می دهد. بنابراین $\Delta t = t'$ و می توان نوشت:

$$\bar{x} = V_c \cdot t' \quad (۴۰-۶)$$

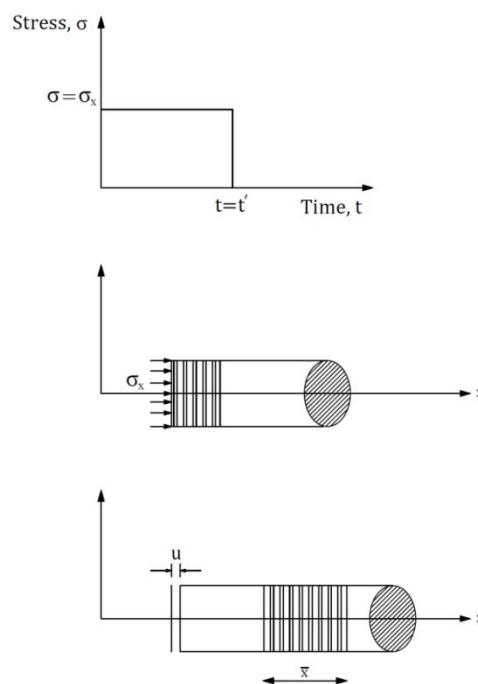
میزان تغییر شکل میله به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u = \left(\frac{\sigma_x}{E} \right) \cdot (\bar{x}) \Rightarrow u = \left(\frac{\sigma_x}{E} \right) (v_c \cdot t') \quad (۴۱-۶)$$

توجه داشته باشید که u تغییر مکان انتهای میله است، بنابراین سرعت انتهای میله و سرعت ذرات به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\dot{u} = \frac{u}{t'} = \frac{\sigma_x \cdot v_c}{E} \quad (۴۲-۶)$$

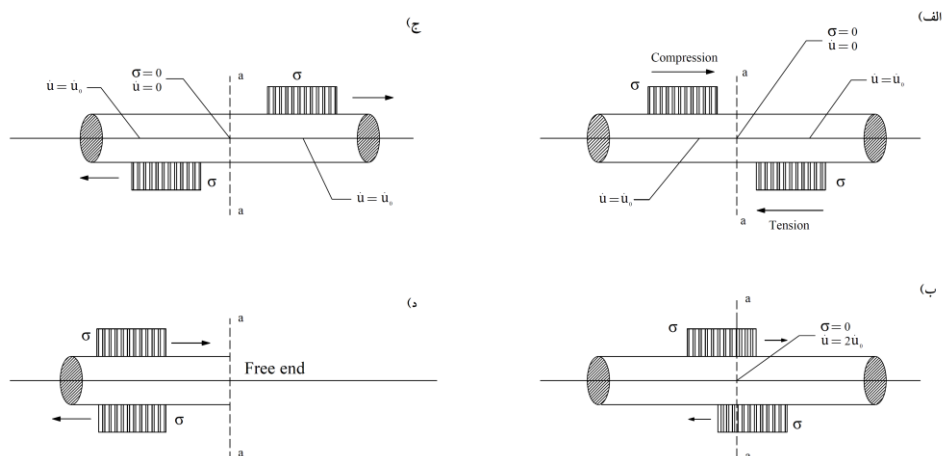
در این خصوص ذکر دو نکته الزامی است: اول آنکه برخلاف سرعت موج v_c که به خصوصیات فیزیکی متکی بود، سرعت ذره به خصوصیات مکانیکی ماده نیز مرتبط خواهد بود (σ_x شدت ضربه یا تنش اعمال شده و از خصوصیات مکانیکی ماده است). نکته دوم آنکه اگر تنش وارده فشاری باشد، سرعت ذرات و سرعت انتشار موج با یکدیگر هم جهت است. اگر تنش وارده کششی باشد، سرعت ذرات و سرعت انتشار موج در خلاف جهت یکدیگر خواهند بود.



شکل ۵-۶: سرعت انتشار موج و سرعت حرکت ذرات (داس^۱ ۱۹۹۰)

۶-۲-۷- انعکاس امواج الاستیک در انتهای میله

شکل (۶-۶) میله‌ای را نشان می‌دهد که تحت موج فشاری در امتداد جهت مثبت x قرار گرفته و موج کششی به همان شدت نیز در امتداد جهت منفی x در آن حرکت می‌کند. هنگامی که این دو موج در مقطع $a-a$ به یکدیگر می‌رسند، یکدیگر را خنثی کرده و تنش برآیند صفر می‌شود، با این حال سرعت ذرات u دو برابر می‌شود (شکل ۶-۶ ب). این بدین دلیل است که سرعت ذرات در موج فشاری در جهت حرکت و برای موج کششی در خلاف جهت حرکت می‌باشد. زمانی که دو موج از یکدیگر عبور می‌کنند تنش و سرعت ذرات در مقطع $a-a$ صفر خواهد شد (شکل ۶-۶ ج). بدین ترتیب شرایط موجود در مقطع $a-a$ معادل با حالتی است که در یک مقطع یک سر آزاد وجود دارد. شکل (۶-۶ د) قسمت چپ مقطع $a-a$ را نشان می‌دهد که مقطع به عنوان یک انتهای آزاد می‌تواند در نظر گرفته شود. مشاهده می‌شود که در انتهای آزاد میله، موج فشاری به صورت موج کششی با مقدار و شکل یکسان انعکاس می‌یابد، به همین ترتیب موج کششی نیز به صورت موج فشاری در انتهای آزاد میله انعکاس می‌یابد.

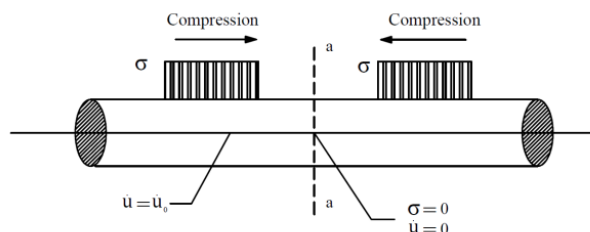


شکل ۶-۶: انعکاس امواج تنش در سر آزاد میله (داس ۱۹۹۰)

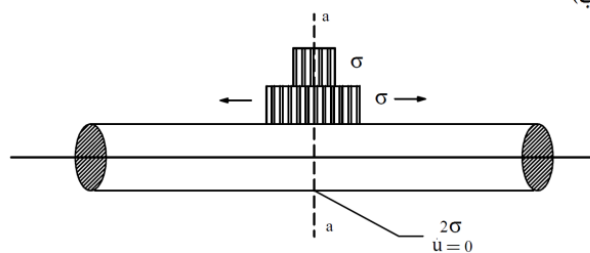
شکل (۶-۷ الف) میله‌ای را نشان می‌دهد که در آن دو موج فشاری با شدت یکسان و در دو جهت مخالف به سمت هم حرکت می‌کنند. زمانی که دو موج از یکدیگر در مقطع $a-a$ عبور می‌کنند، مقدار تنش دوبرابر می‌شود. با این حال سرعت ذرات u صفر خواهد شد (شکل ۶-۷ ب). هنگامی که دو موج از یکدیگر عبور می‌کنند، تنش و سرعت ذرات در آن مقطع صفر می‌شود (شکل ۶-۷ ج). در این وضعیت، مقطع $a-a$ مانند یک تکیه گاه گیردار عمل می‌نماید. بر این اساس مشخص می‌شود (شکل

۶-۷-د) که موج فشاری برخورد کرده با تکیه گاه گیردار به صورت موج فشاری با همان مقدار و در جهت عکس انعکاس می‌یابد اما تنش در انتهای گیردار دو برابر می‌شود. به طور مشابه، موج کششی برخورد کرده به انتهای گیردار، به صورت موج کششی با همان شدت در جهت مخالف انعکاس می‌یابد.

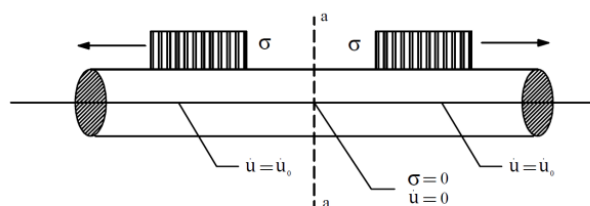
(الف)



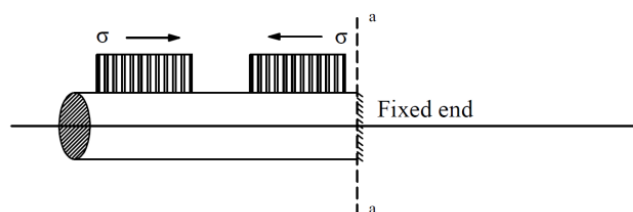
(ب)



(ج)



(د)



شکل ۶-۷: انعکاس امواج تنش در انتهای گیردار میله (داس ۱۹۹۰)

۶-۲-۸- ارتعاش طولی میله های کوتاه^۱

پاسخ معادله موج (رابطه ۶-۳۱) برای ارتعاش میله های کوتاه به شکل زیر نوشته می شود:

$$u(x, t) = U(x) (A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t) \quad (۶-۴۳)$$

A_1 و A_2 ثوابت هستند و ω_n فرکانس طبیعی ارتعاش و $U(x)$ دامنه تغییر مکان در امتداد محور میله است که از زمان مستقل می باشد. برای ارتعاش طولی میله های یکنواخت، اگر رابطه (۶-۴۳) در رابطه (۶-۳۱) جایگزین شود خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (۶-۴۴)$$

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \frac{\rho}{E} \omega_n^2 \cdot U(x) = 0 \quad (۶-۴۵)$$

فرم جواب معادله بالا به صورت زیر در می آید:

$$U(x) = B_1 \sin\left(\frac{\omega_n x}{v_c}\right) + B_2 \cos\left(\frac{\omega_n x}{v_c}\right) \quad (۶-۴۶)$$

B_1 و B_2 نیز ثوابت هستند که با اعمال شرایط مرزی میله به دست می آیند.

۶-۲-۸-۱- میله دو سر آزاد

در شرایط میله دو سر آزاد، تنش و کرنش در انتهای میله صفر است، بنابراین در $x=0$ ، $\frac{dU(x)}{dx} = 0$ و در $x=L$ یعنی انتهای دیگر میله نیز $\frac{dU(x)}{dx} = 0$ خواهد بود (L طول میله می باشد). با مشتق گیری از رابطه (۶-۴۵) خواهیم داشت:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{B_1 \omega_n}{v_c} \cos\left(\frac{\omega_n x}{v_c}\right) - \frac{B_2 \omega_n}{v_c} \sin\left(\frac{\omega_n x}{v_c}\right) = 0 \quad (۶-۴۷)$$

با اعمال شرط اول مرزی در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$x=0 \Rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = \frac{B_1 \omega_n}{v_c} = 0 \rightarrow B_1 = 0 \quad (۶-۴۸)$$

$$x=L \Rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = \frac{-B_2 \omega_n}{v_c} \sin\left(\frac{\omega_n L}{v_c}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\omega_n L}{v_c} = n\pi \quad (۶-۴۹)$$

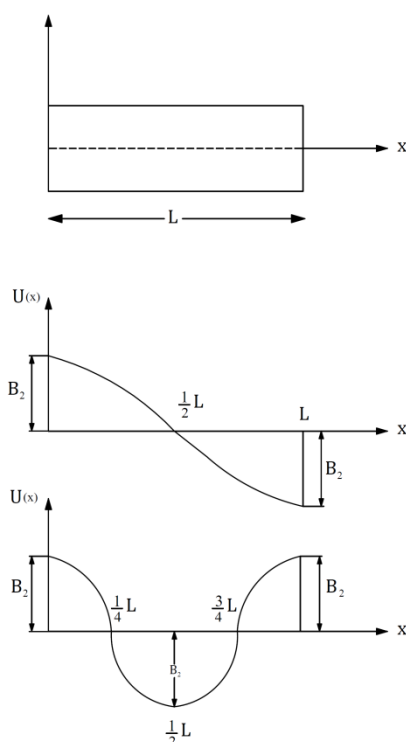
$$\omega_n = \frac{n\pi v_c}{L} \quad (۶-۵۰)$$

1 Short bars

رابطه (۵۰-۶) فرکانس ارتعاش آزاد یک میله دوسر آزاد را نشان می‌دهد. در نتیجه رابطه دامنه تغییر مکان برای این حالت با جایگذاری روابط (۵۰-۶) و (۴۸-۶) در رابطه (۴۶-۶) به دست می‌آید:

$$U(x) = B_2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (۵۱-۶)$$

تغییرات $U(x)$ برای مود اول و دوم ($n=1$ و $n=2$) در شکل ۸-۶ نشان داده شده است. رابطه $u(x,t)$ برای همه موده‌های ارتعاش با ترکیب روابط (۵۱-۶) و (۴۳-۶) به دست می‌آید.



شکل ۸-۶: ارتعاش طولی میله کوتاه دو سر آزاد (داس ۱۹۹۰)

۲-۸-۲-۶- میله دو سر گیردار

برای شرایط مرزی دو سر گیردار، در $x=0$ ، $U(x)=0$ و در $x=L$ نیز $U(x)=0$ است. با جایگذاری شرط مرزی اول و دوم داریم:

$$x=0 \Rightarrow U(x)=0 \rightarrow B_2=0 \quad (۵۲-۶)$$

$$x = L \Rightarrow U(x) = 0 \rightarrow B_1 \sin\left(\frac{\omega_n L}{v_c}\right) = 0$$

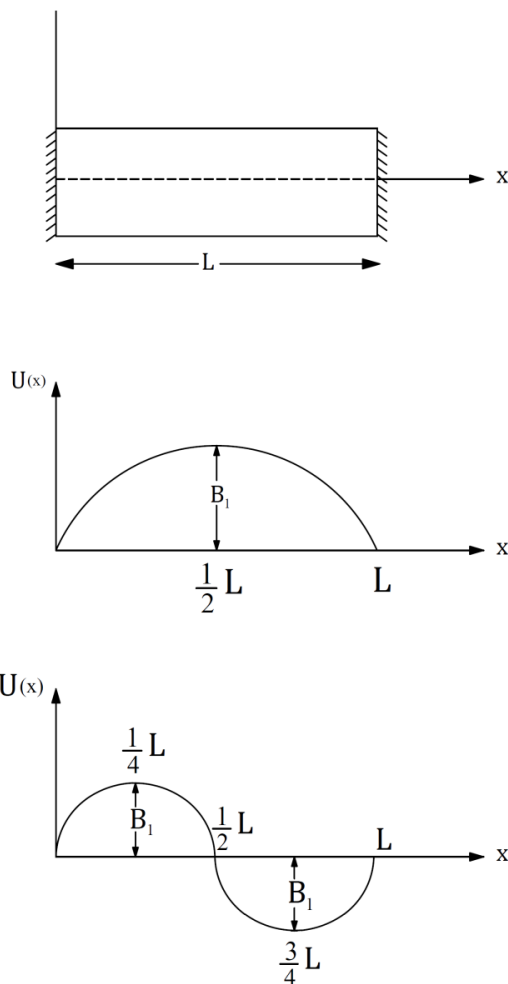
$$\frac{\omega_n L}{v_c} = n\pi \quad (۵۳-۶)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi v_c}{L} \quad (۵۴-۶)$$

با جایگذاری معادلات (۵۴-۶) و (۵۳-۶) در معادله (۴۶-۶) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U(x) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (۵۵-۶)$$

شکل (۹-۶) تغییرات $U(x)$ برای دو مود اول ارتعاش (یعنی $n=1$ و $n=2$) را نشان می‌دهد.



شکل ۹-۶: ارتعاش طولی میله کوتاه دو سر گیردار (داس ۱۹۹۰)

۶-۲-۸-۳-شرایط مرزی یک سر گیردار-یک سر آزاد

شرایط مرزی برای حالت یک سر گیردار-یک سر آزاد به صورت زیر می باشد:

$$x = 0 \Rightarrow U(x) = 0 \quad \text{انتهای گیردار}$$

$$x = L \Rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad \text{انتهای آزاد} \quad (۵۶-۶)$$

از شرط مرزی اول داریم:

$$x = 0 \Rightarrow U(x) = 0 \rightarrow B_2 = 0 \quad (۵۷-۶)$$

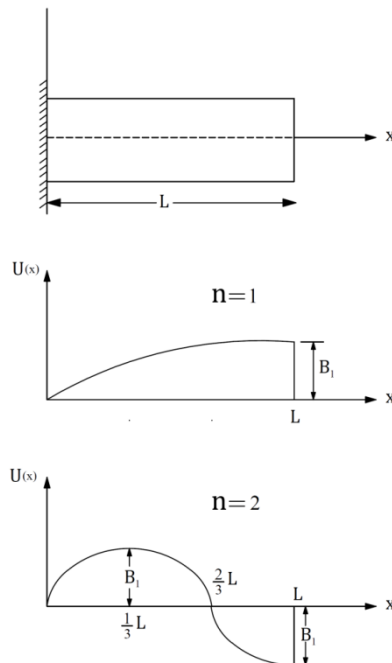
از شرط مرزی دوم داریم:

$$x = L \Rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = 0 \rightarrow \frac{B_1 \omega_n}{\nu_c} \cos\left(\frac{\omega_n L}{\nu_c}\right) = 0 \quad (۵۸-۶)$$

$$\frac{\omega_n L}{\nu_c} = \frac{1}{2}(2n-1)\pi$$

$$\omega_n = \frac{1}{2}(2n-1)\pi\left(\frac{\nu_c}{L}\right) \quad (۵۹-۶)$$

این رابطه فرکانس طبیعی ارتعاش برای میله یک سر گیردار-یک سر آزاد را نشان می دهد. شکل (۶-۱۰) تغییرات $U(x)$ برای دو مود اول ارتعاش را نشان می دهد.



شکل ۶-۱۰: ارتعاش طولی میله کوتاه یک سر گیردار-یک سر آزاد (داس ۱۹۹۰)

۹-۲-۶- معادله موج در فضای سه بعدی

شکل (۱۱-۶) تنش های اعمال شده بر المان در محیط الاستیک با ابعاد dx , dy و dz را نشان می دهد. برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل حرکت باید برآیند نیروها در جهت x , y و z نوشته شود. در جهت x داریم:

$$\left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right] (dy)(dz) + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] (dx)(dy) + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] (dx)(dz) = \rho(dx)(dy)(dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (۶۰-۶)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

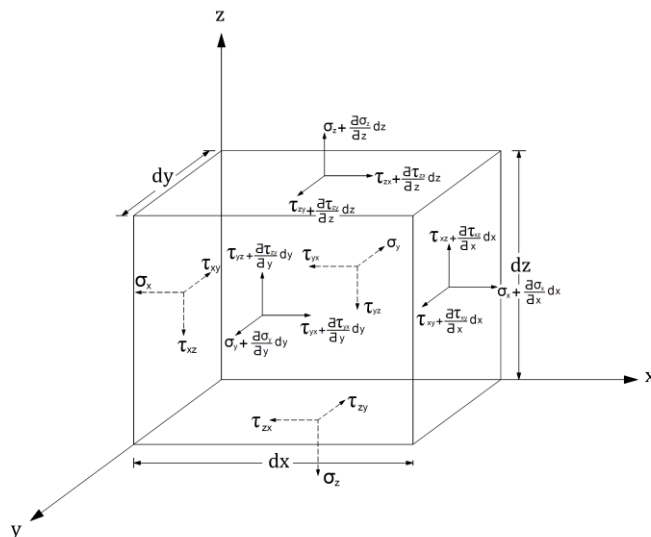
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (۶۱-۶)$$

u پارامتر تغییر مکان در جهت x می باشد. در جهت y و z به ترتیب روابط زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (۶۲-۶)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (۶۳-۶)$$

w و v پارامترهای تغییر مکان در جهت z و y می باشند.



شکل (۱۱-۶): به دست آوردن معادلات حرکت در یک محیط الاستیک

روابط (۶۱-۶) الی (۶۳-۶) معادلات حرکت بر حسب تنش می‌باشند. با داشتن رابطه (۶۱-۶) و با توجه به اینکه $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ و $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (۶۴-۶)$$

با جایگذاری معادلات (۶۱-۶)، (۶۰-۶) و (۶۲-۶) در رابطه فوق، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \bar{\varepsilon} + 2G \varepsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G \gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (G \gamma_{xz})$$

با جایگذاری روابط (۶۰-۶ الف) و (۶۰-۶ ج) در معادله اخیر می‌توان نوشت:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \bar{\varepsilon} + 2G \varepsilon_x) + G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۶۵-۶)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (۶۶-۶)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} \quad (۶۷-۶)$$

که در آن $\bar{\varepsilon}$ کرنش حجمی می‌باشد.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} + G \nabla^2 u \quad (۶۸-۶)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۶۹-۶)$$

به طور مشابه برای جهت y و z نیز خواهیم داشت:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} + G \nabla^2 v \quad (۷۰-۶)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial z} + G \nabla^2 w \quad (۷۱-۶)$$

با مشتق‌گیری از روابط (۶۸-۶)، (۷۰-۶) و (۷۱-۶) نسبت به x ، y و z و جمع آنها می‌توان نوشت:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial z^2} \right) + G \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial t^2} = (\lambda + G) (\nabla^2 \bar{\varepsilon}) + G (\nabla^2 \bar{\varepsilon}) = (\lambda + 2G) (\nabla^2 \bar{\varepsilon}) \quad (۷۲-۶)$$

بنابراین:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial t^2} = \frac{(\lambda + 2G)}{\rho} \nabla^2 \bar{\varepsilon} = V_p^2 \nabla^2 \bar{\varepsilon} \quad (۷۳-۶)$$

$$V_p = \sqrt{\frac{(\lambda + 2G)}{\rho}} \quad (۷۴-۶)$$

V_p سرعت امواج اتساعی^۱ می‌باشد. همچنین به آن موج اولیه^۲ (P) یا موج فشاری^۳ نیز گفته می‌شود. این موج در مقایسه با موج طولی سرعت بیشتری دارد.

با مشتق گیری از رابطه (۷۰-۶) نسبت به z و رابطه (۷۱-۶) نسبت به y نیز می‌توان گفت:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = (\lambda + G) \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial y \partial z} + G \nabla^2 \frac{\partial v}{\partial z} \quad (۷۵-۶)$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = (\lambda + G) \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial y \partial z} + G \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial y} \quad (۷۶-۶)$$

با کم کردن رابطه (۷۵-۶) از (۷۶-۶) خواهیم داشت:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (۷۷-۶)$$

از آنجاییکه:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\bar{\omega}_x \quad (۷۸-۶)$$

بنابراین:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial t^2} = G \nabla^2 \bar{\omega}_x \quad (۷۹-۶)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \bar{\omega}_x = \nu_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_x \quad (۸۰-۶)$$

که در آن $V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ می‌باشد.

معادله بالا رابطه امواج برشی را نشان می‌دهد که سرعت انتشار آن V_s می‌باشد. این موج، موج برشی^۴ یا موج ثانویه^۵ (S) نام دارد. در مقایسه سرعت موج برشی با آنچه در مورد میله یک بعدی گفته شد، نتیجه می‌شود که این دو سرعت موج مشابه یکدیگر می‌باشند.

-
- 1 Dilatational wave
 - 2 Primary wave
 - 3 Compression wave
 - 4 Shear wave
 - 5 Secondary wave

۳-۶- مدل های الاستیک مرتبه اول و دوم

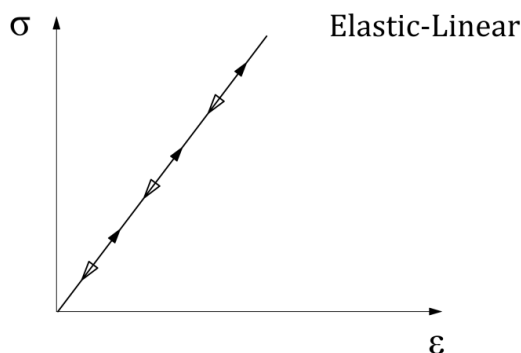
این مدل ها شامل مدل کوشی^۱ و مدل گرین^۲ می باشند. در مدل های کوشی، تنش بصورت یک تابع f از کرنش تعریف می گردد. این تابع می تواند از مرتبه های اول، دوم یا بزرگتر باشد که مرتبه آن مرتبه مدل رفتاری الاستیک را بیان می نماید.

در مدل های گرین تابع انرژی W تعریف می گردد که از مشتق گیری از آن نسبت به کرنش، تنشها و یا با مشتق گیری از آن نسبت به تنش، کرنشها قابل تعیین می باشند.

۳-۶-۱- رفتار الاستیک

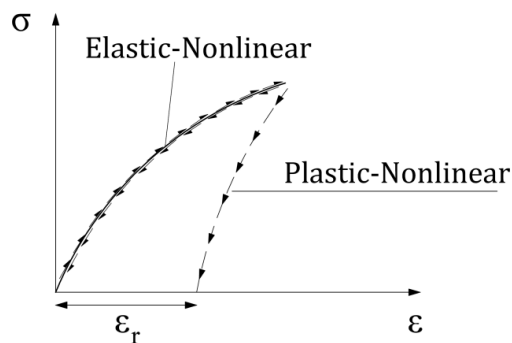
شکل (۶-۱۲) مصالح با رفتار الاستیک خطی را نشان می دهند. رفتار الاستیک در ابتدای فصل به عنوان شرایط عدم اتلاف انرژی حین پروسه بارگذاری و باربرداری تعریف گردید. بدین ترتیب مطابق شکل (۶-۱۳)، رفتار الاستیک می تواند به فرم غیر خطی نیز نمود داشته باشد اما در صورتیکه حین پروسه باربرداری تغییر شکل پسماند^۳ در جسم اتفاق بیافتد رفتار ماده بصورت پلاستیک خواهد بود. این مورد نیز در شکل (۶-۱۳) نشان داده شده است.

ممکن است این سوال پیش بیاید که در صورت صفر شدن کرنش های پسماند حین رفتار غیرخطی مطابق شکل (۶-۱۴) رفتار مصالح از چه نوع خواهد بود. این مورد در شکل (۶-۱۴) نشان داده شده است. باید ذکر کرد که اگرچه تغییر شکل پسماندی در ماده بوجود نیامده است اما بدلیل اتلاف انرژی در پروسه بارگذاری و باربرداری، قطعاً رفتار ماده در این شرایط نیز رفتار الاستیک نخواهد بود.

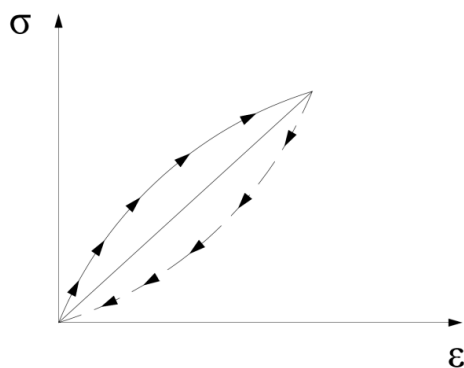


شکل ۶-۱۲: رفتار الاستیک خطی مصالح

1 Cauchy
2 Green
3 Residual



شکل ۶-۱۳: رفتار الاستیک و پلاستیک غیر خطی مصالح



شکل ۶-۱۴: رفتار غیر الاستیک علی رغم عدم ایجاد کرنش پسماند

بعنوان تعریف دیگری از شرایط رفتاری الاستیک می‌توان گفت اگر تنش‌ها فقط به وضعیت کرنش‌های آن لحظه مرتبط باشد این رفتار، رفتار الاستیک خواهد بود. حال آنکه در رفتار پلاستیک، تنش‌ها علاوه بر کرنش‌های موجود به تاریخچه کرنش^۱ و تغییرشکل نیز مرتبط می‌باشند. ساده‌ترین فرم رفتار الاستیک بصورت خطی بوده و توسط رابطه هوک^۲ به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (۸۱-۶)$$

در این رابطه تانسور تنش و کرنش از قرار زیر خواهند بود:

$$[\sigma] = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13})^T \quad (۸۲-۶)$$

$$[\varepsilon] = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13})^T$$

1 Strain history

2 Hooke

بسط این رابطه به روابط خطی زیر منجر می‌گردد:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11} \varepsilon_{11} + C_{12} \varepsilon_{22} + C_{13} \varepsilon_{33} + C_{14} \varepsilon_{12} + C_{15} \varepsilon_{23} + C_{16} \varepsilon_{13} \\ \sigma_{22} &= C_{21} \varepsilon_{11} + C_{22} \varepsilon_{22} + C_{23} \varepsilon_{33} + C_{24} \varepsilon_{12} + C_{25} \varepsilon_{23} + C_{26} \varepsilon_{13} \\ &\vdots \\ \sigma_{13} &= C_{61} \varepsilon_{11} + C_{62} \varepsilon_{22} + C_{63} \varepsilon_{33} + C_{64} \varepsilon_{12} + C_{65} \varepsilon_{23} + C_{66} \varepsilon_{13}\end{aligned}\quad (۸۳-۶)$$

در روابط بالا ضرایب C درایه های ماتریس رفتاری می‌باشد. فرم ماتریس و اندیسی این رابطه بصورت زیر قابل تعریف می‌باشد. در این روابط $[C]$ و C_{ijkl} ماتریس رفتار ماده خواهند بود:

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \quad (۸۴-۶)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (۸۵-۶)$$

۶-۳-۲- مدل الاستیک کوشی^۱

فرم کلی مدل الاستیک کوشی از قرار زیر می‌باشد:

$$\sigma_{ij} = \alpha_0 \delta_{ij} + \alpha_1 \varepsilon_{ij} + \alpha_2 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} + \alpha_3 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nj} + \dots \quad (۸۶-۶)$$

در این رابطه ضرایب α پارامترهای مدل رفتاری می‌باشند. بر اساس قضیه کیلی-همیلتون^۲ می‌توان رابطه فوق را به صورت ساده تری نوشت. بر اساس این قضیه در صورتیکه تابع f از متغیر a تا توان n را شامل باشد (۸۷-۶ الف)، با استفاده از توابعی چندجمله‌ای از سه نامتغیر اول، دوم و سوم تانسور a یعنی β_0, β_1 و β_2 می‌توان آن را تا درجه دوم به فرم معادله (۸۷-۶ ب) کاهش داد:

$$f([a]) = \alpha \cdot [I] + \alpha_1 [a] + \alpha_2 [a]^2 + \alpha_3 [a]^3 + \dots \quad (۸۷-۶ الف)$$

$$f([a]) = \beta_0 \cdot [I] + \beta_1 [a] + \beta_2 [a]^2 \quad (۸۷-۶ ب)$$

بدین ترتیب با استفاده از این قضیه در خصوص فرم مدل الاستیک کوشی می‌توان نوشت:

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} \quad (۸۸-۶)$$

در این رابطه $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ توابع چندجمله‌ای از نامتغیرهای تانسور کرنش می‌توانند باشند. به ترتیب عکس نیز می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{ij} = \psi_0 \delta_{ij} + \psi_1 \sigma_{ij} + \psi_2 \sigma_{im} \sigma_{mj} \quad (۸۹-۶)$$

در این رابطه نیز ψ_0, ψ_1, ψ_2 توابع چندجمله‌ای از نامتغیرهای تانسور تنش می‌باشند.

1 Cauchy elastic models

2 Cayley-Hamilton

۶-۳-۳- مدلهای کوشی مرتبه اول

در این حالت φ_2 صفر است، φ_0 تابع مرتبه اول از کرنش و φ_1 تابع مرتبه صفر از کرنش یا عبارتی مقدار ثابت می‌باشد. بنابراین در این مدل داریم:

$$\sigma_{ij} = (\alpha_0 + \alpha_1 I_1) \delta_{ij} + \alpha_2 \varepsilon_{ij} = \alpha_0 \delta_{ij} + \alpha_1 I_1 \delta_{ij} + \alpha_2 \varepsilon_{ij} \quad (۹۰-۶)$$

در رابطه بالا عبارت $\alpha_0 \delta_{ij}$ تنش‌های ناشی از کرنش اولیه می‌باشد. تنش‌های ناشی از کرنش اولیه در بسیاری از مواقع حذف می‌گردد زیرا ما معمولاً با کرنش‌های حاصل از بارگذاری سروکار داریم. بنابراین:

$$\sigma_{ij} = \alpha_1 I_1 \delta_{ij} + \alpha_2 \varepsilon_{ij} \quad (۹۱-۶)$$

۶-۳-۴- محاسبه ثوابت α_1 و α_2

به منظور یافتن ثوابت α_1 و α_2 دو حالت برش خالص و تنش هیدرواستاتیک بررسی می‌گردد.

۶-۳-۴-۱- شرایط برش خالص^۱

شکل (۶-۱۵) وضعیت تنش در برش خالص یک المان دو بعدی را نشان می‌دهد. بر اساس این شکل داریم:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$$

در شرایط برش خالص، کرنش حجمی برابر صفر است یعنی $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$ ، بنابراین طبق رابطه (۹۱-۶) خواهیم داشت:

$$\sigma_{ij} = \alpha_2 \varepsilon_{ij} \quad (۹۲-۶)$$

و تانسور برای حالت برش خالص به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \varepsilon_{12} & 0 \\ \alpha_2 \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۹۳-۶)$$

ارتباط تنش برشی و کرنش برشی در شرایط الاستیک به صورت زیر می‌باشد:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (۹۴-۶)$$

¹ Pure shear

با توجه به شکل (۶-۱۶) می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \gamma \quad (۶-۹۵)$$

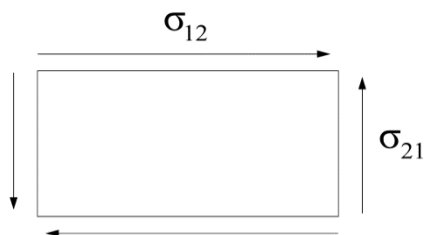
بنابراین داریم:

$$\sigma_{12} = \alpha_2 \varepsilon_{12} = \alpha_2 \left(\frac{\gamma_{12}}{2} \right)$$

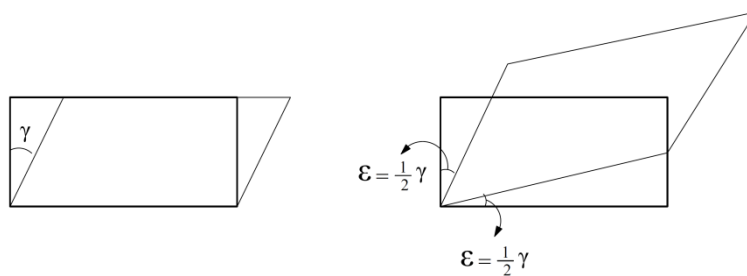
$$\frac{\sigma_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\alpha_2}{2} = G \rightarrow$$

$$\alpha_2 = 2G \quad (۶-۹۶)$$

$$\sigma_{ij} = \alpha_2 \varepsilon_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} = G \gamma_{ij} \quad (۶-۹۷)$$



شکل ۶-۱۵: حالت تنش برش خالص در المان دوبعدی



شکل ۶-۱۶: وضعیت کرنشهای برشی در المان حین برش ساده

۶-۳-۴-۲- شرایط تنش هیدرواستاتیک^۱

تانسور کرنش در حالت تنش هیدرواستاتیک به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{I_1}{3} \right) \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_1}{3} \end{pmatrix} \quad (۹۸-۶)$$

بر اساس رابطه (۹۱-۶)، (۹۶-۶) و (۹۸-۶) داریم:

$$\sigma_{ij} = \left(\alpha_1 I_1 + 2G \frac{I_1}{3} \right) \delta_{ij} \quad (۹۹-۶)$$

همچنین:

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{J_1}{3} \quad (۱۰۰-۶)$$

با قرار دادن $i = j$ داریم:

$$\sigma_{ii} = J_1 = \left(\alpha_1 I_1 + 2G \frac{I_1}{3} \right) \times 3$$

$$\frac{J_1}{3} = \left(\alpha_1 + \frac{2G}{3} \right) I_1 \quad (۱۰۱-۶)$$

با قرار دادن $\frac{J_1}{3} = P$ و $\alpha_1 + \frac{2G}{3} = K$ ، طبق نمودار (۱۷-۶) داریم. λ بعنوان ضریب لامه^۲ و K

بعنوان مدول بالک^۳ شناخته می‌شود. مدول بالک از شیب منحنی تغییرات تنش هیدرواستاتیک در مقابل کرنش حجمی مطابق شکل (۱۷-۶) قابل محاسبه می‌باشد.

$$K = \alpha_1 + \frac{2G}{3} \quad (۱۰۲-۶)$$

$$\alpha_1 = K - \frac{2G}{3} \quad (۱۰۳-۶)$$

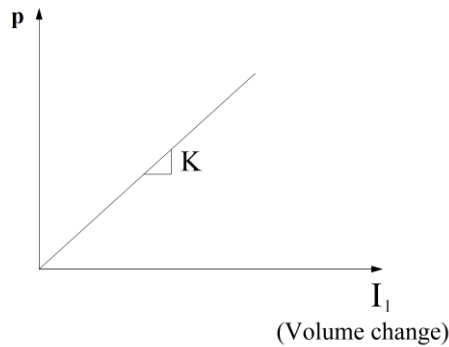
$$\alpha_1 = \lambda \quad (۱۰۴-۶)$$

1 Hydrostatic state of stress

2 Lamé's coefficient

3 Bulk modulus

(Hydrostatic pressure)



شکل ۶-۱۷: تغییرات فشار هیدرواستاتیک در مقابل تغییرات حجم

شکل نهایی مدل به صورت زیر در می‌آید:

$$\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2G}{3} \right) I_1 \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (۱۰۵-۶)$$

و یا:

$$= K I_1 \delta_{ij} + 2G \left(\varepsilon_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \right) \quad (۱۰۶-۶)$$

که در آن عبارت $\left(\varepsilon_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \right)$ کرنش برشی E_{ij} می‌باشد، بنابراین مدل نهایی کوشی مرتبه اول به صورت زیر در می‌آید:

$$\sigma_{ij} = K I_1 \delta_{ij} + 2G E_{ij} \quad (۱۰۷-۶)$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت ماتریسی نیز نشان داد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4G}{3} & \frac{-2G}{3} & \frac{-2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2G}{3} & \frac{4G}{3} & \frac{-2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2G}{3} & \frac{-2G}{3} & \frac{4G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2G}{3} & \frac{-2G}{3} & \frac{4G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K + \frac{4G}{3} & K - \frac{2G}{3} & K - \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2G}{3} & K + \frac{4G}{3} & K - \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2G}{3} & K - \frac{2G}{3} & K + \frac{4G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (۱۰۸-۶)$$

به حالت عکس هم می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{S_{ij}}{2G} + \frac{J_1}{9K} \delta_{ij} \quad (۱۰۹-۶)$$

بخش اول رابطه بیانگر جزء کرنش برشی و بخش دوم رابطه جزء کرنش حجمی را در تانسور کرنش بیان می‌نماید. فرم ماتریسی این رابطه به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} & \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} & \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} & \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} & \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \quad (۱۱۰-۶)$$

۳-۴-۳-۶- حالت کرنش صفحه ای^۱

در حالت کرنش صفحه‌ای تنش‌های با بسط رابطه (۱۰۵-۶) فرمول به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\sigma_{11} = K I_1 + 2G \left(\varepsilon_{11} - \frac{I_1}{3} \right) = \left(K - \frac{2G}{3} \right) I_1 + 2G \varepsilon_{11} = \left(\frac{3K + 4G}{3} \right) \varepsilon_{11} + \left(K - \frac{2G}{3} \right) \varepsilon_{22} \quad (۱۱۱-۶)$$

$$\sigma_{22} = \left(\frac{3K + 4G}{3} \right) \varepsilon_{22} + \left(K - \frac{2G}{3} \right) \varepsilon_{11} \quad (۱۱۲-۶)$$

1 Plane strain

$$\sigma_{33} = \left(K - \frac{2G}{3}\right) \varepsilon_{11} + \left(K - \frac{2G}{3}\right) \varepsilon_{22} \quad (۱۱۳-۶)$$

$$\sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12} \quad (۱۱۴-۶)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \quad (۱۱۵-۶)$$

بدین ترتیب ماتریس مدل رفتاری الاستیک کوشی مرتبه اول در حالت کرنش صفحه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3K+4G}{3} & \frac{3K-2G}{3} & 0 \\ \frac{3K-2G}{3} & \frac{3K+4G}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (۱۱۶-۶)$$

در حالت کرنش صفحه‌ای مدل الاستیک کوشی مرتبه اول با دو پارامتر K و G قابل تعیین می‌باشد.

۶-۳-۴-۴- حالت تنش صفحه‌ای^۱

با بسط رابطه (۶-۸-۱) برای حالت تنش صفحه‌ای داریم:

$$\varepsilon_{11} = \frac{S_{11}}{2G} + \frac{J_1}{9K} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3} \right) + \frac{1}{9K} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (۱۱۷-۶)$$

$$= \sigma_{11} \left(\frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} \right) - \sigma_{22} \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K} \right) \quad (۱۱۸-۶)$$

$$\varepsilon_{22} = -\sigma_{11} \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K} \right) + \sigma_{22} \left(\frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} \right) \quad (۱۱۹-۶)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G}$$

حالت ماتریسی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} & -\left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}\right) & 0 \\ -\left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}\right) & \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (۱۲۰-۶)$$

۵-۴-۳-۶- حالت تنش تک محوری^۱

طبق مدل الاستیک کوشی مرتبه اول و رابطه (۶-۱۰۵) برای تنش‌ها و رابطه (۶-۱۰۹) برای کرنش‌ها، تانسور تنش و کرنش در حالت تنش تک محوری که در شکل (۶-۱۸) نشان داده شده است به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۶-۱۲۱)$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \left(\frac{G+3K}{9GK} \right) \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2G-3K}{18GK} \right) \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2G-3K}{18GK} \right) \sigma_{11} \end{bmatrix} \quad (۶-۱۲۲)$$

در نتیجه داریم:

$$\varepsilon_{11} = \frac{3K+G}{9KG} \sigma_{11} \quad (۶-۱۲۳)$$

$$\frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{9KG}{3K+G} = E \quad (۶-۱۲۴)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{2G-3K}{18KG} \sigma_{11} \quad (۶-۱۲۵)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{2G-3K}{18KG} \sigma_{11} \quad (۶-۱۲۶)$$

از آنجاییکه تنش به صورت تک محوری اعمال می‌شود بنابراین $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ ، پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\frac{3K-2G}{18KG} \sigma_{11}}{\frac{3K+G}{9KG} \sigma_{11}} \Rightarrow \\ \nu &= \frac{3K-2G}{6K+2G} \end{aligned} \quad (۶-۱۲۷)$$



شکل ۶-۱۸: حالت تنش تک محوری

۶-۴-۳-۶- حالت کرنش تک محوری^۱

برای حالت کرنش محوری با داشتن روابط زیر و با بسط رابطه (۶-۱۰۵) و (۶-۱۰۹) برای مدل کوشی، به تانسور کرنش و تنش زیر می‌رسیم:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \rightarrow I_1 = \varepsilon_{11} \quad (۶-۱۲۷)$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۶-۱۲۸)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \left(K + \frac{4G}{3}\right)\varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \left(K - \frac{2G}{3}\right)\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \left(K - \frac{2G}{3}\right)\varepsilon_{11} \end{bmatrix} \quad (۶-۱۲۹)$$

مانند بالا خواهیم داشت:

$$\sigma_{11} = \left(K + \frac{4G}{3}\right)\varepsilon_{11}$$

$$M = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = K + \frac{4G}{3} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (۶-۱۳۰)$$

1 Uniaxial strain

M یا مدول محصور شده^۱، در واقع همان مدول الاستیسیته در شرایط تغییر شکل جانبی صفر است و قطعاً مقداری بزرگتر از E خواهد داشت.

۶-۳-۵- مدل های الاستیک گرین^۲

مدل های کوشی بر اساس روابط بین تنش و کرنش تعریف می شوند. طبق این تعریف داشتیم:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) \\ \varepsilon_{ij} = f(\sigma_{ij}) \end{cases} \quad (۱۳۱-۶)$$

اما دسته مدل های مدل گرین بر اساس تعریف انرژی به فرم زیر بیان می شوند:

$$U_0 = U_0(\varepsilon_{ij}) \quad (۱۳۲-۶)$$

در این رابطه U_0 تابع انرژی کرنشی بوده و مصالحی که بتوان رابطه بالا را برای آنها توصیف کرد، مصالح هایپر الاستیک^۳ نامیده می شوند.

بر اساس قانون اول ترمودینامیک می توان نوشت:

$$\delta W_e + \delta Q = \delta U + \delta T \quad (۱۳۳-۶)$$

که در آن W_e کار خارجی، Q حرارت تولیدی، U انرژی کرنشی در واحد حجم و T انرژی جنبشی ناشی از حرارت می باشد. همچنین قانون بقای انرژی جنبشی به صورت زیر می باشد:

$$\delta W_e + \delta W_i = \delta T \quad (۱۳۴-۶)$$

که در آن W_i کار داخلی می باشد و سایر علائم به صورت بالا تعریف می شود.

با ترکیب دو رابطه مذکور داریم:

$$\delta W_i = \delta T - \delta W_e = \delta T - (\delta U + \delta T - \delta Q) = \delta Q - \delta U \quad (۱۳۵-۶)$$

اگر حرارت تولیدی صفر باشد:

$$\delta U = -\delta W_i = -\delta W_e \quad (۱۳۶-۶)$$

همچنین داریم:

$$\delta W_e = \int_V F_i \delta u_i dV + \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS \quad (۱۳۷-۶)$$

1 Constrained modulus

2 Green elastic models

3 Hyper elastic

در رابطه بالا $F_i \delta u_i$ نشان دهنده برآیند نیروهای حجمی^۱ و $\sigma_{ij} n_i \delta u_i$ نشان دهنده برآیند نیروهای سطحی^۲ می‌باشند. بدین ترتیب:

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \int_V \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \omega_{ij}) dV \\ &= \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dV\end{aligned}\quad (۱۳۸-۶)$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V (\delta U_0) dV \xrightarrow{\delta U = \delta W_e} \delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \\ \sigma_{ij} &= \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}}\end{aligned}\quad (۱۳۹-۶)$$

که در رابطه (۱۳۸-۶)، $\delta \varepsilon_{ij}$ جزء کرنش و $\delta \omega_{ij}$ جزء دوران می‌باشد که در اینجا و عمده مسائل مهندسی ژئوتکنیک صفر در نظر گرفته می‌شود. رابطه (۱۳۹-۶) اساس مدل های الاستیسیته گرین می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع انرژی کرنشی U_0 بعنوان تابعی از نامتغیرهای تانسور کرنش می‌توان نوشت:

$$U_0 = U_0(I_{1\varepsilon}, I_{2\varepsilon}, I_{3\varepsilon}) = U_0(I_1, I_2, I_3) \quad (۱۴۰-۶)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial U_0}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial U_0}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial U_0}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \delta_{ij}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ij}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} \\ \sigma_{ij} &= \frac{\partial U_0}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{\partial U_0}{\partial I_2} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial U_0}{\partial I_3} \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj}\end{aligned}\quad (۱۴۱-۶)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که دو مدل کوشی و گرین شبیه به هم هستند (نظیر $\frac{\partial U_0}{\partial I_1}$ در مدل کوشی، $\frac{\partial U_0}{\partial I_2}$ نظیر φ_1 در مدل کوشی و $\frac{\partial U_0}{\partial I_3}$ نظیر φ_2 در مدل کوشی می‌باشد)، اما نکته مهم آن است که در مدل گرین بر خلاف مدل کوشی، که φ_0 ، φ_1 و φ_2 که مستقل از هم بودند، بدلیل وابستگی عبارات $\frac{\partial U_0}{\partial I_1}$ ، $\frac{\partial U_0}{\partial I_2}$ و $\frac{\partial U_0}{\partial I_3}$ به یکدیگر وابسته خواهند بود:

1 Body force

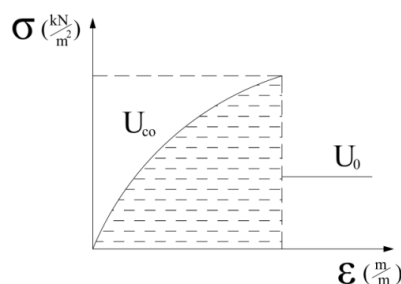
2 Surface traction

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial I_2} \right) = \frac{\partial}{\partial I_2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial I_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial I_3} \left(\frac{\partial U_0}{\partial I_2} \right) = \frac{\partial}{\partial I_2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial I_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial I_3} \right) = \frac{\partial}{\partial I_3} \left(\frac{\partial U_0}{\partial I_1} \right) \end{cases} \quad (۱۴۲-۶)$$

همچنین معکوس رابطه گرین در مورد کرنش‌ها هم به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_{co}}{\partial J_1} \delta_{ij} + \frac{\partial U_{co}}{\partial J_2} \sigma_{ij} + \frac{\partial U_{co}}{\partial J_3} \sigma_{im} \sigma_{mj} \quad (۱۴۳-۶)$$

تعریف انرژی کرنشی داخلی U_0 بصورت سطح زیر نمودار تنش-کرنش و انرژی کرنشی مکمل^۱ U_{co} در شکل (۱۹-۶) آمده است.



شکل ۱۹-۶: انرژی کرنشی داخلی و انرژی کرنشی مکمل

۶-۳-۶- مدل های الاستیک گرین مرتبه اول

در مدل گرین مرتبه اول رابطه (۱۴۴-۶) برای تعریف انرژی کرنشی داخلی استفاده می‌گردد. در این رابطه I_1 و I_2 بترتیب نامتغیرهای اول و دوم تانسور کرنش می‌باشند. با جایگذاری این رابطه در رابطه (۱۴۱-۶) می‌توان نوشت:

$$U_0 = c_1 \cdot I_2 + c_2 \cdot I_1^2 \quad (۱۴۴-۶)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial (c_1 I_2 + c_2 I_1^2)}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{\partial (c_1 I_2 + c_2 I_1^2)}{\partial I_2} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial (c_1 I_2 + c_2 I_1^2)}{\partial I_3} \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj}$$

1 Complementary energy

$$= 2c_2 \cdot I_1 \cdot \delta_{ij} + c_1 \cdot \varepsilon_{ij} \quad (۱۴۵-۶)$$

در مقایسه مدل گرین در رابطه (۱۴۴-۶) با مدل کوشی در رابطه (۱۰۴-۶) می‌توان نوشت:

$$c_1 = 2G \quad (۱۴۶-۶ \text{ الف})$$

$$2c_2 = K - \frac{2G}{3} \Rightarrow c_2 = \frac{K}{2} - \frac{G}{3} \quad (۱۴۶-۶ \text{ ب})$$

با جایگذاری c_1 و c_2 در رابطه (۱۴۴-۶) داریم:

$$\begin{aligned} U_0 &= 2G \cdot I_2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{G}{3} \right) \cdot I_1^2 = \\ &= 2G \left(I_2 - \frac{I_1^2}{6} \right) + \frac{K}{2} I_1^2 \rightarrow \\ U_0 &= 2G I_{2D} + \frac{K}{2} I_1^2 \end{aligned} \quad (۱۴۷-۶)$$

رابطه (۱۴۷-۶) تابع انرژی کرنشی مدل گرین مرتبه اول را نشان می‌دهد. طبق روابط (۱۰۰-۶) و (۱۰۱-۶) خواهیم داشت:

$$p = \frac{J_1}{3} = K I_1 \quad (۱۴۸-۶)$$

$$\sqrt{J_{2D}} = 2G \sqrt{I_{2D}} \quad (۱۴۹-۶)$$

$$U_0 = \sqrt{J_{2D}} \cdot \sqrt{I_{2D}} + \frac{1}{2} \frac{J_1}{3} I_1 \quad (۱۵۰-۶)$$

در روابط بالا، I_1 کرنش هیدرواستاتیک، p تنش هیدرواستاتیک، K مدول بالک، و جمله اول رابطه (۱۴۷-۶) نشان دهنده کار برشی و جمله دوم آن نشان دهنده کار حجمی می‌باشد. با بسط رابطه (۱۴۴-۶) خواهیم داشت:

$$U_0 = c_1 \cdot I_2 + c_2 \cdot I_1^2 \quad (۱۴۴-۶ \text{ تکراری})$$

$$\begin{aligned} U_0 &= c_1 \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2 \right] \\ &+ c_2 \left[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{22} \cdot \varepsilon_{33} \right] \\ \Rightarrow U_0 &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 c_{ij} \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (۱۵۱-۶)$$

که در آن:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1 + c_2 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & \frac{1}{2}c_1 + c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & \frac{1}{2}c_1 + c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

۶-۳-۷- مدل های الاستیک کوشی مرتبه دوم

پس از بررسی مدل های الاستیک کوشی و گرین از مرتبه اول، اینک به بررسی مدل های الاستیک از مرتبه دوم می پردازیم. بطور قطع، ارتباط تنشها و کرنشها در مدل های مرتبه بالاتر از یک، بصورت غیر خطی خواهد بود. در خصوص مدل کوشی مرتبه دوم می توان نوشت:

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} \quad (۶-۸۸-تکراری)$$

$$\varphi_0 = a_1 I_1 + a_2 I_1^2 + a_3 I_2 \rightarrow \text{تابع مرتبه دو از کرنش}$$

$$\varphi_1 = a_4 + a_5 I_1 \rightarrow \text{تابع مرتبه یک از کرنش}$$

$$\varphi_2 = a_6 \rightarrow \text{تابع مرتبه صفر از کرنش}$$

$$\sigma_{ij} = (a_1 I_1 + a_2 I_1^2 + a_3 I_2) \delta_{ij} + (a_4 + a_5 I_1) \varepsilon_{ij} + a_6 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} \quad (۶-۱۵۲)$$

a_1 تا a_6 پارامترهای مدل رفتاری می باشند. در مقایسه با مدل مرتبه اول کوشی (۶-۱۰۴) می توان گفت که مدل مرتبه اول تنها پارامترهای a_1 و a_4 را دارد که به صورت زیر قابل تعریف می باشند:

$$a_1 = K - \frac{2G}{3} \quad (۶-۱۵۳)$$

$$a_4 = 2G \quad (۶-۱۵۴)$$

پارامترهای a_1 و a_4 را در معادله (۶-۱۵۲) جایگزین کرده و می نویسیم:

$$\sigma_{ij} = \left[\left(K - \frac{2G}{3} \right) I_1 + a_2 I_1^2 + a_3 I_2 \right] \delta_{ij} + (2G + a_5 I_1) \varepsilon_{ij} + a_6 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} \quad (۶-۱۵۵)$$

بطور قطع سایر پارامترهای مدل رفتاری باید مشابه قبل از بررسی عملکرد مدل در آزمایشهای ساده بدست آیند. بدین منظور دو آزمایش کرنش تک محوری و برش خالص مدنظر قرار می گیرد. با

توجه به مشخص بودن تانسور تنش و کرنش این دو آزمایش، پارامترهای مدل رفتاری از روی آنها قابل تعیین خواهند بود.

۶-۳-۷-۱- آزمایش کرنش تک محوری

تانسور کرنش در حالت کرنش تک محوری به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۵۶-۶)$$

با بسط رابطه (۱۵۵-۶) تنش σ_{11} در این حالت به صورت زیر می‌باشند:

$$\sigma_{11} = \left(K - \frac{2G}{3} \right) \varepsilon_{11} + a_2 \varepsilon_{11}^2 + \frac{a_3}{2} \varepsilon_{11}^2 + 2G \varepsilon_{11} + a_5 \varepsilon_{11}^2 + a_6 \varepsilon_{11}^2 \quad (۱۵۷-۶)$$

شایان ذکر است که نحوه محاسبه جمله آخر در رابطه فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$a_6 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} = a_6 \varepsilon_{i1} \varepsilon_{1j} + a_6 \varepsilon_{i2} \varepsilon_{2j} + a_6 \varepsilon_{i3} \varepsilon_{3j} = a_6 \varepsilon_{11}^2 \quad (۱۵۸-۶)$$

با فاکتور گیری از رابطه (۱۵۷-۶) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\sigma_{11} = \left(K + \frac{4G}{3} \right) \varepsilon_{11} + \left(a_2 + \frac{a_3}{2} + a_5 + a_6 \right) \varepsilon_{11}^2 \quad (۱۵۹-۶)$$

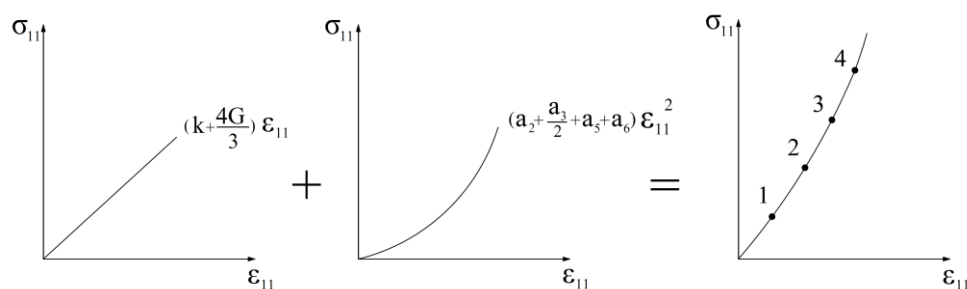
سایر تنش‌ها نیز به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_{22} = \left(K - \frac{2G}{3} \right) \varepsilon_{11} + a_2 \varepsilon_{11}^2 + \frac{a_3}{2} \varepsilon_{11}^2 \quad (۱۶۰-۶)$$

$$\sigma_{33} = \left(K - \frac{2G}{3} \right) \varepsilon_{11} + a_2 \varepsilon_{11}^2 + \frac{a_3}{2} \varepsilon_{11}^2 \quad (۱۶۱-۶)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (۱۶۲-۶)$$

نمودار تغییرات σ_{11} بر حسب ε_{11} طبق رابطه (۱۵۹-۶) در شکل (۲۰-۶) نشان داده شده است.



شکل ۲۰-۶: نمودار تغییرات σ_{11} بر حسب ε_{11} و ε_{11}^2 (دسای و سیریاردان ۱۹۸۴)

برای به دست آوردن چهار مجهول a_2, a_3, a_5 و a_6 به حداقل چهار نقطه انتخابی از این نمودار نیاز داریم که در شکل نیز نشان داده شده است. با نوشتن رابطه (۶-۱۵۹) برای این چهار نقطه، ضرایب مجهول بدست می‌آیند.

۶-۳-۷-۲- آزمایش برش خالص

تانسور کرنش در این آزمایش به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۶-۱۶۳)$$

با جایگذاری این تانسور در رابطه (۶-۸۷) که بیانگر مدل الاستیک کوشی مرتبه دوم است تانسور تنش به دست خواهد آمد:

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \varphi_1 \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varphi_2 \begin{bmatrix} \varepsilon_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۶-۱۶۴)$$

لازم به ذکر است که کرنش محوری، تنش برشی ایجاد نمی‌کند اما با مشاهده رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت که امکان ایجاد تنش محوری در اثر اعمال کرنش برشی وجود خواهد داشت. همچنین با بسط رابطه تنش-کرنش برای مولفه‌های مختلف تنش محوری ایجاد شده مشخص می‌گردد که مولفه‌های تنش محوری در صفحه اعمال برش (صفحه ۱ و ۲) مساوی، اما در صفحه عمود بر جهت اعمال برش متفاوت و البته غیر صفر است که به معنای توزیع غیریکنواخت تنش محوری ایجاد شده در اثر اعمال کرنش برشی خالص (بر اساس مدل مذکور) خواهد بود.

$$\sigma_{11} = \varphi_0 + \varphi_2 \varepsilon_{12}^2 \quad (۶-۱۶۵)$$

$$\sigma_{22} = \varphi_0 + \varphi_2 \varepsilon_{12}^2 \quad (۶-۱۶۶)$$

$$\sigma_{33} = \varphi_0 \quad (۶-۱۶۷)$$

$$\sigma_{12} = \varphi_1 \varepsilon_{12} \quad (۶-۱۶۸)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \quad (۶-۱۶۹)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{ij} \quad (۶-۱۷۰)$$

$$\begin{aligned} S_{11} &= \sigma_{11} - \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \delta_{11} \\ &= \sigma_{11} - \frac{1}{3} (2\sigma_{11} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} (\sigma_{11} - \sigma_{33}) = \frac{1}{3} (\varphi_0 + \varphi_2 \varepsilon_{12}^2 - \varphi_0) = \frac{1}{3} \varphi_2 \varepsilon_{12}^2 \end{aligned} \quad (۶-۱۷۱)$$

$$S_{22} = \frac{1}{3} \varphi_2 \varepsilon_{12}^2 \quad (۶-۱۷۲)$$

$$S_{33} = \frac{-2}{3} \varphi_2 \varepsilon_{12}^2 \quad (۱۷۳-۶)$$

بر اساس روابط (۱۷۱-۶) تا (۱۷۳-۶) نیز مولفه های تانسور تنش انحرافی در صفحه برش برابر $(S_{11} = S_{22})$ ، اما در صفحه عمود بر آن متفاوت می باشند.

۳-۷-۳-۶- تعیین پارامترهای مدل در شرایط برش خالص

طبق روابط (۱۶۵-۶) و (۱۶۶-۶)، در مدل کوشی مرتبه دوم تنش های محوری از مرتبه دوم می باشد ولی بر اساس روابط (۱۶۸-۶) و (۱۶۹-۶)، تنشهای برشی توزیعی خطی داشته و از مرتبه اول هستند. تنش ها در این حالت از روابط زیر قابل محاسبه می باشند:

$$\sigma_{11} = a_3 \varepsilon_{12}^2 + a_6 \varepsilon_{12}^2 \quad (۱۷۴-۶)$$

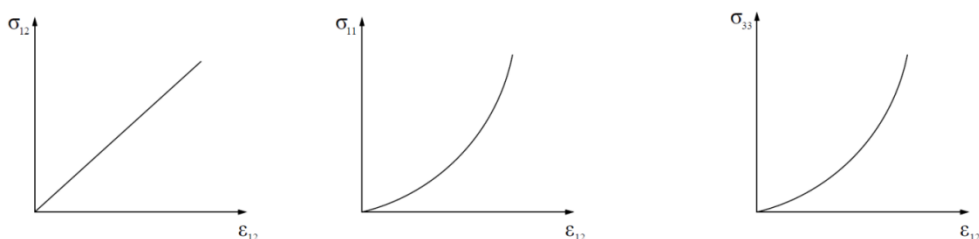
$$\sigma_{22} = a_3 \varepsilon_{12}^2 + a_6 \varepsilon_{12}^2 \quad (۱۷۵-۶)$$

$$\sigma_{33} = a_3 \varepsilon_{12}^2 \quad (۱۷۶-۶)$$

$$\sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12} \quad (۱۷۷-۶)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \quad (۱۷۸-۶)$$

نمودار رابطه تنش محوری و تنش برشی با کرنش برشی در شکل (۲۱-۶) نشان داده شده است.



شکل (۲۱-۶): تغییرات تنش و کرنش برشی در مدل الاستیک کوشی مرتبه دوم (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

۳-۸-۳-۶- مدل های الاستیک گرین مرتبه دوم

در مدل الاستیک گرین مرتبه دوم رابطه انرژی کرنشی بعنوان تابع مرتبه سوم از کرنشها بصورت زیر در نظر گرفته می شود که با جایگذاری آن در رابطه (۱۴۰-۶) به ارتباط تنش-کرنش برای این مدل دست می یابیم:

$$U_0 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_1^3 + b_4 I_1 I_2 + b_5 I_2 + b_6 I_3 \quad (۱۷۹-۶)$$

در صورتیکه برای کرنش صفر، تنشهای صفر را لحاظ نماییم ضرایب بخش خطی رابطه یعنی b_0 و b_1 برابر صفر خواهند شد و می توان نوشت:

$$U_0 = b_2 I_1^2 + b_3 I_1^3 + b_4 I_1 I_2 + b_5 I_2 + b_6 I_3 \quad (۱۸۰-۶)$$

با صرفنظر از ترمهای درجه سوم و مقایسه مقادیر باقیمانده با تابع انرژی کرنشی مدل گرین مرتبه اول می توان نوشت:

$$c_2 = b_2 = \frac{K}{2} - \frac{G}{3} = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\lambda}{2} \quad (۱۸۱-۶)$$

$$c_1 = b_5 = 2G = \frac{E}{(1+\nu)} \quad (۱۸۲-۶)$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۱۸۰-۶) داریم:

$$U_0 = \frac{3K-2G}{6} I_1^2 + 2GI_2 + b_3 I_1^3 + b_4 I_1 I_2 + b_6 I_3 \quad (۱۸۳-۶)$$

با جایگذاری معادله فوق در رابطه (۱۴۰-۶) و مشتق گیری از آن داریم:

$$\sigma_{ij} = \left[\left(K - \frac{2G}{3} \right) I_1 + 3b_3 I_1^2 + b_4 I_2 \right] \delta_{ij} + (b_4 I_1 + 2G) \varepsilon_{ij} + b_6 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} \quad (۱۸۴-۶)$$

مقایسه این رابطه و رابطه (۱۵۵-۶) نشان می دهد که در رابطه مربوط به مدل گرین مرتبه دوم، ضرایب a_5 و a_3 با یکدیگر مساوی هستند. بعبارت دیگر می توان گفت مدل گرین مرتبه دوم، شکل خاصی از مدل کوشی مرتبه دوم است و تعداد پارامترهای آن یکی کمتر و ۵ عدد می باشد.

۳-۸-۱ شرایط کرنش تک محوری

برای تعیین سه پارامتر باقیمانده مدل الاستیک گرین از مرتبه دوم یعنی b_3 ، b_4 و b_6 مجدداً از نتایج تستهای معمول استفاده می گردد. در شرایط کرنش تک محوری با اعمال تانسور کرنش نشان داده شده در رابطه (۱۵۶-۶) درون رابطه (۱۸۴-۶) خواهیم داشت:

$$\sigma_{11} = \left(K - \frac{2G}{3} \right) \varepsilon_{11} + 3b_3 \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} b_4 \varepsilon_{11}^2 + (2G + b_4 \varepsilon_{11}) \varepsilon_{11} + b_6 \varepsilon_{11}^2 \quad (۱۸۵-۶)$$

$$= \left(K + \frac{4G}{3} \right) \varepsilon_{11} + \left(3b_3 + \frac{3b_4}{2} + b_6 \right) \varepsilon_{11}^2$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \left(K - \frac{2G}{3} \right) \varepsilon_{11} + \left(3b_3 + \frac{1}{2} b_4 \right) \varepsilon_{11}^2 \quad (۱۸۶-۶)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \quad (۱۸۷-۶)$$

با توجه به سه مجهول موجود در روابط فوق، حداقل به سه نقطه از منحنی تنش-کرنش رابطه (۱۸۵-۶) جهت تعیین مجهولات نیاز خواهیم داشت.

۶-۳-۸-۲- شرایط برش خالص

در این وضعیت نیز با اعمال تانسور کرنش برشی خالص رابطه (۱۶۳-۶) در رابطه (۱۸۴-۶) می‌توان نوشت:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} b_4 \varepsilon_{12}^2 + b_6 \varepsilon_{12}^2 = (b_4 + b_6) \varepsilon_{12}^2 \quad (۱۸۸-۶)$$

$$\sigma_{22} = (b_4 + b_6) \varepsilon_{12}^2 \quad (۱۸۹-۶)$$

$$\sigma_{33} = b_4 \varepsilon_{12}^2 \quad (۱۹۰-۶)$$

$$\sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12} \quad (۱۹۱-۶)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (۱۹۲-۶)$$

در صورت استفاده از این آزمایش نیز حداقل به دو نقطه از نمودار تنش-کرنش رابطه (۱۸۸-۶) نیاز داریم. نکته مهم آنکه ضریب b_3 با استفاده از این آزمایش بدست نخواهد آمد. لذا می‌توان گفت که آزمون کرنش تک محوری، آزمایش مناسب تری برای تعیین پارامترهای این مدل رفتاری می‌باشد.

تمرینات فصل ششم

۱. رابطه سرعت موج طولی در یک میله محصور شده بدون امکان تغییرشکل جانبی را تعیین کنید.

۲. در صورتیکه میله محصور شده در محیط ارتجاعی قرار گرفته باشد، بطوریکه تغییرشکل جانبی آن وابسته به سختی محیط اطرافش باشد، سرعت انتشار موج طولی در میله را محاسبه نمایید.

۳. مدول الاستیسیته و نسبت پواسون یک نمونه خاک ماسه سیلت‌دار به صورت زیر می‌باشد. سرعت موج طولی، فشاری و برشی را در این خاک محاسبه کنید.

$$E = 70 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.25$$

۴. در مقایسه مدل‌های الاستیک کدامیک صحیح نیست؟

الف- مدل Green مرتبه سوم دارای ۹ پارامتر مستقل می‌باشد.

ب- مدل Cauchy مرتبه سوم دارای ۶ پارامتر مستقل است.

ج- مدل Cauchy زیر مجموعه مدل‌های Green است.

د- مدل‌های Green بر مبنای ملاحظات انرژی داخلی تعیین می‌شوند.

۵. فرم کلی و پارامترهای لازم در مدل الاستیک Cauchy مرتبه سوم را تعیین نمایید.

۶. با استفاده از مدل الاستیک Cauchy مرتبه سه، فرم ماتریسی تانسور تنش را برای شرایط کرنش مسطح و همچنین فرم ماتریسی تانسور کرنش را برای شرایط تنش مسطح محاسبه و نتایج را با مدل الاستیک Cauchy مرتبه دو مقایسه نمایید.

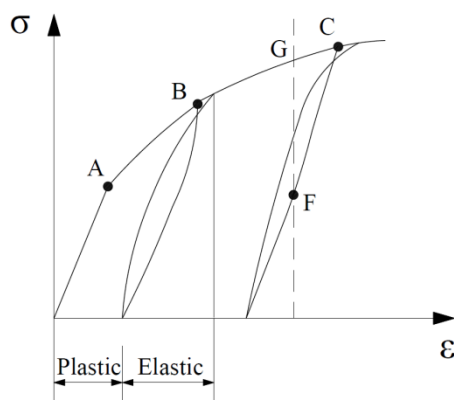
۷. فرمولاسیون مدل الاستیک Green مرتبه سه را بدست آورید. مدل دارای چند پارامتر است و بر چه اساسی محاسبه می‌شوند؟ پارامترهای آن را با مدل الاستیک Cauchy مرتبه سه مقایسه نمایید.

فصل هفتم

مبانی پلاستیسیته

۱-۷- مقدمه

رفتار پلاستیک به شرایطی اطلاق می‌گردد که در آن حین باربرداری جسم به وضعیت اولیه تغییر شکل خود بر نگردد. به عبارت دیگر کرنشهای پسماند در ماده باقی بماند.



شکل ۱-۷: بارگذاری، باربرداری و وقوع کرنشهای پلاستیک در ماده

شکل (۱-۷) رفتار الاستوپلاستیک یک نمونه از فولاد حین کشش را ارائه می‌نماید. بر این اساس، رفتار فولاد حین بارگذاری تا نقطه A بصورت الاستیک خواهد بود. اما پس از آن، در فاصله A تا B با

باربرداری، بازگشت به کرنش صفر مشاهده نخواهد شد و مقداری کرنش پسماند در نمونه باقی خواهد ماند. نکته مهم آنکه با بارگذاری مجدد و تا حصول مجدد تراز تنش نظیر نقطه B، رفتار بصورت الاستیک و بر همان مسیر باربرداری قرار خواهد داشت. رفتار کلی نشان داده شده در شکل (۷-۱) به عنوان رفتار سخت شونده^۱ خوانده می‌شود.

باربرداری از نقطه C نیز رفتاری مشابه ایجاد می‌نماید و مجدداً در خلال آن با رفتار الاستیک مواجه خواهیم بود. نکته دیگر آنکه در شکل (۷-۱)، نقاط F و G از نظر سطح کرنش، شرایط مشابهی دارند اما تنشهای نظیر آن دو متفاوت می‌باشد. بدین ترتیب مشخص می‌شود که برخلاف شرایط رفتاری الاستیک که در آن مقدار تنشها تنها وابسته به مقدار کنونی کرنشها بود، در وضعیت پلاستیک، تاریخچه بارگذاری فاکتور مهمی در وضعیت تنشها خواهد بود.

۲-۷- مرور تاریخچه پیدایش و توسعه تئوری پلاستیسیته

اولین مباحث در خصوص تئوری پلاستیسیته به تحقیقات کولمب^۲ (۱۷۷۳) بر می‌گردد که معیار تسلیمی برای مواد جامدی مثل خاک ارائه نمود. پس از آن رانکین^۳ (۱۸۵۳)، مفاهیم مطرح شده توسط کولمب را به مسائلی چون فشار محرک و مقاوم خاک در دیوارهای حائل تعمیم داد. ترسکا^۴ (۱۸۶۴) از جمله نخستین کسانی بود که تئوری پلاستیسیته را در زمینه فلزات مطرح نمود. وی با تحقیق بر مسائل کاربردی همچون سوراخ شدگی و ذوب فلزات، معیار تسلیم معروف خود را در سال ۱۸۶۴ ارائه کرد. در سال ۱۸۷۰، سنت ونانت^۵ معیار ترسکا را در خصوص پیچش و خمش مقاطع استوانه‌ای اعمال نمود. لوی^۶ نیز در ۱۸۷۱ رابطه‌ای سه بعدی مابین تنش و نرخ کرنش پلاستیک ارائه کرد. ون میزس^۷ در سال ۱۹۱۳ معادلاتی مشابه لوی برای بیان وضعیت تسلیم در فلزات ارائه نمود و معیار تسلیم دیگری را با ملاحظات ریاضی بنیان نمود. رویس^۸ نیز در ۱۹۳۰ تئوری پلاستیسیته پرنتل^۹ را با اضافه نمودن محدوده‌ای برای بیان شرایط الاستیک بهبود بخشید. اما با وجود همه این تلاشها، اولین چارچوب مدون برای تبیین اصول بنیادین تئوری پلاستیسیته از سال ۱۹۴۵ و با مطالعات دراگر^{۱۰} و پراگر^{۱۱} آغاز شد و مفاهیم مهمی همچون مکانیزم تسلیم و رفتار ماده پس از تسلیم مورد بررسی قرار گرفت.

1 Hardening behavior

2 Coulomb

3 Rankine

4 Tresca

5 Saint-Venant

6 Levy

7 von Mises

8 Reuss

9 Prandtl

10 Drucker

11 Prager

۳-۷- معیار تسلیم^۱

در واقع تسلیم حد تغییر شکل‌های الاستیک تحت تاثیر مجموعه‌ای از تنش‌ها می‌باشد. در شرایط اعمال تنش بصورت یک بعدی، این معیار با پارامترهایی چون مقاومت فشاری تک محوری یا مقاومت کششی تک محوری قابل بیان است. اما تعیین این معیار در شرایط بارگذاری سه بعدی و با توجه به اندرکنش نیرو و تغییر شکل در جهات مختلف بر یکدیگر پیچیده می‌شود. در شرایط کلی، معیار تسلیم را می‌توان بصورت زیر بیان نمود.

$$F = F(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}) \quad (۱-۷)$$

در صورتیکه رابطه بر حسب تنش‌های اصلی و جهات اصلی مرتب شود می‌توان به فرم زیر رسید:

$$F = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, n_1, n_2, n_3) \quad (۲-۷)$$

در رابطه (۲-۷)، $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ تنش‌های اصلی و n_1, n_2, n_3 بردارهای یکه در جهات اصلی می‌باشند. در صورتیکه رفتار ماده بصورت ایزوتروپ لحاظ گردد می‌توان معادله زیر را بر حسب تنش‌های اصلی و یا نامتغیرهای تانسور تنش نوشت:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (۳-۷)$$

$$F(J_1, J_2, J_3) = 0 \quad (۴-۷)$$

لازم به ذکر است که عموماً در خصوص فلزات تاثیر فشار هیدرواستاتیک قابل اغماض است. بعبارت دیگر فلزات تغییر حجم چندانی حتی تحت تاثیر تنش‌های دورگیر بسیار بالاتر نشان نخواهند داد. لذا می‌توان تسلیم در فلزات را مستقل از تنش دورگیر فرض نمود و معادله تسلیم را تنها تابعی از نامتغیرهای دوم و سوم تانسور تنش انحرافی دانست:

$$F(J_{2D}, J_{3D}) = 0 \quad (۵-۷)$$

۴-۷- فضای تنش‌های^۲ - وسترگارد^۳

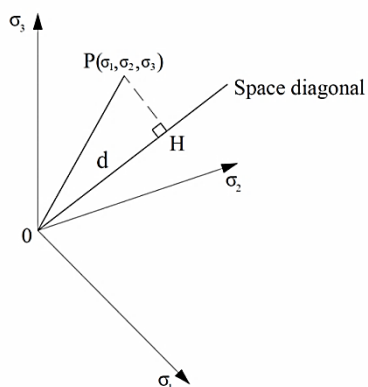
در صورتیکه سه جهت اصلی تانسور تنش، به عنوان محورهای مختصات در نظر گرفته شوند، فضای مذکور را فضای تنش‌های - وسترگارد می‌نامند. شکل ۲-۷ فضای تنش مذکور را نشان می‌دهد. در این فضا، خطی که با هر سه محور مذکور زوایای برابر تشکیل می‌دهد را نیمساز فضایی^۴ می‌نامند.

1 Yield criterion

2 Haigh

3 Westergard

4 Space diagonal



شکل ۷-۲: فضای تنش‌های - وسترگارد

در شکل فاصله مبدا تا نقطه دلخواه P یا طول OP به شرح زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$OP^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad (۶-۷)$$

در امتداد نیمساز فضایی خواهیم داشت:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{J_1}{3} \quad (۷-۷)$$

کسینوسهای هادی در راستای نیمساز فضایی به قرار زیر می‌باشند:

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (۸-۷)$$

بدین ترتیب معادله صفحه عمود بر نیمساز فضایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = c \quad (۹-۷)$$

فاصله هر صفحه گذرنده با معادله فوق تا مبدأ O با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$d = \frac{c}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad (۱۰-۷)$$

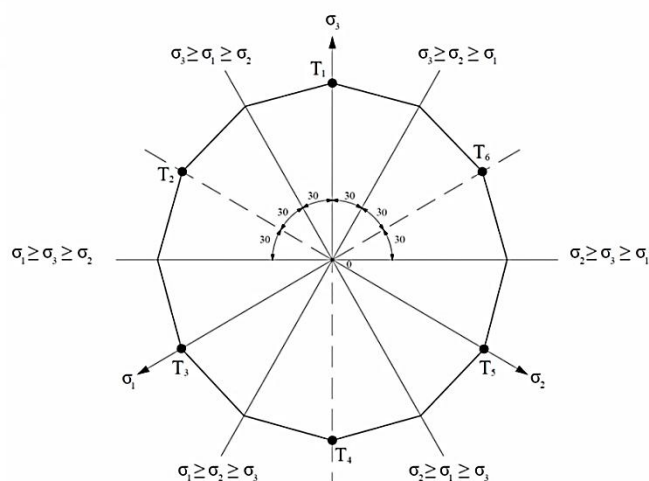
بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3}d \quad (۱۱-۷)$$

سمت چپ این رابطه همان تنش هیدرواستاتیک است. بر اساس این معادله تنش هیدرواستاتیک بطور خطی با افزایش فاصله از مبدأ ازدیاد می‌یابد. این صفحه با این مشخصه صفحه اکتاهدرال^۱ نامیده

1 Octahedral plane

می‌شود. نتیجه می‌شود که در صورت فرض استقلال معیار تسلیم از تنش هیدرواستاتیک، شکل و اندازه معیار بر صفحه اکتاهدرال (که سطح تسلیم^۱ نامیده می‌شود) یکسان خواهد بود. در خصوص فلزات با توجه به آنکه معیار تسلیم مستقل از فشار هیدرواستاتیک است، معمولاً صفحه اکتاهدرال گذرنده از مبدأ مختصات برای تعیین منحنی تسلیم در نظر گرفته می‌شود. صفحه گذرنده از مبدأ با نام صفحه پی^۲ شناخته می‌شود. این صفحه در شکل ۷-۳ نشان داده شده است. البته این شکل با فرض رفتار ایزوتروپ و مقاومت برابر در کشش و فشار برقرار خواهد بود. شش نقطه T_1 الی T_6 فاصله برابری از مبدأ دارند و معیار شرایط مقارنی در هر قطاع 30° از صفحه Π خواهد داشت.



شکل ۷-۳: تصویر منحنی تسلیم بر صفحه Π (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

۷-۵- معیارهای تسلیم در پلاستیسیته فلزات

در این بخش چند معیار تسلیم و شکل منحنی تسلیم نظیرشان در صفحه Π ارائه می‌گردد.

۷-۵-۱- معیار تسلیم ون میزس^۳

بر اساس تئوری ون میزس، تسلیم زمانی اتفاق می‌افتد که نامتغیر دوم تانسور تنش انحرافی به حد آستانه خاصی برسد. در واقع، اساس این معیار تسلیم بر آن است که انرژی در سیستم به حدی برابر انرژی تسلیم نظیر شرایط کشش ساده برسد. بنابراین:

$$\begin{aligned} J_{2D} &< k^2 & \text{Elastic condition} \\ \Rightarrow J_{2D} &= k^2 & \text{Yield of material} \end{aligned}$$

1 Yield locus

2 Π .plane

3 von Mises

$$\frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 = k^2$$

با در نظرگیری تنشهای اصلی $\Rightarrow$

$$\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = k^2 \quad (۱۲-۷)$$

تحت شرایط کششی ساده می‌توان نوشت:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \& \quad \sigma_1 = -\sigma_{yt} \quad (\text{حد تسلیم کششی}) \quad (۱۳-۷)$$

با فرض برابری تنش تسلیم در فشار و کشش نیز داریم:

$$\sigma_{yt} = \sigma_{yc} = \sigma_y \quad (۱۴-۷)$$

که σ_y تنش تسلیم کششی یا فشار تک محوری است. بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{3}\sigma_1^2 = k^2 = \frac{1}{3}\sigma_y^2 \Rightarrow k = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (۱۵-۷)$$

$$\frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 = \frac{\sigma_y^2}{3} \quad (۱۶-۷)$$

برای بررسی عملکرد معیار تسلیم، آزمایش برش خالص را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری مولفه‌های تانسور تنش در معادله بالا خواهیم داشت:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{12} = s$$

$$\Rightarrow s = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (۱۷-۷)$$

بدین ترتیب برای مصالحی که از معیار ون میزس تبعیت می‌نماید تنش تسلیم در برش ساده به

میزان $\frac{1}{\sqrt{3}}$ برابر مقدار نظیر در کشش یا فشار تک محوری خواهد بود. شکل کلی معیار در شرایط

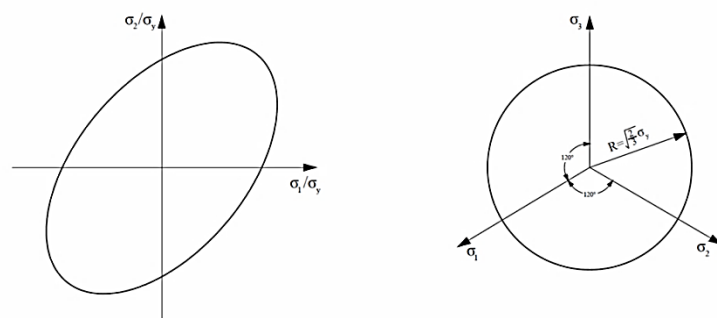
تنش مسطح ($\sigma_3 = 0$) بصورت زیر قابل بیان است:

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = 6k^2 = 2\sigma_y^2$$

$$\Rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_y^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right) = 1 \quad (۱۸-۷)$$

این معادله در دستگاه مختصات $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}, \frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)$ یک بیضی است که به بیضی ون میزس مشهور می‌باشد. تصویر معیار بر صفحه پی نیز دایره‌ای به شعاع $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$ است. شکل (۴-۷) تصاویر معیار بر این صفحات را نشان می‌دهد.



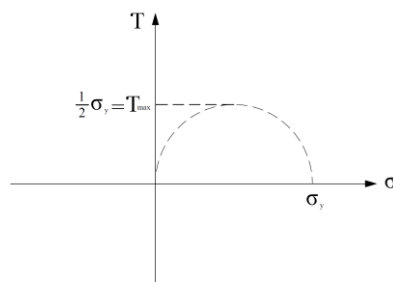
شکل ۴-۷: تصاویر معیار ون میزس در شرایط تنش مسطح و صفحه Π (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

۷-۵-۲- معیار ترسکا^۱

بر اساس این معیار، تسلیم در زمانی روی می‌دهد که مقدار حداکثر تنش برشی در جسم ایجاد گردد. تمامی وضعیت‌های داخل معیار تسلیم الاستیک و روی آن شرایط پلاستیک را نشان می‌دهد. در این معیار تنش تسلیم در کشش و فشار یکسان فرض می‌شود که برای بسیاری مواد از جمله خاک‌ها یک محدودیت بزرگ محسوب می‌گردد. همانطور که در بخش توصیف صفحه پی مشخص شد، شش قطاع مختلف از صفحه در وضعیت‌های تنش اصلی متفاوت وجود دارد. در قطعه T_5OT_6 می‌توان نوشت:

$$\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1 \Rightarrow \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) = T_{max} \quad (۱۹-۷)$$

طبق شکل (۵-۷)، در شرایط تک محوری با تنش تسلیم σ_y ، تنش برشی حداکثر $1/2 \sigma_y$ است.



شکل ۵-۷: ارتباط مقاومت برشی و مقاومت فشاری تک محوری

1 Tresca

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{1}{2}\sigma_y$$

$$\Rightarrow \sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_y \quad (۲۰-۷)$$

با توجه به عدم تأثیر σ_3 در فرمولاسیون، معیار تسلیم این قطعه، خط (یا صفحه ای) موازی صفحه $\sigma_3 = 0$ خواهد بود. بدین ترتیب با توجه به مساوی بودن مقاومت در کشش و فشار در شش قطعه، فرم کلی معیار ترسکا بصورت زیر نتیجه و مطابق شکل (۶-۷) ترسیم می گردد:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\pm\sigma_y}{2} \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_y \quad (۲۱-۷)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{\pm\sigma_y}{2} \Rightarrow \sigma_2 - \sigma_3 = \pm\sigma_y \quad (۲۲-۷)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{\pm\sigma_y}{2} \Rightarrow \sigma_3 - \sigma_1 = \pm\sigma_y \quad (۲۳-۷)$$

بر این اساس، در شرایط تک محوری که دو مولفه تنش اصلی برابر صفر هستند، مولفه سوم تنش موجود برابر مقاومت تسلیم $\pm\sigma_y$ خواهد بود.

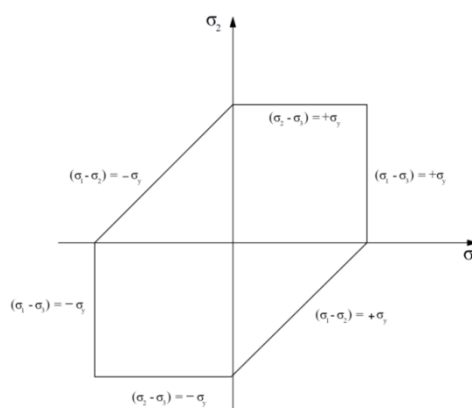
مشابه معیار ون میزس در شرایط برش خالص نیز می توان نوشت:

$$\sigma = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_1 &= +S \\ \sigma_2 &= -S \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$S - (-S) = \sigma_y \Rightarrow$$

$$S = \frac{\sigma_y}{2} \quad (۲۴-۷)$$

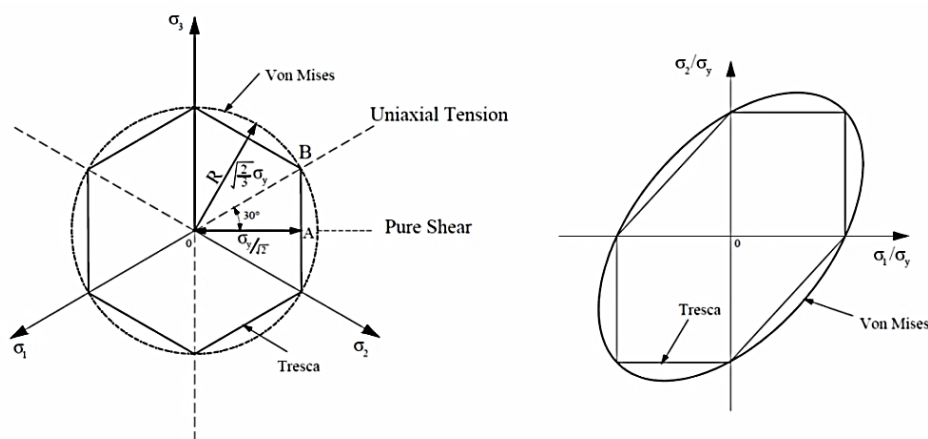
نتیجه می شود که بر اساس معیار تسلیم ترسکا، حداکثر تنش برشی در شرایط برش خالص $\frac{1}{2}\sigma_y$ است. بدین ترتیب این معیار نشان می دهد که تنش تسلیم حین اعمال برش خالص نصف شرایط تنش تک محوری است.



شکل ۶-۷: تصویر معیار تسلیم ترسکا بر صفحه $\sigma_3 = 0$

مقایسه معیارهای تسلیم ترسکا و ون میزس در شکل (۷-۷) ارائه شده است. خطوط معرف مسیر تنش نظیر شرایط برش خالص و کشش تک محوری نیز در این شکل نشان داده شده اند. همانطور که ملاحظه می گردد، معیار ون میزس دربرگیرنده و محیط بر معیار ترسکا در هر دو صفحه مذکور است. تنش تسلیم در شرایط کشش یا فشار تک محوری برای هر دو معیار منطبق است اما نسبت تنش تسلیم در شرایط برش خالص برای دو معیار از قرار زیر خواهد بود که نشانگر تحمل تنش بیشتر در شرایط معیار وزن میزس نسبت به ترسکا است.

$$\frac{\sigma_y / \sqrt{2}}{\sigma_y \sqrt{2} / \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۷-۲۵)$$



شکل (۷-۷): تصویر معیارهای ترسکا و ون میزس بر صفحات Π و $\sigma_3 = 0$ (دسای و سیریاردان ۱۹۸۴)

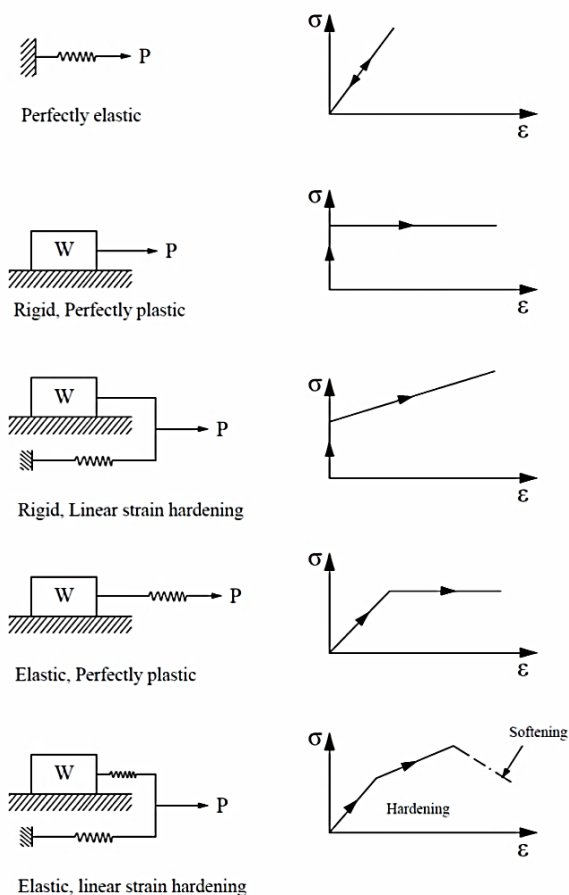
۷-۶- رفتار پس از تسلیم

بطور کلی وضعیتهای متفاوت برای شبیه سازی رفتار مواد پس از وقوع تسلیم در آنها از قرار زیر می باشند که قبل از بحث در خصوص رفتار پلاستیک، به آنها اشاره می شود:

- الف- رفتار الاستیک کامل^۱
- ب- رفتار صلب- پلاستیک کامل^۲
- پ- رفتار صلب- خطی و سخت شونده با کرنش^۳
- ت- رفتار الاستیک- پلاستیک کامل^۴
- ث- رفتار الاستیک- سخت شوندگی خطی با کرنش^۱

1 Perfectly elastic
2 Rigid, Perfectly plastic
3 Rigid, linear strain hardening
4 Elastic, perfectly plastic

شکل (۸-۷) نمایی از انواع مختلف رفتارهای مذکور به همراه روش مدلسازی آنها با استفاده از جرم و فنر را نشان می‌دهد. در شکل آخر، در انتهای منحنی تنش-کرنش رفتار نرم شونده^۲ نیز مشاهده می‌گردد.



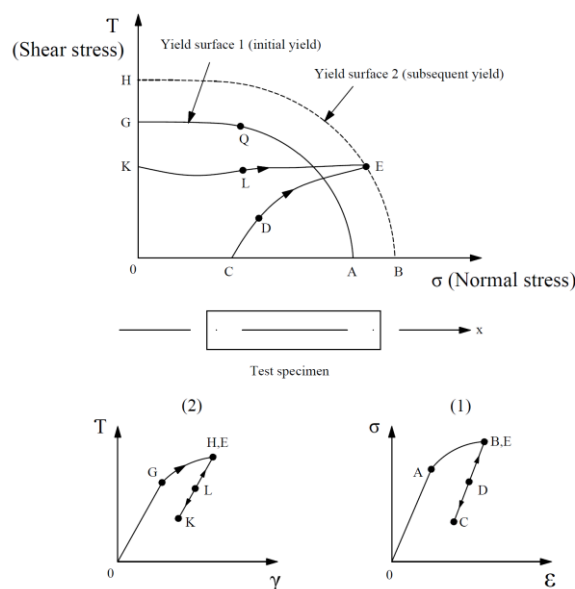
شکل (۸-۷): شرایط مختلف برای رفتار پس از تسلیم (دسای و سیریاردان ۱۹۸۴)

۷-۷- تأثیر مسیر تنش^۳

برخلاف رفتار الاستیک ماده که در آن پاسخ سیستم هیچگونه وابستگی به مسیر تنش ندارد و تنها بر اساس وضعیت کنونی کرنشها قابل تبیین است، در وضعیت رفتار پلاستیک پاسخ سیستم به شدت تحت تأثیر مسیر تنش اعمالی و تاریخچه بارگذاری قبلی خواهد بود. مندلسون^۴ (۱۹۶۸) با ارائه

1 Elastic, linear strain hardening
2 Softening
3 Stress path
4 Mendelson

استدلالی، این موضوع را توضیح و علت آن را اثبات می‌نماید. در مسیر تنش (۱) در شکل (۷-۹)، با اعمال بارگذاری محوری بر نمونه از نقطه O تا A در درون سطح تسلیم کنونی و در نتیجه در ناحیه رفتار الاستیک قرار داریم. به محض رسیدن به سطح تسلیم در نقطه A رفتار به حالت الاستو پلاستیک تغییر یافته و به علت سخت شوندگی سطح تسلیم کنونی بزرگتر و به سمت خارج گسترش خواهد یافت. با توجه به اعمال نیروی محوری در این شرایط، کرنش پلاستیک بین A تا B از نوع محوری بوده و بر اساس رابطه (۷-۲۶) قابل تعیین است:



شکل ۷-۹: استدلال مندلسون (۱۹۶۸) برای وابستگی رفتار پلاستیک به مسیر تنش (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

$$\varepsilon_x^P = \varepsilon^P \quad (۷-۲۶)$$

با توجه به عدم تغییر حجم و صفر بودن تغییر حجم حین کشش ساده در وضعیت پلاستیک می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_y^P = \varepsilon_z^P = -\frac{\varepsilon^P}{2} \quad (۷-۲۷)$$

در این شرایط بارگذاری، همچنین کلیه کرنشهای برشی نیز برابر صفر خواهند بود.

$$\gamma_{xy}^P = \gamma_{yz}^P = \gamma_{zx}^P = 0 \quad (۷-۲۸)$$

اگر باربرداری تا نقطه C انجام گیرد، حین باربرداری تا نقطه C کرنشها کاملاً الاستیک خواهد بود. در این وضعیت اگر با ترکیب برش و کشش به مسیر CDE ادامه دهیم، با توجه به قرارگیری کل این

مسیر تنش درون محدوده سطح تسلیم کنونی یعنی سطح شماره ۲ در شکل، هیچگونه کرنش پلاستیکی ایجاد نخواهد شد. بدین ترتیب کرنش پلاستیک در نقطه E با نقطه B برابر خواهد بود. در تلاش دوم، ابتدا نمونه در مسیر برش خالص OGH حرکت می‌نماید. تا نقطه G تغییر شکل بصورت الاستیک و از G تا H به وضعیت پلاستیک خواهد بود. با توجه به صفر بودن تغییرات حجمی نمونه حین اعمال برش خالص، کرنشهای پلاستیک در H از قرار زیر هستند:

$$\varepsilon_x^p = \varepsilon_y^p = \varepsilon_z^p = 0 \quad (۲۹-۷)$$

$$\gamma_{xy}^p = \gamma^p \quad \gamma_{yz}^p = \gamma_{xz}^p = 0 \quad (۳۰-۷)$$

حال اگر باربرداری تا K انجام و با سپس با مسیر تنش ترکیبی کشش و نیروی محوری KLE به همان نقطه E برسیم، تغییر مکانها در باربرداری تا K و بارگذاری تا E همگی الاستیک خواهند بود زیرا درون منحنی تسلیم کنونی یعنی منحنی شماره ۲ قرار داریم. بدین ترتیب کرنش پلاستیک در نقطه E و H با هم برابر خواهند بود.

در مقایسه دو حالت مذکور، علی‌رغم وضعیت نهایی یکسان هر دو مسیر تنش در نقطه E، کرنشهای پلاستیک بوجود آمده در این نقطه، تحت دو مسیر تنش مختلف، متفاوت خواهند بود. این موضوع تأثیر مسیر تنش بر کرنشهای پلاستیک را نشان می‌دهد و بیان می‌کند تاریخچه بارگذاری بر پاسخ سیستم در وضعیت کرنشهای پلاستیک موثر می‌باشد.

۸-۷- تعیین کرنشهای پلاستیک

۸-۷-۱- رابطه تنش-کرنش لوی-میزس^۱

از اولین تلاشها برای تعیین ارتباط تنش-کرنش در شرایط پلاستیک، روابط لوی-میزس بوده است. لوی (۱۸۷۰) با صرفنظر از کرنشهای الاستیک رابطه زیر را برای تعیین کرنشهای پلاستیک ارائه نمود.

$$\frac{d\varepsilon_{11}}{S_{11}} = \frac{d\varepsilon_{22}}{S_{22}} = \frac{d\varepsilon_{33}}{S_{33}} = \frac{d\varepsilon_{12}}{S_{12}} = \frac{d\varepsilon_{23}}{S_{23}} = \frac{d\varepsilon_{13}}{S_{13}} = \lambda$$

یا $d\varepsilon_{ij} = \lambda S_{ij}$ (۳۱-۷)

در این رابطه S_{ij} تانسور تنش انحرافی، $d\varepsilon_{ij}$ جزء کرنش (پلاستیک)، λ مقدار مثبتی است که می‌تواند در خلال بارگذاری تغییر نماید. این رابطه، قانون جریان لوی-میزس نیز نامیده می‌شود. همچنین در این رابطه فرض می‌شود که مواد تحت جریان پلاستیک و یا پروسه تسلیم تراکم ناپذیرند لذا می‌توان نوشت:

1 Levy- Mises

$$E_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^p \delta_{ij} = \varepsilon_{ij}^p \quad (32-7)$$

بنابراین تانسور کرنش انحرافی با تانسور کرنش پلاستیک کل برابر خواهند بود. با توجه به فرض دوم، یعنی صفر بودن تغییرات حجم حین پروسه تسلیم، بنظر می‌رسد که رابطه لوی-میزس برای عمده فلزات مناسب است گرچه برای بسیاری از مصالح ژئولوژیکی رابطه مناسبی نخواهد بود. بدین ترتیب بطور رابطه لوی-میزس علیرغم کوچک بودن کرنشهای الاستیک در خاک و قابل توجه بودن کرنشهای پلاستیک در آن (که با فرض اول مدل هماهنگ است) جوابهای مناسبی در مصالح خاکی نمی‌دهد، ولی در فلزات که دامنه کرنشهای الاستیک بزرگتر و غیرقابل صرفنظر است (که با اولین فرض مدل ناهماهنگ می‌باشد) جوابهای مناسبی ارائه خواهد کرد.

۷-۸-۲- رابطه تنش-کرنش پرنتل-رویس^۱

در این معیار، کرنش کل بصورت مجموع کرنشهای الاستیک و پلاستیک لحاظ می‌گردد و بر خلاف معیار قبلی، از کرنشهای الاستیک صرفنظر نمی‌گردد.

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (33-7)$$

بر اساس این معیار، جزء کرنش پلاستیک متناسب با تنش انحرافی وارده در هر مرحله از بارگذاری است:

$$\frac{d\varepsilon_{11}^p}{S_{11}} = \frac{d\varepsilon_{22}^p}{S_{22}} = \frac{d\varepsilon_{33}^p}{S_{33}} = \frac{d\varepsilon_{12}^p}{S_{12}} = \frac{d\varepsilon_{23}^p}{S_{23}} = \frac{d\varepsilon_{13}^p}{S_{13}} = \lambda$$

$$\Rightarrow d\varepsilon_{ij}^p = \lambda S_{ij} \quad (34-7)$$

با نوشتن روابط برای مولفه های مختلف و کسر آنها از یکدیگر می‌توان نوشت:

$$d\varepsilon_{11}^p - d\varepsilon_{22}^p = \lambda(S_{11} - S_{22}) \quad (35-7)$$

$$d\varepsilon_{22}^p - d\varepsilon_{33}^p = \lambda(S_{22} - S_{33}) \quad (36-7)$$

$$d\varepsilon_{33}^p - d\varepsilon_{11}^p = \lambda(S_{33} - S_{11}) \quad (37-7)$$

$$\frac{d\varepsilon_{11}^p - d\varepsilon_{22}^p}{S_{11} - S_{22}} = \frac{d\varepsilon_{22}^p - d\varepsilon_{33}^p}{S_{22} - S_{33}} = \frac{d\varepsilon_{33}^p - d\varepsilon_{11}^p}{S_{33} - S_{11}} = \lambda \quad (38-7)$$

برای تعیین ضریب λ در این رابطه نیز می‌توان نوشت:

$$d\varepsilon_{11}^p = \lambda S_{11} = \lambda \left[\sigma_{11} - \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \right) \right] = \frac{2}{3} \lambda \left[\sigma_{11} - \frac{1}{2} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right]$$

$$d\varepsilon_{22}^p = \frac{2}{3} \lambda \left[\sigma_{22} - \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \right]$$

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_{33}^p &= \frac{2}{3}\lambda \left[\sigma_{33} - \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right] \\
d\varepsilon_{12}^p &= \lambda \sigma_{12}, \quad d\varepsilon_{23}^p = \lambda \sigma_{23}, \quad d\varepsilon_{13}^p = \lambda \sigma_{13} \\
\Rightarrow \\
& (d\varepsilon_{11}^p - d\varepsilon_{22}^p)^2 + (d\varepsilon_{22}^p - d\varepsilon_{33}^p)^2 + (d\varepsilon_{33}^p - d\varepsilon_{11}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{12}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{23}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{13}^p)^2 \\
&= \lambda^2 \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 + 6\sigma_{23}^2 + 6\sigma_{13}^2 \right] \\
\Rightarrow 9(d\gamma_{oct}^p)^2 &= 9(\tau_{oct})^2 \lambda^2 \\
\Rightarrow \lambda &= \frac{d\gamma_{oct}^p}{\tau_{oct}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\gamma_{oct}^p}{\sqrt{J_{2D}}} \quad (39-7)
\end{aligned}$$

همانطور که این رابطه نشان می‌دهد، ضریب λ ثابت نبوده و بصورت تابعی از تانسور تنش و کرنش در هر لحظه و بر اساس نامتغیر دوم تانسور تنش انحرافی و کرنش اکتاهدرال قابل محاسبه است.

۷-۸-۳- تعیین اجزای کرنشهای برشی و حجمی

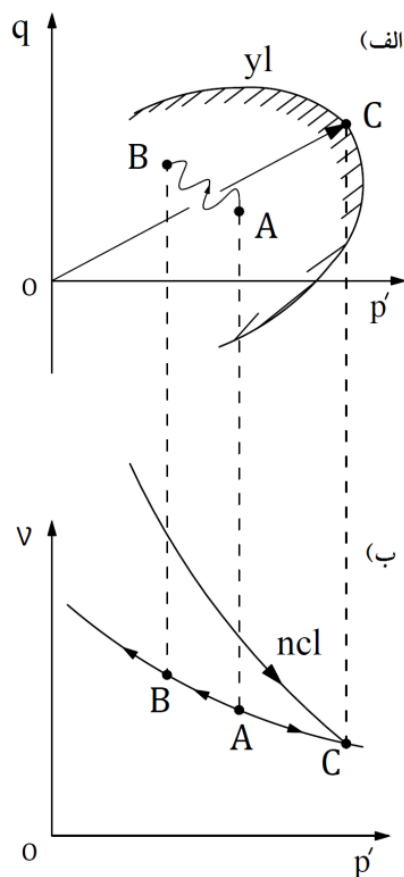
شکل (۷-۱۰) یک سطح تسلیم و مرز ناحیه الاستیک و پلاستیک را نشان می‌دهد. تغییر تنش در داخل سطح تسلیم همراه با تغییر شکل های برگشت پذیر یا الاستیک است. ارتباط نمو تغییر مکان و نمو تنش با مشخص کردن خصوصیات الاستیک خاک قابل محاسبه است. با فرض رفتار همسان و الاستیک خاک درون سطح تسلیم، رابطه تنش کرنش الاستیک به صورت زیر نوشته می‌شود که در آن تغییرات حجم با تغییرات تنش موثر میانگین قابل تعیین است.

$$\begin{bmatrix} \delta\varepsilon_v^e \\ \delta\varepsilon_s^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p' \\ \delta q \end{bmatrix} \quad (40-7)$$

در این رابطه $\delta\varepsilon_v^e$ نمو کرنش حجمی الاستیک، $\delta\varepsilon_s^e$ نمو کرنش برشی الاستیک، $\delta p'$ نمو تنش موثر میانگین، δq تنش انحرافی، K مدول بالک و G مدول برشی خاک می‌باشد. نمونه خاک با سطح تسلیم (yl) در صفحه تنش $q - p'$ در شکل (۷-۱۰-الف) نشان داده شده است. مکان، شکل و اندازه سطح تسلیم خاک در شکل (۷-۱۰-الف) از روی تاریخچه بارگذاری قبلی نمونه معین می‌شود. یکی از حالت‌های محتمل بارگذاریهای پیشین، تراکم یک بعدی خاک باشد. مسیر تنش مربوطه با خط مستقیم OC در صفحه تنش $(q - p')$ نشان داده شده که از نقطه C نظیر حداکثر فشردگی خاک بر خط فشردگی نرمال^۱ (ncl) در شکل ۷-۱۰-ب عبور می‌کند.

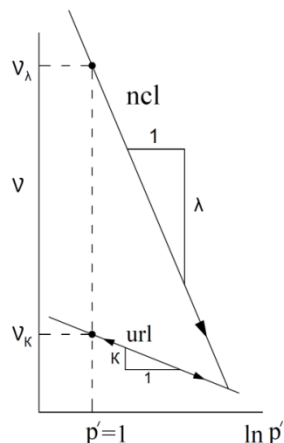
1 Normal compression line

برای هر نقطه مانند A درون سطح تسلیم نیز مقدار حجم مخصوص^۱ قابل تعیین می‌باشد $(v = 1 + e)$ بدین ترتیب وضعیت نظیر این نقطه در صفحه تغییرات حجم $v - p'$ در شکل (۷-۱۰-ب) قابل ترسیم است. با تغییر در تنش موثر نقطه A به نقطه B و بروز تغییر حجم در نمونه، وضعیت جدید در این صفحه محاسبه می‌شود. وضعیت تمامی نقاط داخلی سطح تسلیم بر خطوط باربرداری- بارگذاری^۲ مجدد (url) قرار دارند که ترکیب حجم مخصوص و تنش موثر در حالت الاستیک و قابل بازگشت را معرفی می‌نماید. خط تحکیم ایزوتروپ و خط باربرداری- بارگذاری مجدد را می‌توان در مقیاس لگاریتمی بصورت نشان داده شده در شکل (۷-۱۳) و بصورت خطی رسم نمود.



شکل ۷-۱۰: خط تراکم نرمال (ncl)، تابع تسلیم (yl) و خط بارگذاری- باربرداری مجدد (url)، (وود^۳ ۱۹۹۰)

1 Specific volume
2 Unloading-reloading line
3 Wood



شکل ۷-۱۱: خط تراکم نرمال و خط بارگذاری-باربرداری مجدد (url) در صفحه $v - \ln p'$

در این فضا رابطه خط تحکیم ایزوتروپ (ncl) به صورت زیر در می‌آید:

$$v = v_{\lambda} - \lambda \ln p' \quad (۴۱-۷)$$

همچنین رابطه خط باربرداری-بارگذاری مجدد (url) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$v = v_{\kappa} - \kappa \ln p' \quad (۴۲-۷)$$

λ و κ شیب دو خط و v_{λ} و v_{κ} عرض از مبدا خطوط در $p' = 1$ (بر حسب واحد تنش در شکل ۷-۱۱) می‌باشد.

نتایج آزمایش تحکیم یک بعدی یا ادئومتری^۱ اغلب در مقیاس نیمه لگاریتمی با در نظر گیری محور تنش به فرم لگاریتمی رسم می‌شوند. در نتیجه رفتار فشردگی و باربرداری با استفاده از اندیس فشردگی C_c و اندیس تورم C_s که در شکل (۷-۱۲) نمایش داده قابل بیان است. در این صورت رابطه خط تحکیم ایزوتروپ به صورت:

$$v = v_c - C_c \log_{10} \sigma'_v \quad (۴۳-۷)$$

و رابطه باربرداری یا تورم به صورت زیر نوشته می‌شود:

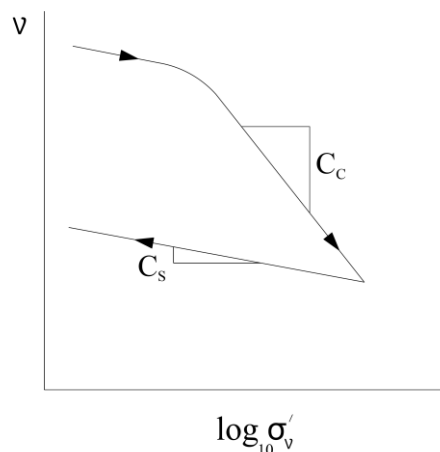
$$v = v_s - C_s \log_{10} \sigma'_v \quad (۴۴-۷)$$

که در آن v_c و v_s عرض از مبدا خطوط در $\sigma'_v = 1$ (بر حسب واحد تنش) می‌باشند. شیب خطوط در معادلات اخیر به صورت زیر با یکدیگر ارتباط پیدا می‌کنند:

$$C_c = \lambda \ln 10 \approx 2.3\lambda \quad (۴۵-۷)$$

$$C_s \approx \kappa \ln 10 \approx 2.3\kappa \quad (۴۶-۷)$$

1 Oedometer test



شکل ۷-۱۲: نتایج آزمایش تراکم یک بعدی ادنومتر با اندیس فشردگی C_c و اندیس تورم C_s

با مشتق گیری از رابطه (۷-۴۲)، فرم دیفرانسیلی این معادله به صورت زیر نوشته شود:

$$\delta v^e = -\kappa \frac{\delta p'}{p'} \quad (۷-۴۷)$$

در این معادله، بالانویس e نشان دهنده تغییرات حجمی قابل بازگشت یا الاستیک می باشد. از آنجایی که تغییرات در حجم مخصوص باعث تغییرات در کرنش حجمی می شود:

$$\delta \epsilon_v^e = \frac{-\delta v^e}{v} \quad (۷-۴۸)$$

رابطه (۷-۴۸) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\delta \epsilon_v^e = \kappa \frac{\delta p'}{v p'} = \frac{\delta p'}{\frac{v p'}{\kappa}} \quad (۷-۴۹)$$

با توجه به رابطه (۷-۴۹) نتیجه می شود:

$$K = \frac{v p'}{\kappa} \quad (۷-۵۰)$$

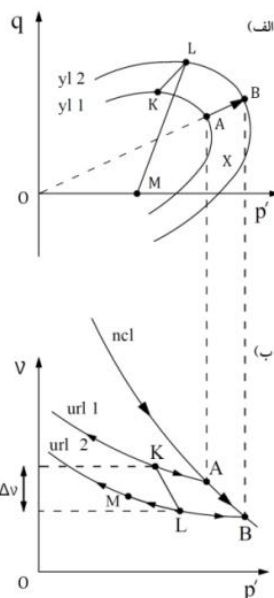
۷-۸-۴- کرنش حجمی و سخت شوندگی پلاستیک

در قسمت قبل تغییرات تنش در داخل سطح تسلیم در نظر گرفته شد. تغییری در تنش مانند مسیر تنش از نقطه K بر سطح کنونی تسلیم (1-yl) تا نقطه L بیرون از آن را در نظر بگیرید که مطابق شکل (۷-۱۵-الف) باعث تسلیم خاک می شود. مسلماً حالت تنش L باید بر یک تابع تسلیم جدید

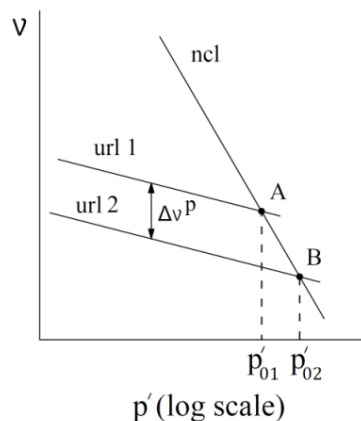
(yl-2) واقع شود. فرض می‌شود که بدون توجه به میزان فشار پیش تحکیمی شکل سطح تسلیم ثابت مانده و فقط اندازه آن تغییر می‌کند. در ضمن شکل سطح تسلیم بدون توجه به مسیر تنش‌ی که منجر به تشکیل آن می‌شود، ثابت می‌ماند. به عبارت دیگر سطوح تسلیم متوالی همیشه شکل یکسان دارند. وضعیت خاک عادی تحکیم یافته تا نقطه A بر روی تابع تسلیم yl-1 قرار دارد. در صورتیکه بر اساس شکل (۷-۱۳-ب) با افزایش تنش ایزوتروپ و تحکیم بیشتر خاک بر خط ncl به نقطه B برسیم، سطح تسلیم جدید گسترش یافته yl-2 در صفحه تنش را خواهیم داشت. اما در صورت باربرداری در هر کدام از وضعیتهای نظیر نقاط A و B در شکل (۷-۱۵-ب)، با توجه به عدم ایجاد کرنشهای پلاستیک، تنها بر روی سطح تسلیم کنونی حرکت خواهیم نمود. بدین ترتیب، نقاط K و L در صفحه تغییرات حجمی، که بر خطوط url-1 و url-2 قرار دارند در صفحه تنش بترتیب بر منحنیهای تسلیم yl-1 و yl-2 واقع می‌شوند. تغییر حجم کل که در مسیر تنش از K تا L در شکل (۷-۱۳-الف) اتفاق می‌افتد، با میزان اختلاف حجم مخصوص Δv بر روی محور عمودی v مشخص می‌شود. برای مدلسازی رفتار الاستو-پلاستیک خاک لازم است که این تغییر حجم کل را به دو بخش برگشت پذیر و غیرقابل برگشت تقسیم نمود:

$$\Delta v = \Delta v^e + \Delta v^p \quad (۷-۱۵)$$

در شکل (۷-۱۴) مشاهده می‌شود که تغییر حجم پلاستیک خاک، تفاوت دو خط باربرداری-بارگذاری مجدد در تنش موثر میانگین ثابت می‌باشد.



شکل ۷-۱۳: الف- انبساط سطح تسلیم از yl-1 به yl-2 با افزایش تنش تحکیمی،
ب- تغییرات متناظر خط باربرداری-بارگذاری مجدد از url-1 به url-2 (وود ۱۹۹۰)



شکل ۷-۱۴: تنش موثر میانگین رسم شده در مقیاس لگاریتمی

معادله خط باربرداری-بارگذاری مجدد url-1 به صورت زیر است:

$$v_1 = v_{k1} - \kappa \ln p' \quad (52-7)$$

همچنین مطابق شکل، معادله خط باربرداری-بارگذاری مجدد url-2 نیز به صورت زیر است:

$$v_2 = v_{k2} - \kappa \ln p' \quad (53-7)$$

تغییر در حجم مخصوص مربوط به بخش پلاستیک از تغییر در عرض از مبدا v_k در معادلات بالا به دست می‌آید:

$$\Delta v^p = v_2 - v_1 = v_{k2} - v_{k1} \quad (54-7)$$

بدین ترتیب، تغییر حجم الاستیک از کم کردن این مقدار از کل تغییر حجم مخصوص بین نقاط A و B در شکل (۷-۱۴) بدست خواهد آمد. همچنین در این شکل، p'_{01} تنش متناظر نقطه A بر خط فشردگی نرمال و p'_{02} تنش نظیر نقطه B بر این خط است. بنابراین تغییر حجم پلاستیک بصورت تغییر در حجم مخصوص وقتی تنش بر خط فشردگی نرمال از p'_{01} به p'_{02} افزایش و سپس مجدداً به p'_{01} کاهش می‌یابد نیز قابل تعریف می‌باشد. بر این اساس از معادلات (۷-۴۱) و (۷-۴۲) می‌توان نوشت:

$$\Delta v^p = -\lambda \ln\left(\frac{p'_{02}}{p'_{01}}\right) + \kappa \ln\left(\frac{p'_{02}}{p'_{01}}\right) \quad (55-7)$$

$$= -(\lambda - \kappa) \ln\left(\frac{p'_{02}}{p'_{01}}\right) \quad (56-7)$$

جمله اول در معادله (۵۵-۷)، تغییر حجم کلی که با افزایش تنش موثر میانگین از A تا B رخ می‌دهد را نشان می‌دهد و جمله دوم قسمتی از این تغییر حجم است که با کاهش تنش میانگین بازمی‌گردد یعنی تغییر حجم الاستیک را نشان می‌دهد. به فرم دیفرانسیلی معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta v^p = -(\lambda - \kappa) \frac{\delta p'_0}{p'_0} \quad (57-7)$$

با ترکیب معادلات (۴۸-۷) و (۵۷-۷)، کرنش پلاستیک به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\delta \varepsilon_v^p = (\lambda - \kappa) \frac{\delta p'_0}{v p'_0} \quad (58-7)$$

رابطه اخیر بسیار شبیه به معادله (۴۹-۷) مربوط به تغییرات کرنش حجمی الاستیک بوده و تفاوت مشاهده شده در ضرایب آنها می‌باشد. ضریب $(\lambda - \kappa)$ در معادله (۵۸-۷) که تغییر حجم پلاستیک را کنترل می‌کند حدوداً ۴ برابر ضریب (κ) است که تغییر شکل الاستیک را در معادله (۴۹-۷) کنترل می‌نماید. همچنین زمانی که تنش موثر میانگین (p') تغییر می‌کند تغییرات حجمی الاستیک رخ می‌دهد ولی تغییرات حجمی پلاستیک تنها زمانی اتفاق می‌افتد که اندازه تابع تسلیم که با تنش فشردگی نرمال (p'_0) مشخص شده تغییر کند.

مقدار کل نمو کرنش حجمی مجموع مقادیر الاستیک و پلاستیک آن می‌باشد:

$$\delta \varepsilon_v = \delta \varepsilon_v^e + \delta \varepsilon_v^p \quad (59-7)$$

$$\delta \varepsilon_v = \kappa \frac{\delta p'_0}{v p'_0} + (\lambda - \kappa) \frac{\delta p'_0}{v p'_0} \quad (60-7)$$

به همین ترتیب در مورد تغییرات کلی در حجم مخصوص می‌توان نوشت:

$$\delta v = \delta v^e + \delta v^p \quad (61-7)$$

$$\delta v = -\kappa \frac{\delta p'_0}{p'_0} - (\lambda - \kappa) \frac{\delta p'_0}{p'_0} \quad (62-7)$$

زمانی که خاک تحت تراکم یک بعدی قرار دارد، حالت تنش در راس تابع تسلیم کنونی است و در نقاط A، B و C در شکل (۱۵-۷) با $p' = p'_0$ قرار داریم. با جایگذاری در رابطه (۶۰-۷) می‌توان نوشت:

$$\delta \varepsilon_v = \lambda \frac{\delta p'_0}{v p'_0} \quad (63-7)$$

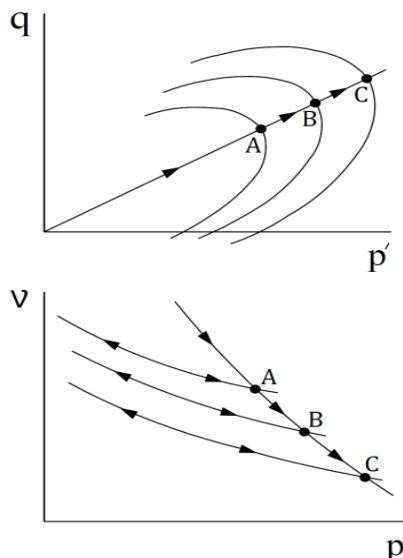
و تغییر کل در حجم مخصوص برابر است با:

$$\delta v = -\lambda \frac{\delta p'_0}{p'_0} \quad (64-7)$$

که با انتگرال گیری، مکان هندسی نقاط A، B و C یا همان معادله خط فشردگی نرمال به دست می‌آید:

$$v = v_{\lambda} - \lambda \ln p'$$

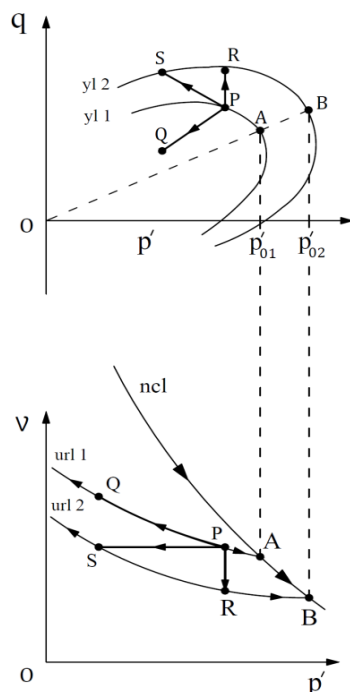
(۶۵-۷)



شکل ۷-۱۵: مکان هندسی تنشهای تسلیم و نقاط نظیر آنها بر خط فشردگی نرمال

برای توضیح بیشتر در زمینه تفکیک کرنش حجمی الاستیک و پلاستیک، پاسخ خاک رسی در معرض سه مسیر تنش PQ، PR و PS در سطح تسلیم yl-1 که از نقطه P شروع می‌شوند را در نظر بگیرید (شکل ۷-۱۶). مسیر PQ به سمت داخل تابع تسلیم حرکت می‌کند در نتیجه پاسخی کاملاً الاستیک را در بر خواهد داشت. در صفحه تراکم $v - p'$ این مسیر بر روی خط باربرداری-بارگذاری مجدد url-1 حرکت می‌کند که تغییر حجم و تغییر کرنش الاستیک آن به ترتیب توسط روابط (۷-۴۷) و (۷-۴۹) به دست می‌آید. این تغییرات الاستیک، تغییری در مقدار تنش پیش تحکیمی p'_0 ایجاد نمی‌کند.

مسیر تنش PR در جهت قائم به سمت بالا در صفحه تنش $q - p'$ در p' ثابت حرکت می‌کند. حالت تنش موثر جدید بر روی تابع تسلیم جدید yl-2 قرار می‌گیرد که می‌توان آن را با فشردگی نرمال از p'_{01} تا p'_{02} یا حرکت بر خط فشردگی نرمال ncl از A تا B در شکل ۷-۱۶ بیان نمود. تابع تسلیم جدید yl-2 با خط باربرداری-بارگذاری مجدد url-2 همراه است که از نقطه B بر خط فشردگی نرمال آغاز می‌گردد. طبق رابطه (۷-۴۹) و با توجه به عدم تغییر تنش موثر میانگین p' ، کرنش حجمی الاستیک وجود نداشته و بنابراین تغییر حجم نمونه در این مسیر تنش بصورت کاملاً پلاستیک خواهد بود. تغییر حجم و کرنش حجمی پلاستیک به ترتیب از روابط (۷-۵۷) و (۷-۵۸) قابل محاسبه خواهند بود.



شکل ۷-۱۶: بررسی کرنشهای حجمی ایجاد شده در مسیرهای مختلف تنش (وود ۱۹۹۰)

مسیر تنش PS حالتی را نشان می‌دهد که طی آن تغییر در تنش موثر میانگین p' دقیقاً به اندازه مقدار نظیر در مسیر تنش PQ است اما نقاط طوری انتخاب شده اند که علاوه بر قرارگیری نقطه S بر منحنی تسلیم انبساط یافته yl-2، قرار دارد بلکه حجم مخصوص آن در تمامی نقاط مسیر تنش به اندازه حجم اولیه در نقطه P می‌باشد. عبارت دیگر، تصویر این مسیر تنش در صفحه تراکم $v-p'$ ، خط افقی PS به موازات محور p' خواهد بود. در این مسیر، هر دو مولفه کرنشهای حجمی الاستیک و پلاستیک تغییر کرده اما تغییر حجم کلی صفر است. لذا داریم:

$$\delta v = \delta v^e + \delta v^p = 0 \quad (۶۶-۷)$$

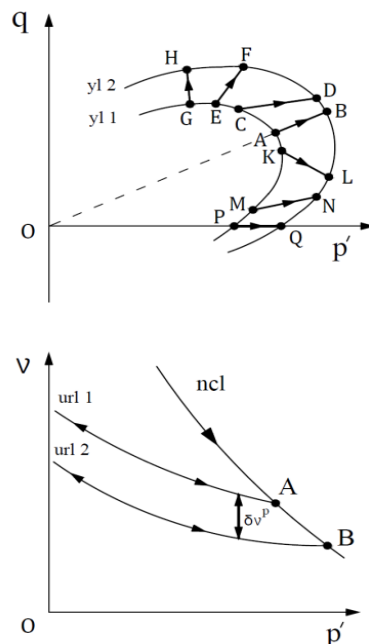
همچنین بر حسب کرنش حجمی می‌توان نوشت:

$$\delta \varepsilon_v = \delta \varepsilon_v^e + \delta \varepsilon_v^p = 0 \quad (۶۷-۷)$$

همانطور که در شکل (۷-۱۶) مشاهده می‌شود در مسیر PS، $\delta p' < 0$ است که طبق رابطه (۷-۴۹) منتج به $\delta \varepsilon_v^e < 0$ می‌شود. برای صفر ماندن کرنش حجمی کل در این مسیر تنش زهکشی نشده باید کرنش پلاستیک حجمی ایجاد شده مثبت باشد ($\delta \varepsilon_v^p > 0$). بدین ترتیب بر اساس رابطه (۷-۵۸) $\delta p'_0 > 0$ و منحنی تسلیم منبسط خواهد شد.

۷-۸-۵- کرنش برشی پلاستیک

در بخش قبلی دیدیم که تغییر در کرنش حجمی پلاستیک سبب تغییر در اندازه سطح تسلیم خواهد شد. تغییر حجم پلاستیک مثبت $\delta v^p > 0$ باعث بسط تابع تسلیم از y_{l-1} به y_{l-2} می‌شود. این انبساط ممکن است از طریق مسیرهای تنش مختلف AB, CD, EF, GH, KL, MN و یا PQ در شکل (۷-۱۷) بوجود آید. چون تغییر در تنش میانگین p' در هر کدام از این مسیرها متفاوت است، تغییر حجم پلاستیک نظیر آنها قطعاً متفاوت خواهد بود. ولی از آنجاییکه هر مسیر اتصالی بین دو تابع تسلیم ثابت را ایجاد کرده است، تغییر در تنش تحکیمی p'_0 در تمامی این مسیرها (که نشان دهنده‌ی اندازه تابع می‌باشد) یکسان است. و بدین ترتیب تغییر حجم پلاستیک در تمامی آنها مشابه خواهد بود. این موضوع تفاوتی اساسی در نحوه محاسبه تغییر حجم پلاستیک و پلاستیک می‌باشد.

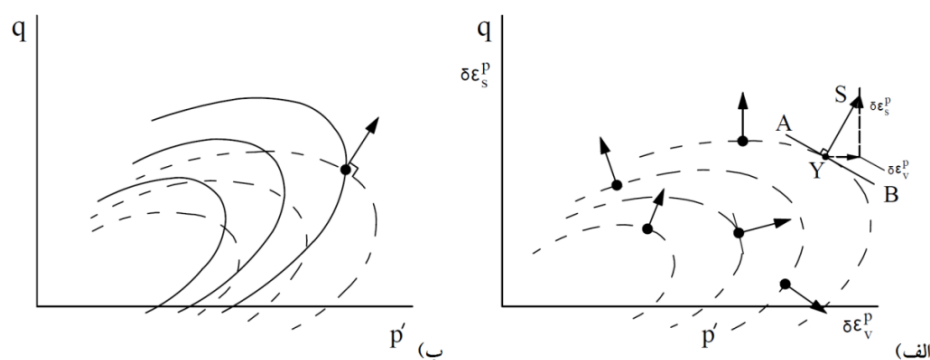


شکل ۷-۱۷: مسیرهای تنش متفاوت بین دو تابع تسلیم (وود ۱۹۹۰)

کرنش های حجمی پلاستیک یکی از اجزای تغییر شکل های پلاستیک می‌باشد و لازم است مقدار کرنشهای برشی پلاستیک ایجاد شده نیز محاسبه گردد. برای تعیین کرنشهای برشی پلاستیک لازم است تا جهت بردار کرنش پلاستیک در روی سطح تسلیم معین گردد. این موضوع در ادامه بیشتر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۷-۸-۶- تابع پتانسیل پلاستیک^۱

مطابق شکل (۷-۱۸-الف) فرض شود که تسلیم در وضعیت تنش Y در صفحه $q - p'$ اتفاق افتد. وقوع تسلیم همراه با ایجاد جزء کرنشهای پلاستیک حجمی $\delta\epsilon_v^p$ و کرنشهای پلاستیک برشی $\delta\epsilon_s^p$ رخ میدهد. در نقطه Y مقادیر کرنش پلاستیک حجمی و کرنش پلاستیک برشی، نظیر محورهای تنش موثر میانگین p' و تنش انحرافی q ترسیم می‌شوند. جمع برداری این دو مولفه، بردار نمو کرنش پلاستیک کل (YS) را نتیجه می‌دهد. خط AB در نقطه Y عمود بر این بردار ترسیم می‌شود. می‌توان برای هر مسیر تنش انتخابی دیگر نیز مولفه های بردار کرنش پلاستیک را رسم و خط عمود بر این بردار در نقطه تسلیم را رسم کرد. این خطوط تشکیل سری منحنیهایی را می‌دهند که مطابق شکل ۷-۱۸-الف بردارهای نمو کرنش پلاستیک بر آنها عمودند. این منحنی ها، توابع پتانسیل پلاستیک نام دارند. به عنوان نمونه، منحنی پتانسیل گذرنده از حالت تنش Y که تسلیم در آن رخ داده، به همراه بردار جزء کرنش پلاستیک که نسبت اجزای مختلف کرنش پلاستیک را نشان میدهد ارائه شده است. بر اساس مواردی که قبلاً ذکر شد، جزء کرنش پلاستیک حجمی با تغییرات اندازه تابع تسلیم مرتبط می‌باشد. با استفاده از توابع پتانسیل پلاستیک ذکر شده، مکانیزم تغییر شکل های پلاستیک به ویژه تغییرات کرنش برشی پلاستیک (مرتبط با شکل تابع) و تغییرات در کرنش حجمی پلاستیک (مرتبط با اندازه تابع) بیان خواهد شد.



شکل ۷-۱۸: (الف) بردارهای نمو کرنش پلاستیک عمود بر منحنیهایی پتانسیل (ب) منحنیهایی پتانسیل و تسلیم (وود ۱۹۹۰)

۷-۸-۷- تعامد^۲ و جریان همبسته^۳

برای تعیین رفتار پلاستیک خاک، نیاز به هر دو تابع تسلیم و پتانسیل می‌باشد. یکسان در نظر گرفتن توابع تسلیم و پتانسیل پلاستیک در یک مدل رفتاری بسیار سودمند است زیرا تعداد معادلات و روابطی که برای توصیف پاسخ پلاستیک مورد نیاز است را کاهش می‌یابد. بعلاوه، یکی بودن این دو

1 Plastic potential function

2 Normality

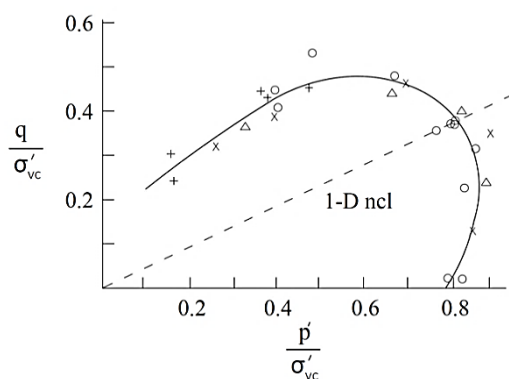
3 Associated flow

تابع در مواردی که مدلسازی عددی با استفاده از مدل الاستو پلاستیک خاک در برنامه المان محدود انجام می‌گیرد، بسیار مفید خواهد بود و حل معادلاتی که در پروسه تحلیل وجود دارند سریع تر و اعتبار مدلسازی عددی راحت تر تضمین می‌شود.

انطباق سطوح تسلیم و پتانسیل پلاستیک به نام قانون جریان همبسته شناخته می‌شود. در این وضعیت گفته می‌شود که خاک از اصل تعامد پیروی می‌نماید زیرا بردار جزء کرنش پلاستیک عمود بر سطح تسلیم می‌باشد. رفتار تغییر شکل های پلاستیک یا جریان پلاستیک، با تعامد بر سطوح تسلیم همراه است. بدین ترتیب، تعامد و جریان همراه دو واژه مشابه برای تبیین رفتار پلاستیک مصالح می‌باشند.

شکل (۷-۱۹) سطوح تسلیم نمونه های رس وینیپگ به دست آمده از اعماق مختلف در فضای

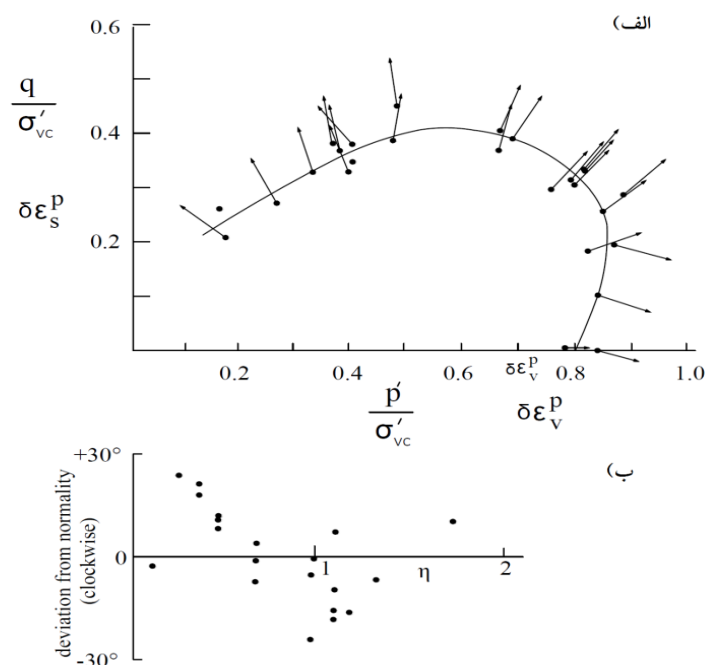
تنش بی بعد $\frac{q}{\sigma'_{vc}} - \frac{p'}{\sigma'_{vc}}$ به تنش نرمال تحکیمی σ'_{vc} را نشان می‌دهد. گراهام و همکاران (۱۹۸۳) همچنین کرنش های قبل و بعد از تسلیم را اندازه گیری و بردار نمو کرنش پلاستیک را رسم نمودند (شکل ۷-۲۰ الف). بر این اساس بردارهای نموی کرنش پلاستیک عمود بر منحنی تسلیم می‌باشند. بررسی های دقیق تر نشان داده که انحراف از تعامد این بردارها نهایتاً ۲۰ درجه است که متوسط آن ۱ درجه می‌باشد (شکل ۷-۲۲ ب).



شکل (۷-۱۹): منحنی های تسلیم چهار نمونه رس وینیپگ^۱ بدست آمده از اعماق مختلف و نرمال شده به تنش پیش تحکیمی (گراهام^۲ و همکاران، ۱۹۸۳)

1 Winnipeg

2 Graham



شکل ۷-۲۰: (الف) بردارهای نمو کرنش پلاستیک در نقاط تسلیم بدست آمده از آزمایشات سه محوری بر نمونه های دست نخورده رس وینیپگ (ب) انحراف از تعامد برای رس وینیپگ (گراهام و همکاران، ۱۹۸۳)

داده های مربوط به خاک رس، عمود بودن بردارهای نمو کرنش پلاستیک بر تابع تسلیم را نشان می دهند. اصل تعامد برای ماسه ها کمتر پذیرفته شده و در اغلب مدلهای الاستو پلاستیک که برای پیش بینی پاسخ این خاک ها استفاده می شود، فرض بر تفاوت توابع تسلیم و پتانسیل پلاستیک است که به آن قانون جریان غیر همراه^۱ اطلاق می گردد (لده^۲ ۱۹۷۷، ورمیر^۳ ۱۹۸۴). همچنین پورووشاسب^۴ و همکاران (۱۹۶۷) با آزمایشات سه محوری فشاری که بر روی ماسه اتاوا^۵ انجام دادند، به این نتیجه رسیدند که فرض تعامد بردار نمو کرنش پلاستیک بر تابع تسلیم باعث تعیین کرنش های پلاستیک حجمی منفی بزرگتر (انبساط یا اتساع حجمی پلاستیک بیشتر) خواهد شد.

1 Non-associated flow rule

2 Lade

3 Vermeer

4 Poorooshasb

5 Ottawa sand

۷-۹- رفتار پتانسیل پلاستیک

هنگامی که وضعیت تنش در مسیر تنش مورد نظر به سطح تسلیم F می‌رسد، مصالح دچار تغییر شکل پلاستیک می‌شوند. این حالت جریان پلاستیک نامیده می‌شود. رابطه جزء کرنش پلاستیک و تابع پتانسیل پلاستیک Q به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (۶۸-۷)$$

این رابطه نیز به قانون تعامد^۱ مشهور می‌باشد زیرا بر اساس تعامد جزء کرنش تسلیم بر تابع پتانسیل بدست می‌آید. در این رابطه Q تابع پتانسیل پلاستیک و λ فاکتور اسکالر و مثبتی برای تناسب می‌باشد.

اصول کلی پلاستیسیته عموماً بر تحقیقات دراگر^۲ در دهه ۵۰ توسعه یافته است. اساس تئوری پلاستیسیته دراگر بر چهار شرط به شرح زیر استوار می‌باشد.

۷-۹-۱- شرط پیوستگی^۳

در صورتیکه وضعیت تنش σ_{ij} روی سطح تسلیم در نظر گرفته شود، تغییر در نمو تنش یا $d\sigma_{ij}$ می‌تواند به صورت بارگذاری، باربرداری و یا بارگذاری خنثی انجام گیرد، مشروط بر آنکه مسیر تنش به سمت خارج، داخل و یا مماس بر سطح تسلیم واقع شود. در شرط پیوستگی، امکان ایجاد کرنشهای پلاستیک تنها برای بارگذاری امکان پذیر بوده و باربرداری یا بارگذاری خنثی منجر به ایجاد کرنشهای پلاستیک نخواهند شد.

۷-۹-۲- شرط یکتایی^۴

بر اساس شرط یکتایی، برای یک جسم تحت تأثیر مجموعه‌ای از نیروهای خارجی، تنشها و کرنشهای الاستیک و پلاستیک منتج یکتا می‌باشند.

۷-۹-۳- شرط برگشت ناپذیری^۵

بر اساس این شرط با توجه به بازگشت ناپذیری کرنشهای پلاستیک، کار انجام شده توسط تغییر شکلهای پلاستیک مثبت خواهد بود.

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p > 0 \quad (۶۹-۷)$$

1 Normality rule

2 Drucker

3 Condition of continuity

4 Condition of uniqueness

5 Condition of irreversibility

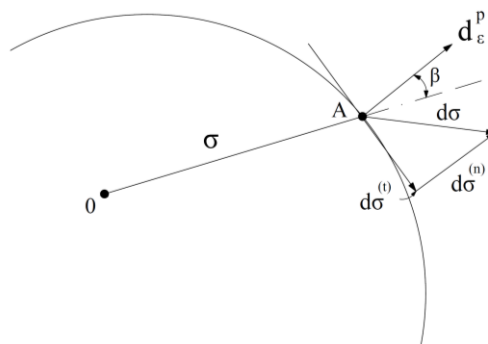
۷-۹-۴- شرط سازگاری^۱

بر اساس شرط سازگاری، بارگذاری از یک وضعیت پلاستیک به وضعیت پلاستیک دیگر خواهد رسید. بعبارت دیگر تا زمان قرارگیری ماده در وضعیت پلاستیک، دائماً معیار تسلیم ارضا می‌گردد.

برای جزء تنش $d\sigma$ در شکل (۷-۲۱) می‌توان نوشت:

$$d\sigma = d\sigma^{(n)} + d\sigma^{(t)} \quad (7-70)$$

اما بر اساس شرط پیوستگی، کار پلاستیک انجام شده توسط تنش مماس بر سطح تسلیم یعنی $d\sigma^{(t)}$ صفر خواهد بود، لذا کرنش پلاستیک فقط در راستای قائم بر سطح تسلیم ایجاد خواهد شد و این تاییدی بر قانون تعامد است.



شکل ۷-۲۱: اثبات تعامد با استفاده از شروط پیوستگی و سازگاری (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

مثال ۱: برای معیار تسلیم ون میزس قانون تعامد را بکار ببرید.

$$f = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - k^2$$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = \frac{2}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_2 - \frac{1}{3}\sigma_3, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = \frac{2}{3}\sigma_2 - \frac{1}{3}\sigma_3 - \frac{1}{3}\sigma_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = \frac{2}{3}\sigma_3 - \frac{1}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_2$$

$$\Rightarrow d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$\Rightarrow d\varepsilon_1^p = \frac{\lambda}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3), \quad d\varepsilon_2^p = \frac{\lambda}{3}(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1), \quad d\varepsilon_3^p = \frac{\lambda}{3}(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

1 Condition of consistency

مثال ۲: برای معیار تسلیم ترسکا قانون تعامد را بکار ببرید.

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - k$$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Rightarrow d\varepsilon_1^p = \frac{1}{2}\lambda, \quad d\varepsilon_2^p = 0, \quad d\varepsilon_3^p = -\frac{1}{2}\lambda$$

۷-۱۰- کار پلاستیک^۱

مفهوم کار پلاستیک نقش مهمی در قوانین رفتاری در پلاستیسیته دارد. کار کل انجام شده در واحد حجم برای جزء کرنش ایجاد شده از قرار زیر می‌باشد:

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (۷-۷۱)$$

جزء کرنش کل نیز از دو بخش الاستیک و پلاستیک به شرح زیر تشکیل شده است:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (۷-۷۲)$$

$\Rightarrow$

$$dW = \sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p) = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = dW^e + dW^p \quad (۷-۷۳)$$

با توجه به آنکه کار الاستیک قابل برگشت می‌باشد، این بخش برابر صفر بوده و تنها بخش باقیمانده کار پلاستیک خواهد بود. از طرفی در فلزات، کار انجام شده توسط تنشهای هیدرواستاتیک صفر است لذا تنها بخش باقیمانده کار پلاستیک انجام شده توسط تنشهای انحرافی خواهد بود:

$$dW^p = S_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (۷-۷۴)$$

۷-۱۱- سخت شوندگی پلاستیک

رفتار سخت شوندگی در دو سیستم مختلف قابل بحث می‌باشد. بر اساس نظر اول، تابع تسلیم تابعی از کار پلاستیک انجام شده حین بارگذاری است. عبارت دیگر بزرگ شدن سطح تسلیم با افزایش توام تنشها و کار پلاستیک بر اساس رابطه زیر ممکن است.

$$f = f(\sigma_{ij}, W^p) \quad (۷-۷۵)$$

در سیستم دوم نیز مکانیزم تسلیم تنها به عنوان تابعی از تنها کرنشهای پلاستیک لحاظ می‌گردد. بنابراین سخت شوندگی و بسط سطح تسلیم تابعی از کرنشهای پلاستیک ایجاد شده خواهد بود.

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon^p) \quad (7-76)$$

در مفاهیم تئوری پلاستیسیته این دو معیار هم ارز می‌باشند.

۷-۱۲- ارتباط تنش- کرنش در پلاستیسیته کلاسیک

فرض می‌شود که تابع تسلیم خاک به صورت زیر تعریف شود:

$$f(p', q, p'_0) = 0 \quad (7-77)$$

همچنین تابع پتانسیل خاک به صورت در نظر گرفته می‌شود:

$$Q(p', q, \xi) = 0 \quad (7-78)$$

در این رابطه ξ پارامتر کنترل کننده اندازه تابع پتانسیل پلاستیک است. با توجه به قانون تعامد خواهیم داشت:

$$\delta \varepsilon_v^p = \chi \frac{\partial Q}{\partial p'} \quad (7-79)$$

$$\delta \varepsilon_s^p = \chi \frac{\partial Q}{\partial q} \quad (7-80)$$

χ یک ضریب است که بر اساس پارامترهای سخت شوندگی مفروض برای خاک قابل استخراج است. با فرض تغییر در اندازه تابع تسلیم با تغییر در تنش تحکیمی p'_0 ، نرخ تغییرات آن با نمو کرنش حجمی پلاستیک و کرنش برشی پلاستیک که بیانگر قانون سخت شوندگی کرنشی است تعیین می‌شود:

$$\delta p'_0 = \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_v^p} \delta \varepsilon_v^p + \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_s^p} \delta \varepsilon_s^p \quad (7-81)$$

فرم دیفرانسیلی تابع تسلیم نیز به صورت زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial p'} \delta p' + \frac{\partial f}{\partial q} \delta q + \frac{\partial f}{\partial p'_0} \delta p'_0 = 0 \quad (7-82)$$

با ترکیب روابط (7-79) تا (7-82)، پارامتر χ به دست می‌آید:

$$\chi = - \left(\frac{\partial f}{\partial p'} \delta p' + \frac{\partial f}{\partial q} \delta q \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial p'_0} \left(\frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial Q}{\partial p'} + \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_s^p} \frac{\partial Q}{\partial q} \right) \right) \quad (7-83)$$

با جایگذاری χ در روابط (7-79) و (7-80)، فرم عمومی رابطه تنش-کرنش پلاستیک بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \delta \varepsilon_v^p \\ \delta \varepsilon_s^p \end{bmatrix} = \frac{-1}{\left[\frac{\partial f}{\partial p'_0} \left[\frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial Q}{\partial p'} + \frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_s^p} \frac{\partial Q}{\partial q} \right] \right]} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial Q}{\partial p'} & \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p'} \\ \frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p' \\ \delta q \end{bmatrix} \quad (۸۴-۷)$$

بر اساس این رابطه، اگر توابع تسلیم و پتانسیل پلاستیک بر یکدیگر منطبق باشند و عبارتی خاک از قانون جریان همبسته تبعیت نماید، ماتریس رفتاری در رابطه (۸۴-۷) متقارن خواهد شد.

۷-۱۳- شکل سطح تسلیم

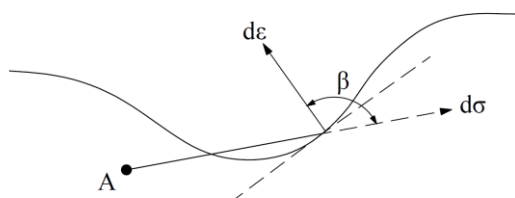
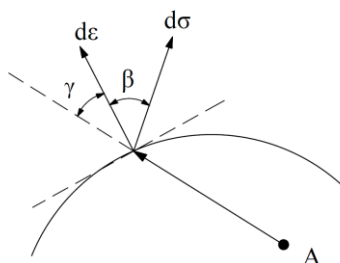
با توجه به شکل (۷-۲۲) و شرط برگشت ناپذیری می‌توان نوشت:

$$\sigma \cdot d\varepsilon^p > 0$$

$\Rightarrow$

$$|\sigma| |d\varepsilon^p| \cos \beta > 0 \quad (۸۵-۷)$$

این شرط نشان دهنده الزام در حاده بودن زاویه β در شکل خواهد بود. بر این اساس مشخص می‌شود که برای ارضای شرط حاده بودن این زاویه باید همواره تقعر سطح تسلیم به سمت پایین و به عبارتی دیگر تحدب آن به سمت بالا باشد.



شکل ۷-۲۲: تعیین تقعر و تحدب تابع تسلیم (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

تمرینات فصل هفتم

۱- کدامیک از فرضیات معیار Levy-Mises در تعیین کرنشهای پلاستیک نیست؟

الف- ارتباط تنش و کرنش انحرافی مستقل از تنش هیدرواستاتیکی است.

ب- جزء کرنش کل برابر با مجموع جزء کرنش الاستیک و پلاستیک است.

ج- تحت فشار همه جانبه، ماده بصورت تراکم ناپذیر عمل می‌نماید.

د- محورهای تنش اصلی و کرنش اصلی بر یکدیگر منطبق می‌باشند.

۲- کدامیک صحیح نیست؟

الف- در رفتار الاستیک، کرنشها مستقل از مسیر تنش اعمال شده می‌باشند.

ب- کرنشهای پلاستیک تحت تاثیر مسیرهای تنش مختلف تغییر می‌نمایند.

ج- برای تعیین دقیق پارامترهای رفتاری، استفاده از نتایج آزمایش در مسیرهای تنش مختلف بهتر است.

د- در یک مسئله مهندسی، خاک تحت تاثیر مسیر تنش بارگذاری واحد قرار می‌گیرد.

۳- نقش مسیر تنش (stress path) را در تعیین پارامترهای مدل رفتاری توضیح دهید.

۴- مدل الاستو پلاستیک سخت شونده حجمی نشان داده شده در زیر رفتار یک نمونه خاک را توصیف می‌کند.

$$\delta p'_0 = \nu p'_0 \frac{\delta \varepsilon_v^p}{\lambda - \kappa}$$

و کرنش حجمی الاستیک آن به صورت زیر می‌باشد:

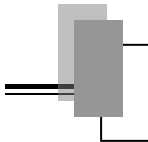
$$\delta \varepsilon_v^e = \kappa \frac{\delta p'}{\nu p'}$$

نشان دهید که اگر مکان هندسی و مسیرهای تنش موثر زهکشی نشده بر حسب p' و $\eta = \frac{q}{p'}$

ترسیم شوند، آنگاه در هر مقداری از η نسبت شیب هر دو منحنی برابر است با: $\Lambda = 1 - \kappa/\lambda$

فصل هشتم

کاربرد پلاستیسیته در مدل‌سازی رفتار مکانیکی خاک‌ها



۸-۱- مقدمه

در فصل قبل با مصالحی سر و کار داشتیم که رفتار و تسلیم آنها مستقل از نامتغیر اول تانسور تنش و یا تنش موثر میانگین بود. به این مواد، مصالح غیراصطکاکی^۱ نیز می‌گویند. در مصالح خاکی این نوع رفتار وجود ندارد و مقاومت آنها به شدت تحت تاثیر تنش هیدرواستاتیک خواهد بود. بر خلاف فلزات، عموماً خاک‌ها با ازدیاد تنش هیدرواستاتیک تغییر حجم زیادی از خود نشان می‌دهند و به مقاومت آنها نیز افزوده می‌شود. البته رفتار در خاک‌های رسی در شرایط زهکشی نشده را می‌توان تا حدی شبیه به فلزات لحاظ نمود و از مدلهای رفتاری قبلی برای آن استفاده کرد. زیرا برای این مصالح نیز با افزایش فشار همه جانبه، تغییری در مقاومت برشی زهکشی نشده مشاهده نمی‌نماییم ($\phi = 0$). اما بصورت کلی، در هر مصالحی که رفتار سخت شونده با ازدیاد تنش‌های هیدرواستاتیک مشاهده شود، معیارهای تسلیم ارائه شده در فصل قبل مانند ترسکا و ون میزس مناسب نخواهند بود. در این بخش به بررسی رفتار و مصالح اصطکاکی پرداخته می‌شود.

1 Non-frictional material

۲-۸- معیار گسیختگی موهر-کولمب

بر اساس معیار گسیختگی موهر-کولمب، مقاومت برشی، با افزایش تنش نرمال بر صفحه گسیختگی ازدیاد می‌یابد.

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi \quad (۱-۸)$$

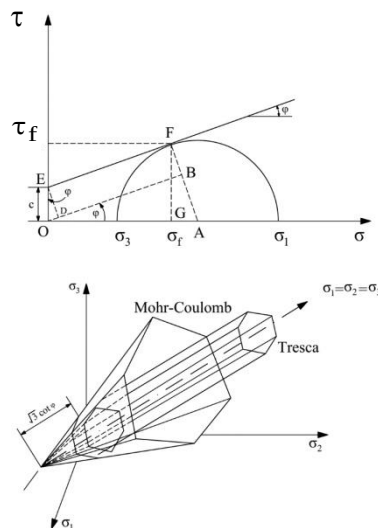
در این رابطه τ مقاومت برشی، c چسبندگی و φ زاویه اصطکاک خاک خواهد بود. این معیار بصورت شماتیک در شکل (۱-۸) نشان داده شده است. معیار موهر-کولمب را می‌توان با استفاده از تنش‌های اصلی نیز بیان نمود. بر اساس شکل (۱-۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= AB + BF \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= OA \sin \varphi + c \cos \varphi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi + c \cos \varphi \end{aligned} \quad (۲-۸)$$

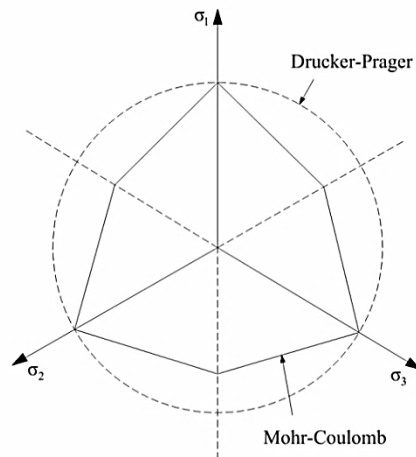
در این رابطه σ_3, σ_1 تنشهای اصلی حداکثر و حداقل بوده و همانطور که مشخص است از تنش میانگین σ_2 صرفنظر شده است. با استفاده از مولفه‌های تانسور تنش، معیار فوق را می‌توان بصورت دیگر نیز نوشت:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 + \sigma_{13}^2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (۳-۸)$$

معیار ارائه شده توسط معادلات ذکر شده بیانگر یک شش ضلعی نامتقارن و در فضا یک هرم بوده که در شکل (۱-۸) نشان داده شده است. تصویر این معیار بر صفحه پی در شکل (۲-۸) ارائه گردیده است.



شکل ۱-۸: معیار گسیختگی موهر-کولمب در شرایط دو و سه بعدی (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)



شکل ۸-۲: تصویر معیارهای موهر-کولمب و دراگر-پراگر بر صفحه پی (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

بر اساس معیار موهر کولمب، مقاومت نظیر شرایط تسلیم در فشار بیشتر از مقدار نظیر در شرایط کشش خواهد بود. این موضوع بیانگر وابستگی رفتار مکانیکی ماده به نامتغیر سوم تانسور تنش است. اما با توجه به عدم تأثیرپذیری معیار از تنش اصلی میانی، امکان ارائه فرمولاسیون آن بر اساس شش مولفه تانسور تنش مشکل خواهد بود و بعبارت دیگر امکان ارائه فرمولاسیون بر اساس نامتغیرهای تنش پیچیده است. البته با استفاده از پارامتر جدید θ می‌توان شکل تازه‌ای از معیار تسلیم موهر-کولمب را ارائه نمود. پارامتر θ بر اساس رابطه زیر ارائه می‌گردد.

$$\theta = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} \right) \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{6} \quad (۴-۸)$$

بدین ترتیب با استفاده از J_1 ، J_{2D} و θ به عنوان سری جدید نامتغیرها، معیار موهر-کولمب در حالت سه بعدی فضای تنش به شرح زیر ارائه می‌گردد:

$$f = J_1 \sin \varphi + \sqrt{J_{2D}} \cos \theta - \frac{\sqrt{J_{2D}}}{3} \sin \varphi \sin \theta - c \cos \varphi = 0 \quad (۵-۸)$$

نکته قابل ذکر آن است که در شرایط $\varphi = 0$ فرمولاسیون معیار موهر کولمب به معیار ترسکا تبدیل خواهد شد.

۳-۸- تعیین پارامترهای معیار

پارامترهای c و ϕ از آزمایشهای مصطلح مکانیک خاک مانند برش مستقیم یا سه محوری قابل محاسبه هستند. برای تعیین این پارامترها، انجام حداقل دو آزمایش برای ترسیم پوش مشترک خطی دوایر موهر الزامی خواهد بود.

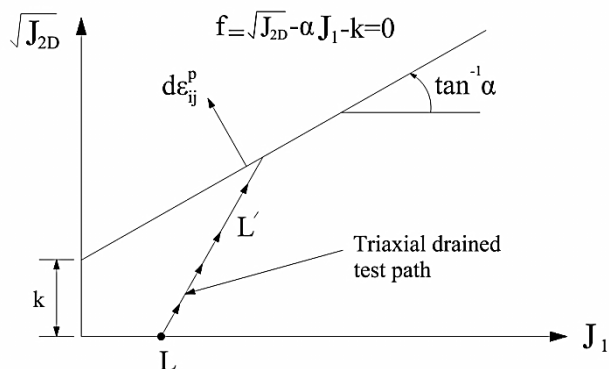
۴-۸- مدل دراگر-پراگر^۱

در این مدل برای در نظرگیری اثر تمامی تنشهای اصلی و استفاده از نامتغیرهای مرسوم تانسور تنش، رابطه زیر برای سطح تسلیم پیشنهاد گردید.

$$f = \sqrt{J_{2D}} - \alpha J_1 - k \quad (۶-۸)$$

در این رابطه α ، K پارامترهای مثبت و J_1 نامتغیر اول تانسور تنش است. J_{2D} نیز نامتغیر دوم تانسور تنش انحرافی خواهد بود. مطابق شکل (۳-۸) این رابطه یک خط مستقیم در فضای $J_1 - \sqrt{J_{2D}}$ خواهد بود. شکل معیار در صفحه پی یک دایره به شکل (۲-۸) و در فضای سه بعدی نیز یک مخروط است.

وقتی مسیر تنش به معیار تسلیم برخورد می‌نماید کرنشهای پلاستیک ایجاد می‌شود که مطابق شکل (۳-۸) و بر اساس قانون تعامد بر آن عمود خواهند بود.



شکل ۳-۸: تعامد کرنشهای پلاستیک بر سطح تسلیم دراگر-پراگر (دسای و سیریاردان ۱۹۸۴)

۵-۸- تعیین پارامترها

پارامترهای مدل دراگر-پراگر، شیب و عرض از مبدأ معیار در فضای $J_1 - \sqrt{J_{2D}}$ می‌باشند. برای تعیین پارامترها نیاز به انجام حداقل دو آزمایش برش مستقیم و یا سه محوری معمولی می‌باشد. با قرار دادن نقاط تسلیم در فضای تنش $J_1 - \sqrt{J_{2D}}$ ، معیار تسلیم مشخص می‌گردد. مقادیر α ، K بر

1 Drucker- Prager

حسب زاویه اصطکاک داخلی φ و چسبندگی c قابل تبیین می‌باشند. با توجه به تفاوت C, φ بدست آمده از آزمایش سه محوری و آزمایشات کرنش مسطح روابط زیر قابل پیشنهاد است. (دسای و سیریاردان ۱۹۸۴)

$$\text{سه محوری:} \quad \alpha = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)} \quad \kappa = \frac{6c \cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)} \quad (۷-۸)$$

$$\text{کرنش مسطح:} \quad \alpha = \frac{\tan\varphi}{(9+12\tan^2\varphi)^{1/2}} \quad \kappa = \frac{3c}{(9+12\tan^2\varphi)^{1/2}} \quad (۸-۸)$$

۶-۸- محدودیتهای مدل دراگر-پراگر

به محض برخورد مسیر تنش به سطح تسلیم، معیار تسلیم ارضا می‌شود. بنابراین میتوان گفت در خلال ایجاد کرنشهای پلاستیک، همواره تغییر در f صفر خواهد بود.

$$df = 0 \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (۹-۸)$$

با جایگذاری معادله (۶-۸) یعنی سطح تسلیم دراگر-پراگر در معادله (۹-۸) می‌توان نوشت:

$$df = \left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}} - \alpha\delta_{ij} \right) d\sigma_{ij} = 0 \quad \begin{cases} f = \sqrt{J_{2D}} - \alpha J_1 - k \\ J_{2D} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \end{cases}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}} - \alpha\delta_{ij} \right) \quad (۱۰-۸)$$

با توجه به رابطه فوق کرنش پلاستیک حجمی از قرار زیر خواهد بود:

$$d\varepsilon_{ii}^p = \lambda \left(\frac{\sigma_{ii}}{2\sqrt{J_{2D}}} - \alpha \right) = -3\alpha\lambda \quad (۱۱-۸)$$

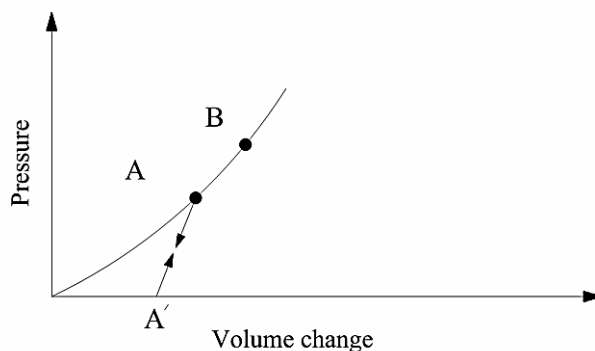
بدین ترتیب نتیجه می‌شود که کرنش پلاستیک حجمی همواره دارای علامت منفی خواهد بود. این موضوع حاکی از افزایش حجم و یا وقوع اتساع در زمان وقوع تسلیم تحت این معیار خواهد بود. باید توجه داشت که داده‌های آزمایشگاهی برای رسهای عادی تحکیم یافته و یا ماسه سست نشانگر کاهش حجم و یا رفتار انقباضی در زمان تسلیم و گسیختگی است. بنابراین، معیار دراگر-پراگر رابطه رفتاری مناسبی برای این خاکها نخواهد بود. به همین ترتیب معیار دراگر-پراگر برای مدلسازی عددی مسائلی چون روانگرایی خاکهای ماسه‌ای و یا تراکم دینامیکی خاکها که در آنها با خاکهای سست مواجه هستیم و تغییر حجمها از نوع فشاری است مناسب نخواهد بود.

۸-۷- بروز رفتار سخت شونده تحت تنش هیدرواستاتیک

در بسیاری از مصالح با منشاء ژئولوژیکی، رفتار ماده از مراحل ابتدایی بارگذاری با تغییر شکلهای پلاستیک توأم می‌باشد. به عبارت دیگر، بطور قطع با باربرداری مقداری تغییر شکل در آن باقی خواهد ماند که برگشت پذیر نخواهد بود. با توجه به تعریف تابع تسلیم^۱، ماده بطور پیوسته در شرایط تسلیم قرار می‌گیرد تا به سطح تسلیم نهایی که توسط f مشخص می‌شود و نظیر حالت گسیختگی است برسد. این سطح گسیختگی^۲ در واقع همان سطح تسلیم نهایی ماده خواهد بود.

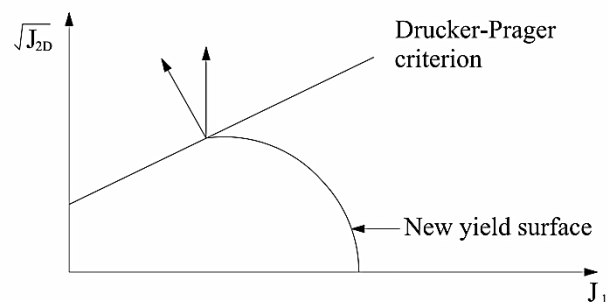
در خلال بارگذاری هیدرواستاتیک نیز، برخی مواد از جمله خاکها دچار تغییر شکل پلاستیک یا تسلیم می‌شوند ولی ممکن است لزوماً به گسیختگی منجر نگردد. همانطور که در شکل (۸-۴) نشان داده شده، حین بارگذاری و باربرداری هیدرواستاتیک امکان ایجاد کرنشهای پلاستیک در مصالح وجود خواهد داشت. با توجه به مفاهیم یاد شده، می‌توان از یک سری سطوح تسلیم پیش رونده استفاده نمود. با توجه به آنکه تسلیم حین اعمال تنشهای هیدرواستاتیک نیز قابل مشاهده است این سطوح باید حتماً محور افقی J_1 را نیز قطع نمایند. این ایده اولین بار توسط دراگر مطرح و در شکل (۷-۵) نشان داده شده است. این سطوح تسلیم پیشرو را کلاhek^۳، می‌نامند.

حین تسلیم پیش رونده در ماده، مصالح رفتار سخت شونده را تجربه می‌نمایند و کار پلاستیک انجام شده نمادی از این رفتار خواهد بود. در این مواد وقتی وضعیت تنش از سطح تسلیم کنونی عبور می‌نماید، یک سطح تسلیم جدید که به کلاhek سخت شوندگی^۴ نامیده می‌شود ایجاد می‌گردد.



شکل (۸-۴): وقوع کرنشهای پلاستیک و تسلیم حین اعمال تنش هیدرواستاتیک در خاک

-
- 1 Yield
 - 2 Failure
 - 3 Cap
 - 4 Hardening cap



شکل ۸-۵: سطوح تسلیم پیش رونده (کلاهدک)

بر اساس اصول یاد شده پلاستیسیته در فصل پیشین، سطح تسلیم باید تقعری رو به پایین داشته باشد یا به عبارتی محدب^۱ باشد. بدین ترتیب دراکر، کمانهایی از دایره را به عنوان کلاهدک پیشنهاد نمود ولی شکلهای دیگری نیز توسط سایر محققین پیشنهاد شده است. در واقع شکل این سطح باید بر اساس داده های آزمایشگاهی تحت مسیرهای تنش مختلف تعیین شود. سطح تسلیم جدید، مطابق شکل (۸-۵) معیار دراکر-پراگر را در یک زاویه قطع می نماید. با توجه به یکنشهای پلاستیک مطابق شروط دراکر-پراگر، سطح تسلیم جدید باید در این نقطه بر معیار دراکر-پراگر مماس باشد. با توجه به آنکه در نقطه تقاطع با محور J_1 کرنشها فقط از نوع حجمی هستند و نباید مولفه برشی وجود داشته باشد، لذا معیار محور J_1 را تحت زاویه قائم قطع خواهد بود.

مثال (۸-۱): تعیین پارامترهای مدل موهر-کولمب و دراکر-پراگر

بر اساس نتایج آزمایشهای دانه بندی بر نمونه های اخذ شده از نقاط مختلف آبرفت سری A تهران، یک خاک ماسه ای شن دار در طبقه بندی Unified ارائه شده است. در زیر، خصوصیات فیزیکی خاک مذکور ارائه شده است. همچنین نتایج آزمایشهای سه محوری تحکیم یافته-زهکشی شده بر نمونه های با قطر ۱۰۰ میلیمتر و تراکم نسبی ۷۰ درصد در فشارهای دورگیر ۲۵، ۵۰ و ۱۰۰ کیلوپاسکال، در جدول ارائه شده است. پارامترهای مدلهای ترسکا، ون میزس، موهر-کولمب و دراکر-پراگر را از ۳ آزمایش CTC محاسبه نمایید.

$$G_s = 2.58, \quad \gamma_{\min} = 16 \text{ kN/m}^3, \quad \gamma_{\max} = 18.74 \text{ kN/m}^3$$

نام آزمایش	$\sigma_0 = \sigma_{oct}$ (kPa)	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)
CTC No.1	25	130
CTC No.2	50	196
CTC No.3	100	432

1 Convex

پاسخ: با استفاده از ۳ آزمایش CTC داریم:

1. $CTC, \sigma_0 = 25 kPa$

با رجوع به داده های مرتبط در جدول می توان نوشت:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = 130 kPa \Rightarrow \sigma_1 = 130 + \sigma_3 = 130 + 25 = 155 kPa$$

$$\sigma_1 + \sigma_3 = 155 + 25 = 180 kPa \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 65 kPa \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 90 kPa$$

$$J_{2D} = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = 5633.33$$

$$\sqrt{J_{2D}} = 75 kPa$$

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 155 + 25 + 25 = 205 kPa$$

2. $CTC, \sigma_0 = 50 kPa$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 196 kPa$$

$$\sigma_1 = 196 + 50 = 246 kPa$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{246 + 50}{2} = 148 kPa$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{246 - 50}{2} = 98 kPa$$

$$\sqrt{J_{2D}} = 113.16 kPa$$

$$J_1 = 246 + 50 + 50 = 346 kPa$$

3. $CTC, \sigma_0 = 100 kPa$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 432 kPa$$

$$\sigma_1 = 432 + 100 = 532 kPa$$

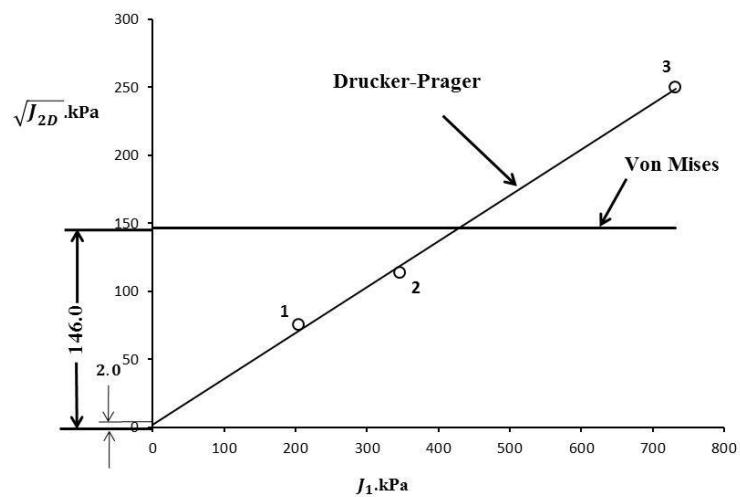
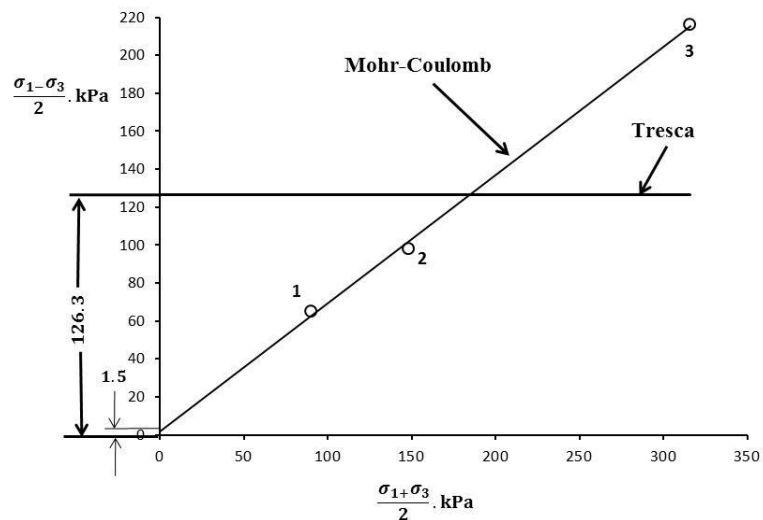
$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 316 kPa$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 216 kPa$$

$$\sqrt{J_{2D}} = 250 kPa$$

$$J_1 = 732 kPa$$

سه نقطه یافت شده در دو فضای $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ در برابر $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ و همچنین J_1 در برابر $\sqrt{J_{2D}}$ ترسیم می‌شوند. از فضای اول پارامترهای مدل‌های ترسکا و موهر-کولمب محاسبه و از فضای دوم پارامترهای مدل‌های ون میزس و دراکر-پراگر محاسبه می‌گردند.



Tresca:

$$\left. \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|_{\text{average}} = k = 126.33 \text{ kPa}$$

Mohr- Coulomb:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi + c \cos \varphi$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \sin \varphi, c = \frac{k}{\cos \varphi}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 0.676 \Rightarrow \varphi = 34^\circ$$

$$k = 1.5 \Rightarrow c = \frac{1.5}{\cos 34} = 1.81 \text{ kPa}$$

von Mises:

$$\sqrt{J_{2D}} \Big|_{\text{average}} = k = 146 \text{ kPa}$$

Drucker- Prager:

$$\sqrt{J_{2D}} - \alpha J_1 - k = 0 \Rightarrow k = 2.0 \quad \alpha = \frac{d\sqrt{J_{2D}}}{dJ_1} = 0.336$$

۸-۸-۱ ارتباط تنش- کرنش در معیار دراگر-پراگر

با توجه به رابطه (۸-۱۰) می توان نوشت:

$$d\varepsilon_{ij}^e = d\varepsilon_{ij} - \lambda \left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}} - \alpha \delta_{ij} \right) \Rightarrow$$

$$d\varepsilon_{mm}^e = d\varepsilon_{mm} + 3\alpha\lambda$$

$$d\sigma_{ij} = K d\varepsilon_{mm}^e S_{ij} + 2G \left(d\varepsilon_{ij}^e - \frac{d\varepsilon_{mm}^e}{3} \delta_{ij} \right) \quad (۸-۱۲)$$

$$d\sigma_{ij} = K [d\varepsilon_{mm} + 3\alpha\lambda] S_{ij} + 2G \left[d\varepsilon_{ij} - \frac{\lambda S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}} + \alpha\lambda\delta_{ij} - \frac{d\varepsilon_{mm}}{3} \delta_{ij} - \alpha\lambda\delta_{ij} \right] \quad (۸-۱۳)$$

با جایگذاری این رابطه بجای $d\sigma_{ij}$ در عبارت $df = 0$ داریم:

$$df = \left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}} - \alpha\delta_{ij} \right) d\sigma_{ij} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}} - \alpha \delta_{ij} \right) (d\varepsilon_{mm} + 3\alpha\lambda) K \delta_{ij} + 2G \left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}} - \alpha \delta_{ij} \right) \left(d\varepsilon_{ij} - \frac{\lambda S_{ij}}{2\sqrt{J_{2D}}} - \frac{d\varepsilon_{mm}}{3} \delta_{ij} \right) = 0$$

$$\text{از طرفی: } S_{ij} \delta_{ij} = S_{ii} = 0, \quad \delta_{ij} \delta_{ij} = 3 \Rightarrow$$

$$-3\alpha(d\varepsilon_{mm} + 3\alpha\lambda)K + \frac{GS_{ij}d\varepsilon_{ij}}{\sqrt{J_{2D}}} - \lambda G = 0$$

$$\lambda(9\alpha^2 K + G) = \frac{GS_{ij}d\varepsilon_{ij}}{\sqrt{J_{2D}}} - 3K\alpha d\varepsilon_{mm}$$

$$\text{از طرفی: } S_{ij} = \sigma_{ij} - \left(\frac{J_1}{3} \right) \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{mm} \left(\frac{J_1}{3} + \frac{3K\alpha\sqrt{J_{2D}}}{G} \right)}{\sqrt{J_{2D}} \left(1 + \frac{9\alpha^2 K}{G} \right)} \quad (۱۴-۸)$$

$$P' = \frac{\sqrt{J_{2D}}}{\alpha} \left(1 + \frac{9\alpha^2 K}{G} \right) \quad (۱۵-۸)$$

که P' یک کمیت بدون بعد است. با توجه به تعریف سطح تسلیم مدل دراکر-پراگر می‌توان نوشت:

$$J_1 = \frac{\sqrt{J_{2D}} - \kappa}{\alpha} \quad (۱۶-۸)$$

$$\frac{J_1}{3} + \frac{3\alpha K \sqrt{J_{2D}}}{G} = \frac{\sqrt{J_{2D}} - k}{3\alpha} + \frac{3\alpha K \sqrt{J_{2D}}}{G} \Rightarrow$$

$$\frac{J_1}{3} + \frac{3\alpha K \sqrt{J_{2D}}}{G} = \frac{1}{3\alpha} \left[\sqrt{J_{2D}} \left(1 + \frac{9\alpha^2 K}{G} \right) - k \right] \Rightarrow$$

$$\frac{J_1}{3} + \frac{3\alpha K \sqrt{J_{2D}}}{G} = \frac{k}{3\alpha} (P' - 1) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - \left(\frac{k}{3\alpha} \right) d\varepsilon_{mm} (P' - 1)}{P' k} \quad (۱۷-۸)$$

با جایگذاری λ می توان نوشت:

$$d\sigma_{ij} = d\varepsilon_{mn} \left(K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} + 2G d\varepsilon_{ij} + \left[\frac{\sigma_{mn} d\varepsilon_{mn} - \left(\frac{k}{3\alpha} \right) (P' - 1) d\varepsilon_{mn}}{P'k} \right] \left[3\alpha K \delta_{ij} \frac{GS_{ij}}{\sqrt{J_{2D}}} \right]$$

$$d\sigma_{ij} = d\varepsilon_{mn} \left(K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} + 2G d\varepsilon_{ij} + \frac{3\alpha K}{P'k} \sigma_{mn} d\varepsilon_{mn} S_{ij} - \frac{G\sigma_{mn} d\varepsilon_{mn}}{P'k\sqrt{J_{2D}}} S_{ij}$$

$$- \frac{K}{P'} d\varepsilon_{mn} (P' - 1) \delta_{ij} + \frac{Gd\varepsilon_{mn} (P' - 1)}{3\alpha P' \sqrt{J_{2D}}} S_{ij} \quad (18-8)$$

با قرار دادن $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{h}{3} \delta_{ij}$ می توان نوشت:

$$d\sigma_{ij} = d\varepsilon_{mn} \left(K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} + 2G d\varepsilon_{ij} + \frac{3\alpha K}{P'k} \sigma_{mn} d\varepsilon_{mn} S_{ij} - \frac{G\sigma_{mn} d\varepsilon_{mn}}{P'k\sqrt{J_{2D}}} \sigma_{ij}$$

$$+ \frac{G\sigma_{mn} d\varepsilon_{mn} J_1 \delta_{ij}}{3P'k\sqrt{J_{2D}}} - \frac{K(P' - 1)}{P'} d\varepsilon_{mn} \delta_{ij} + \frac{Gd\varepsilon_{mn} (P' - 1)}{3\alpha P' \sqrt{J_{2D}}} \sigma_{ij} - \frac{Gd\varepsilon_{mn} (P' - 1) J_1 S_{ij}}{9\alpha P' \sqrt{J_{2D}}} \quad (19-8)$$

این رابطه با در نظرگیری چند تغییر متغیر به فرم ساده تر در می آید. این متغیرها از قرار زیر

هستند:

$$h = - \left(\frac{3\alpha k}{2G} + \frac{J_1}{6\sqrt{J_{2D}}} \right) = - \frac{k(P' - 1)}{6\alpha\sqrt{J_{2D}}} \quad (20-8)$$

$$A = \frac{h}{P'k} \quad (21-8)$$

$$P' = \frac{\sqrt{J_{2D}}}{k} (1 + 9\alpha^2 kG) \quad (22-8)$$

$$h = \frac{-k(P' - 1)}{6\alpha\sqrt{J_{2D}}} = - \left(\frac{3\alpha K}{2G} + \frac{J_1}{6\sqrt{J_{2D}}} \right)$$

$$B = \frac{2h^2 \sqrt{J_{2D}}}{P'k} - \frac{3\nu K}{E} = \frac{2h^2}{1 + 9\alpha^2 k/G} - \frac{3\nu K}{E} \quad (23-8)$$

$$C = \frac{1}{2kP' \sqrt{J_{2D}}} \quad (24-8)$$

$$d\sigma_{ij} = 2Gd\epsilon_{ij} - 2G \left[A(\sigma_{mn}\delta_{ij} + \sigma_{ij}\delta_{mn}) + B\delta_{mn}\delta_{ij} + C\sigma_{mn}\sigma_{ij} \right] d\epsilon_{mn} \quad (۲۵-۸)$$

از طرفی:

$$\{d\sigma\} = [C^p] \{d\epsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{12} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{13} \end{Bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} 1-T_1\sigma_{11}-R_1 & -(T_1\sigma_{22}+R_1) & -(T_1\sigma_{33}+R_1) & -T_1\sigma_{12} & -T_1\sigma_{23} & -T_1\sigma_{13} \\ -(T_2\sigma_{11}+R_2) & 1-T_2\sigma_{22}-R_2 & -(T_2\sigma_{33}+R_2) & -T_2\sigma_{12} & -T_2\sigma_{23} & -T_2\sigma_{13} \\ -(T_3\sigma_{11}+R_3) & -(T_3\sigma_{22}+R_3) & 1-T_3\sigma_{33}-R_3 & -T_3\sigma_{12} & -T_3\sigma_{23} & -T_3\sigma_{13} \\ -T_1\sigma_{12} & -T_2\sigma_{12} & -T_3\sigma_{12} & \frac{1}{2}-C\sigma_{12}^2 & -C\sigma_{12}\sigma_{23} & -C\sigma_{12}\sigma_{13} \\ -T_1\sigma_{23} & -T_2\sigma_{23} & -T_3\sigma_{23} & -C\sigma_{12}\sigma_{23} & \frac{1}{2}-C\sigma_{23}^2 & -C\sigma_{13}\sigma_{23} \\ -T_1\sigma_{13} & -T_2\sigma_{13} & -T_3\sigma_{13} & -C\sigma_{12}\sigma_{13} & -C\sigma_{13}\sigma_{23} & \frac{1}{2}-C\sigma_{13}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \\ d\gamma_{12} \\ d\gamma_{23} \\ d\gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (۲۶-۸)$$

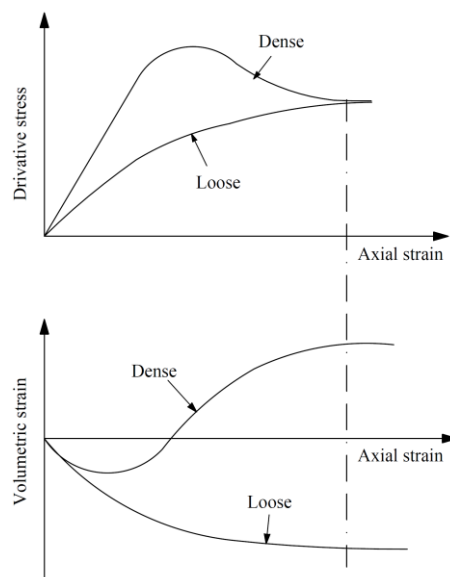
$$T_a = A + C\sigma_{aa}$$

$$R_a = A\sigma_{aa} + B$$

$$a = 1, 2, 3$$

۸-۹- مبانی حالت بحرانی در خاک ها

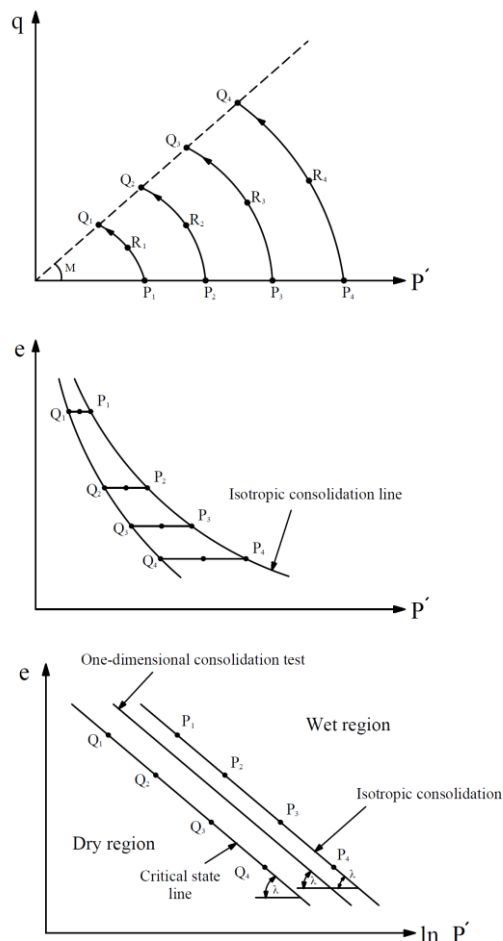
مطابق شکل (۸-۶)، هنگامی که نمونه خاک سست تحت برش قرار می گیرد، قبل از رسیدن به گسیختگی از لایه های مختلف تسلیم عبور می کند. بدین ترتیب مسیر تنش، از سطوح تسلیم متوالی عبور می نماید تا به وضعیت گسیختگی برسد. در طول این مسیر خاک تغییر شکل های پلاستیک را تجربه خواهد نمود. پروسه تسلیم و ایجاد کرنش های پلاستیک تا رسیدن به نسبت تخلخل حالت بحرانی ادامه خواهد یافت. در این وضعیت، حین تغییر شکل برشی، نسبت تخلخل خاک ثابت باقی خواهد ماند. در این وضعیت مصالح به شرایطی می رسند که چینش دانه های خاک موجب عدم ایجاد تغییر حجم حین برش خواهد شد. این نسبت تخلخل خاص به نسبت تخلخل حالت بحرانی موسوم است.



شکل ۸-۶: منحنی‌های تنش انحرافی- کرنش محوری و کرنش حجمی- کرنش محوری ماسه سست و متراکم

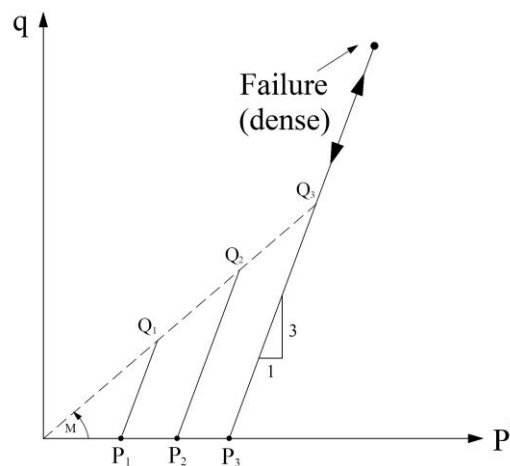
هنگامی که نمونه خاک متراکم مطابق شکل (۸-۶)، تحت برش قرار گیرد به نقطه اوج مقاومت خواهد رسید و بعد از آن با رفتار نرم شونده به سمت مقاومت پسماند حرکت می‌نماید. در ابتدا نمونه متراکم شده و پس از آن با اتساع به سمت تغییر حجم ثابت متناظر با شرایط بحرانی حرکت خواهد نمود. این موضوع مشابه ایده دانسیته بحرانی است که توسط کاساگرانده (۱۹۳۶) مطرح گردید. بر اساس نظر ایشان، نمونه با تراکم کمتر از حالت بحرانی به نحوی تغییر شکل می‌دهد که تغییر حجم آن کاهش یابد و نمونه با تراکم نسبی بیشتر از حالت بحرانی با افزایش حجم مواجه خواهد شد.

در بررسی رفتار تسلیم خاکهای رسی عادی تحکیم یافته، روسکو و همکارانش (۱۹۵۸) نتایج تعدادی آزمایش سه محوری فشاری زهکشی نشده را مورد بررسی و تفسیر قرار دادند. تعدادی مسیر تنش موثر بدست آمده از آزمایشها در شکل (۸-۷) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد، مسیرهای تنش موثر همگی یک شکل می‌باشند و وضعیت نهایی آنها نیز بر خطی مستقیم در صفحه $q-p'$ واقع شده است. شرایط نهایی با Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 نشان داده شده است. در فضای $e-p'$ نیز وضعیت نهایی نقاط بر یک منحنی شبیه به منحنی تحکیم ایزوتروپ واقع می‌گردند. این دو در فضای $e - \ln(p')$ بصورت دو خط موازی یکدیگر خواهند بود.



شکل ۸-۷: مسیر تنش در آزمایش سه محوری زهکشی نشده بر رس عادی تحکیم یافته (روسکو و همکاران ۱۹۵۸)

نتایج آزمایشهای سه محوری زهکشی شده بر رس عادی تحکیم یافته نیز در شکل (۸-۸) نشان داده شده است. حالت بحرانی در این آزمایشها نیز بر همان خط حالت بحرانی بدست آمده از آزمایشهای زهکشی نشده واقع است. شیب این خط در فضای $q-p'$ با M نشان داده می شود که یکی از پارامترهای حالت بحرانی خاک است. وضعیت مسیر تنش و خط حالت بحرانی در آزمایشهای زهکشی شده در شکل (۸-۸) نشان داده شده است. در نمونه های متراکم وضعیت تنش نمونه به بالای خط حالت بحرانی رسیده و بعد با رفتار نرم شونده به روی آن بر می گردد.

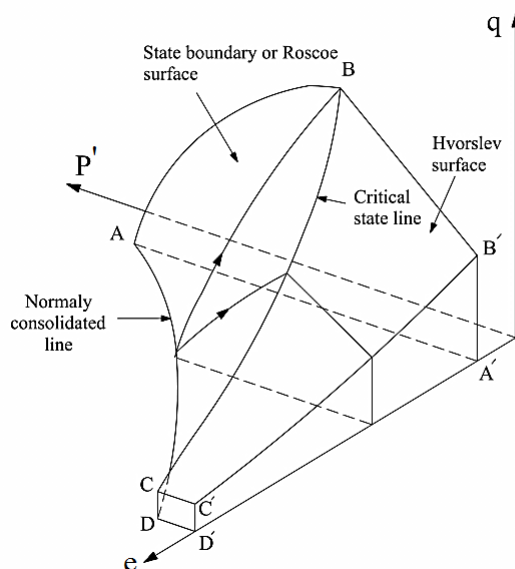


شکل ۸-۸: مسیر تنش زهکشی شده و خط حالت بحرانی خاک

شکل (۸-۹) وضعیت شماتیک رفتار خاک در فضای سه بعدی $e-q-p'$ را نشان می‌دهد. در واقع هرگونه وضعیت رفتاری خاک در زیر سطوح مرزی نشان داده شده در این شکل اتفاق افتاده و عدول از آنها میسر نیست. سطح ABCD به عنوان یک سطح مرزی برای خاکهای عادی تحکیم یافته با نام سطح روسکو^۱ نامیده می‌شود. در حالیکه $BB'C'C$ به عنوان سطح مرزی دیگر برای خاکهای پیش تحکیم یافته با نام سطح ورشلو^۲ نامیده می‌شود. شرایط نمونه های عادی تحکیم یافته یا سست در سمت چپ و نمونه های پیش تحکیم یافته در سمت راست خط حالت بحرانی خواهد بود.

1 Roscoe surface

2 Hvorslev surface



شکل ۸-۹: سطوح حالت بحرانی خاک در فضای سه بعدی (اتکینسون و برانزبی^۱ ۱۹۷۸)

۸-۱۰-۱ مدل الاستوپلاستیک کم کلی^۲

در قسمتهای قبلی اصول مدلسازی رفتار الاستوپلاستیک خاک مورد بررسی قرار گرفت و توابع تسلیم و پتانسیل پلاستیک توصیف شدند. در این قسمت، یک مدل الاستوپلاستیک کارآمد برای پیش بینی رفتار خاک معرفی می‌گردد. این مدل بعنوان یکی از مدل‌های با سخت شونده‌گی حجمی در نظر گرفته می‌شود. برای اولین بار این مدل بنام "کم کلی" توسط روسکو^۳ و اسکافیلد^۴ (۱۹۶۳) معرفی و سپس با اعمال تغییراتی توسط روسکو و برلند^۵ (۱۹۶۸) و با نام مدل "کم کلی اصلاح شده" ارائه گردید تا از مدل قدیمی متمایز گردد. هم اکنون و با گذشت سالها، مشخصه "اصلاح شده" حذف می‌گردد و این مدل در مدلسازی‌های عددی استفاده می‌شود.

۸-۱۰-۱-۱ مدل کم کلی

چهار جزء اصلی یک مدل الاستوپلاستیک که در فصل قبل بیان شد به شرح زیر است:

الف- خصوصیات الاستیک

1 Atkinson and Bransby

2 Cam clay

3 Roscoe

4 Schofield

5 Burland

ب- سطح تسلیم

پ- تابع پتانسیل پلاستیک

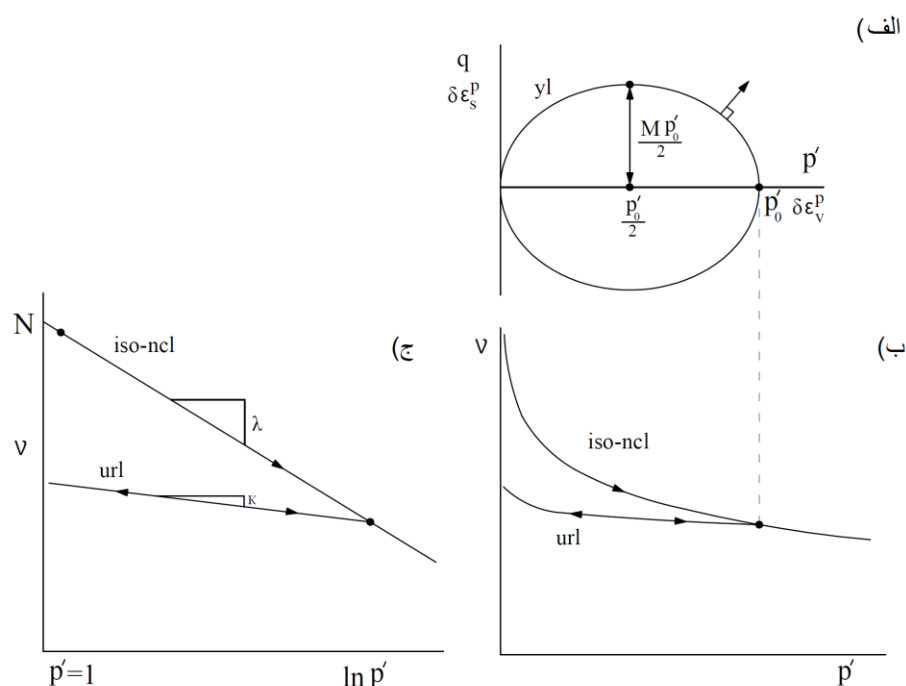
ت- قانون سخت شوندگی

در مدل کم کلی به مانند قبل فرض می‌شود که کرنش حجمی الاستیک با تغییر در تنش موثر میانگین p' طبق رابطه زیر قابل تعیین است:

$$\delta \varepsilon_v^e = \kappa \frac{\delta p'}{\nu p'} \quad (۲۷-۸)$$

مطابق شکل (۸-۱۰)، شیب خط باربرداری (K) با تعیین تغییرات حجم مخصوص در مقابل تنش تحکیم ایزوتروپ در مقیاس نیمه لگاریتمی قابل محاسبه است. کرنش برشی الاستیک نیز بر اساس تنش انحرافی طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta \varepsilon_s^e = \frac{\delta q}{3G} \quad (۲۸-۸)$$



شکل ۸-۱۰: (الف) تابع تسلیم بیضوی مدل کم کلی در صفحه تنش $q - p'$ ،
ب و ج) خط فشردگی نرمال و خط باربرداری-بارگذاری مجدد در صفحه تراکم (وود ۱۹۹۰)

ساده ترین شکل سطح تسلیم در صفحه تنش $q - p'$ یک دایره و در فضای تنش اصلی یک کره است. ساده ترین حالت بعدی بیضی یا یک بیضیگون در فضای تنش اصلی است که می تواند در مقایسه با شکل دایره مناسب تر باشد زیرا نسبت قطر بزرگ به کوچک آن می تواند به عنوان متغیر به مدل سازی بهتر رفتار خاک کمک نماید. ساده تر است مطابق شکل (۸-۱۰-الف) سطح تسلیم از مبدا فضای تنش موثر بگذرد. معادله بیضی شکل (۸-۱۰-الف) به صورت زیر می باشد:

$$\frac{p'}{p'_0} = \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \quad (۸-۲۹)$$

در این رابطه $\eta = q / p'$ بیانگر نسبت تنش و M شیب خط حالت بحرانی در صفحه $q - p'$ می باشد. این معادله یک سری بیضی را تشکیل می دهند که همگی شکل مشابهی دارند و همه آنها از مبدا عبور می کنند. اندازه بیضیها توسط پارامتر p'_0 کنترل می شوند. زمانی که خاک در شرایط تسلیم قرار دارد تغییرات p'_0 از طریق فرم دیفرانسیلی رابطه (۸-۲۹) به تغییرات تنش موثر میانگین p' و تنش انحرافی q مرتبط می شود:

$$\frac{\delta p'}{p'} + \frac{2\eta\delta\eta}{M^2 + \eta^2} - \frac{\delta p'_0}{p'_0} = 0 \quad (۸-۳۰-الف)$$

$$\left(\frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2}\right) \frac{\delta p'}{p'} + \left(\frac{2\eta}{M^2 + \eta^2}\right) \frac{\delta q}{p'} - \frac{\delta p'_0}{p'_0} = 0 \quad (۸-۳۰-ب)$$

به منظور ارائه شکل متناسب با قالب کلی توابع تسلیم که در فصل قبلی توضیح داده شد، معادله (۸-۲۹) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$f = q^2 - M^2 [p'(p'_0 - p')] = 0 \quad (۸-۳۱)$$

با فرض پیروی خاک از شرایط قانون تعامد خواهیم داشت:

$$g = f = q^2 - M^2 [p'(p'_0 - p')] = 0 \quad (۸-۳۲)$$

در نتیجه بردار نمو کرنش پلاستیک که طبق شکل (۸-۱۰-الف) در جهت عمود بر تابع تسلیم و به سمت بیرون می باشد از رابطه ذیل قابل تعیین است:

$$\frac{\delta \varepsilon_v^p}{\delta \varepsilon_s^p} = \frac{\partial g / \partial p'}{\partial g / \partial q} = \frac{M^2 (2p' - p'_0)}{2q} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (۸-۳۳)$$

فرض می شود که تابع تسلیم با همان شکل بیضی با ازدیاد تنش موثر تحکیمی p'_0 بسط می یابد. بنابراین تنش موثر تحکیمی کنترل کننده سخت شوندگی خاک می باشد. از طرف دیگر این پارامتر طبق روابط مربوط به تراکم خاک، با تغییرات حجمی آن مرتبط می باشد. به مانند وضعیت ادنومتري،

می‌توان رابطه خطی بین حجم مخصوص V و لگاریتم تنش موثر میانگین p'_0 در پروسه فشردگی تحت تنش همه جانبه به شکل (۸-۱۰ ج) نوشت.

$$v = N - \lambda \ln p'_0 \quad (۸-۳۴)$$

در این رابطه N ثابتی است که مشخص کننده موقعیت خط فشردگی نرمال (ncl) در فضای $p' - v$ در $p' = 1$ می‌باشد (شکل ۸-۱۰ ج). مقدار کرنش حجمی پلاستیک بر اساس رابطه (۷-۵۸) به شرح زیر خواهد بود:

$$\delta \varepsilon_v^p = [(\lambda - \kappa) / v] \frac{\delta p'_0}{p'_0} \quad (۸-۳۵)$$

این رابطه سخت شونده‌گی حجمی مدل را نشان می‌دهد. بدین ترتیب مولفه های تانسور سخت شونده‌گی مدل به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_v^p} = \frac{v p'_0}{\lambda - \kappa} \quad (۸-۳۶ الف)$$

$$\frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_s^p} = 0 \quad (۸-۳۶ ب)$$

و بدین ترتیب چهار المان مدل تکمیل می‌شود. با ترکیب روابط (۸-۲۷) و (۸-۲۸) می‌توانیم پاسخ تنش کرنش الاستیک را به صورت رابطه ماتریسی بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} \delta \varepsilon_v^e \\ \delta \varepsilon_s^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa / v p' & 0 \\ 0 & 1/3G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p' \\ \delta q \end{bmatrix} \quad (۸-۳۷)$$

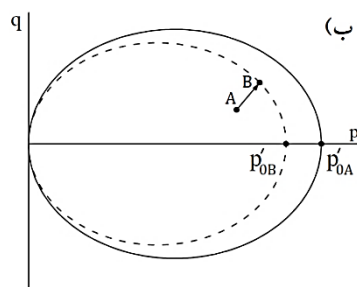
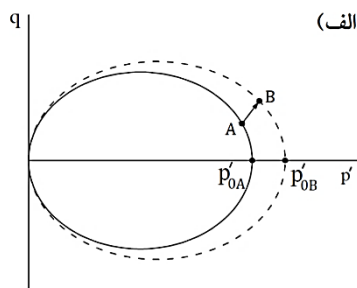
با جایگزینی در رابطه (۷-۸۴) می‌توان پاسخ تنش-کرنش پلاستیک مدل رفتاری کم کلی را به صورت رابطه ماتریسی زیر خلاصه کنیم:

$$\begin{bmatrix} \delta \varepsilon_v^p \\ \delta \varepsilon_s^p \end{bmatrix} = \frac{(\lambda - \kappa)}{v p' (M^2 + \eta^2)} \begin{bmatrix} (M^2 - \eta^2) & 2\eta \\ 2\eta & 4\eta^2 / (M^2 - \eta^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p' \\ \delta q \end{bmatrix} \quad (۸-۳۸)$$

رابطه بالا فقط زمانی عمل می‌کند که مسیر تنش سطح تسلیم کنونی را قطع کرده و کرنش های پلاستیک به وجود آید. ماتریس رفتاری به دلیل فرض جریان همبسته متقارن بوده و در ضمن دترمینان آن صفر می‌باشد.

با توجه به شکل (۸-۱۱) فرض می‌شود نقطه A در فضای $p' - v$ بر تابع تسلیم کنونی با مقدار تنش تحکیمی $p'_0 = p'_{0A}$ مشخص شده باشد. سپس نمو تنش موثر $AB(\delta p', \delta q)$ اعمال می‌شود. تابع تسلیم جدید که از حالت تنش موثر $B(p' + \delta p'; q + \delta q)$ عبور می‌کند از رابطه

(۸-۳۰) محاسبه شود. اگر در این شرایط $p'_{0B} > p'_{0A}$ باشد (شکل ۸-۱۱-الف) آنگاه منحنی تسلیم تا وضعیت جدید تنش گسترش می یابد و اگر در این شرایط $p'_{0B} < p'_{0A}$ باشد (شکل ۸-۱۱-ب)، آنگاه حالت جدید تنش داخل سطح تسلیم افتاده و بنابراین کرنش های پلاستیک رخ نداده و بدلیل عدم سخت شوندگی، اندازه سطح تسلیم تغییر نمی کند. مجموع نمو کرنش ها از جمع روابط (۸-۳۷) و (۸-۳۸) به دست می آید.



شکل ۸-۱۱: الف) نمو تنشی که سطح تسلیم کنونی را بسط می دهد،
ب) نمو تنش در داخل سطح تسلیم کنونی و عدم تغییر آن (وود، ۱۹۹۰)

۸-۱۰-۲- محاسبات مدل کم کلی: سه محوری زهکشی شده فشاری معمولی

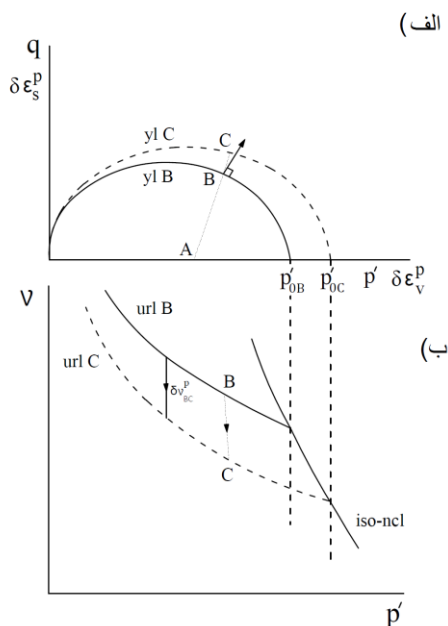
آزمایش سه محوری مرسوم زهکشی شده فشاری توسط مسیر تنش آن در صفحه $q - p'$ شناخته می شود زیرا فشار دورگیر در آن ثابت است.

$$\delta q = 3\delta p' \quad (۸-۳۹)$$

مسیر تنش BC در آزمایش سه محوری زهکشی شده فشاری در شکل (۸-۹) نشان داده شده است. فرض می شود مطابق شکل (۸-۱۲-الف) حالت تنش B بر تابع تسلیم کنونی yl-B قرار داشته باشد. تابع تسلیم با فشار تحکیمی p'_{0B} مشخص می شود که نظیر نقطه $p' = p'_{0B}$ بر خط فشردگی ایزوتروپ در صفحه تراکم بوده و در ابتدای خط باربرداری-بارگذاری مجدد B واقع است.

با اعمال نمو تنش BC به نقطه C می‌رسیم که مطابق شکل (۸-۱۲-ب) بر روی یک تابع تسلیم جدید و بزرگتری مثل yl-C قرار دارد. تصویر نقطه C را نیز می‌توان با تصویر بر خط باربرداری-بارگذاری در صفحه تراکم مشخص نمود. تغییر حجم بین B تا C از یک بخش الاستیک قابل برگشت که از تغییر در p' بین دو نقطه B و C نتیجه شده و یک بخش پلاستیک غیر قابل بازگشت که از بسط و گسترش تابع تسلیم نتیجه شده، تشکیل شده است. مطابق شکل (۸-۱۲-ب)، بخش پلاستیک کرنش با تعیین فاصله قائم δv_{BC}^p بین دو خط باربرداری-بارگذاری مجدد B و C در صفحه تراکم نشان داده شده و بر اساس رابطه زیر قابل تعیین می‌باشد:

$$\delta \varepsilon_{v\ BC}^p = \frac{-\delta v_{BC}^p}{v_B} \quad (۸-۴۰)$$



شکل ۸-۱۲: تعیین کرنشهای حجمی پلاستیک از مسیر تنش، سطح تسلیم بسط یافته و منحنی تنش-تغییر حجم

در شکل (۸-۱۲-الف) در راستای عمود بر تابع تسلیم yl B در نقطه B، جهت بردار کرنش پلاستیک نشان داده شده است. با توجه به تعیین مقدار کرنش حجمی پلاستیک از رابطه (۸-۴۰) و مشخص بودن جهت عمود بر سطح تسلیم در نقطه B، مقدار کرنش برشی پلاستیک قابل محاسبه است. با اعمال نموهای بعدی تنش زهکشی شده CD، DE و EF مطابق شکل (۸-۱۳-الف)، تابع تسلیم به طرز فزاینده‌ای بزرگتر خواهد شد. بر این اساس وضعیت تنش کنونی بر تابع تسلیم تغییر نموده و

بنابراین جهت عمود بر تابع تسلیم نیز مطابق شکل (۸-۱۳-الف) تغییر می نماید. لذا نسبت کرنش برشی پلاستیک به کرنش حجمی پلاستیک بطور پیوسته افزایش خواهد داشت تا حدی که در نهایت در نقطه F به موازات محور q خواهد شد. در نقطه F از شکل (۸-۱۰) و رابطه (۸-۳۰) داریم:

$$\frac{q}{p'} = \eta = M \quad (۸-۴۱)$$

$$p' = \frac{p'_{0F}}{2} \quad (۸-۴۲)$$

در این نقطه، با افزایش کرنش برشی پلاستیک، هیچ کرنش حجمی پلاستیکی بوجود نمی آید. با صفر شدن تغییرات کرنش حجمی پلاستیک، اندازه تابع تسلیم $yl-F$ ثابت باقی مانده و در رابطه (۸-۳۵)، $\delta p'_0 = 0$ خواهد بود. بدین ترتیب کرنش برشی پلاستیک در تنش موثر ثابت افزایش یافته و تنش انحرافی ثابت باقی خواهد ماند.

اگر رابطه (۸-۳۸) را در حالتی که $\eta = M$ است در نظر بگیریم می توان نوشت:

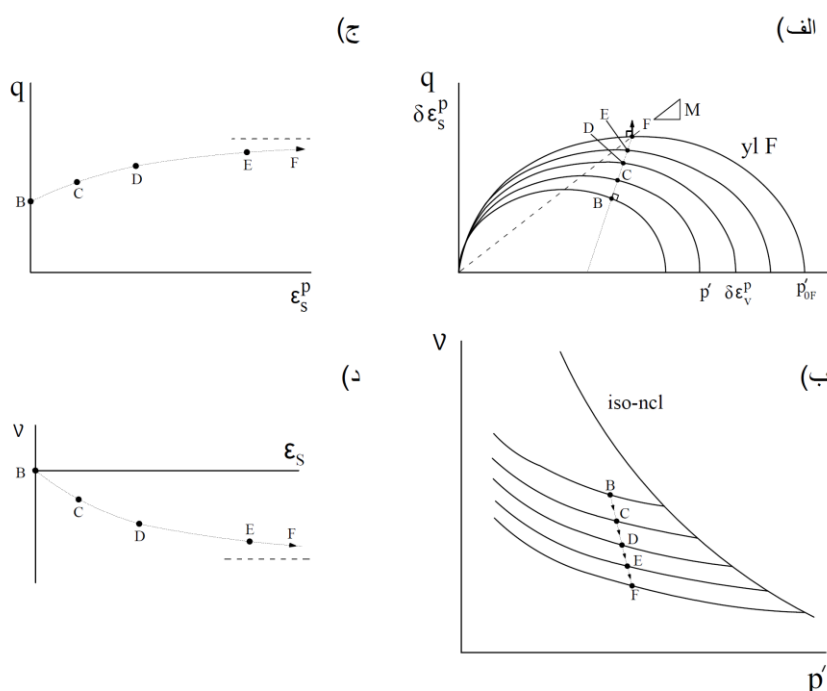
$$\frac{\delta \varepsilon_v^p}{\delta p'} = 0 \quad (۸-۴۳)$$

$$\frac{\delta \varepsilon_s^p}{\delta q} = \infty \quad (۸-۴۴)$$

در شکل (۸-۱۳-الف) پیشرفت آزمایش زهکشی شده در صفحه تنش $q - p'$ بررسی شد. معادل با هر مقدار تنش تحکیمی موجود در راس توابع تسلیم گذرنده از نقاط E, D, C, B و F ، می توان خط باربرداری-بارگذاری مجدد آن را در صفحه تراکم $p' - v$ مطابق شکل (۸-۱۳-ب) ترسیم کرد. با تعیین نقاط نظیر مسیر تنش شکل (۸-۱۳-الف) بر خطوط باربرداری نظیر در شکل (۸-۱۳-ب)، امکان محاسبه کرنشهای حجمی پلاستیک از فواصل بین نقاط نظیر بر خطوط باربرداری میسر خواهد بود. با تعیین کرنشهای پلاستیک حجمی و با مشخص بودن جهت عمود بر سطح تسلیم در هر نقطه از تلاقی مسیر تنش با سطح تسلیم طبق رابطه (۸-۳۳)، کرنش پلاستیک برشی قابل محاسبه است. با جمع کرنشهای پلاستیک برشی بدست آمده با کرنشهای الاستیک برشی حاصله از رابطه (۸-۳۷)، کرنش برشی کل قابل محاسبه است. در ضمن از ترکیب رابطه تنش-کرنش پلاستیک (۸-۳۸) با معادله (۸-۳۹) که نشانگر مسیر تنش موثر آزمایش سه محوری زهکشی شده است، کرنش برشی پلاستیک به شرح زیر نیز قابل محاسبه می باشد:

$$\delta \varepsilon_s^p = (\lambda - \kappa) \frac{2\eta(M^2 - \eta^2) + 12\eta^2}{3\nu p'(M^2 + \eta^2)(M^2 - \eta^2)} \delta q \quad (۸-۴۵)$$

طبق شکل (۸-۱۳-ج) هنگامی که η به سمت M افزایش می‌یابد، شیب $\delta q / \delta \varepsilon_s^p$ مرتباً تا صفر کاهش پیدا می‌نماید. در نهایت نتایج آزمایش در شکل های (۸-۱۳-ب) و (۸-۱۳-ج) را می‌توان ترکیب نموده و تغییرات حجم مخصوص در مقابل کرنش برشی را در شکل (۸-۱۳-د) ترسیم نمود. مطابق رابطه (۸-۳۳) که ارتباط کرنش حجمی و برشی پلاستیک را بیان می‌نماید، هنگامی که نسبت تنش η به سمت M افزایش یابد، نسبت $\delta \varepsilon_v^p / \delta \varepsilon_s^p$ و متعاقب آن شیب نمودار تغییرات کرنش حجمی با کرنش برشی به طور یکنواخت طبق شکل (۸-۱۳-د) تا صفر کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۸-۱۳: نحوه گسترش سطح تسلیم و محاسبه منحنیهای تنش-کرنش و تغییر حجم کرنش در آزمایش سه محوری زهکشی شده معمولی (وود ۱۹۹۰)

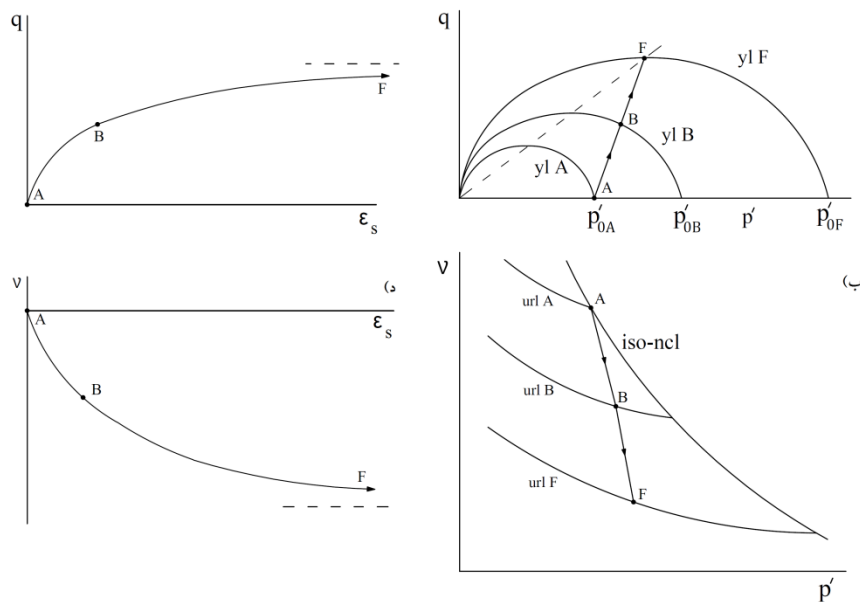
برای بررسی رفتار خاک تحت آزمایش سه محوری زهکشی شده معمولی، سه حالت مختلف در نظر گرفته می‌شود. در حالت اول سعی بر آن است که رفتار خاک رسی عادی تحکیم یافته^۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این شرایط مطابق شکل (۸-۱۴-الف) نقطه شروع مسیر تنش، همان تنش تحکیمی نمونه خواهد بود. عبارت دیگر نقطه A در راس تابع تسلیم $yl-A$ قرار دارد. هنگامی که تراکم زهکشی شده آغاز می‌گردد تابع تسلیم گسترش یافته و کرنش های پلاستیک از ابتدای فشردگی زهکشی شده

1 Normally consolidated clay

ایجاد می‌شود. مسیر تنش زهکشی شده نظیر در صفحه تراکم $v-p'$ در شکل (۸-۱۴-ب)، منحنی تنش انحرافی-کرنش برشی $q-\epsilon_s$ در شکل (۸-۱۴-ج) و منحنی حجم مخصوص-کرنش برشی $v-\epsilon_s$ در شکل (۸-۱۴-د) نشان داده شده است.

(الف)

(ج)



شکل ۸-۱۴: محاسبات منحنی تنش کرنش و تغییر حجم کرنش در آزمایش سه محوری زهکشی شده معمولی روی رس عادی تحکیم یافته (وود ۱۹۹۰)

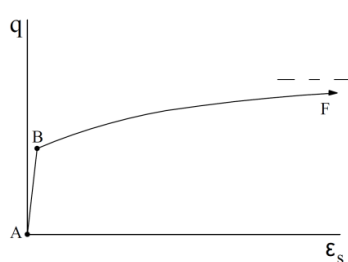
وضعیت دومی که مورد بررسی قرار می‌گیرد خاک رس تا حدی پیش تحکیم یافته^۱ می‌باشد. در این شرایط، ابتدا خاک تا تنش تحکیمی $p'_0 = p'_{0B}$ (شکل ۸-۱۵-الف) متراکم گردد و سپس با باربرداری ایزوتروپ تا نقطه A باربرداری شود. در این حالت خاک تا حدی پیش تحکیم یافته خواهد شد. حین باربرداری ایزوتروپ تا A و برش زهکشی شده از A تا B، تغییرات تنش در داخل سطح تسلیم قرار گرفته و بنابراین کرنشهای الاستیک ایجاد می‌شوند. نقاط A و B روی خط باربرداری-بارگذاری مجدد url-B نظیر $p'_0 = p'_{0B}$ قرار دارند (شکل ۸-۱۵-ب). در مسیر برش زهکشی شده A تا B، پاسخ خاک الاستیک خواهد بود (شکل ۸-۱۵-ج). با شروع پروسه تسلیم خاک در نقطه B، کرنش های پلاستیک ایجاد و افت ناگهانی تنش انحرافی-کرنش برشی $q-\epsilon_s$

1 Lightly overconsolidated clay

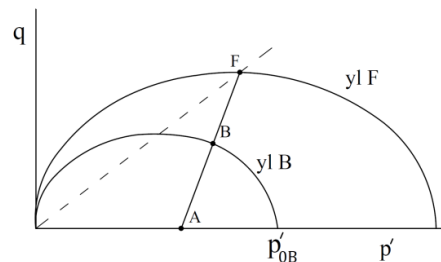
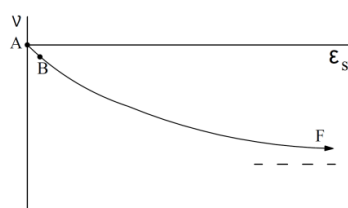
مشاهده می‌شود. به طور مشابه، تغییر حجم از A تا B الاستیک، برگشت پذیر و کوچک است ولی پس از ایجاد کرنشهای پلاستیک، پرشی در رابطه تغییر حجم-کرنش برشی $\nu - \epsilon_s$ مشاهده می‌شود (شکل ۸-۱۵-د). تیزی این پرش به پارامترهای حالت بحرانی خاک مثل λ ، κ ، G و M و همچنین نسبت تنش η که نظیر نقطه تسلیم است بستگی دارد.

(الف)

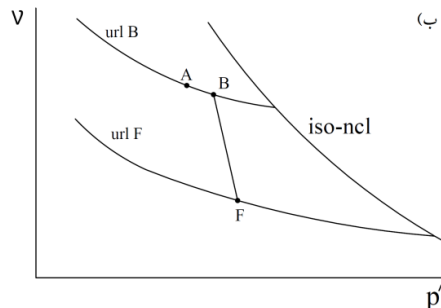
(ج)



(د)



(ب)



شکل ۸-۱۵: محاسبات منحنی تنش کرنش و تغییر حجم کرنش در آزمایش سه محوری زهکشی شده معمولی روی رس تا حدی پیش تحکیم یافته (وود ۱۹۹۰)

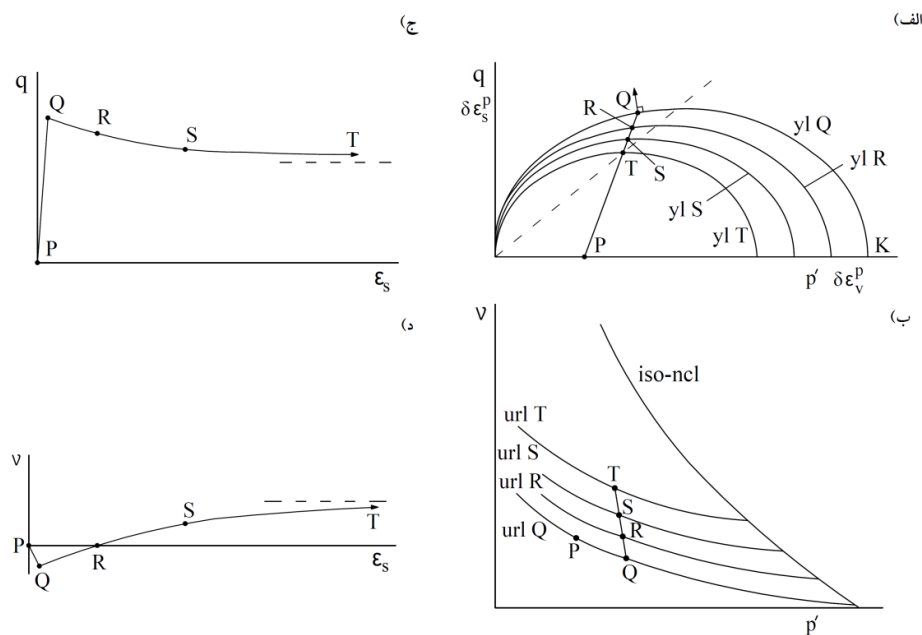
سومین حالتی که مورد بررسی قرار می‌گیرد خاک بسیار پیش تحکیم یافته^۱ است. ابتدا نمونه خاک تا نقطه K بصورت ایزوتروپ تحکیم یافته، سپس تا نقطه P تحت باربرداری ایزوتروپ قرار می‌گیرد و در انتها برش سه محوری زهکشی شده بر آن اعمال می‌گردد. در این شرایط، نقطه تلاقی مسیر تنش برشی با سطح تسلیم کنونی، نقطه Q در سمت چپ نقطه اوج منحنی تسلیم می‌باشد. بعبارت دیگر در نقطه Q، در شکل (۸-۱۶-الف)، $\eta > M$ خواهد بود. به همین دلیل، جهت عمود بر سطح تسلیم که بیانگر نسبت کرنشهای پلاستیک حجمی و برشی است، به سمت چپ بوده که حاکی از منفی بودن جزء کرنش پلاستیک حجمی و یا اتساع نمونه است. برای ایجاد اتساع^۲ حجمی پلاستیک در رابطه (۸-۳۵) باید $\delta p'_0 < 0$ باشد که حاکی

1 Heavily overconsolidated clay

2 Dilation

از انقباض تابع تسلیم با ازدیاد کرنش پلاستیک برشی می‌باشد. این مکانیزم با نام نرم شوندگی پلاستیک^۱ نامیده می‌شود. نحوه پیشرفت آزمایش در صفحه تراکم نیز مطابق شکل (۸-۱۶-ب) با تصویر کردن نقاط R، S و T از صفحه تنش (شکل ۸-۱۶-الف) از توابع تسلیم $yl-R$ ، $yl-S$ و $yl-T$ به سمت پایین در صفحه تراکم بر خطوط باربرداری-بارگذاری مجدد $url-R$ ، $url-S$ و $url-T$ مشاهده می‌شود.

هنگامی که تابع تسلیم کوچک می‌شود، مکان حالت تنش موثر Q ، R ، S و T نسبت به راس تابع تسلیم تغییر می‌کند و جهت بردار نمو کرنش پلاستیک به تدریج به صورت قائم در نقطه T خواهد رسید، در این حالت $\eta = M$ خواهد بود و تغییر شکل برشی پلاستیک بدون تغییر پلاستیک حجمی ادامه می‌یابد. نمودارهای تنش انحرافی-کرنش برشی $q - \epsilon_s$ و حجم مخصوص-کرنش برشی $v - \epsilon_s$ به صورت شکل های (۸-۱۶-ج و د) خواهد بود. نقطه Q در شکل (۸-۱۶-د) نظیر اوج منحنی تنش انحرافی-کرنش برشی در شکل (۸-۱۶-ج) است. بدین ترتیب افزایش در تنش انحرافی q نظیر کاهش در حجم مخصوص و کاهش در تنش انحرافی نظیر افزایش در حجم مخصوص خواهد بود.

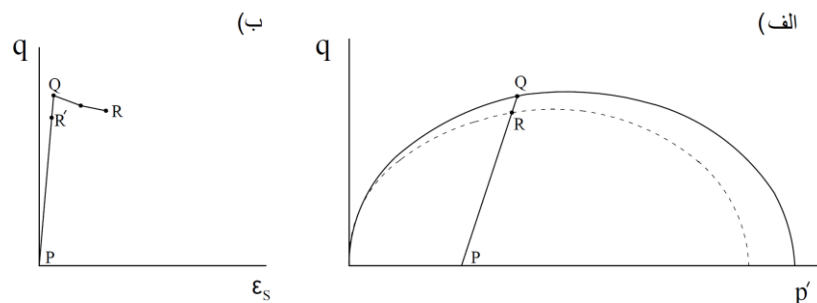


شکل ۸-۱۶: محاسبات منحنی تنش کرنش و تغییر حجم کرنش در آزمایش سه محوری زهکشی شده معمولی روی رس بسیار پیش تحکیم یافته (وود ۱۹۹۰)

در خصوص رفتار نرم شونده که با انقباض سطح تسلیم معرفی گردید و مسیر تنش از Q به R برگشت این شبهه وجود دارد که چرا بجای ایجاد کرنشهای پلاستیک در این پروسه، منحنی تنش-کرنش با

1 Plastic softening

رفتاری الاستیک بر روی خود باز نگردد و بجای نقطه R در شکل (۸-۱۷-ب)، بر نقطه R' قرار نگیرد. پاسخ این شبیه آن است که در صورت برگشت به نقطه R' با کاهش کرنشهای برشی مواجهیم حال آنکه روند ایجاد کرنشهای برشی همواره بصورت افزایشی است. بدین ترتیب امکان بروز رفتار الاستیک توام با بروز پدیده نرم شوندگی منتفی است.



شکل ۸-۱۷: رفتار نرم شونده با کرنش و انقباض سطح تسلیم

۸-۱۰-۳- محاسبات مدل کم کلی: سه محوری زهکشی نشده فشاری معمولی

در شرایط زهکشی نشده، با توجه به عدم تغییر حجم خاک، مجموع کرنشهای حجمی الاستیک و پلاستیک صفر می‌باشد. بدین ترتیب باید مجدداً اجزای فرمولاسیون کرنشهای حجمی مورد بررسی قرار گیرد. نمو کرنش حجمی الاستیک به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\delta \varepsilon_v^e = \kappa \frac{\delta p'}{p'} \quad (۴۶-۸)$$

و نمو کرنش حجمی پلاستیک نیز به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\delta \varepsilon_v^p = [(\lambda - \kappa) / \nu] \frac{\delta p'_0}{p'_0} \quad (۴۷-۸)$$

با توجه به شرایط زهکشی نشده می‌توان نوشت:

$$\delta \varepsilon_v^p + \delta \varepsilon_v^e = 0 \quad (۴۸-۸)$$

$$\rightarrow \kappa \frac{\delta p'}{p'} = -(\lambda - \kappa) \frac{\delta p'_0}{p'_0} \quad (۴۹-۸)$$

این معادله، ارتباط تغییرات تنش موثر میانگین p' با تغییرات اندازه تابع تسلیم که با p'_0 کنترل می‌شود را برقرار می‌نماید. هندسه تابع تسلیم نیز ارتباطی دیگر بین تغییرات p' و η (یا q) برقرار می‌کند که شروع تسلیم و پروسه سخت شوندگی را با تغییر در p'_0 بیان می‌نماید. بنابراین رابطه (۴۹-۸) محدودیت

جدیدی در شکل تابع تسلیم است که منجر به عدم تغییر حجم خاک می‌شود. از رابطه (۸-۳۰ الف) و (۸-۴۹) داریم:

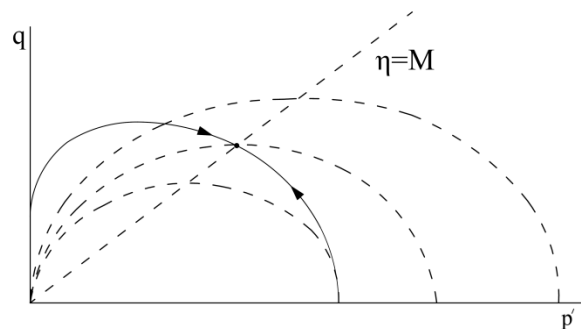
$$-\frac{\delta p'}{p'} = \frac{(\lambda - \kappa)}{\lambda} \frac{2\eta}{(M^2 + \eta^2)} \delta\eta \quad (۸-۵۰)$$

با انتگرال گیری از رابطه بالا داریم:

$$\frac{p'_i}{p'} = \left(\frac{M^2 + \eta^2}{M^2 + \eta_i^2} \right)^\Lambda \quad (۸-۵۱)$$

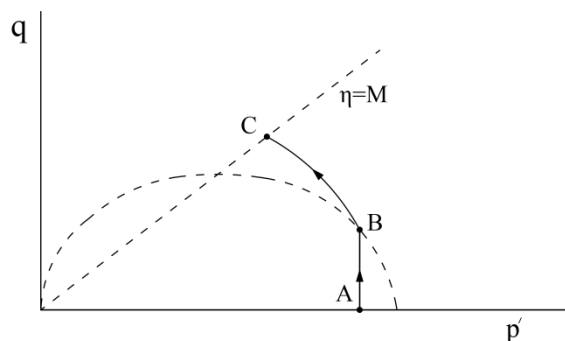
$$\Lambda = \frac{\lambda - \kappa}{\lambda} \quad (۸-۵۲)$$

که در آن η_i و p'_i مقادیر اولیه نسبت تنش و تنش موثر میانگین اولیه را معرفی می‌کنند. رابطه (۸-۵۱) شکل مسیر تنش موثر زهکشی نشده در صفحه $q - p'$ را مشخص می‌نماید که در شکل (۸-۱۸) نیز نمایش داده شده است.



شکل ۸-۱۸: سطوح تسلیم خاک و مسیر تنش موثر زهکشی نشده

اگر وضعیت تنش موثر درون سطح تسلیم کنونی قرار گیرد امکان ایجاد کرنش حجمی پلاستیک وجود ندارد. بنابراین تنها راه برای ارضای رابطه (۸-۴۸) آن است که کرنش حجمی الاستیک نیز صفر باشد. بدین ترتیب از رابطه (۸-۴۶) نتیجه می‌شود که در تنش موثر میانگین p' ثابت است. لذا مسیر تنش آزمایش زهکشی نشده بر نمونه های پیش تحکیم یافته که از داخل سطح تسلیم شروع می‌شود تا زمانی که به سطح تسلیم کنونی برسد بطور عمودی حرکت می‌نماید (AB در شکل ۸-۱۹) و سپس مسیر تنش موثر الاستو-پلاستیک در رابطه (۸-۵۱) به آن متصل می‌شود (BC در شکل ۸-۱۹).



شکل ۸-۱۹: مسیر تنش آزمایش سه محوری زهکشی نشده بر خاک پیش تحکیم یافته

از رابطه (۴۹-۸) واضح است که تغییرات در p' و p'_0 همواره می‌بایست علامت مخالف هم داشته باشند. علامت $\delta p'_0$ با علامت نمو کرنش حجمی پلاستیک مرتبط است و با شیب عمود بر سطح تسلیم با تابع پتانسیل مرتبط می‌باشد. اگر شروع مسیر تنش زهکشی نشده بر سطح تسلیم بیانگر با $\eta < M$ باشد (مانند AB در شکل (۸-۲۰) و (۸-۲۱)، تسلیم با بردار نمو کرنش پلاستیک که جهت آن به سمت راست است رخ می‌دهد که به معنی فشردگی حجمی پلاستیک می‌باشد. در این شرایط خاک در وضعیت سخت شوندگی بوده و اندازه تابع تسلیم افزایش می‌یابد ($\delta p'_0 > 0$). با توجه به وضعیت مسیر تنش زهکشی نشده در صفحه تراکم، برای صفر بودن کرنش حجمی کل باید کرنش الاستیک منفی یا انبساط الاستیک وجود داشته باشد و بنابراین به تبع آن باید تنش موثر میانگین کاهش یابد ($\delta p' < 0$). انبساط الاستیک ایجاد شده، فشردگی پلاستیک را خنثی خواهد کرد.

اگر شروع تغییر شکل زهکشی نشده با $\eta > M$ در شکل (۸-۲۰) و (۸-۲۱) توام باشد، تسلیم با جهت نمو کرنش پلاستیک که به سمت چپ اشاره دارد اتفاق می‌افتد، که به معنی انبساط حجمی پلاستیک خواهد بود. خاک در این حالت دچار نرم شوندگی پلاستیک می‌شود و باید اندازه تابع تسلیم کاهش یابد ($\delta p'_0 < 0$). در صورت صفر بودن تغییر حجمها بر اساس مسیر تنش در صفحه تراکم، باید تنش موثر میانگین افزایش یابد ($\delta p' > 0$). بدین ترتیب کرنشهای الاستیک حجمی مثبت یا فشردگی الاستیک ایجاد شده، انبساط پلاستیک را خنثی می‌کند.

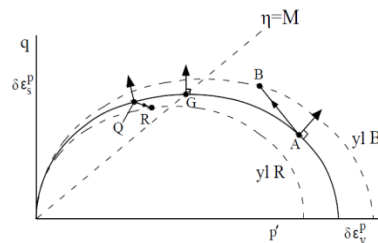
اگر نمو تغییر شکل زهکشی نشده در راس تابع تسلیم یا پتانسیل پلاستیک با $\eta = M$ رخ دهد (G در شکل (۸-۲۰) و (۸-۲۱)، جهت بردار نمو کرنش پلاستیک موازی محور q خواهد بود که به معنی صفر بودن کرنش حجمی پلاستیک خواهد بود. در این حالت برش به طرز نامحدود و بدون تغییر در اندازه سطح تسلیم ادامه می‌یابد ($\delta p'_0 = 0$), و در نتیجه بر اساس رابطه (۴۹-۸) تنش موثر میانگین نیز بدون تغییر باقی می‌ماند ($\delta p' = 0$). بنابراین نسبت تنش خاص $\eta = M$, به عنوان یک حد مرزی برای تنش موثر

میانگین زهکشی نشده عمل میکند و مسیرهای تنش می‌توانند از دو جهت تا نسبت تنش خاص حرکت نمایند.

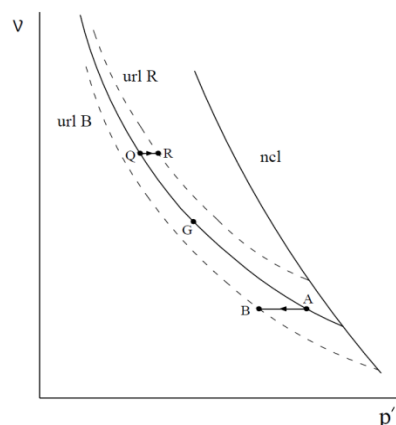
پیش بینی مسیر تنش موثر در آزمایش زهکشی نشده نیازمند اطلاعاتی در خصوص مقدار فشار آب حفره‌ای ایجاد شده است. به همین ترتیب با در دست داشتن مسیر تنش می‌توان تغییرات فشار حفره‌ای را از تفاضل مسیر تنش موثر و کل بدست آورد. اگر تغییرات در تنش موثر میانگین با $\delta p'$ و تغییرات در تنش کل میانگین δp باشد، تغییر در فشار آب حفره‌ای δu به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta u = \delta p - \delta p' \quad (۵۳-۸)$$

شکل (۲۲-۸) نتایج آزمایش سه محوری زهکشی نشده را نشان میدهد. بارگذاری بر خاک عادی تحکیم یافته از نقطه A شروع شده است. بدین ترتیب سطوح تسلیم متوالی با فواصل یکسان ($\delta p'_0 = cte$) ترسیم می‌گردند. با توجه به آنکه در صفحه تراکم $v - p'$ تغییر حجم صفر می‌باشد ($\delta v = 0$) مسیر تنش در این صفح بصورت خطی افقی خواهد بود (شکل ۲۲-۸ ب). هر نقطه A، B، C، D، E و F بر روی یک خط باربرداری-بارگذاری مجدد قرار دارند که از نقطه نظیر راس هر یک تابع تسلیم جدید شروع شده اند.



شکل ۲۰-۸: نحوه رشد سطح تسلیم در بارگذاری زهکشی نشده با مسیرهای تنش مختلف (وود ۱۹۹۰)

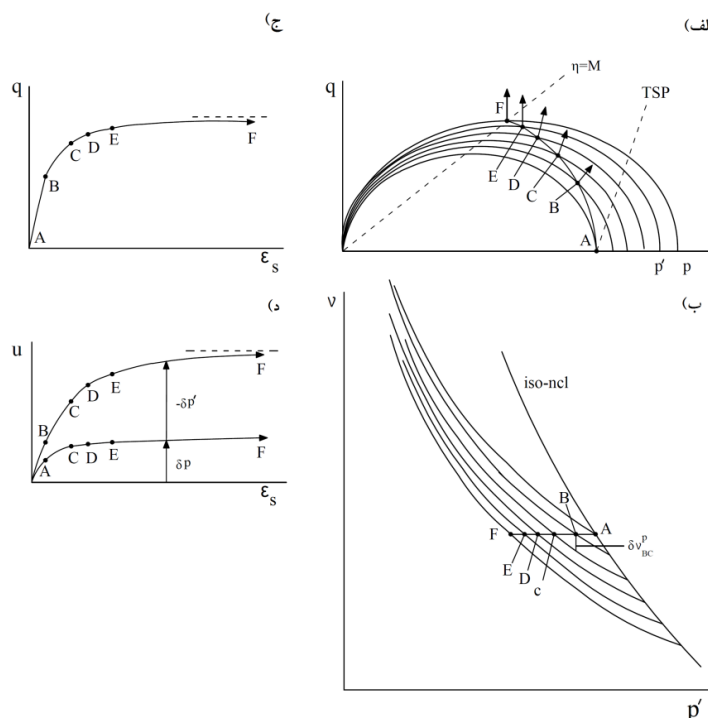


شکل ۲۱-۸: تصویر مسیرهای تنش زهکشی نشده در صفحه تراکم (وود ۱۹۹۰)

در صفحه تنش موثر $q - p'$ ، با تصویر کردن نقاط A, B, C, D, E و F بر روی سطوح تسلیم متناظر، بردار نمو کرنش پلاستیک رسم می‌شود و نسبت جزء کرنش برشی پلاستیک به جزء کرنش حجمی پلاستیک مشخص می‌شود. جزء کرنش حجمی پلاستیک از فواصل قائم بین خطوط متوالی بارگذاری-بارگذاری مجدد در صفحه تغییر حجم (δv^p) مطابق شکل (۸-۲۲-ب) قابل محاسبه است:

$$\delta \varepsilon_v^p = \frac{-\delta v^p}{v} \quad (۸-۵۴)$$

با محاسبه جزء کرنش حجمی پلاستیک، جزء کرنش برشی پلاستیک نیز قابل تعیین خواهد بود. با افزودن کرنش برشی الاستیک می‌توان رابطه تنش انحرافی-کرنش برشی را به دست آورد (شکل ۸-۲۲-ج). فشار حفره‌ای در هر مرحله از فواصل افقی بین مسیر تنش کل و موثر در صفحه $q - p'$ طبق شکل (۸-۲۲-الف) بدست می‌آید که می‌توان آن را در مقابل کرنش برشی ترسیم کرد (شکل ۸-۲۲-د). همانگونه که قبلاً نیز توضیح داده شد، مسیر تنش نمی‌تواند فراتر از نسبت تنش $\eta = M$ حرکت کند. بدین ترتیب مقادیر تنش انحرافی q و تنش موثر میانگین p' مجانبی را در منحنیهای تنش انحرافی-کرنش محوری بر اساس شکل (۸-۲۲-ج) و فشار حفره‌ای-کرنش محوری مطابق شکل (۸-۲۲-د) ایجاد می‌کند.

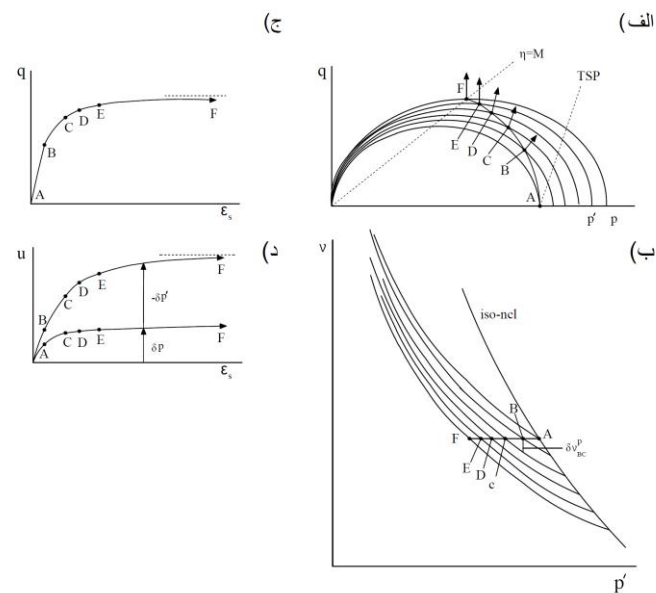


شکل ۸-۲۲: محاسبات منحنی تنش کرنش و فشار حفره‌ای در آزمایش سه محوری زهکشی نشده معمولی روی رس عادی تحکیم یافته (وود ۱۹۹۰)

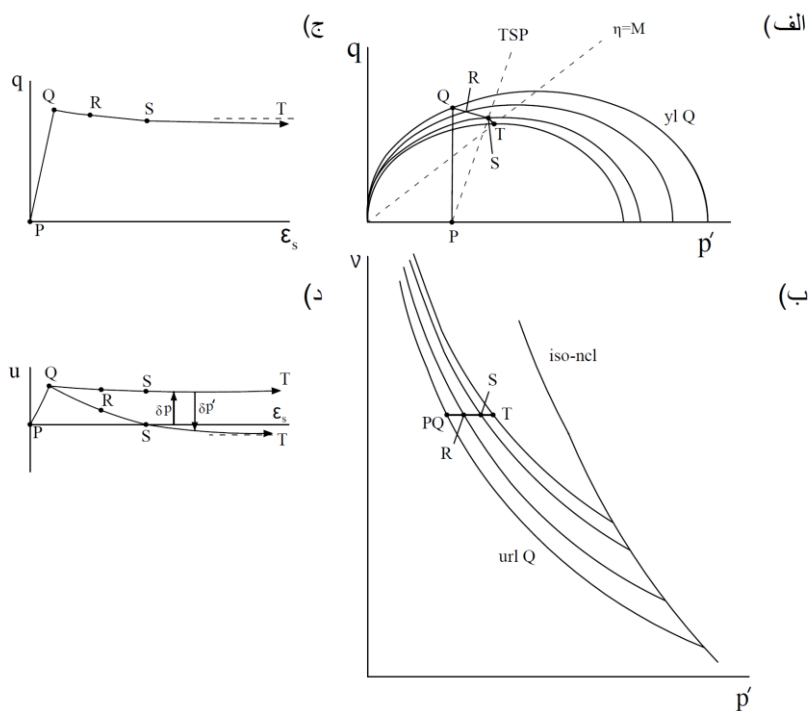
آزمایش زهکشی نشده بر نمونه اندکی پیش تحکیم یافته مشابه حالت عادی تحکیم یافته خواهد بود، با این تفاوت که مطابق شکل (۸-۲۳-الف)، مسیر تنش در ابتدا با فاز الاستیک AB در p' ثابت شروع می‌شود و تا زمانی که مسیر تنش به تابع تسلیم اولیه yl-B نرسیده باشد به حرکت قائم خود ادامه خواهد داد. در صفحه تراکم، مسیر تنش مربوطه بر خطی افقی که بیانگر عدم تغییر حجم است حرکت می‌نماید (شکل ۸-۲۳-ب).

بدین ترتیب در بخش AB تنها کرنش‌های برشی الاستیک به وجود می‌آید و منحنی تنش انحرافی-کرنش برشی در این وضعیت حالتی خطی خواهد داشت (شکل ۸-۲۳-ج). از نقطه B تا F که بر خط حالت بحرانی $\eta = M$ قرار دارد، رفتار مشابهی با وضعیت عادی تحکیم یافته وجود دارد. فشار منفذی اضافی در هر نقطه، از تفاضل مقادیر تنش موثر میانگین و تنش کل میانگین بر مسیرهای تنش مربوطه قابل انجام است.

روند محاسبات برای آزمایش زهکشی نشده بر خاک بسیار بیش تحکیم یافته در شکل (۸-۲۴) نشان داده شده است. فاز اول بارگذاری PQ کاملاً الاستیک بوده و تغییری در تنش موثر میانگین وجود نخواهد داشت. زمانیکه مسیر تنش به تابع تسلیم اولیه yl-Q نرسد آن را در $\eta > M$ قطع می‌نماید. بدین ترتیب کرنشهای حجمی پلاستیک اتساعی و رفتار نرم شونده، توأم با کوچک شدن سطح تسلیم مشاهده می‌گردد (شکل ۸-۲۴-الف). مسیر تنش تا زمان حصول به شرایط $\eta = M$ ادامه خواهد یافت.



شکل ۸-۲۳: محاسبات منحنی تنش کرنش و فشار حفره‌ای کرنش در آزمایش سه محوری زهکشی نشده معمولی روی رس تا حدی تحکیم یافته (وود ۱۹۹۰)



شکل ۸-۲۴: محاسبات منحنی تنش کرنش و فشار حفره‌ای کرنش در آزمایش سه محوری زهکشی نشده معمولی روی رس بسیار تحکیم یافته (وود ۱۹۹۰)

۸-۱۱- نکات تکمیلی در خصوص مدل کم کلی

۸-۱۱-۱- معادله سطح تسلیم

همانطور که قبلاً ذکر گردید، نسبت تنش با استفاده از رابطه زیر تعریف می‌گردد:

$$\eta = \frac{q}{p'} \quad (8-55)$$

$$q = \eta p' \Rightarrow dq = p' d\eta + \eta dp' \quad (8-56)$$

نسبت جزء تغییرات تنش نیز با رابطه زیر ارائه می‌گردد:

$$\frac{dq}{dp'} = -\psi \Rightarrow dq = -\psi dp' \quad (8-57)$$

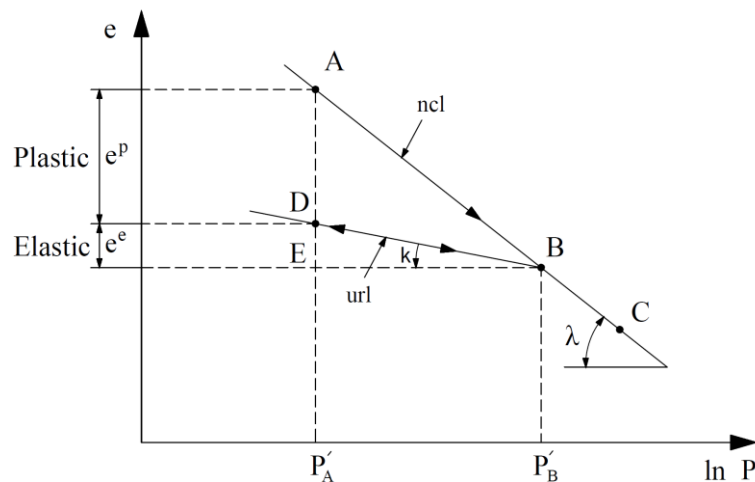
از دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت:

$$p' d\eta + \eta dp' = -\psi dp' \Rightarrow \frac{dp'}{p'} + \frac{d\eta}{\eta + \psi} = 0 \quad (8-58)$$

$$\int_{p'_0}^{p'} \frac{dp'}{p'} + \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta + \psi} = 0 \Rightarrow \ln p' - \ln p'_0 + \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta + \psi} = 0 \quad (۵۹-۸)$$

به فرم دیفرانسیلی نیز می توان نوشت:

$$\frac{dp'_0}{p'_0} - \frac{dp'}{p'} - \frac{d\eta}{\eta + \psi} = 0 \quad (۶۰-۸)$$



شکل ۸-۲۵: خط بارگذاری و باربرداری ایزوتروپ در فضای $e - \ln p'$ (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

با توجه به شکل (۸-۲۵) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} de &= -\lambda \frac{dp'_0}{p'_0} \\ de^e &= -k \frac{dp'_0}{p'_0} \\ \Rightarrow de^p &= -(\lambda - k) \frac{dp'_0}{p'_0} \end{aligned} \quad (۶۱-۸)$$

با قرار دادن بجای $\frac{dp'_0}{p'_0}$ از (۸-۶۰) خواهیم داشت:

$$de^p = -(\lambda - k) \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} \right) \quad (۶۲-۸)$$

بدین ترتیب جزء کرنش حجمی پلاستیک از رابطه ذیل محاسبه خواهد شد:

$$d\varepsilon_v^p = -\frac{de^p}{1+e} = \frac{\lambda - k}{1+e} \left(\frac{dp'}{p'} + \frac{d\eta}{\psi + \eta} \right) \quad (۶۳-۸)$$

درباره ψ فرضیات متعددی انجام شده است. بطور معمول ψ از انرژی میرا شده^۱ در پروسه بارگذاری و باربرداری تعیین می‌شود. در مدل کم کلی اولیه^۲ روسکو و اسکافیلد (۱۹۶۳)، انرژی میرا شده با رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$dW = Mp'd\varepsilon_s \Rightarrow \quad (۶۴-۸)$$

$$\rightarrow p'd\varepsilon_v^p + qd\varepsilon_s^p = Mp'd\varepsilon_s \quad (۶۵-۸)$$

در نظریه حالت بحرانی از کرنشهای برشی الاستیک صرفنظر می‌گردد و می‌توان گفت:

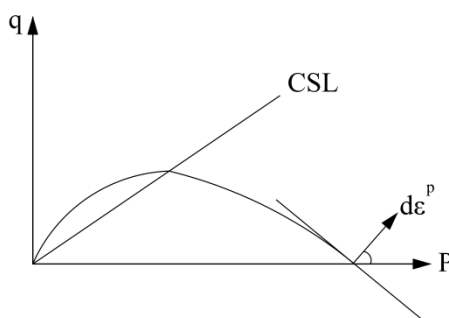
$$d\varepsilon_s^p = d\varepsilon_s^p \text{ بنابراین:}$$

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} = \frac{1}{M - \eta} \Rightarrow \psi_c = M - \eta \quad (۶۶-۸)$$

در این رابطه ψ_c مقدار ψ برای مدل کم کلی اولیه است. با جایگذاری این رابطه در معادله (۵۹-۸) معادله سطح تسلیم مدل کم کلی اولیه به شرح زیر بدست می‌آید:

$$q = Mp' \ln \frac{p_0'}{p'} \quad (۶۷-۸)$$

شکل (۲۶-۸) نمایشی از سطح تسلیم مدل کم کلی اولیه را نشان می‌دهد.



شکل (۲۶-۸): شکل تابع تسلیم مدل کم کلی اولیه

همانطور که مشاهده می‌گردد در محل برخورد با محور تنش میانگین، جزء کرنش پلاستیک عمود بر محور نبوده و ایجاد زاویه α می‌نماید. با توجه به آنکه در این نقطه، خاک تحت تنش ایزوتروپ خالص بدون هیچ تنش برشی است، وجود مولفه کرنش برشی در آن منطقی بنظر نمی‌رسد. برای رفع این مشکل، مدل مذکور توسط روسکو و برلند (۱۹۶۳) اصلاح و جزء کار تلف شده توسط رابطه ذیل ارائه شد:

$$dW = p' \sqrt{(d\varepsilon_v^p)^2 + M^2 (d\varepsilon_s^p)^2} \quad (۶۸-۸)$$

1 Dissipated energy

2 Original Cam clay model

به همان ترتیب قبلی این رابطه به معادله زیر منجر می گردد:

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} = \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \Rightarrow \psi_{cm} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (۶۹-۸)$$

که ψ_{cm} تابع ψ در مدل کم کلی اصلاح شده^۱ می باشد. بدین ترتیب می توان نوشت:

$$\int_0^\eta \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} = - \int_{p'_0}^{p'} \frac{dp'}{p'} \quad (۷۰-۸)$$

$$\rightarrow \ln(M^2 + \eta^2) - \ln(M^2) = -\ln p' + \ln p'_0 \quad (۷۱-۸)$$

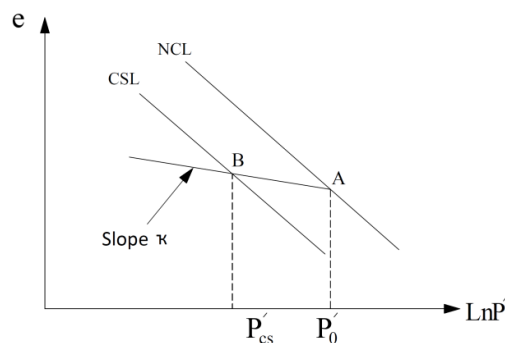
$$\frac{M^2 + \eta^2}{M^2} = \frac{p'_0}{p'} \rightarrow M^2 p'^2 - M^2 p'_0 p' + p'^2 = 0 \quad (۷۲-۸)$$

این معادله، همان سطح تسلیم بیضی شکل مدل کم کلی اصلاح شده را نشان می دهد.

۸-۱۱-۲- مدل کم کلی با نسبت فواصل^۲

ایده نسبت فواصل بدین دلیل است که مدل کم کلی عمدتاً در خاکهای رسی جوابهای مناسب تری نسبت به خاکهای ماسه ای ارائه می نماید. برای آنکه مدل در خاکهای ماسه ای نیز جوابهای خوبی بدست دهد، اسلام و همکاران^۳ (۲۰۰۴)، ضریب تصحیحی به نام نسبت فواصل را تعریف نمودند. این ضریب در واقع فاصله خطوط تحکیم ایزوتروپ و حالت بحرانی در فضای $e - \ln p'$ را بیان می نماید. بر اساس شکل (۸-۲۷)، با باربرداری در نقطه A و تعیین نقطه برخورد خط باربرداری با خط حالت بحرانی (نقطه B)، نسبت فواصل r را می توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$r = \frac{p'_0}{p'_{cs}} \quad (۷۳-۸)$$

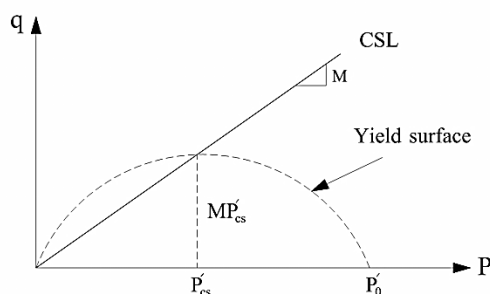


شکل ۸-۲۷: نحوه تعیین نسبت فواصل r در مدل کم کلی (اسلام و همکاران ۲۰۰۰)

1 Modified Cam clay

2 Cam clay with spacing ratio

3 Islam et al.



شکل ۸-۲۸: منحنی تسلیم مدل کم کلی با نسبت فواصل (اسلام و همکاران ۲۰۰۰)

منحنی تسلیم مدل کم کلی با نسبت فواصل در شکل (۸-۲۸) ارائه شده است. بر اساس این شکل مشخص می‌شود که در مدل کم کلی اصلاح شده، نسبت فواصل r برابر ۲ می‌باشد. همچنین در مدل کم کلی اولیه نیز مقدار این پارامتر $2/72$ خواهد بود. اما در مدل با نسبت فواصل، مقدار r الزاماً ۲ نبوده و می‌تواند مقادیر متفاوتی را اختیار نماید. در ماسه‌ها مقدار r بین ۵ تا ۶ جوابهای مناسبی از مدل را ارائه می‌دهد. معادله سطح تسلیم مدل کم کلی اولیه با نسبت فواصل بصورت زیر است:

$$\frac{q}{Mp'} = \frac{\ln\left(\frac{p'_0}{p'}\right)}{\ln r} \quad (8-74)$$

همچنین در مدل کم کلی اصلاح شده نیز معادله سطح تسلیم از قرار زیر می‌باشد. سطح تسلیم مدل کم کلی اصلاح شده با نسبت فواصل نیز محور تنش موثر میانگین را تحت زاویه قائم قطع خواهد کرد.

$$\left(\frac{q}{Mp'}\right)^2 = \frac{\left(\frac{p'_0}{p'}\right) - 1}{(r-1)} \quad (8-75)$$

۸-۱۱-۳- تعیین معادله رفتاری مدل کم کلی

کرنش حجمی پلاستیک از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_v - d\varepsilon_v^e = \left(\frac{\lambda - k}{1 + e_o}\right) \frac{dp_o}{p_o} \quad (8-76)$$

معادله سطح تسلیم مدل کم کلی در مختصات p' و q به صورت زیر می‌باشد:

$$f = M^2 p'^2 - M^2 p'_o p' + q^2 = 0 \quad (8-77)$$

در مختصات نامتغیرهای تانسور تنش انحرافی J_1, J_{2D} رابطه مذکور بصورت زیر در می‌آید:

$$f = M^2 J_1^2 - M^2 J_1 J_{o1} + 27 J_{2D} = 0 \quad (۷۸-۸)$$

در این رابطه J_{o1} مقدار نامتغیر J_1 در محل برخورد کلاهدک تسلیم با محور J_1 می باشد که مترادف p'_0 می باشد. این مقدار پارامتر سخت شوندگی مدل است که تابع کرنشهای حجمی می باشد. در شرایط تسلیم می توان نوشت:

$$f = f[q, p', p'_o(\varepsilon_v^p)] \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_v^p} d\varepsilon_v^p = 0 \quad (۷۹-۸)$$

بر اساس قانون تعامد می توان نوشت:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \bar{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (۸۰-۸)$$

در این رابطه Q تابع پتانسیل پلاستیک و $\bar{\lambda}$ پارامتر رابطه تعامد است.

$$A_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial Q}{\partial p'} \left(\frac{\partial p'}{\partial \sigma_{ij}} \right) + \frac{\partial Q}{\partial q} \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (۸۱-۸)$$

در صورت استفاده از تابع F (تابع تسلیم) می توان نوشت:

$$B_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial p'} \left(\frac{\partial p'}{\partial \sigma_{ij}} \right) + \frac{\partial F}{\partial q} \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (۸۲-۸)$$

$$\Rightarrow df = B_{ij} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} d\varepsilon_v^p = 0 \quad (۸۳-۸)$$

با استفاده از قانون هوک می توان نوشت:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (۸۴-۸)$$

با جایگذاری در رابطه $df = 0$ خواهیم داشت:

$$df = B_{ij} C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - \bar{\lambda} A_{kl}) + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \bar{\lambda} A_{ii} = 0 \Rightarrow \quad (۸۵-۸)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{B_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{B_{ij} C_{ijkl} A_{kl} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} A_{ii}} \Rightarrow \quad (۸۶-۸)$$

$$d\sigma_{ij} = \left[C_{ijrs} - \frac{C_{ijkl} A_{kl} B_{mn} C_{mnrs}}{B_{mn} C_{mnrs} A_{rs} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} A_{ii}} \right] d\varepsilon_{rs} \Rightarrow \quad (۸۷-۸)$$

$$\Rightarrow C_{ijrs}^p = \frac{C_{ijkl} A_{kl} B_{mn} C_{mnrs}}{B_{mn} C_{mnrs} A_{rs} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} A_{ii}} \quad (۸۸-۸)$$

با توجه به رابطه ابتدایی بخش می توان نوشت:

$$\frac{\partial p'_o}{\partial \varepsilon_v^p} = \frac{p'_o(1+e_o)}{\lambda-k} \Rightarrow \quad (۸۹-۸)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} = \frac{\partial F}{\partial p'_o} \frac{\partial p'_o}{\partial \varepsilon_v^p} = - \frac{M^2 p'_o(1+e_o)}{\lambda-k} \quad (۹۰-۸)$$

۸-۱۲- مدل پلاستیسیته عمومی^۱ پاستور و همکاران^۲ (۱۹۹۰)

بر خلاف مدل‌های مطرح شده در نظریه پلاستیسیته کلاسیک، عدم الزام به وجود توابع تسلیم دسته مدل‌های مرسوم در تئوری پلاستیسیته عمومی را تشکیل می‌دهد. بطور کلی در مدل‌های پلاستیسیته عمومی، بردارهای عمود بر سطوح تسلیم و پتانسیل ارائه می‌شوند و نیازی به ارائه مستقیم معادلات توابع مذکور نیست.

۸-۱۲-۱- مدلسازی رفتار خاکهای رسی

در مدل مذکور نرخ اتساع با رابطه خطی پیشنهاد شده توسط فروسارد^۳ (۱۹۸۳) بیان می‌گردد:

$$d = \frac{d \varepsilon_v}{d \varepsilon_s} \approx \frac{d \varepsilon_v^p}{d \varepsilon_s^p} = (1+\alpha)(M-\eta) \quad (۹۱-۸)$$

در این رابطه α پارامتر مدل، M شیب خط حالت پایدار و η نسبت تنش q/p' می‌باشد. با در نظر گیری قانون جریان همبسته و تساوی توابع تسلیم و پتانسیل، مولفه‌های بردار واحد عمود و مماس بر سطح تسلیم با استفاده از پارامتر d به فرم زیر تعریف می‌شوند.

$$n_v = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}} \quad (۹۲-۸)$$

$$n_s = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}} \quad (۹۳-۸)$$

پارامتر سخت شوندگی H نیز بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$H = H_o p' f(\eta) \quad (۹۴-۸)$$

$$H_o = \frac{1+e_o}{\lambda-k} \quad (۹۵-۸)$$

$$f(\eta) = \left[1 - \frac{\eta}{M} \right]^2 \frac{(1+d_o^2)}{(1+d^2)} \left| \text{sign} \left[1 - \frac{\eta}{M} \right] \right| \quad (۹۶-۸)$$

$$d_o = (1+\alpha)M \quad (۹۷-۸)$$

1 Generalized plasticity models

2 Pastor et al.

3 Frossard

۸-۱۲-۲- مدلسازی رفتار خاکهای ماسه ای

در خصوص ماسه ها، فرض تعامد به نتایج مناسبی منجر نمی گردد بنابراین، مدل از توابع تسلیم و پتانسیل مجزایی در این خصوص استفاده می نماید. بردارهای یکه عمود و مماس بر سطح تسلیم طبق روابط (۸-۹۲) و (۸-۹۳)، با استفاده از تعریف d_f بجای d بصورت زیر حساب می شود:

$$d_f = (1 + \alpha)(M_f - \eta) \quad (۸-۹۸)$$

به همین ترتیب، بردار یکه عمود و مماس بر سطح پتانسیل نیز با استفاده از همان روابط و با استفاده از d_g به شکل زیر حساب می شود:

$$d_g = (1 + \alpha)(M_g - \eta) \quad (۸-۹۹)$$

$$\frac{M_f}{M_g} = D_r \quad (۸-۱۰۰)$$

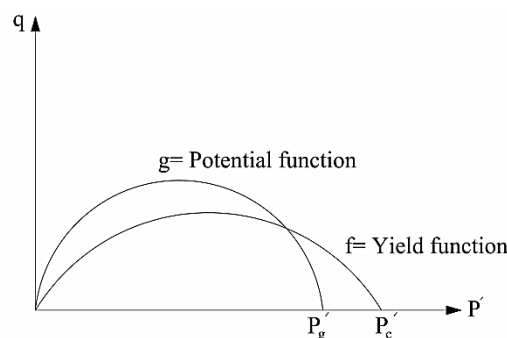
علی رغم عدم نیاز به توابع تسلیم و پتانسیل، معادله این توابع بصورت زیر بوده و در شکل (۸-۲۹) نشان داده شده است:

$$f = \left\{ q - M_f p' \left[1 + \frac{1}{\alpha} \right] \left[1 - \left(\frac{p'}{p'_c} \right)^\alpha \right] \right\} \quad (۸-۱۰۱)$$

$$g = \left\{ q - M_g p' \left[1 + \frac{1}{\alpha} \right] \left[1 - \left(\frac{p'}{p'_g} \right)^\alpha \right] \right\} \quad (۸-۱۰۲)$$

سخت شوندگی مدل نیز بر اساس رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

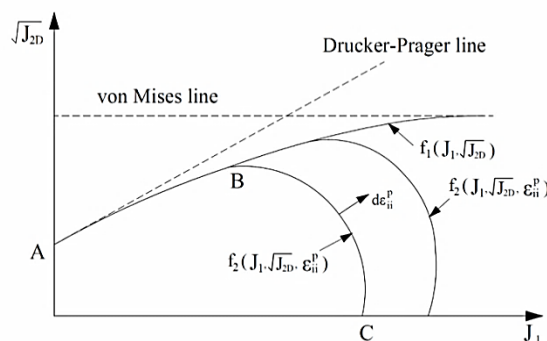
$$\frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} = \frac{1 + e_0}{\lambda - k} p_c \quad (۸-۱۰۳)$$



شکل ۸-۲۹: توابع تسلیم و پتانسیل در مدل پاستور و همکاران (۱۹۹۰)

۸-۱۳- مدل‌های دارای کلاhek^۱

بعنوان یک تفاوت اصلی بین مدل‌های کلاhek دار و مدل‌های حالت بحرانی، می‌توان به این موضوع اشاره نمود که بر خلاف مدل‌های حالت بحرانی که بر اساس یک سطح تسلیم ثابت بیان می‌شوند، در مدل‌های دارای کلاhek، تسلیم توسط دو بخش شامل سطح تسلیم ثابت^۲ و سطوح تسلیم پیش رونده^۳ بیان می‌گردد. شکل (۸-۳۰) نمایی از سطح تسلیم ثابت f_1 و سطوح تسلیم پیش رونده f_2 در مدل دارای کلاhek را نشان می‌دهد. بدین ترتیب، ABC در این شکل بیانگر سطح تسلیم مدل خواهد بود. در مدل‌های دارای کلاhek، تسلیم پیوسته خاک با استفاده از کلاhekهای متحرک و پیش رونده بیان می‌گردد. حرکت این کلاhekها تا رسیدن به سطح گسیختگی ادامه خواهد داشت. در ضمن، برخلاف مدل‌های حالت بحرانی که عموماً در فضای $q-p'$ تعریف می‌شوند، مدل‌های کلاhek دار در فضای سه بعدی تنش‌ها و با استفاده از نامتغیرهای تانسور تنش ترسیم می‌شوند.



شکل ۸-۳۰: سطوح تسلیم ثابت و پیش رونده در مدل کلاhek دار (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

۸-۱۳-۱- سطح تسلیم ثابت

سطح تسلیم ثابت که شرایط نهایی، بحرانی و یا گسیختگی را در خاک مدل می‌نماید بصورت زیر نشان داده می‌شود:

$$f_1(J_1, \sqrt{J_{2D}}) = 0 \quad (۸-۴۰)$$

در مدل‌های کلاhek دار اولیه، سطح تسلیم ثابت بصورت پوش مشترک مدل دراگر-پراگر و ون میزس تعریف می‌شد. این موضوع در شکل (۸-۳۱) نیز نشان داده شده است. این مدل برای شبیه سازی رفتار مصالح ماسه‌ای تحت بارگذاری انفجار و بروز روانگرایی در آنها تحت فشارهای دورگیر بالا

1 Cap models

2 Fixed yield surface

3 Moving yield caps

مورد استفاده قرار گرفت. با توجه به عدم بروز رفتار سخت شونده در شرایط زهکشی نشده، برای مدلسازی رفتار خاک تحت فشارهای دورگیر بالا از مدل ون میزس استفاده شد. همچنین دی ماجو و ساندلر^۱ (۱۹۷۱) رابطه ذیل را برای سطح تسلیم ثابت پیشنهاد دادند:

$$f_1 = \sqrt{J_{2D}} + \gamma e^{-\beta J_1} - \alpha = 0 \quad (۱۰۵-۸)$$

که γ ، β و α پارامترهای خاک می‌باشند.

۸-۱۳-۲- سطح تسلیم پیش رونده^۲ یا کلاهدک

معادله این سطح نیز، با رابطه ذیل مشخص می‌شود:

$$f_2 = (J_1, \sqrt{J_{2D}}, k_1) = 0 \quad (۱۰۶-۸)$$

در این رابطه k_1 پارامتر وابسته به تاریخچه تغییر شکل بوده و معمولاً بر اساس کرنشهای حجمی پلاستیک بیان می‌گردد:

$$k_1 = g(\varepsilon_v^p) = g(\varepsilon_{ii}^p) \quad (۱۰۷-۸)$$

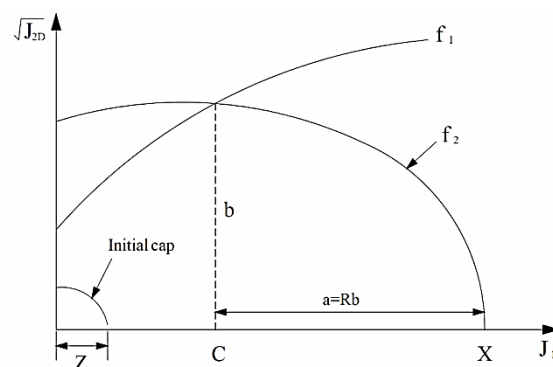
بدین ترتیب در فضای نامتغیرهای تنش انحرافی، f_2 سطحی پیش رونده است که نقاط مختلف آن، کرنش حجمی پلاستیک یکسان داشته و بعبارت دیگر کانتور کرنش حجمی پلاستیک است.

دی ماجو و ساندلر (۱۹۷۱) از یک رابطه بیضوی مطابق شکل (۸-۲۸) برای تعریف سطوح تسلیم پیش رونده در خاکهای دانه‌ای استفاده کردند. بر اساس این رابطه می‌توان سطح تسلیم را بصورت زیر بیان نمود:

$$f_2 = R^2 J_{2D} + (J_1 - C)^2 = R^2 b^2 \quad (۱۰۸-۸)$$

تعریف پارامترها در شکل (۸-۲۸) ارائه شده است. بر اساس این شکل:

$$Rb = X - C \quad (۱۰۹-۸)$$



شکل ۸-۳۱: سطوح تسلیم ثابت و پیشرفته و پارامترهای مختلف آنها (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴)

1 Di Maggio and Sandler

2 Moving yield surface

که R نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک بیضی است و X محل تقاطع با محور J_1 و یا همان فشار دورگیر می‌باشد. C مقدار J_1 در مرکز بیضی و b مقدار $\sqrt{J_{2D}}$ در $J_1 = C$ خواهد بود. در واقع X پارامتر سخت شونده‌گی است که میزان رشد سطح تسلیم را بیان می‌کند. در صورت لزوم تعریف رفتار غیر همسان در جهات مختلف، یک تابع برای بیان سختی کینماتیک نیز فعال خواهد شد. برای X می‌توان تابع ذیل را لحاظ نمود.

$$X = -\frac{1}{D} \ln \left(1 - \frac{\varepsilon_v^p}{W} \right) + Z \quad (۱۱۰-۸)$$

مقادیر D و W پارامترهای ماده و Z کلاهدک ابتدایی است که وضعیت اولیه سطح تسلیم یا تنشهای اولیه را بیان می‌نماید.

مثال (۸-۲): تعیین پارامترها در مدل کلاهدک دار

الف- تعیین سطح تسلیم ثابت

برای داده‌های ارائه شده در مثال (۸-۱) در خصوص آبرفت سری A تهران، پارامترهای سطوح تسلیم ثابت و متحرک مدل کلاهدک‌دار را محاسبه نمایید. علاوه بر داده‌های ارائه شده در مثال مذکور، در جدول ارائه شده در این مثال، نتایج چند آزمایش تحت فشارهای دورگیر بالاتر نیز به مجموعه قبلی اضافه شده است. این داده‌ها، با استفاده از نقاط گسیختگی خاک در منحنی‌های تنش انحرافی- کرنش محوری بدست آمده‌اند.

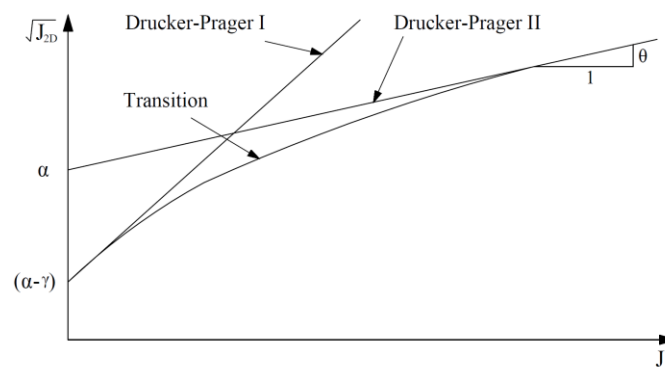
نام آزمایش	J_1 (kPa)	$\sqrt{J_{2D}}$ (kPa)
CTC No.1	255	70
CTC No.2	346	113
CTC No.3	732	250
CTC No.4	1000	300
CTC No.5	1500	395
CTC No.6	2000	450

در شکل (۸-۳)، سطح تسلیم ثابت با تعیین پوش گسیختگی مشترک مدل دراگر-پراگر و ون میزس معرفی شد. روشی دیگر برای تعیین سطح تسلیم ثابت، استفاده از پوش مشترک دو سطح گسیختگی دراگر-پراگر، یکی با عرض از مبدا صفر، مربوط به فشارهای دورگیر پایین و دیگری بیشترین عرض از مبدا، مربوط به فشارهای دورگیر بالا است. بر این اساس دسای و همکاران^۱ (۱۹۷۹)، رابطه زیر را برای این پوش مشترک ارائه نمودند:

$$f_1 = \sqrt{J_{2D}} + \gamma e^{-\beta J_1} - \theta J_1 - \alpha = 0 \quad (۱۱۱-۸)$$

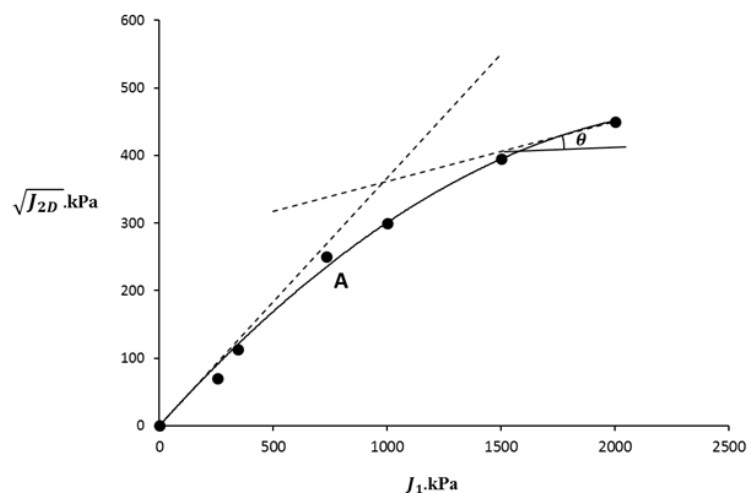
1 Desai et al.

پارامترهای این سطح شامل $\theta, \gamma, \beta, \alpha$ می‌باشند که از برازش ریاضی رابطه فوق به داده های آزمایشگاهی بدست می‌آیند. البته باید دقت داشت که در شرایط $\theta = 0$ این سطح منطبق بر سطح تسلیم قبلی (یعنی پوش مشترک سطوح گسیختگی دراکر-پراگر و ون میزس) خواهد بود. نکته دیگر آنکه اگر $\alpha \neq \gamma$ ، عبور پوش دراکر-پراگر اول از مبدا الزامی نخواهد داشت. شکل (۸-۳۲) وضعیت سطح مذکور و نقش پارامترهای مدل در آن را نشان می‌دهد.



شکل ۸-۳۲: سطح تسلیم ثابت مدل کلاهدار بر مبنای داده های آزمایشگاهی

در ادامه نحوه محاسبه پارامترهای مدل در خصوص این مثال ارائه می‌شود. نقاط گسیختگی مربوط به آزمایشهای برش سه محوری در فضای $J_1 - \sqrt{J_{2D}}$ در شکل (۸-۳۳) ترسیم شده اند. معادله (۸-۱۱) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی نمود.



شکل ۸-۳۳: تعیین سطح تسلیم ثابت مدل کلاهدار بر مبنای آزمایش

$$\sqrt{J_{2D}} = \alpha + \theta J_1 - \gamma e^{-\beta J_1}$$

در محل برخورد با محور قائم ($J_1 = 0$) می توان نوشت:

$$\sqrt{J_{2D}} = \alpha - \gamma$$

همچنین در مقادیر بزرگ J_1 می توان گفت:

$$e^{-\beta J_1} \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt{J_{2D}} = \alpha + \theta J_1$$

بدین ترتیب می توان پارامترهای مدل را تعیین نمود. ضمناً تایید می شود که در $\alpha = \gamma$ ، پوش دراکر-پراگر از مبدأ عبور می نماید. بر اساس شکل ترسیم شده می توان دریافت:

$$\alpha = 272.8, \quad \alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 272.8$$

$$\theta = \frac{d\sqrt{J_{2D}}}{dJ_1} = \frac{3.38}{28} = 0.0886$$

برای تعیین β می توان نوشت:

$$e^{-\beta J_1} = \frac{\alpha + \theta J_1 - \sqrt{J_{2D}}}{\gamma} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{J_1} \ln \left(\frac{\alpha + \theta J_1 - \sqrt{J_{2D}}}{\gamma} \right)$$

یک نقطه دلخواه مثل A در شکل (۸-۳۳) از پوش ترسیم شده در نظر گرفته می شود. با جایگذاری

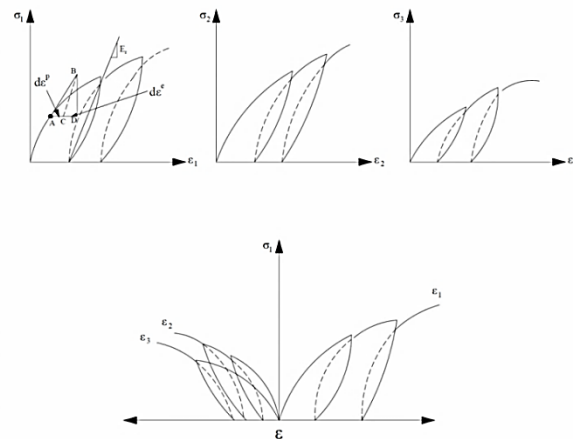
مقادیر J_1 و $\sqrt{J_{2D}}$ مربوط به آن در معادله فوق، مقدار β محاسبه می گردد.

$$J_1 = 732 \text{ psi}$$

$$\sqrt{J_{2D}} = 250 \text{ psi} \Rightarrow \beta = 0.00155$$

ب- سطح تسلیم متحرک

برای تعیین سطح تسلیم متحرک ضروری است تا کرنش حجمی پلاستیک ε_v^p در نقاط مختلف مسیر تنش محاسبه شوند. پروسه محاسبه ε_v^p منجر به تعیین کانتورهای هم کرنش حجمی می شود. با توجه به آنکه پارامتر سخت شوندگی به عنوان تابعی از کرنشهای حجمی پلاستیک مطرح است، این کانتورها به عنوان کلاهای پیش رونده ترسیم می شوند. کرنش حجمی پلاستیک از داده های آزمایشگاهی محاسبه می گردد. در صورتیکه طی آزمایش هر سه تنش اصلی تغییر یابند نمودارهای $\sigma_1 - \varepsilon_1$ ، $\sigma_2 - \varepsilon_2$ و $\sigma_3 - \varepsilon_3$ ترسیم می شوند اما در صورتیکه فقط یک تنش اصلی مثل σ_1 تغییر یابد نمودارهای $\sigma_1 - \varepsilon_1$ ، $\sigma_1 - \varepsilon_2$ و $\sigma_1 - \varepsilon_3$ ترسیم می شوند.

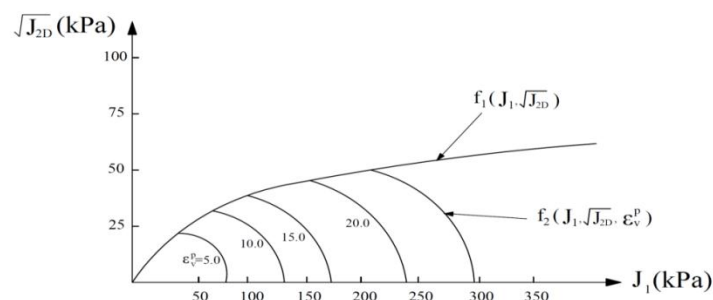


شکل ۸-۳۴): تغییرات هر یک از مولفه های تنش اصلی با کرنش اصلی نظیر آن (دسای و سیریواردان ۱۹۸۴) برای تعیین کرنش حجمی پلاستیک ε_v^p ، سه کرنش محوری اصلی پلاستیک با یکدیگر جمع می‌شوند. بدین منظور، مطابق شکل (۸-۳۴)، برای جزء تنش از A تا B بر اساس مدول برگشت متوسط E_r ، کرنشهای الاستیک را از کرنش کل کم نموده و کرنش پلاستیک نظیر محاسبه می‌گردد. این عمل بطور متناظر برای هر سه منحنی تنش اصلی-کرنش اصلی انجام و کرنش حجمی پلاستیک با جمع سه مقدار بدست می‌آید.

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p$$

با توجه به اینکه پروسه مزبور برای یک جزء تنش انجام گرفت، در کل مسیر مورد نظر می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_v^p = \sum_1^{i+1} d\varepsilon_v^p \quad (8-112)$$



شکل ۸-۳۵): کانتورهای کرنش حجمی پلاستیک و تعیین سطوح تسلیم متحرک
روش دیگر، محاسبه کرنشهای الاستیک از رابطه رفتاری الاستیک و کسر آن از کرنش کل بر اساس رابطه زیر است:

$$\{d\varepsilon^e\} = [c^e]^{-1} \{d\sigma\} \quad (۱۱۳-۸)$$

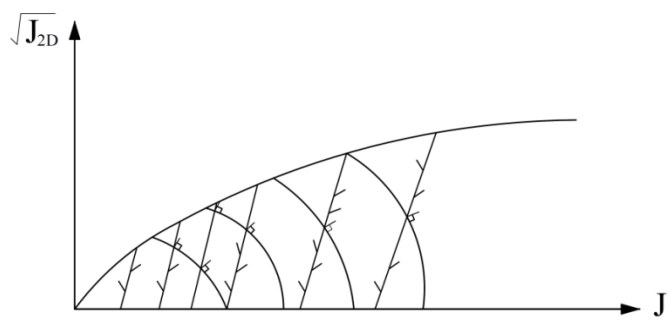
$$d\varepsilon_v^p = (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3) - (d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_2^e + d\varepsilon_3^e) \quad (۱۱۴-۸)$$

البته با توجه به کوچک بودن دامنه رفتار الاستیک خاک، میتوان بجای استفاده از کرنش حجمی پلاستیک از کرنش پلاستیک کل نیز استفاده کرد که منجر به پاسخهای مناسب و قابل قبولی نیز می شود. پس از تعیین کرنشهای حجمی پلاستیک در نقاط مختلف از مسیرهای تنش، کانتورهای هم کرنش حجمی مطابق شکل (۸-۳۵) رسم شده و با برازش منحنی به آنها، پارامترهای مورد نیاز بدست می آیند.

ب- تابع پتانسیل پلاستیک

با تعیین مولفه های برشی و حجمی کرنش پلاستیک در هر نقطه از مسیر تنش، جهت بردار کرنش پلاستیک نیز در هر نقطه از فضای تنش $J_1 : \sqrt{J_{2D}}$ بدست خواهد آمد. با توجه به اینکه بردار کرنش پلاستیک در هر نقطه بر سطح پتانسیل عمود است، با این روش امکان تعیین سطح پتانسیل پلاستیک Q به عنوان سطح تقریبی که در تمام نقاط بر این بردارها عمود است وجود خواهد داشت. این روش در شکل (۸-۳۶) نشان داده شده است.

بر اساس توضیحات ارائه شده در خصوص سطوح تسلیم متحرک، چهار پارامتر D, W, Z و R برای مشخص نمودن آن قابل تعیین می باشند. با توجه عدم در نظرگیری سطح تسلیم اولیه در این مثال، $Z=0$ خواهد بود. دقت گردد معمولاً Z در مواردی لحاظ می شود که از یک مرحله آزمایش به مرحله بعدی برویم. بطور مثال یعنی، ابتدا نمونه تحت یک مسیر تنش خاص آزمایش و سپس با تغییر مسیر تنش به مسیر تنش جدیدی رسیده باشیم. مقادیر پارامترهای D و W از آزمایش هیدواستاتیک قابل هستند با جایگذاری $Z=0$ می توان نوشت:



شکل (۸-۳۶): محاسبه جهت بردارهای کرنش پلاستیک و سطح پتانسیل (دسای و سیریاردان ۱۹۸۴)

$$X = -\frac{1}{D} \ln \left(1 - \frac{\varepsilon_v^p}{W} \right) \quad (۱۱۵-۸)$$

مقدار $X=3p$ در نظر گرفته می‌شود که p تنش همه جانبه ایزوتروپ اعمالی خواهد بود. بنابراین:

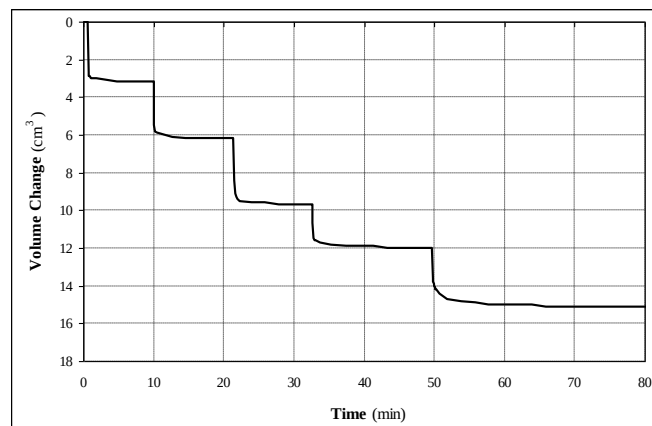
$$3pD = -\ln\left(1 - \frac{\varepsilon_v^p}{W}\right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_v^p = W(1 - e^{-3pD})$$

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_v - \varepsilon_v^e \Rightarrow \varepsilon_v = W(1 - e^{-3pD}) + \frac{p}{K} \quad (۱۱۶-۸)$$

در این رابطه K مدول بالک خاک می‌باشد. برای تعیین D و W از داده های آزمایش فشار هیدرواستاتیک استفاده می‌گردد. در خصوص آبرفت تهران، آزمایشهای فشار هیدرواستاتیک بر نمونه استوانه‌ای با قطر ۱۰ و ارتفاع ۲۰ سانتیمتری در تراکم نسبی ۰.۷۰ انجام و برای پنج مرحله اعمال فشار دورگیر ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ کیلوپاسکال، نمودار تغییرات حجم با زمان بصورت زیر بدست آمده است. بدین ترتیب کرنش حجمی کل در هر مرحله از تقسیم تغییرات حجم متناظر با هر فشار دورگیر بر حجم اولیه مطابق رابطه زیر محاسبه می‌گردد. با تعیین کرنشهای پلاستیک می‌توان، تغییرات کرنش حجمی کل در برابر فشار دورگیر را بصورت جدولی بدست آورد.

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0}$$



p (kPa)	ε_v
100	0.0019
200	0.0038
300	0.0062
400	0.0076
500	0.0095

از این جدول دو نقطه با فشار ۳۰۰ و ۵۰۰ کیلوپاسکال انتخاب شده و اعداد در رابطه (۱۱۶-۸) جایگذاری می‌شوند. با فرض آنکه مدول بالک $K=120$ MPa باشد میتوان نوشت:

$$0.0062 - \frac{300}{120000} = W(1 - e^{-3 \times 300D})$$

$$0.0095 - \frac{500}{120000} = W(1 - e^{-3 \times 500D})$$

$$\frac{1 - e^{-900 \times D}}{1 - e^{-1500 \times D}} = 0.693$$

بدین ترتیب مقدار D با سعی و خطا بدست می‌آید. حدس اولیه برای این معادله بصورت زیر قابل تعیین است:

$$(900 - 1500)D = \ln(0.693) \rightarrow D = 0.00061$$

سپس با جایگذاری مقدار آن در یکی از روابط، W محاسبه خواهد شد. در سعی اول از $D=0.00061$ و $W=0.0088$ استفاده می‌گردد. با کاهش از این مقدار به سمت مقادیر کمتر، معمولاً می‌توان مقدار دقیقتری یافت. به این ترتیب با بررسی دقیق تر مقدار $D=0.00053$ و $W=0.0098$ محاسبه می‌شود. مقدار W با جایگذاری از معادله اول بدست آمده است. در صورت محاسبه W از هر دو معادله و محاسبه مقدار میانگین، سومین سعی برای حل معادله عبارت از $D=0.00053$ و $W=0.0097$ خواهد بود. به این ترتیب جدول زیر برای بررسی پیشبینی‌های مدل در سه سعی بعمل آمده قابل تعیین است. بر اساس این جدول، در محدوده مورد بررسی، پاسخ مدل حساسیت زیادی به مقادیر این پارامترها نشان نمی‌دهد:

p (kPa)	آزمایش	انتخاب اول	انتخاب دوم	انتخاب سوم
100	0.0019	0.0014	0.0013	0.0013
200	0.0038	0.0023	0.0022	0.0022
300	0.0062	0.0031	0.0030	0.0030
400	0.0076	0.0039	0.0039	0.0039
500	0.0095	0.0048	0.0047	0.0047

نکته مهم آن است که اگر نتایج آزمایش فشار هیدرواستاتیک تحت فشارهای دورگیر بسیار بالا در دست باشد، ترم e^{-3pD} در عبارت به سمت صفر میل می‌نماید و بدین ترتیب W از کرنشهای پلاستیک قابل تعیین است. با محاسبه W می‌توان در مقادیر کوچکتر فشار دورگیر با جایگذاری در معادله، D را نیز بدست آورد.

پارامتر R بیان کننده اندازه و شکل سطح تسلیم است. مقدار این پارامتر بر اساس شکل کانتورهای هم کرنش پلاستیک قابل تعیین است. در بسیاری موارد با فرض معادله بیضوی برای کلاهدک و نسبت

قطر بزرگ به کوچک بین 1.67 تا 2.0 مقدار پارامتر R بین این دو حد لحاظ می‌گردد. بدین ترتیب سه معادله ذیل مبین سطوح تسلیم و سخت شوندگی مدل کلاهدار خواهد بود:

$$\sqrt{J_{2D}} = 272.8 + 0.0886J_1 - 272.8e^{-0.00155J_1} \quad \text{سطح تسلیم ثابت}$$

$$R^2 J_{2D} + (J_1 - c)^2 = R^2 b^2 \quad \text{سطح تسلیم متحرک}$$

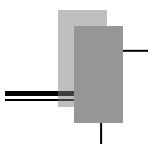
$$X = \frac{1}{0.00053} \ln \left(1 - \frac{\varepsilon_v^p}{0.0097} \right) \quad \text{تابع سخت شوندگی}$$

تمرینات فصل هشتم

- ۱- در خصوص معیار Mohr-Coulomb کدامیک از موارد زیر صحیح نیست؟
 - الف- در این معیار از تنش اصلی میانگین صرفنظر می‌شود.
 - ب- مقاومت کششی و فشاری مصالح در این معیار متفاوت از هم هستند.
 - ج- معیار موهر کولمب معمولاً در صفحه نامتغیرهای تنش استفاده می‌گردد.
 - د- نامتغیر سوم تانسور تنش در تعریف این معیار وارد می‌گردد.
- ۲- کدام مورد خصوص معیار دراگر پراگر نادرست است؟
 - الف- عملکرد ضعیف تری در محاسبه کرنشهای پلاستیک نسبت به موهر-کولمب دارد.
 - ب- تغییر حجم خاکهای متراکم را به نحو مناسب تری مدل می‌نماید.
 - ج- دو پارامتر آن با استفاده از نتایج آزمایش سه محوری قابل محاسبه هستند.
 - د- شکل معیار گسیختگی در صفحه تنشهای اصلی بصورت یک دایره می‌باشد.
- ۳- کدام مورد خصوص سطح حالت مرزی در صفحه $q-p'-e$ نادرست است؟
 - الف- در مقاطع e ثابت، با ازدیاد نسبت تخلخل سطح روسکو بزرگتر می‌شود.
 - ب- مسیر تنش نمونه های عادی تحکیم یافته در راستای سطح روسکو به خط حالت بحرانی می‌رسند.
 - ج- مسیر تنش نمونه های پیش تحکیم یافته در راستای سطح ورسلو به خط حالت بحرانی می‌رسند.
 - د- تصویر خط حالت بحرانی در صفحه $p'-e$ بصورت یک منحنی خواهد بود.
- ۴- مدل کم کلی اصلاح شده چه نقصی از مدل کم کلی اولیه را برطرف می‌نماید؟
 - الف- سطح تسلیم متقارن می‌شود.
 - ب- در تنش هیدرواستاتیک، کرنشهای پلاستیک بصورت صحیح مدلسازی می‌شوند.
 - ج- در محل تلاقی سطح تسلیم و خط حالت بحرانی، کرنشهای پلاستیک اصلاح می‌شوند.
 - د- کرنش برشی پلاستیک و کل با هم برابر در نظر گرفته می‌شوند.
- ۵- تصویر معیارهای Mohr-Coulomb، von Mises، Tresca و همچنین Drucker-Prager بر صفحه π را ترسیم نمایید.
- ۶- سطح حالت مرزی (state boundary) را در فضای کلی سه محوری $p'-q-e$ ترسیم نمایید و هریک از بخشهای آن را تشریح کنید.
- ۷- نحوه تعیین پوشهای ثابت و متغیر مدل‌های الاستوپلاستیک دارای Cap را توضیح دهید.

فصل نهم

روابط مقاومت – اتساع در خاکها



۹-۱- مقدمه

چهارچوب کلی مدل های الاستو پلاستیک برای تبیین رفتار خاکها در فصل هفتم بیان گردید. ویژگی های اساسی این چهارچوب شامل سطوح تسلیم، که مرز تغییرشکلهای کاملاً قابل بازگشت را در بر دارد و تابع پتانسیل پلاستیک که حالت یا مکانیزم تغییر شکل پلاستیک به وجود آمده در زمان تسلیم را کنترل می کند، می شوند. تطابق توابع پتانسیل پلاستیک و تسلیم بر یکدیگر مدلسازی رفتار خاک را تسهیل می نماید زیرا محاسبه تابع پتانسیل پلاستیک امری پیچیده می باشد. در مدل کم کلی و در فصل هشتم، فرض جریان همبسته و تطابق پتانسیل پلاستیک و سطح تسلیم برای محاسبه کرنشهای پلاستیک در نظر گرفته شد.

در این فصل، قوانین مختلف برای محاسبه نرخ تغییر شکل های پلاستیک معرفی شده و عوامل کنترل کننده نرخ این تغییر شکل ها با بیان منابع مختلف و داده های آزمایشگاهی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۹-۲- تابع پتانسیل پلاستیک، قانون جریان و ارتباط تنش-اتساع

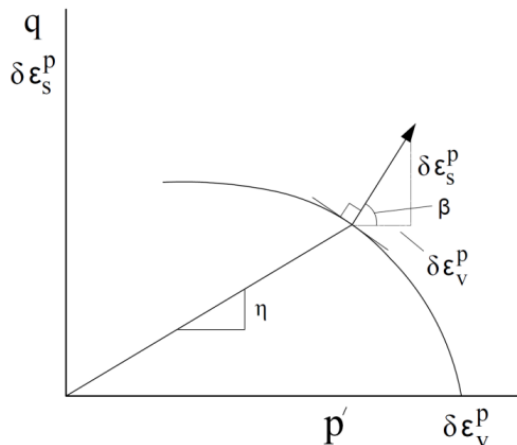
در فصل هفتم توابع پتانسیل پلاستیک به عنوان منحنی هایی در صفحه تنش موثر $q - p'$ معرفی شدند که مطابق شکل (۹-۱) بردار نمو کرنش پلاستیک $d\varepsilon_s^p / d\varepsilon_v^p$ بر آنها عمود می باشند.

در بسیاری از مدل های رفتاری خاک، نسبت $d\varepsilon_s^p / d\varepsilon_v^p$ تنها به نسبت تنش $\eta = q / p'$ و نه به تک تک مقدار p' و q وابسته می گردد. نسبت $d\varepsilon_s^p / d\varepsilon_v^p$ طبق تعریف در جهت عمود بر پتانسیل پلاستیک می باشد، که اگر تابعی از نسبت تنش $\eta = q / p'$ نیز باشد، مطابق شکل (۱-۹) می تواند با رسم شعاعی از مرکز صفحه $q - p'$ به دست آید.

راه جایگزین دیگر برای معرفی توابع پتانسیل پلاستیک آن است که نسبت تنش η در مقابل نسبت نمو کرنش پلاستیک $d\varepsilon_s^p / d\varepsilon_v^p$ رسم شود. مطابق شکل (شکل ۱-۹)، کمیتی که نسبت نمو کرنش برشی و کرنش حجمی پلاستیک را نشان می دهد زاویه β بین بردار نمو کرنش و محور p' است:

$$\tan \beta = \frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} \quad (۱-۹)$$

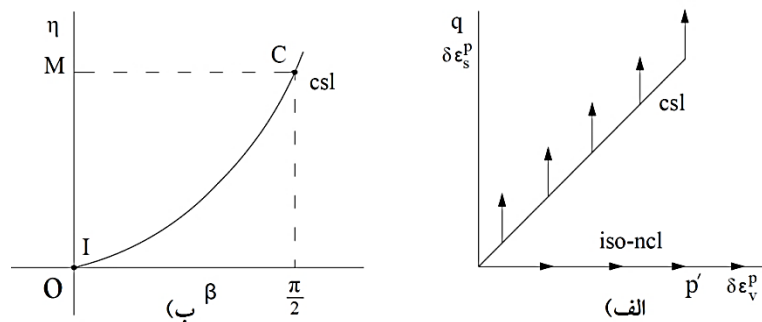
رابطه بین نسبت نمو کرنش پلاستیک و نسبت تنش به عنوان قانون جریان شناخته می شود که مکانیزم تغییر شکل یا جریان پلاستیک خاک را کنترل می کند. نسبت $d\varepsilon_s^p / d\varepsilon_v^p$ اتساع پلاستیک خاک است و مطابق شکل (۲-۹)، نمودارهای مربوطه بر حسب β و نسبت تنش η ، نمودارهای تنش-اتساع^۱ نام دارند.



$$\beta = \tan^{-1} \frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} \quad \text{نسبت تنش } \eta = q / p' \text{ و زاویه اتساع}$$

(وود ۱۹۹۰)

1 Stress-dilatancy



شکل ۹-۲: (الف) نمو کرنش پلاستیک برای تراکم ایزوتروپ به همراه حالت بحرانی ترسیم شده در فضای $q - p'$ (ب) نمودار تنش-اتساع $\eta : \beta$ بین نقاط تراکم ایزوتروپ ($I : \eta = 0$) و حالت بحرانی ($C : \eta = M$)

این روش معرفی برای تبیین رفتار پلاستیک خاک مناسب است گرچه برای تبیین رفتار الاستیک چندان مناسب به نظر نمی‌رسد. زیرا معمولاً نسبت کرنشهای برشی و حجمی الاستیک، بسته به ثوابت الاستیک خاک مانند مدول برشی و مدول بالک، مضربی از نسبت تنشهای برشی و حجمی خواهد بود. بعلاوه این ویژگی برای تبیین نسبت نمو کرنشهای برشی و حجمی کل نیز مناسب نیست زیرا این پارامتر شامل هر دوی کرنشهای الاستیک و پلاستیک خواهد بود. گرچه، در بسیاری از شرایط، تسلیم زمانی رخ می‌دهد که سهم کرنش الاستیک در مقابل کرنش کل قابل نظر خواهد بود و اختلاف بین نسبت نمو کرنش پلاستیک و نسبت نمو کرنش کل اندک است. طی آزمایشهای زهکشی نشده یا حجم ثابت، نسبت $\delta \epsilon_v^p / \delta \epsilon_s^p = 0$ است. بنابراین در زمان تسلیم خاک طی آزمون زهکشی نشده، مجموع کرنشهای حجمی الاستیک و پلاستیک صفر بوده و عبارتی این دو مولفه کرنش، علامتی مخالف یکدیگر دارند، لذا نسبت $\delta \epsilon_v^p / \delta \epsilon_s^p \neq 0$ خواهد بود.

بر اساس مدل کم کلی، در حالت بحرانی خاک بدون کرنش حجمی پلاستیک به کرنش برشی ادامه می‌دهد. بدین ترتیب در نسبت تنش $\eta = M$ ، $\delta \epsilon_v^p / \delta \epsilon_s^p = 0$ می‌باشد. بنابراین، بردار جزء کرنش پلاستیک موازی با محور q خواهد بود (شکل ۹-۲-الف) و بر اساس رابطه (۹-۱)، در نقطه C از

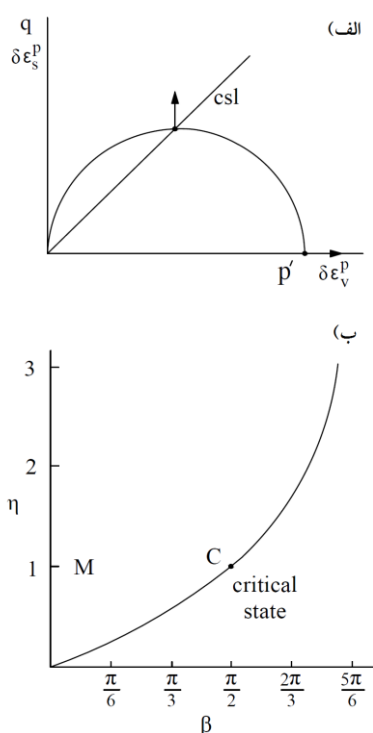
شکل (۹-۲-ب) $\beta = \frac{\pi}{2}$ است. در شرایط تراکم ایزوتروپ ($q=0$) نیز، با توجه به عدم تغییر شکل

برشی $\delta \epsilon_s^p = 0$ و بردار نمو کرنش پلاستیک به موازات محور p' خواهد بود (شکل ۹-۲-الف). در این حالت زاویه اتساع پلاستیک $\beta = 0$ می‌باشد (نقطه I در شکل ۹-۲-ب). تابع پتانسیل پلاستیک، رابط بین این دو وضعیت بوده و قانون جریان را برای آن مصالح مشخص می‌نماید. به عبارت دیگر، قانون جریان ارتباط $\eta : \beta$ را بین نقاط I و C بیان می‌نماید. شکل دقیق این منحنی در خاکهای مختلف وضعیت متفاوتی خواهد داشت.

قانون جریان برای مدل کم کلی اصلاح شده که در فصل هشتم ارائه گردید به شرح ذیل است و برای $M=1.0$ در شکل (۳-۹) ترسیم شده است.

$$\frac{\delta \varepsilon_v^p}{\delta \varepsilon_s^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (۲-۹)$$

$$\tan \beta = \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \quad (۳-۹)$$



شکل ۳-۹: نمایش از (الف) تابع پتانسیل پلاستیک، (ب) رابطه تنش-اتساع مدل کم کلی (وود ۱۹۹۰)

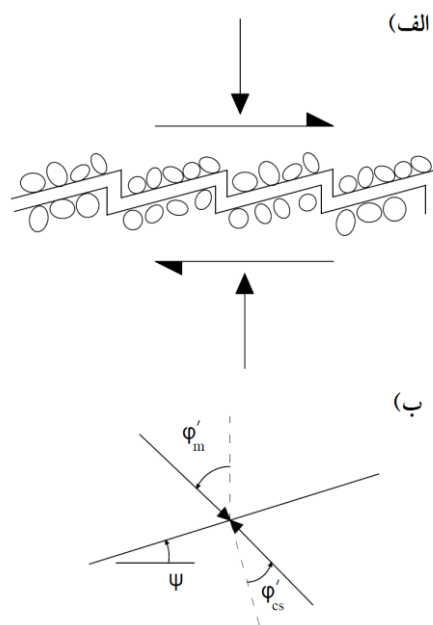
۹-۲-۱- ارتباط تنش-اتساع در شرایط کرنش مسطح

مدل کم کلی مدت‌ها برای توصیف رفتار خاک‌ها در آزمایشات سه محوری استفاده می‌شد. مدل‌هایی که ارتباط بین نسبت تنش و نرخ اتساع را توضیح می‌دهد، به سادگی برای حالت کرنش محوری نیز قابل کاربرد هستند. شبیه سازی اتساع خاک با قفل و بست پره‌های اره‌ای شکل در شکل (۴-۹) نشان داده شده است. در واقع، اتساع خاک هنگام برش، با فرض لغزش نه بر صفحه افقی بلکه بر صفحه‌ای که با افق زاویه اتساع $\frac{1}{2}$ می‌سازد (شکل ۴-۹-الف)، شبیه سازی می‌گردد. لغزش بین ذرات

خاک، بر روی این صفحات اتفاق می‌افتد. نگاهی بر نیروهایی که در فرآیند لغزش درگیر می‌شوند (شکل ۴-۹-ب) نشان می‌دهد، در صورتیکه زاویه اصطکاک در مقابل لغزش بر روی صفحات شیب‌دار ϕ'_{cs} باشد، زاویه اصطکاک بسیج شده ظاهری برای حرکت در جهت افقی، ϕ'_m به صورت زیر خواهد بود:

$$\phi'_m = \phi'_{cs} + \psi \quad (۴-۹)$$

رابطه (۴-۹) به عنوان رابطه تنش-اتساع تعریف می‌شود که زاویه بسیج شده ϕ'_m را به زاویه اتساع ψ در حین بارگذاری برشی مرتبط می‌نماید.



شکل ۴-۹: نمایش شماتیک (الف) لغزش و گیر افتادگی پره‌های اره‌ای شکل بر روی سطوح زبر شیب‌دار (ب) نیروهای برآیند وارده بر روی صفحه شیب‌دار (وود ۱۹۹۰)

صفحه لغزش در شکل (۴-۹) را می‌توان در نمونه خاک حین آزمایش برش مستقیم^۲ مطابق شکل (۵-۹) در نظر گرفت. کمیت‌هایی که در این آزمایش اندازه‌گیری می‌شوند بار عمودی P ، بار برشی Q

1 Mobilized friction angle

2 Direct Shear test

و تغییر مکان های معادل x و y در مرزهای جعبه برش می‌باشند. کار انجام شده توسط بارهای اعمالی P و Q بر نمونه خاک حین ایجاد نمو تغییر مکان های x و y ، به شرح زیر است:

$$\delta W_T = P \delta y + Q \delta x \quad (5-9)$$

عبارت $Q \delta x$ نشان دهنده کار انجام شده حین برش نمونه و عبارت $P \delta y$ نشان دهنده کار انجام شده در زمانی است که خاک تحت اثر برش تغییر حجم می‌دهد. برای خاکی مانند ماسه متراکم که در حین برش اتساع پیدا میکند، $\delta y < 0$ و بار عمودی P به سمت بالا کشیده می‌شود. خاک به دلیل سوار شدن ذرات بر یکدیگر منبسط می‌شود و تغییر شکل تنها زمانی که برخی ذرات قادر به رانده شدن بر روی ذرات دیگر باشند ادامه پیدا می‌کند. به دلیل این حرکت، کل کار برشی $Q \delta x$ توسط خاک جذب نمی‌شود، مقداری از آن برای غلبه بر نیروی عمودی و عبارتی غلبه بر اتساع دانه های خاک مورد نیاز است. باقی مانده کار خالص ورودی δW_T که به نمونه وارد می‌شود نیز در روند تغییر شکل الاستیک و بویژه مقابله با مقاومت اصطکاکی بین دانه های خاک حین لغزش صرف می‌گردد.

بر اساس مطالعات تیلور^۱ (۱۹۴۸)، رابطه اتساع-تنش با فرض جذب کل کار ورودی توسط اصطکاک بین دانه‌ای و عدم اتلاف انرژی توسط تغییر شکل الاستیک دانه‌ها قابل حصول است. در صورتیکه فرض شود اتلاف انرژی اصطکاکی، توسط بار عمودی P و ضریب اصطکاک μ کنترل می‌شود می‌توان نوشت:

$$\delta W_T = \mu P \delta x \quad (6-9)$$

با کنار هم گذاشتن و منظم کردن روابط (۵-۹) و (۶-۹) داریم:

$$\frac{Q}{P} + \frac{\delta y}{\delta x} = \mu \quad (7-9)$$

جمله اول، زاویه اصطکاک بسیج شده بر صفحه افقی و جمله دوم نیز نشان دهنده اتساع نمونه حین برش است:

$$\frac{Q}{P} = \tan \phi'_m \quad (8-9)$$

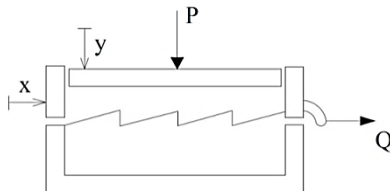
$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\tan \psi \quad (9-9)$$

$$\tan \phi'_m = \mu + \tan \psi \quad (10-9)$$

زمانی که ذرات خاک در حجم خاک ثابت لغزش و دوران را تجربه می‌کنند و عبارتی خاک به حالت

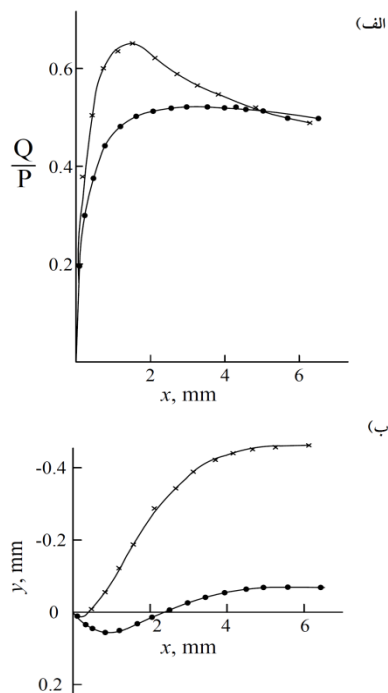
بحرانی رسیده باشد، $\frac{\delta y}{\delta x} = 0$ و $\frac{Q}{P} = \mu$ خواهد بود. لذا رابطه (۷-۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mu = \tan \phi'_m \quad (11-9)$$



شکل (۵-۹): سطوح زبر و شیب‌دار در جعبه برش مستقیم

صحت رابطه (۹-۱۰) را می‌توان با بررسی داده‌های آزمایش برش مستقیم بر ماسه سست و متراکم که توسط تیلور (۱۹۴۸) در شکل (۶-۹) گزارش شده است، امتحان نمود. از شیب نمودار داده‌های تغییر مکان در جهات x و y در شکل (۶-۹-ب)، برای به دست آوردن مقادیر $\frac{\delta y}{\delta x}$ استفاده می‌شود. این نسبت در مقابل نسبت بار افقی به بار عمودی $\frac{Q}{P}$ در شکل (۹-۷-الف) ترسیم شده است.

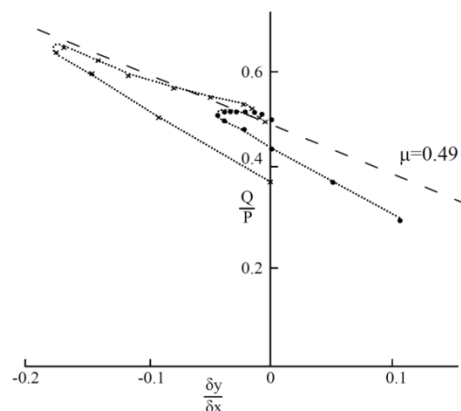


شکل ۹-۶: آزمایش برش مستقیم بر ماسه اتاوا تحت تنش نرمال ۲۸۷ کیلوپاسکال (×: متراکم با $\nu_0 = 1.562$ ، ●: سست با $\nu_0 = 1.652$)، الف) زاویه اصطکاک بسیج شده $\frac{Q}{P}$ بر روی صفحه افقی در برابر تغییر مکان برشی x ، ب) تغییر مکان قائم y در مقابل تغییر مکان برشی x (تیلور، ۱۹۴۸)

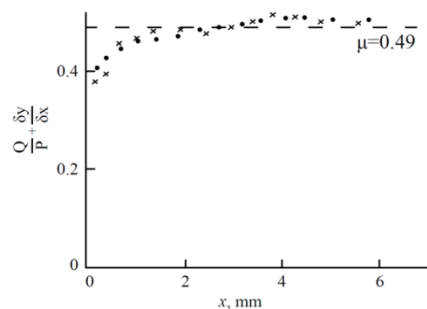
در شکل (۷-۹-ب) مجموع $\frac{Q}{P} + \frac{\delta y}{\delta x}$ در مقابل تغییر مکان افقی x ترسیم شده است. مشخص است که نقاط نشان داده شده در شکل های (۷-۹-الف) و (۷-۹-ب)، در تغییرشکلهای برشی کوچک x همخوانی مناسبی با روابط (۷-۹) و (۱۰-۹) ندارند. علت این امر آن است که قانون جریان باید بر اساس تغییر شکل پلاستیک ایجاد شده و نه تغییر شکل کل تعیین شود. بدین ترتیب باید کار برشی انجام شده در مراحل اولیه آزمایش که موجب بروز تغییر شکل الاستیک می‌گردد، در روابط مد نظر قرار گیرد.

در تغییرشکلهای برشی بزرگتر x داده‌ها دارای ثبات بیشتری می‌باشند و مقدار میانگین $\mu \approx 0.49$ از شکل (۷-۹-ب) قابل استخراج خواهد بود. رابطه (۷-۹) نیز با $\mu = 0.49$ در شکل (۷-۹-الف) ترسیم شده است و رفتار نرم شونده ماسه‌ها را هنگامی که نسبت تنش از مقدار اوج کاهش می‌یابد را به خوبی نشان می‌دهد.

(الف)



(ب)



شکل ۷-۹: نسبت تنش و اتساع در آزمایشات برش مستقیم بر روی ماسه اتاوا و رابطه (۷-۹)، (×: متراکم با

•: سست با $v_0 = 1.562$ ، (الف) زاویه اصطکاک بسیج شده $\frac{Q}{P}$ در مقابل اتساع $\frac{\delta y}{\delta x}$ ، (ب)

مجموع $\frac{Q}{P} + \frac{\delta y}{\delta x}$ در مقابل تغییر مکان برشی x (تیلور، ۱۹۴۸)

هر چند اندازه گیری نیروهای P و Q و تغییر مکانهای x و y در آزمایشات برش مستقیم عملی است، به دلیل عدم تغییر شکل همگن نمونه در جعبه برش، تعیین تنشها و بویژه کرنشها عملاً امکان پذیر نبوده و با خطای فراوانی همراه است. آزمایش برش ساده^۱، سیستم کرنش مسطح دیگری است که تغییر شکل های ایجاد شده در آن، وضعیت یکنواخت تری نسبت به برش مستقیم ایجاد می نماید. این وضعیت تغییر شکل در شکل (۹-۸-الف) نشان داده شده است. حین اعمال نیروی برشی، طول نمونه ثابت باقی می ماند اما ممکن است ارتفاع آن تغییر کند. با ابزارگذاری مناسب، اندازه گیری تنش برشی و عمودی σ_{yy} و τ_{yx} که بر خاک اعمال می شوند، امکان پذیر است. از تغییر مکانهای افقی و قائم x و y ، کرنشهای نظیر قابل محاسبه هستند:

$$\delta\epsilon_{yy} = \frac{\delta y}{h} \quad (۹-۱۲)$$

$$\delta\gamma_{yx} = \frac{\delta x}{h} \quad (۹-۱۳)$$

که در آن h ارتفاع نمونه می باشد. همچنین با توجه به طول ثابت نمونه، $\delta\epsilon_{xx} = 0$ خواهد بود. شکل (۹-۸-ب) نیز نحوه محاسبه زاویه اتساع ψ که با مقدار حرکت نسبی صفحه بالا نسبت به صفحه پایین مرتبط است را با استفاده از دایره موهر بیان می نماید.

$$\tan \psi = \frac{-\delta\epsilon_{yy}}{\delta\gamma_{yx}} \quad (۹-۱۴)$$

در این رابطه ψ ، زاویه اتساع نمونه نامیده می شود. این زاویه همانطور که در شکل (۹-۸-ب) دیده می شود، شیب مماس بر این دایره موهر در نقاطی است که محور کرنش برشی را قطع می کند. در واقع ψ در دایره موهر کرنشی، معادل زاویه اصطکاک ϕ' ، در دایره موهر تنش است (شکل ۹-۸-ج). تعریف مذکور در شرایط کرنش محوری سودمند است ولی بطور مشابه می توان زاویه θ را برای شرایط سه محوری تعریف نمود:

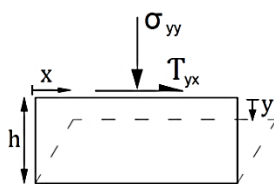
$$\sin \theta = \frac{-\delta\epsilon_v}{\delta\epsilon_s} \quad (۹-۱۵)$$

رابطه (۹-۷) بر حسب مقادیر تنش و کرنش که از دستگاه برش ساده قابل تعیین است، به صورت زیر در می آید:

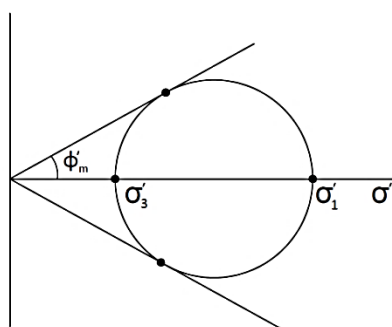
$$\frac{\tau_{yx}}{\sigma_{yy}} + \frac{\delta\epsilon_{yy}}{\delta\gamma_{yx}} = \mu \quad (۹-۱۶)$$

1 Simple shear test

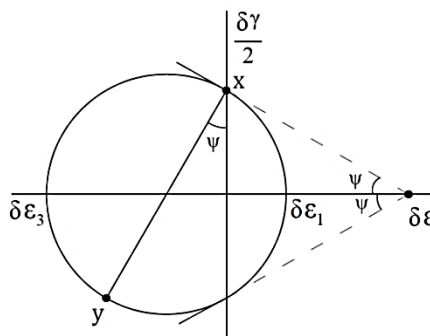
داده های آزمایش برش ساده بر ماسه سست و متراکم لیتون بازارد^۱ که توسط استرود^۲ (۱۹۷۱) گزارش شده در شکل (۹-۹) با جمع مقادیر $\frac{\tau_{yx}}{\sigma_{yy}} + \frac{\delta\epsilon_{yy}}{\delta\gamma_{yx}}$ در مقابل کرنش برشی اندازه گیری شده γ_{xy} رسم شده است. این نمودار معادل شکل (۹-۷-ب) برای آزمایش برش مستقیم است. بر اساس داده های آزمایش برش ساده، مقدار $\mu \approx 0.575$ بدست می آید. همچنین مشخص است که پاسخ نمونه ماسه ای متراکم با پاسخ نمونه ماسه ای سست، بر یک خط یکسان قرار می گیرند.



(الف)



(ج)

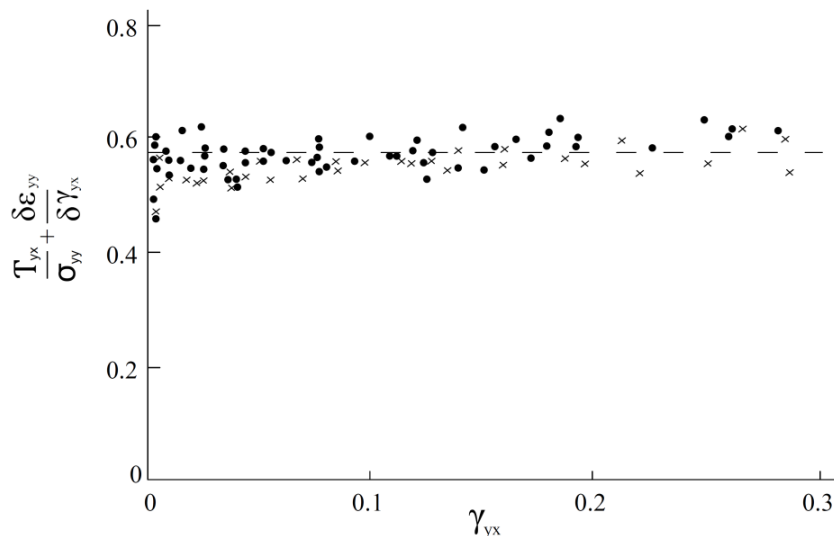


(ب)

شکل ۹-۸: نمایی از (الف) تغییر شکل حین برش ساده، (ب) زاویه اتساع ψ ، (ج) زاویه اصطکاک بسیج شده (وود ۱۹۹۰)

1 Leighton Buzzard

2 Stroud



شکل ۹-۹: مجموع نسبت تنش و اتساع در آزمایشات برش ساده بر ماسه لیتون بازارد (•: متراکم با $\nu_0 = 1.78$ ، سست با $\nu_0 = 1.53$) (استرود ۱۹۷۱)

۹-۲-۲- معادلات انرژی در مدل کلی اولیه و اصلاح شده

روابطه (۹-۵) و (۹-۶) روشی را توصیف می‌کنند که در آن کار انجام شده توسط نیروهای وارده بر مرزهای جعبه برش، به صورت اصطکاک در خاک زایل می‌شود. معادله تنش-اتساع (۹-۷) برای آزمایش برش مستقیم تعیین، اما برای شرایط متقارن محوری آزمایش سه محوری قابل تعمیم است. کل کار ورودی در واحد حجم به نمونه سه محوری که در صفحه تنش های $q - p'$ هنگامی که تحت کرنشهای $\delta \epsilon_p$ و $\delta \epsilon_q$ قرار دارد، به صورت زیر است:

$$\delta W = p' \delta \epsilon_v + q \delta \epsilon_s \quad (۹-۱۷)$$

بخشی از کار ورودی صرف تغییر شکل الاستیک خاک و برگشت پذیر است. انرژی برگشت ناپذیر که در روند تغییر شکل خاک زائل می‌شود به صورت زیر قابل بیان است:

$$\delta E = p' \delta \epsilon_v^p + q \delta \epsilon_s^p \quad (۹-۱۸)$$

طبق فرضیه تیلور (۱۹۴۸)، کل این انرژی برای غلبه بر اصطکاک خاک صرف می‌گردد:

$$\delta E = M p' \delta \epsilon_s^p \quad (۹-۱۹)$$

بنابراین ترکیب روابط (۹-۱۸) و (۹-۱۹) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$p' \delta \varepsilon_v^p + q \delta \varepsilon_s^p = M p' \delta \varepsilon_s^p \quad (۹-۲۰)$$

$$\frac{q}{p'} + \frac{\delta \varepsilon_v^p}{\delta \varepsilon_s^p} = M \quad (۹-۲۱)$$

شیب خط بحرانی M پارامتر مناسبی است که وضعیت خاک در حالت بحرانی و $\frac{\delta \varepsilon_v^p}{\delta \varepsilon_s^p} = 0$

را به خوبی بیان می‌نماید. منحنی ۲ در شکل (۹-۱۰)، رابطه (۹-۲۱) را در نمودار

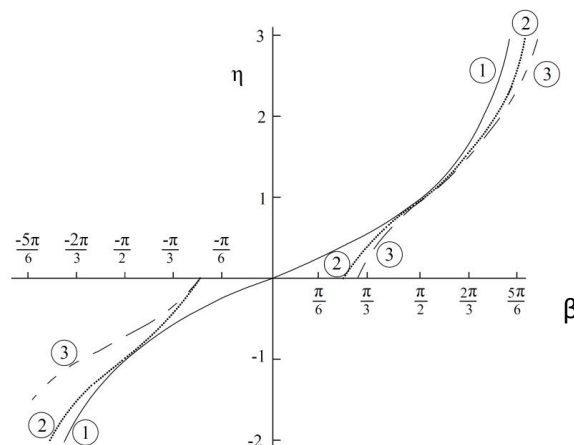
$\eta(q/p') : \beta(\tan^{-1} \delta \varepsilon_s^p / \delta \varepsilon_v^p)$ به عنوان رابطه تنش-اتساع نشان می‌دهد. تابع پتانسیل پلاستیک در صفحه $q-p'$ که جهت بردار نمو کرنش پلاستیک را با نسبت $\delta \varepsilon_s^p / \delta \varepsilon_v^p$ کنترل می‌نماید را نیز می‌توان با انتگرال گیری از رابطه (۹-۲۱) به دست آورد. البته، شکل معادل این رابطه برای انتگرال گیری به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{q}{p'} - \frac{dq}{dp'} = M \quad (۹-۲۲)$$

بر این اساس، تابع پتانسیل پلاستیک به فرم زیر تعیین خواهد شد:

$$\frac{\eta}{M} = \ln \frac{p'_0}{p'} \quad (۹-۲۳)$$

p'_0 کنترل کننده اندازه تابع پتانسیل پلاستیک بوده و مقدار p' را در $\eta = 0$ نشان می‌دهد. این منحنی در شکل (۹-۱۱) رسم شده است.



شکل (۹-۱۰): روابط تنش-اتساع در مدل‌های (۱) کم کلی اصلاح شده، (۲) کم کلی اولیه (۳) راو' (برای $M=1$)

با فرض تبعیت جریان پلاستیک خاک از رابطه (۹-۲۱) و تعامد، تابع تسلیم نیز از رابطه (۹-۲۳) به دست خواهد آمد. با در نظر گیری توابع تسلیم و پتانسیل پلاستیک مذکور در چارچوب مدل های رفتاری الاستو-پلاستیک با سخت شوندگی حجمی، مدل کم کلی اولیه روسکو و اسکافیلد (۱۹۶۳) معرفی گردید. در مدل کم کلی اصلاح شده، کار پلاستیک بر اساس معادله زیر باز نویسی می شود:

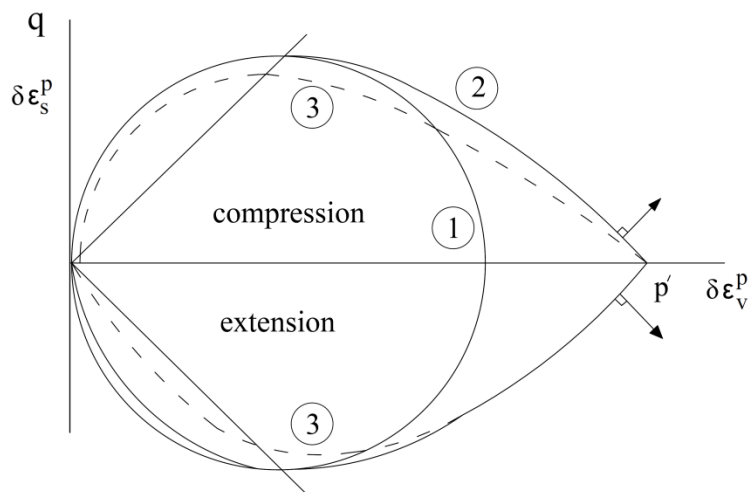
$$p' \delta \varepsilon_v^p + q \delta \varepsilon_s^p = p' \sqrt{(\delta \varepsilon_v^p)^2 + (M \delta \varepsilon_s^p)^2} \quad (9-24)$$

قانون جریان و پتانسیل پلاستیک بیضوی برای مدل کم کلی اصلاح شده، بصورت منحنی ۱ در شکل (۹-۱۰) نشان داده شده است. تفاوت آشکار قوانین جریان مدل کم کلی اولیه و اصلاح شده، در مقادیر پایین نسبت تنش η نمایان است. در شکل (۹-۱۰)، قانون جریان مدل کم کلی اولیه از نقطه $(\eta=0, \beta=0)$ نمی گذرد. این بدین معنی است که طی بارگذاری ایزوتروپ ($\eta=0$) نیز، کرنش برشی پلاستیک قابل توجهی تولید می شود.

در راستای توجیه این مشکل، روسکو، اسکافیلد، و توراراجا^۱ (۱۹۶۳) نظریه تغییر شکل های غیر یکنواخت خاک را پیشنهاد داده و ذکر نمودند که "نمونه خاک ممکن است شامل نواحی باشد که در آن اعوجاج پلاستیک در جهات مختلف رخ می دهد، به نحوی که در کل نمونه، اعوجاج برآیند برابر صفر خواهد بود". اسکافیلد و راس^۲ (۱۹۶۸) این مشکل را با بیان این فرض که مطابق شکل (۹-۱۱)، تابع پتانسیل پلاستیک در کشش سه محوری، تصویر آینه ای منحنی آن در فشار سه محوری می باشد و در نتیجه مطابق شکل (۹-۱۰)، قانون جریان در $\eta=0$ دچار ناپیوستگی می شود توجیه نمودند. بر این اساس و بدلیل ناپیوستگی تابع مذکور در $\eta=0$ ، مقدار متوسط $\beta=0$ قابل انتخاب است. هیچ کدام از این پیشنهادات از نقطه نظر محاسباتی رضایت بخش نمی باشند، زیرا مدل برای مقادیر بسیار کوچک و غیر صفر نسبت تنش ایجاب می کند که کرنش برشی پلاستیک قابل ملاحظه ای تولید شود. در ضمن، تابع پتانسیل پلاستیک ناپیوسته مشکلات متعددی را در تحلیلهای عددی ایجاد می نماید.

1 Thurairajah

2 Wroth



شکل ۹-۱۱: توابع پتانسیل پلاستیک در مدل‌های (۱) کم کلی اصلاح شده، (۲) کم کلی اولیه (۳) راو (برای $M=1$)

۹-۲-۳- مدل تنش-اتساع راو^۱

راو (۱۹۶۲) شکل دیگری از قانون جریان را معرفی نمود. بر این اساس، در نمونه خاکی که تحت برش قرار دارد، نسبت کار انجام شده توسط تنش محرک^۲ به کار انجام شده توسط تنش مقاوم^۳ در هر سطح کرنش ضریب ثابتی مانند K است.

$$\frac{\text{کار انجام شده توسط تنش محرک}}{\text{کار انجام شده توسط تنش مقاوم}} = K \quad (۹-۲۵)$$

ثابت K به ضریب اصطکاک خاک ϕ'_f توسط رابطه زیر مرتبط می‌شود:

$$K = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'_f}{2}\right) = \frac{1 + \sin \phi'_f}{1 - \sin \phi'_f} \quad (۹-۲۶)$$

راو پیشنهاد می‌کند که زاویه ϕ'_f در محدوده زیر قرار دارد:

$$\phi_\mu \leq \phi'_f \leq \phi'_{cs} \quad (۹-۲۷)$$

که در آن ϕ'_{cs} زاویه اصطکاک حالت بحرانی تحت برش با حجم ثابت و ϕ_μ زاویه اصطکاک لغزش بین ذره‌ای است.

1 Rowe
2 Driving stress
3 Driven stress

در سه محوری فشاری تنش محوری σ'_a ، تنش محرک (که با نمو کرنش فشاری $\delta\epsilon_a$ همراه است) و تنش شعاعی σ'_r تنش رانده شده (که با نمو کرنش کششی $\delta\epsilon_r$ همراه است) می‌باشند. رابطه تنش-اتساع راو برای سه محوری فشاری بیان شده است:

$$\frac{\sigma'_a \delta\epsilon_a}{-2\sigma'_r \delta\epsilon_r} = K \quad (28-9)$$

رابطه (۲۸-۹) را می‌توان بر حسب متغیرهای تنش p' و q و نمو کرنشهای $\delta\epsilon_v$ و $\delta\epsilon_s$ بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\delta\epsilon_v}{\delta\epsilon_s} = \frac{3\eta(2+K) - 9(K-1)}{2\eta(K-1) - 3(2K+1)} \quad (29-9)$$

با صرف نظر از کرنشهای الاستیک و انتگرال گیری از رابطه (۲۹-۹)، تابع پتانسیل پلاستیک به شرح زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{p'}{p'_0} = 3 \left[\frac{3-\eta}{(2\eta+3)^k} \right]^{1/(k-1)} \quad (30-9)$$

در شرایط حالت بحرانی، زاویه اصطکاک ϕ'_{cs} و شیب خط حالت بحرانی M برای آزمایش سه محوری فشاری به صورت زیر با یکدیگر مرتبط می‌شوند.

$$\sin \phi'_{cs} = \frac{3M}{6+M} \quad (31-9)$$

بدین ترتیب روابط (۲۶-۹) و (۲۹-۹) به صورت زیر در می‌آیند:

$$K = \frac{3+2M}{3-M} \quad (32-9)$$

$$\frac{\delta\epsilon_v}{\delta\epsilon_s} = \frac{9(M-\eta)}{9+3M-2M\eta} \quad (33-9)$$

این رابطه شبیه قانون جریان مدل کم کلی اولیه به شرح زیر است:

$$\frac{\delta\epsilon_v^p}{\delta\epsilon_s^p} = M - \eta \quad (34-9)$$

قانون جریان معادله (۳۳-۹) بر حسب η و β در شکل (۱۰-۹) به صورت منحنی ۳ ترسیم شده است. تابع پتانسیل پلاستیک (رابطه ۳۰-۹) نیز در فضای تنش موثر $q-p'$ در شکل (۱۱-۹) ترسیم شده است.

بالعکس برای شرایط سه محوری کششی، تنش شعاعی بعنوان تنش محرک و تنش محوری، تنش مقاوم خواهد بود. بر این اساس رابطه (۲۵-۹) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{2\sigma'_r \delta\epsilon_r}{-\sigma'_a \delta\epsilon_a} = K \quad (35-9)$$

فرم معادل رابطه (۲۹-۹) برای شرایط سه محوری کششی نیز به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{\delta \varepsilon_v}{\delta \varepsilon_s} = \frac{3\eta(2K+1)+9(K-1)}{2\eta(1-K)-3(K+2)} \quad (۳۶-۹)$$

با انتگرال گیری از رابطه (۳۶-۹)، تابع پتانسیل پلاستیک نیز به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{p'}{p'_0} = 3 \left[\frac{3+2\eta}{(3-\eta)^k} \right]^{1/(k-1)} \quad (۳۷-۹)$$

واضح است که پتانسیل پلاستیک و قانون جریان در حالت سه محوری فشاری و کششی شکل یکسانی ندارند. منحنی ۳ در شکل‌های (۹-۱۰) و (۹-۱۱)، شرایط نظیر سه محوری کششی ($\eta < 0$) و ($q < 0$) را نشان می‌دهند. مشابه مدل کم کلی اولیه، تابع پتانسیل پلاستیک در $\eta = 0$ نشان دهنده کرنش برشی پلاستیک بوده و قانون جریان در این نقطه دارای ناپیوستگی است. در شرایط کرنش مسطح، در صورتیکه محورهای اجزای کرنش و تنش اصلی بر هم منطبق باشند، رابطه (۹-۲۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\sigma'_1 \delta \varepsilon_1}{-\sigma'_3 \delta \varepsilon_3} = K \quad (۳۸-۹)$$

بر اساس دایره موهر تنش‌های موثر در شکل (۹-۸-ج) داریم:

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} = \frac{1 + \sin \phi'_m}{1 - \sin \phi'_m} \quad (۳۹-۹)$$

که در آن ϕ'_m زاویه اصطکاک بسیج شده در خاک است. از دایره موهر نمو کرنش در شکل (۹-۸-ب) نیز داریم:

$$\frac{-\delta \varepsilon_1}{\delta \varepsilon_3} = \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} \quad (۴۰-۹)$$

که در آن ψ زاویه اتساع خاک می‌باشد. از رابطه (۹-۲۶) و در شرایطی که $\phi'_m = \phi'_{cs}$ ، زاویه اصطکاک خاک در حالت بحرانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1 + \sin \phi'_{cs}}{1 - \sin \phi'_{cs}} \quad (۴۱-۹)$$

به این ترتیب، رابطه (۹-۳۸) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\sin \phi'_m = \frac{\sin \phi'_{cs} + \sin \psi}{1 + \sin \phi'_{cs} \sin \psi} \quad (۴۲-۹)$$

۳-۹- روابط تنش-اتساع در خاکهای مخلوط درشت دانه

مقاومت برشی خاکهای ماسه‌ای حاوی درشت دانه شنی، از مسائل مهم در طراحی های ژئوتکنیکی است. براساس طبقه بندی متحد^۱، خاکهای مخلوط درشت دانه، خاکهایی هستند که، بر روی الک ۲۰۰ (قطر معادل ۰/۰۷۵ میلی‌متر) جمع شده و از قطر ۷۶/۲ میلی‌متر کوچکتر می‌باشند. بیشترین کاربرد این مصالح در در لایه های زهکش، راهسازی، مصالح ستگدانه ای^۲ و پوسته خارجی سدهای خاکی می‌باشد. همانطور که در بالا به اهمیت کاربردی مصالح مخلوط اشاره شد، باید به این نکته مهم هم اشاره کرد که انجام آزمایشات مکانیکی جهت تعیین پارامترهای رفتاری این مواد به علت سایز بزرگ دانه ها، به آسانی مقدور نمی‌باشد. ابعاد نمونه های مورد نیاز و همچنین هزینه انجام آزمایشات بویژه در کارهای تحقیقاتی و مطالعاتی زیاد می‌باشد. به همین علت، محققان زیادی طی سالیان متمادی و با استفاده از روشهای مختلف، به تبیین رفتار و تعیین خصوصیات مقاومتی پرداختند. در بسیاری از این مطالعات، قطر حداکثر دانه‌ها به یک هشتم تا یک ششم ابعاد نمونه آزمایشی محدود می‌گردد. در هر حال، ارزیابی رفتار تنش-کرنش مخلوط های درشت دانه، نیازمند استفاده از دستگاههای آزمایشگاهی با مقیاس بزرگ می‌باشد.

اولین تحقیقات بر روی رفتار ماسه‌ها توسط کاساگرانده^۳ (۱۹۳۶) صورت گرفت. وی با استفاده از مفهوم تخلخل حالت بحرانی، رفتار مکانیکی خاکهای ماسه‌ای را تشریح نمود. با انجام آزمایشهای برشی مستقیم کند، نسبت تخلخلی را تعریف نمود که در آن، در اثر اعمال نیروی برشی، افزایش یا کاهش حجم در نمونه مشاهده نمی‌گردد. برای چند دهه، تعریف بیان شده در مجامع علمی مورد استفاده قرار گرفت تا اینکه در سال ۱۹۸۱، پولوس^۴ شرایط حالت پایدار را در آزمایش سه محوری کنترل تنش تعریف نمود. بر این اساس، حالت پایدار شرایطی را نشان می‌دهد که در آن خاک بطور پیوسته در حجم ثابت، تنش موثر نرمال ثابت و تنش برشی ثابت، به تغییر شکل برشی ادامه می‌دهد. بولتون^۵ (۱۹۸۶ و ۱۹۸۷)، با بررسی رفتار مقاومتی و اتساع ۱۷ نوع ماسه مختلف، وابستگی ما بین پارامترهای مکانیکی و مقاومتی این خاک‌ها را نشان داد.

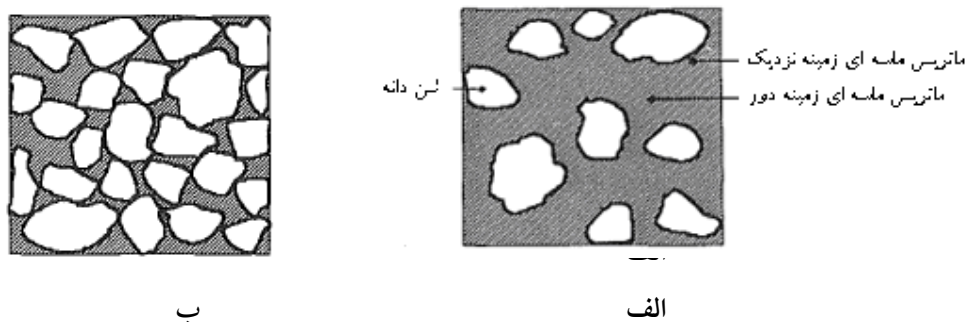
$$\phi'_{\max} - \phi'_{cs} = 5I_R = 0.8\psi_{\max} \quad (۴۳-۹)$$

$$I_R = D_R (10 - \ln(p')) - 1 \quad (۴۴-۹)$$

1 Unified
2 Rockfill
3 Casagrande
4 Polous
5 Bolton

اندیس I_R ارتباط مابین درصد تراکم نسبی مصالح (D_R) و تنش موثر میانگین (p') بر حسب کیلوپاسکال را بیان می‌نماید. زاویه اصطکاک حالت بحرانی تابعی از جنس و شرایط کانی های خاک می‌باشد. در شرایط متقارن محوری، ضریب اندیس I_R در رابطه (۹-۴۴) از ۵ به ۳ تغییر خواهد یافت. در خاکهای مخلوط شن و ماسه‌ای و در درصدهای شن دانه پایین، درشت دانه های شنی در ماتریس ماسه‌ای شناور خواهند بود. در این حالت، رفتار خاک مخلوط توسط بخش ماسه‌ای کنترل می‌شود. با افزایش درصد درشت دانه در مخلوط و در صورتیکه تعداد شن دانه‌ها از حد مشخصی بیشتر شود، شن دانه‌ها با یکدیگر تماس برقرار نموده و رفتار کلی مخلوط، توسط بخش درشت دانه کنترل خواهد شد. به درصد درشت دانه‌ای که مرز این دو رفتار را از یکدیگر جدا می‌نماید، آستانه شناوری^۱ گفته می‌شود. این تعریف اولین بار توسط فراگاتزی و همکاران (۱۹۹۰ و ۱۹۹۲) برای مخلوط های شن و ماسه‌ای ارائه شد. شکل (۹-۱۲) نمایی از وضعیت دانه های خاک مخلوط را در شرایط شناوری و غیر شناوری دانه‌ها نشان می‌دهد.

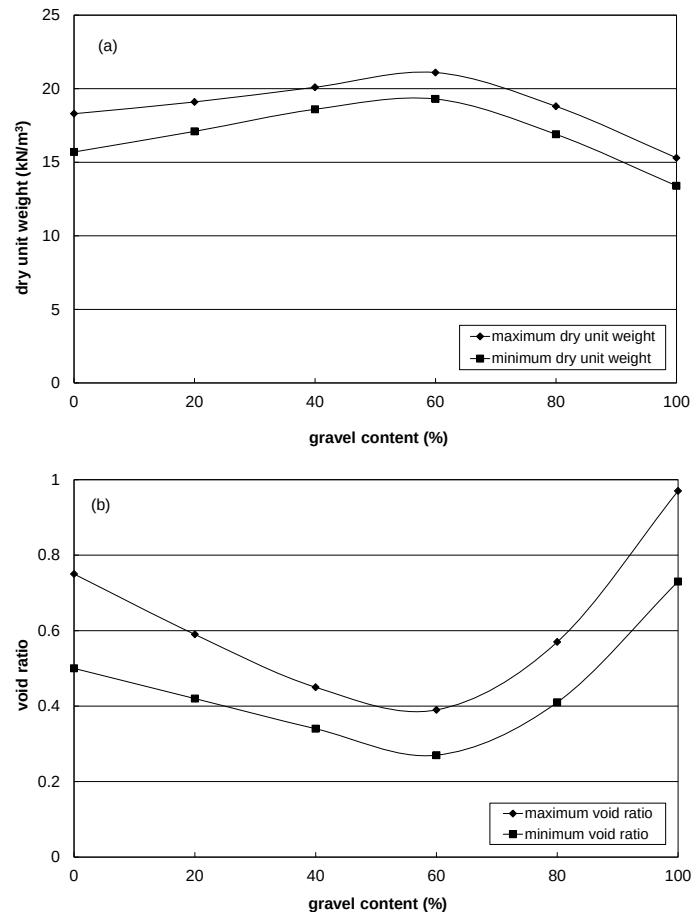
مهمترین عامل فیزیکی موثر بر آستانه شناوری مخلوط های شن و ماسه ای، دانه بندی مصالح بکار رفته و درصد هر یک از آنها در مخلوط مورد نظر باشد. والخو (۲۰۰۱)، نشان داد که هنگامی که میزان شن بیش از ۷۰ درصد است مقاومت برشی مخلوط شن و ماسه، با مقاومت اصطکاکی دانه های شن کنترل می‌شود. مطابق تحقیقات فراگاتزی و همکاران، به دلیل کاهش دانسیته نسبی ماتریس ماسه‌ای دور^۲ با افزایش درصد شن دانه، مقاومت سه محوری استاتیکی خاکهای مخلوط شن و ماسه با ازدیاد درصد شن دانه کاهش می‌یابد. برخی دیگر مانند یانگیز (۲۰۰۱) و کوکوشو و همکاران (۲۰۰۴) نتیجه گرفتند که مقاومت استاتیکی مخلوط با ازدیاد شن افزایش می‌یابد. ولی طبق تحقیقات اونس و ژو (۱۹۹۵)، مقاومت سه محوری تناوبی، با ازدیاد درصد شن دانه زیاد می‌شود.



شکل ۹-۱۲: وضعیت خاک مخلوط شن و ماسه ای در حالات
الف) شناوری شن دانه‌ها ب) وضعیت غیر شناوری

1 Floating threshold

2 Far field density



شکل ۹-۱۳: تغییرات دانسیته نسبی و نسبت تخلخل با درصد شن دانه در مخلوط (حمیدی و همکاران ۲۰۰۹-a)

شکل (۹-۱۳) تغییرات دانسیته خشک حداقل و حداکثر و نسبت تخلخل حداقل و حداکثر مخلوط شن و ماسه‌ای در آزمایشهای حمیدی و همکاران (۲۰۰۹-a) را نشان می‌دهد. بر اساس این شکل، درصد شنآوری حدود ۶۰٪، برای خاک مورد آزمایش قابل تشخیص است.

بیست سال بعد از بولتون (۱۹۸۶)، سیمونی و هولزبای (۲۰۰۶)، روابط مقاومت-اتساع را به خاکهای مخلوط شن و ماسه‌ای بسط دادند. در تحقیقات ایشان جهت تعیین مقاومت برشی خاک مخلوط، از ماسه مخلوط با ۶۰٪ وزنی شن و برای آزمایشها از دستگاه برش مستقیم بزرگ مقیاس استفاده شده است. طبق تعریف، ۶۰٪ وزنی شن دانه، آستانه شنآوری مصالح مخلوط خواهد بود. این محققین رابطه (۹-۴۵) را برای تعیین اندیس I_R بصورت تابعی از نسبت تخلخل حداقل و حداکثر پیشنهاد دادند.

$$I_{R,mixture} = 5D_{r,mixture} - (1 - 4.3(e_{min,sand} - e_{min,mixture})) \quad (۴۵-۹)$$

$I_{R,mixture}$ اندیس رابطه مقاومت-اتساع مخلوط، $D_{R,mixture}$ تراکم نسبی مصالح مخلوط، $e_{min,sand}$ نسبت تخلخل حداقل ماسه و $e_{min,mixture}$ نسبت تخلخل حداقل می‌باشد.

نکته مهم آن است که در تحقیقات بولتون (۱۹۸۶) و سیمونی و هولزبای (۲۰۰۶)، سربار وارده به نمونه‌ها کمتر از ۱۵۰ کیلو پاسکال بوده است که کمتر از آستانه خردشدگی دانه‌ها^۱ قرار دارد. بولتون مشاهده کرد که تمایل ذرات به خرد شدن تحت برش تا زمانی که تنش موثر میانگین یا فشار سربار کمتر از ۱۵۰ کیلو پاسکال می‌باشد، نامحسوس است. تحت سربار کوچکتر، امکان اتساع نمونه‌ها که فقط تابعی از تراکم نسبی است، زیاد می‌باشد. اتساع از لحاظ مفهوم به معنی ازدیاد حجم و از لحاظ فیزیکی، قرار گرفتن دانه‌های خاک بر روی یکدیگر در هنگام اعمال برش می‌باشد. بنابراین خردشدگی مصالح در سربارهای بالا می‌تواند بر رفتار مقاومتی و اتساع مصالح اثر بگذارد.

جهت بسط رابطه سیمونی و هولزبای (۲۰۰۶) به فشارهای سربار بزرگتر، حمیدی و همکاران (۲۰۰۹-a) آزمایشهای برش مستقیم بر مخلوط ماسه و درشت دانه را تحت سربارهای بزرگتر انجام و روابط ذیل را برای تعیین ارتباط مقاومت و اتساع این خاکها پیشنهاد دادند. در این روابط، I_s تابعی از فشار سربار است که دربرگیرنده اثرات خردشدگی مصالح می‌باشد. σ_v فشار سربار بر حسب کیلو پاسکال بوده و به جای عدد ۰/۸، پارامتر b جایگزین شده است.

$$\phi_{cs,mixture} - \phi_{cs,sand} = I_s (e_{min,sand} - e_{min,mixture}) \quad (۴۶-۹)$$

$$I_s = \sigma_v^{0.65} \quad (۴۷-۹)$$

$$\phi_{max,mixture} - \phi_{cs,mixture} = b.\psi_{max} = 5I_{R,S} \quad (۴۸-۹)$$

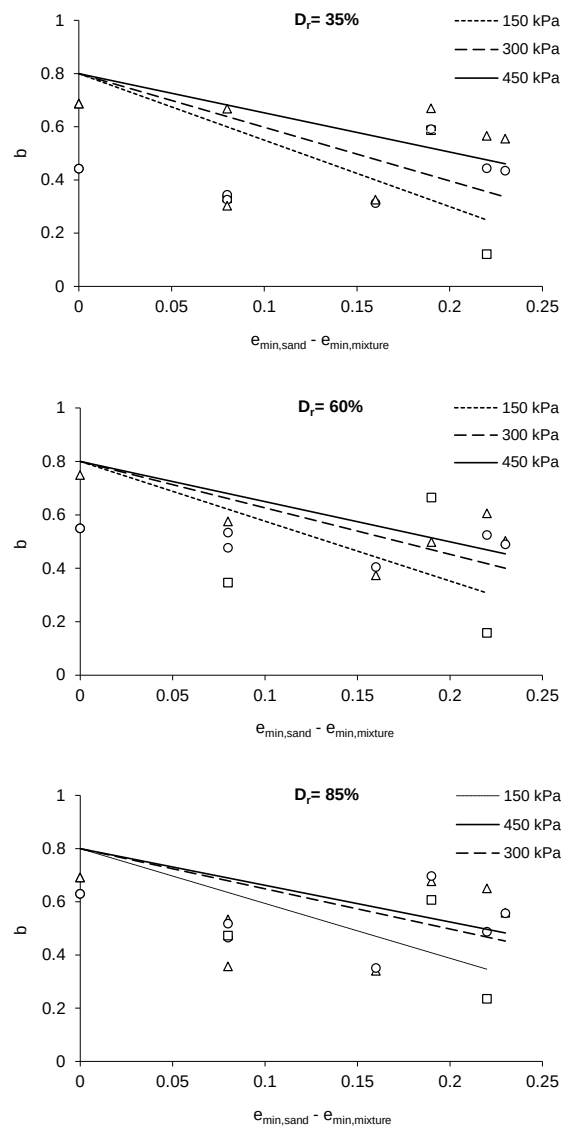
$$b = 0.8 - (3 - 0.003\sigma_v) \cdot (e_{min,sand} - e_{min,mixture}) \quad (۴۹-۹)$$

$$I_{R,S} = 5D_{r,mixture} - \left[1 + (4.5 - 0.006\sigma_v) \cdot (e_{min,sand} - e_{min,mixture}) \right] \quad (۵۰-۹)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، در این روابط بجای عدد ۰/۸ پیشنهادی بولتون (۱۹۸۶)، پارامتر b جایگزین شده است. سعی شده تا اثرات پارامترهای مختلف همچون درصد شن، تراکم نسبی و سربار بر روی پارامتر فوق الذکر مورد بررسی قرار گیرد. همانطور که از شکل (۹-۱۴) مشاهده می‌شود، با افزایش درصد شن، تابع b بصورت خطی کاهش یافته و شیب این خط، با افزایش سربار کمتر شده است. در ضمن مقدار این ضریب وابستگی خاصی به درصد شن دانه را نشان نمی‌دهد.

برخی محققین نیز از ارتباط خصوصیات مقاومتی خاکهای مخلوط با ویژگیهای فیزیکی مانند درصد سایش لس آنجلس استفاده نمودند (مارشال ۱۹۶۷). ویژگیهای مقاومتی مصالح مخلوط تا حدی تحت

تاثیر نوع آزمایش نیز تغییر می‌نماید. قنبری (۲۰۰۸) نشان داد که زاویه اصطکاک داخلی بدست آمده از آزمایشهای سه محوری متفاوت از نتایج بدست آمده از آزمایش برش مستقیم می‌باشد. باید توجه شود که مصالح سنگدانه ای، از حیث اندازه و قطر دانه‌ها بزرگتر از اندازه های مرسوم برای دستگاههای آزمایشگاه‌ها می‌باشند و با توجه به این موضوع، استفاده از روابط تجربی و یا ارتباطات موجود با خصوصیات فیزیکی این مصالح امری غیر منطقی نخواهد بود.

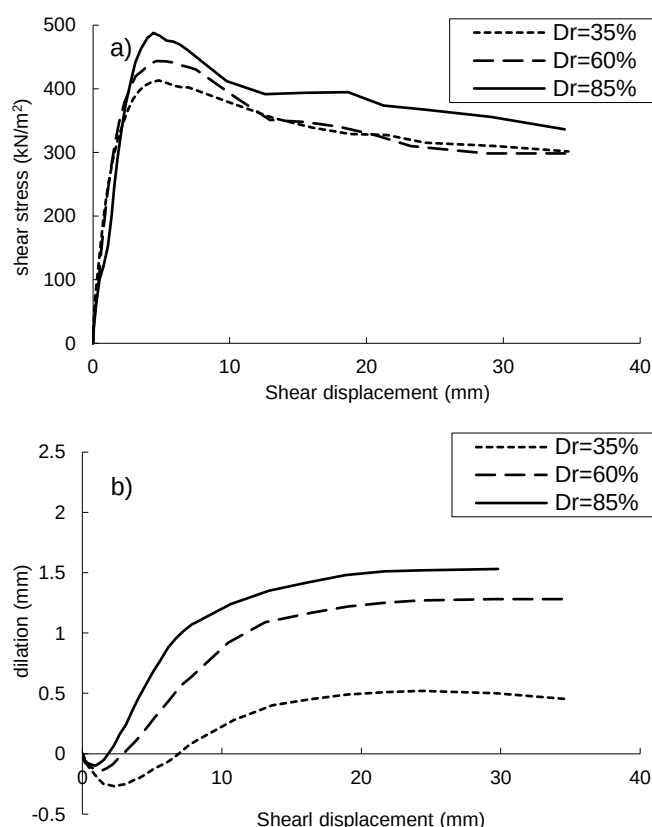


شکل ۹-۱۴: تغییرات ضریب اتساع-مقاومت b با دانسیته نسبی و فشار سربار (حمیدی و همکاران ۲۰۰۹-a)

پارامترهای موثر بر مقاومت برشی خاکهای مخلوط درشت دانه، شامل اندازه دانه ها، تراکم نسبی، فشار دورگیر یا تنش سربار، دانه بندی، شکل دانه ها، جنس و ساختار خاک می باشد. در ادامه مروری مختصر بر اثرات این عوامل بر رفتار مقاومتی خاکهای درشت دانه می گردد.

۹-۳-۱- تاثیر تراکم نسبی

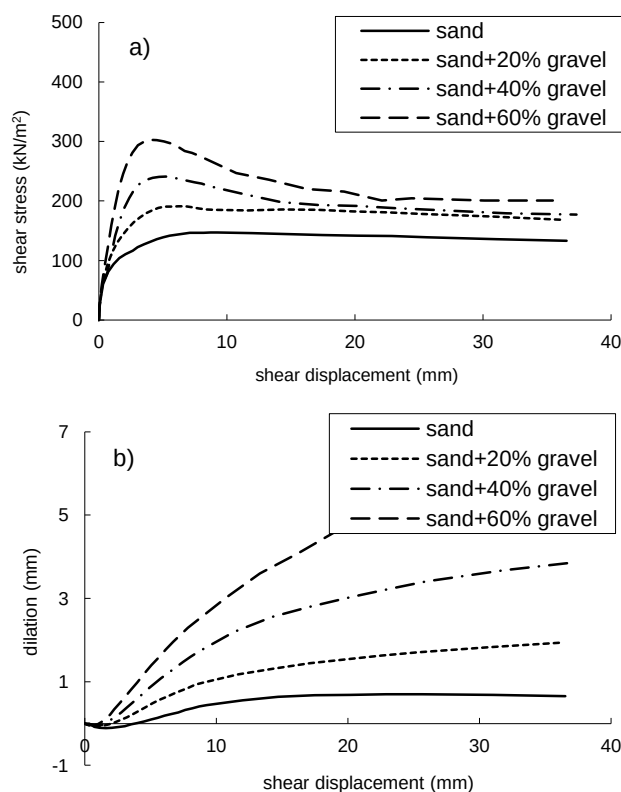
نمودار تنش برشی-تغییر شکل افقی و تغییر شکل قائم- تغییر شکل افقی در آزمایشهای گزارش شده توسط حمیدی و همکاران (۲۰۰۹-b) بر نمونه حاوی ۶۰٪ شن دانه تحت فشار سربار ۳۰۰ کیلوپاسکال در تراکم های نسبی ۳۵، ۶۰ و ۸۵٪ در شکل (۹-۱۵) نشان داده شده است. بر اساس این شکل، مقاومت برشی خاک مخلوط با ازدیاد تراکم نسبی افزایش یافته و اتساع نهایی نیز با ازدیاد تراکم نسبی خاک افزایش می یابد. اما مقدار فشردگی اولیه نمونه، با افزایش تراکم نسبی کاهش می یابد.



شکل ۹-۱۵: تاثیر تراکم نسبی بر مقاومت و اتساع مخلوطهای شن و ماسه (حمیدی و همکاران ۲۰۰۹-b)

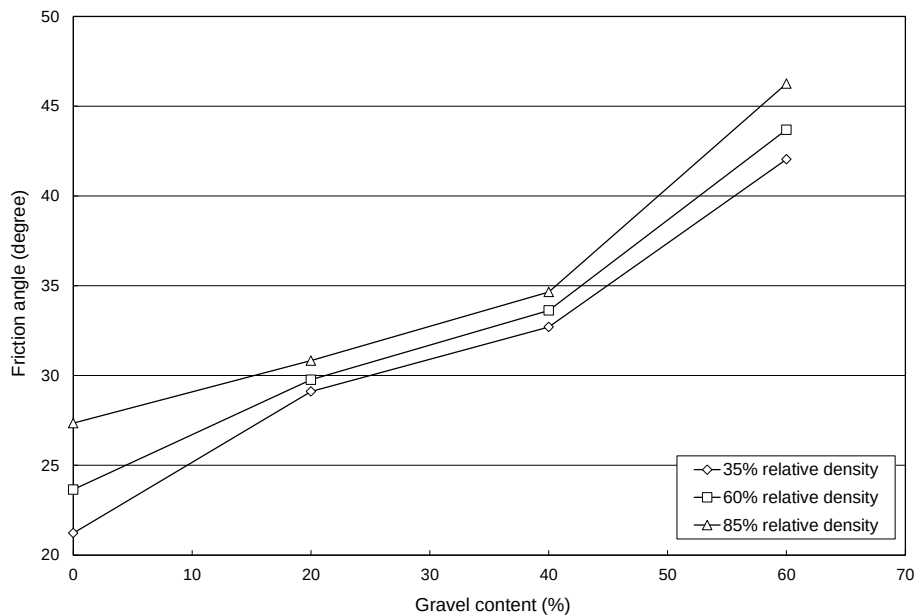
۹-۳-۲- تاثیر درصد شن دانه

شکل (۹-۱۶) نیز تاثیر درصد شن را بر منحنی تنش-کرنش مخلوط شن و ماسه در شرایط شناوری و غیر شناوری در تراکم نسبی ۸۵ درصد تحت سربار ۲۰۰ کیلوپاسکال مورد بررسی قرار می‌دهد. از نمودارهای مذکور رفتار نرم شونده خاک مخلوط پس از نقطه اوج و افزایش مقاومت برشی و اتساع با ازدیاد درصد شن دانه و همچنین کاهش فشردگی اولیه با افزایش درصد درشت دانه قابل مشاهده است.

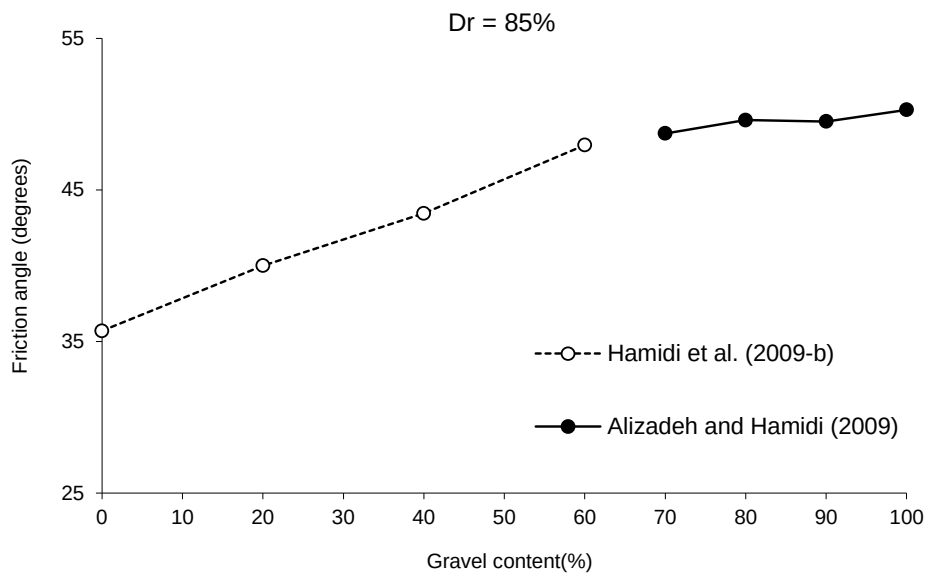


شکل ۹-۱۶: تاثیر درصد شن دانه بر مقاومت برشی و اتساع خاک مخلوط (حمیدی و همکاران ۲۰۰۹-b)

بر اساس مطالعات حمیدی و همکاران (۲۰۰۹-b)، تغییرات زاویه اصطکاک مخلوط در مقابل درصد شن در تراکم های نسبی ۳۵، ۶۰ و ۸۵٪ در شکل (۹-۱۷) نشان داده شده است. از این شکل پیداست که افزایش مقدار شن و تراکم نسبی سبب ازدیاد زاویه اصطکاک داخلی شده و منجر به افزایش مقاومت برشی می‌شود. همچنین شکل (۹-۱۸)، تغییرات زاویه اصطکاک داخلی در مقادیر شن دانه بالاتر از آستانه شناوری، بر اساس مطالعات حمیدی و عزیزاده (۲۰۰۹) نشان داده شده است. بر این اساس مشخص است که تاثیر درصد شن دانه بر زاویه اصطکاک داخلی در درصدهای شن دانه زیاد، به مراتب کمتر از مقادیر نظیر در مقادیر شن دانه پایین تر از حد شناوری است.



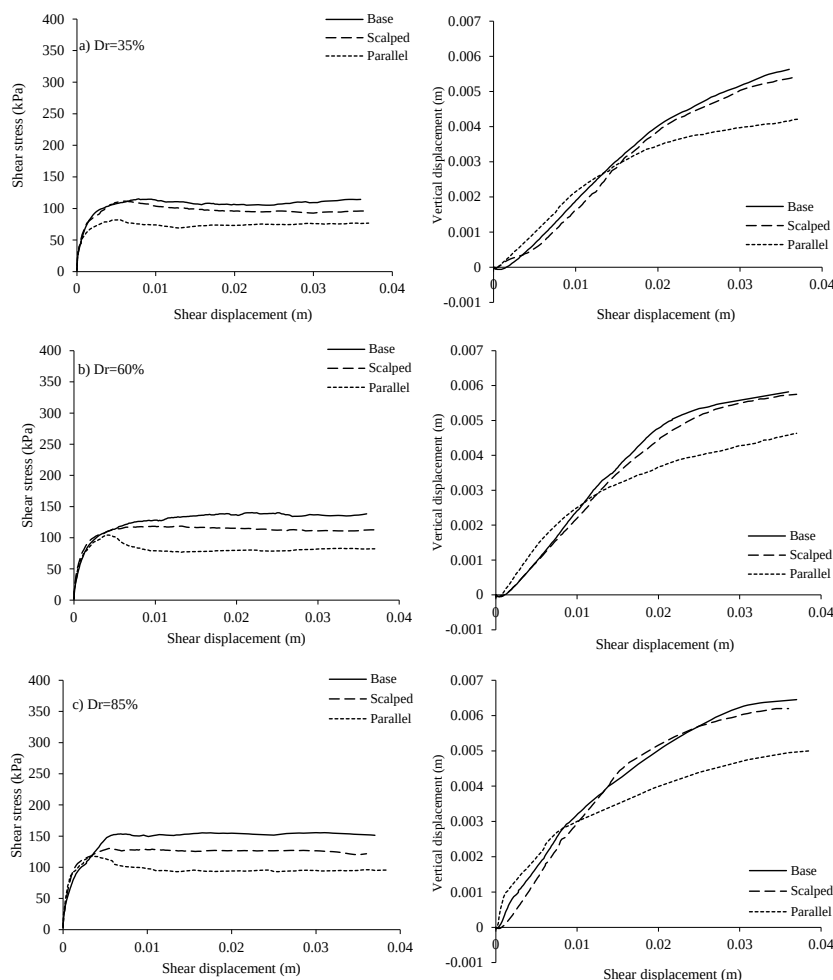
شکل ۹-۱۷: تغییرات زاویه اصطکاک خاک مخلوط با درصد شن دانه و تراکم نسبی (حمیدی و همکاران ۲۰۰۹-b)



شکل ۹-۱۸: تغییرات زاویه اصطکاک خاک مخلوط با درصد شن دانه بالاتر از حد شناوری (علیزاده و حمیدی ۲۰۰۹)

۹-۳-۳- دانه بندی خاک

مطالعات آزمایشگاهی بر خاکهای شنی دانه درشت عمدتاً به حداکثر قطر ذرات ۱۰ میلیمتر محدود شده است. در واقع، بخش دانه درشت تر مخلوط کنار گذاشته شده و آزمایش بر بخش ریزتر انجام می‌گیرد. این روش به دانه بندی غربال شده^۱ معروف است. در تحقیقات دیگر، منحنی دانه بندی مورد استفاده در آزمایشها موازی با دانه بندی اصلی انتخاب می‌گردد که به این روش، دانه بندی موازی^۲ گفته می‌شود. در هر حال در این دو روش، بخش موثر و قابل توجهی که همان دانه های بزرگتر می‌باشد، نادیده گرفته می‌شود.



شکل ۹-۱۹: تغییرات تنش برشی و تغییر شکل قائم در مقابل تغییر شکل برشی برای سه نوع دانه بندی پایه، غربال شده و موازی تحت سربار ۱۰۰ کیلوپاسکال (الف) تراکم نسبی ۳۵٪ (ب) تراکم نسبی ۶۰٪ (ج) تراکم نسبی ۸۵٪ (حمیدی و همکاران ۲۰۱۲)

- 1 Scalped method
- 2 Parallel Method

شکل (۹-۱۹) تغییرات تغییرمکان قائم (اتساع) و تنش برشی در مقابل کرنش برشی را برای نمونه های با دانه بندی متفاوت، در تراکم های نسبی مختلف تحت سربارهای متفاوت نشان می دهد. با توجه به این آزمایشها که توسط حمیدی و همکاران (۲۰۱۲) گزارش گردیده است، مقاومت برشی حداکثر متعلق به خاک مینا^۱ می باشد. بعد از آن، نمونه غربال شده حائز بیشترین مقاومت برشی و کمترین مقدار مقاومت نیز متعلق به خاکهای با دانه بندی موازی است. اختلاف مقاومت برای دو دانه بندی مینا و غربال شده کمتر از ۱۵٪ می باشد. در حالیکه این تفاوت بین دانه بندی های مینا و موازی بسیار بیشتر می باشد. علت آن است که تفاوت بین دانه بندی های اصلی و غربال شده، تنها در حداکثر اندازه دانه های شنی است. در حالیکه برای دو نوع دانه بندی پایه و موازی، هم قطر دانه ها و هم توزیع آنها متفاوت از دانه بندی پایه می باشد.

مطالعات حمیدی و همکاران (۲۰۱۲) نشان می دهد که اختلاف مقاومت بین نمونه ها با دانه بندی مینا و موازی با ازدیاد سربار وارده، افزایش می یابد و با تغییر سربار از ۱۰۰ تا ۳۰۰ کیلوپاسکال، این اختلاف به ۲۵٪ تا ۳۰٪ خواهد رسید. نقش اتساع در این موضوع بسیار حائز اهمیت است. افزایش سربار سبب کاهش اتساع و در نتیجه ازدیاد نقش سایر پارامترهای موثر بر روی مقاومت برشی خاک، از جمله دانه بندی می باشد. شکل (۹-۱۹) نشان می دهد که اختلاف بین حداکثر اتساع در خاک مینا و دانه بندی غربال شده، به مراتب کمتر از خاک مینا و دانه بندی موازی می باشد. حمیدی و همکاران (۲۰۱۲)، زاویه اصطکاک حداکثر خاک مخلوط را با استفاده از رابطه زیر به تراکم نسبی و فشار سربار مرتبط نمودند.

$$\phi'_{\max} = A.D_r + B \quad (۹-۵۱)$$

در این معادله، A و B تابع سربار و نوع دانه بندی خاک می باشند. با در نظر گرفتن تغییرات این پارامترها با سربار، روابط زیر برای سه نوع دانه بندی متفاوت بدست می آیند:

$$(\phi'_B)_{\max} = -0.01(3D_r + 0.42)\sigma'_v + 17D_r + 44.3 \quad (۹-۵۲)$$

$$(\phi'_S)_{\max} = -0.01(2D_r + 0.42)\sigma'_v + 10D_r + 44.7 \quad (۹-۵۳)$$

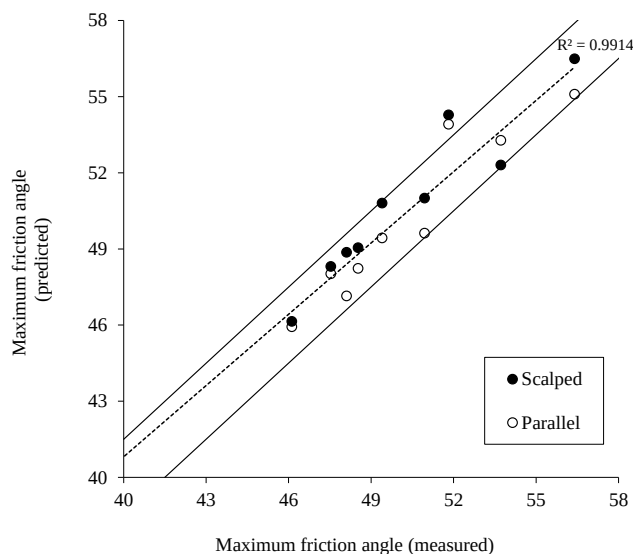
$$(\phi'_P)_{\max} = -0.01(5D_r + 0.35)\sigma'_v + 26D_r + 32.4 \quad (۹-۵۴)$$

در این معادلات، $(\phi'_B)_{\max}$ ، $(\phi'_S)_{\max}$ و $(\phi'_P)_{\max}$ حداکثر زوایای اصطکاک حداکثر خاک پایه، غربال شده و موازی می باشند. با کم کردن معادلات مربوط به دانه بندی غربال شده یا موازی از معادله مربوط به خاک پایه می توان نوشت:

$$(\phi'_B - \phi'_S)_{\max} = -0.01(D_r + 0.18)\sigma'_v + 7D_r - 0.4 \quad (۹-۵۵)$$

$$(\phi'_B - \phi'_P)_{\max} = +0.01(2D_r - 0.07)\sigma'_v - 9D_r + 11.9 \quad (۹-۵۶)$$

در این معادلات، تراکم نسبی بر حسب درصد و فشار سربار بر حسب کیلوپاسکال خواهند بود. بدین ترتیب، با استفاده از این دو معادله می‌توان زاویه اصطکاک خاک مینا را با استفاده از نتایج آزمایش بر دانه بندی معادل غربال شده یا موازی در سربار و تراکم نسبی یکسان، تخمین زد. شکل (۹-۲۰) مقایسه بین نتایج آزمایشگاهی و معادلات مذکور را برای زاویه اصطکاک حداکثر نشان می‌دهد. نتایج حاکی از تخمین مناسب معادلات با خطای حداکثر ۱/۵ درجه است.



شکل ۹-۲۰: اعتبار سنجی معادلات پیشنهادی برای تخمین مقاومت خاک بر مبنای دانه بندی معادل (حمیدی و همکاران ۲۰۱۲)

۹-۳-۴- تاثیر سیمان‌تاسیون بر اتساع خاکهای مخلوط

ساکسنا و لاستریکو^۱ (۱۹۷۸) عنوان کردند که در خاکهای سیمانته تحت بارگذاری برشی، پس از فشردگی ابتدایی کوچک، تمایل زیادی به افزایش حجم و اتساع مشاهده می‌گردد. حمیدی و سلیمانی (۲۰۱۲)، با استفاده از سه سری نتایج آزمایش سه محوری بر نمونه های مخلوط شن و ماسه‌ای سیمانته با آهک^۲ (اصغری و همکاران ۲۰۰۳)، سیمان پرتلند^۳ (حائری و همکاران ۲۰۰۵-a) و گچ^۴ (حائری و همکاران ۲۰۰۵-b و ۲۰۰۶)، به بررسی ارتباط مقاومت-اتساع در خاکهای ماسه‌ای شن‌دار سیمانی شده پرداختند. شکل (۹-۲۱) نتایج آزمایش سه محوری بر ماسه شن‌دار سیمانته شده با سنگ گچ را نشان می‌دهد. در شکل (۹-۲۱-الف) رفتار تردتر توام با بروز نقطه اوج مشخص، در نمودار تنش انحرافی- کرنش محوری خاک سیمانته، در مقایسه با نمونه غیر سیمانته مشهود است. این افزایش

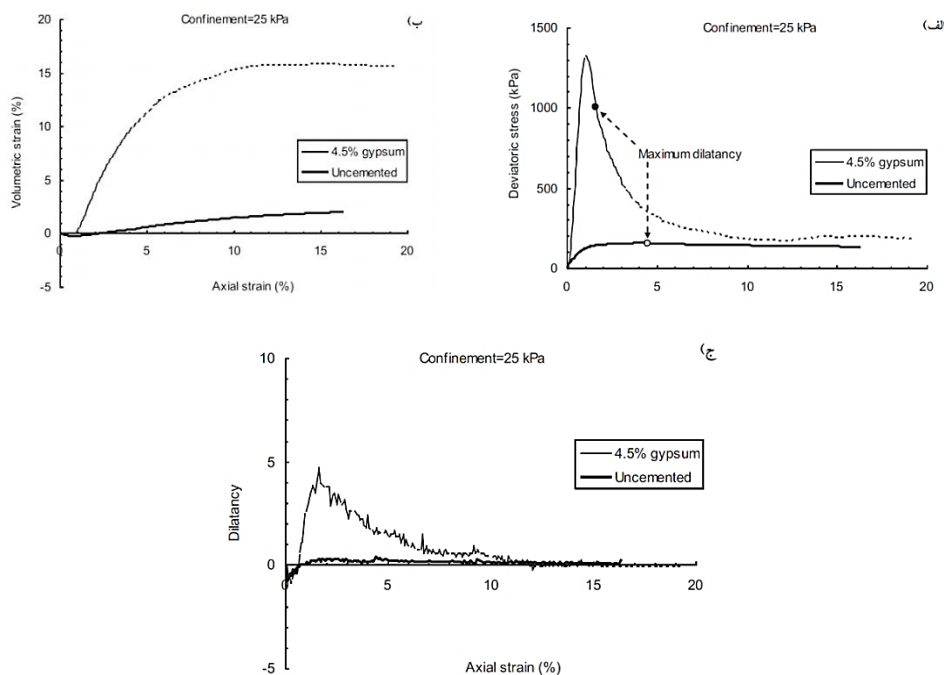
1 Saxena and Lastrico
2 Lime
3 Portland cement
4 Gypsum

شدید در مقاومت به تبع نرخ شدید اتساعی است که در نمونه سیمانی شده در شکل (۹-۲۱-ب) مشاهده می‌شود. نکته مهم آن است که بر اساس شکل (۹-۲۱-الف)، مقاومت برشی و اتساع ماکزیمم در خاک غیرسیمانته در یک سطح کرنش رخ می‌دهند. اما در خاکهای سیمانته، حداکثر اتساع بعد از نقطه اوج تنش برشی روی خواهد داد.

نرخ اتساع نمونه‌ها نیز با توجه به اعمال کرنش محوری به نمونه‌ها، با محاسبه $d\varepsilon_v/d\varepsilon_a$ تعیین شده و در شکل (۹-۲۱-ج) نشان داده شده است. بر اساس این شکل نیز، نرخ شدیدتر اتساع در نمونه های سیمانی نسبت به نمونه های غیر سیمانته قابل مشاهده خواهد بود. زاویه اتساع در آزمایش سه محوری نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\psi = d\varepsilon_v/d\varepsilon_a \quad (۹-۵۷)$$

در این رابطه، ψ زاویه اتساع، $d\varepsilon_v$ و $d\varepsilon_a$ نمو کرنش حجمی و کرنش محوری می‌باشند.



شکل ۹-۲۱: تاثیر سیمانی شدن بر اتساع و مقاومت برشی خاک (حمیدی و سلیمانی ۲۰۱۲)

افزودن عامل سیمانی به خاک ماسه ای، به مانند اضافه شدن شن دانه‌ها که در بخش قبلی توصیف گردید، باعث افزایش قابل توجه اتساع حداکثر می‌شود. شکل (۹-۲۲) تغییرات اتساع ($d\varepsilon_v/d\varepsilon_a$) با کرنش محوری را برای نمونه های سیمانته شده با مقادیر مختلف سیمان، تحت تنش دورگیر ۱۰۰

کیلوپاسکال نشان می‌دهد. بر اساس این شکل، اتساع خاک سیمانته، به شدت با افزایش درصد سیمان افزایش می‌یابد. همچنین بر اساس این شکل، در مقدار ثابت سیمان، خاک سیمانی شده با سیمان پرتلند بیشترین اتساع و خاک سیمانته با آهک، کمترین اتساع را نشان می‌دهد.

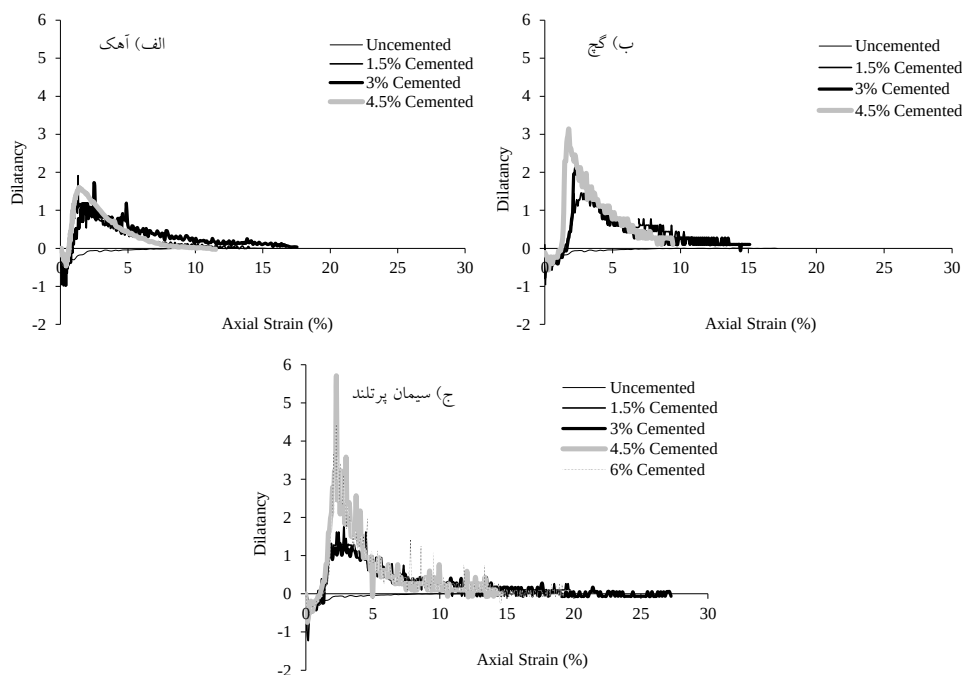
حمیدی و سلیمانی (۲۰۱۲) روابط ذیل را برای ارتباط مقاومت و اتساع در خاکهای ماسه‌شن‌دار خوب دانه بندی شده سیمانته ارائه نمودند. در این روابط، CC درصد سیمان موجود در خاک می‌باشد:

$$\varphi_{\max} - \varphi_{cv} = 3I_{R,C} \quad (۵۸-۹)$$

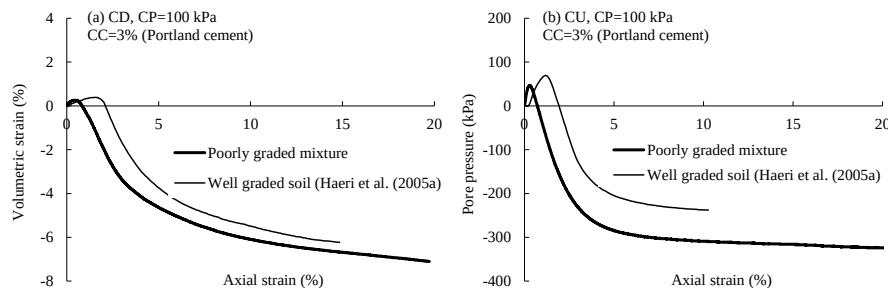
$$\text{Lime: } I_{R,C} = [10 - 0.35 \ln(540CC)] D_r - [1 - (16CC - 78)(e_{\min, \text{uncemented}} - e_{\min, \text{cemented}})] \quad (۵۹-۹)$$

$$\text{Gypsum: } I_{R,C} = [10 - 0.30 \ln(730CC)] D_r - [1 - (9CC - 36)(e_{\min, \text{uncemented}} - e_{\min, \text{cemented}})] \quad (۶۰-۹)$$

$$\text{Portland: } I_{R,C} = [10 - 0.31 \ln(770CC)] D_r - [1 - (21CC - 82)(e_{\min, \text{uncemented}} - e_{\min, \text{cemented}})] \quad (۶۱-۹)$$



شکل (۹-۲۲): منحنی اتساع- کرنش محوری خاک سیمانته شده در جنس و درصدهای مختلف سیمان (حمیدی و سلیمانی ۲۰۱۲)



شکل ۹-۲۳: تغییرات اتساع و فشار حفره‌ای در ماسه شن‌دار سیمانته بد و خوب دانه بندی شده (امینی و حمیدی ۲۰۱۴)

تحقیقات در خصوص رفتار مقاومتی و اتساع خاکهای سیمانی شده، با انجام آزمایشهای برش مستقیم و سه محوری بزرگ مقیاس ادامه یافت. امینی و حمیدی (۲۰۱۴)، آزمایشهای را برای بررسی رفتار مخلوط شن و ماسه سیمانته بد دانه بندی شده انجام دادند. شکل (۹-۲۳)، تغییرات اتساع و فشار حفره‌ای ایجاد شده در ماسه شن‌دار سیمانته بد دانه بندی شده طی آزمایشهای سه محوری زهکشی شده و زهکشی نشده را با نتایج آزمایشهای حائری و همکاران (۲۰۰۵-b) بر خاک نظیر خوب دانه‌بندی شده مقایسه می‌نماید. درصد شن دانه موجود در خاک خوب دانه بندی شده در حدود ۴۰٪ و در نمونه بد دانه بندی شده ۳۰٪ است. با توجه به درصد بالاتر شن دانه در خاک مخلوط خوب دانه بندی شده، انتظار می‌رود اتساع ایجاد شده حین برش زهکشی شده (شکل ۹-۲۳-a) و یا فشار حفره‌ای ایجاد شده طی برش زهکشی نشده (شکل ۹-۲۳-b) از مقادیر نظیر در نمونه بد دانه بندی شده بیشتر باشد. اما نتیجه آزمایشها نشان می‌دهد که علی‌رغم درصد شن بیشتر، خاک بد دانه بندی شده، اتساع و یا فشار حفره‌ای منفی بیشتری را در شرایط زهکشی شده و زهکشی نشده ارائه می‌نماید. این موضوع، تمایل و امکان وقوع اتساع بیشتر در خاک مخلوط بد دانه بندی شده سیمانته را در مقایسه با خاک مخلوط خوب دانه بندی شده سیمانته اثبات می‌نماید. در ادامه، امینی و همکاران (۲۰۱۳)، با انجام آزمایشهای برش مستقیم در جعبه برش ۳۰۰ در ۳۰۰ در ۱۷۰ میلیمتری، به تبیین رفتار مقاومتی و اتساع خاکهای مخلوط بد دانه بندی شده سیمانته پرداختند. با انجام آزمایش در درصدهای مختلف سیمان و فشارهای سربار متعدد، رابطه بولتون (۱۹۸۶) را برای نمونه‌های سیمانی شده بدست آوردند.

$$\phi_{\max} - \phi_{cv} = 0.07\psi_{\max} \quad (۹-۶۲)$$

علت کاهش شدید ضریب رابطه بولتون (۱۹۸۶) از ۰/۸ در ماسه معمولی به ۰/۰۷ در این رابطه، ترکیب سه عامل افزایشدهنده اتساع در خاک است. این سه عامل، حضور شن دانه‌ها، سیمان‌تاسیون و بد دانه بندی بودن خاک است که موجب افزایش شدید اتساع حداکثر ($\psi_{\max}$) در خاک و در نتیجه کاهش شدید ضریب مربوطه در رابطه می‌شود. زاویه اتساع در خاکهای مخلوط شن و ماسه بد دانه بندی شده سیمانته، مقادیر بسیار بالایی را داراست. بر اساس مطالعات امینی و همکاران (۲۰۱۴)، زوایای اتساع تا ۴۸ درجه در تراکمهای بالا مشاهده شده است.

تمرینات فصل نهم

- ۱- با فرض کره های هم اندازه به شعاع r ، رابطه بولتون (۱۹۸۶) را برای ماسه بد دانه بندی شده به صورت تحلیلی محاسبه نمایید.
- ۲- با بررسی مقالات و منابع موجود، تاثیر ازدیاد فشار دورگیر به مقادیر بالاتر از حد خردشدگی دانه ها را بر رابطه بولتون (۱۹۸۶) تفسیر کنید.
- ۳- قانون جریان در مدل پلاستیسیته عمومی پاستور و همکاران (۱۹۹۰) را تعیین نمایید.
- ۴- قانون جریان برای سطح تسلیم ثابت و سطوح تسلیم متحرک مدل کلاهدار را بررسی کنید.

فصل دهم

مبانی مدلسازی پیشرفته رفتار مکانیکی

خاکها

۱-۱۰- مقدمه

در این فصل، کلیات مدلسازی رفتاری پیشرفته خاکها در سه بخش مختلف مورد بررسی و توصیف قرار می‌گیرد. این سه بخش شامل بررسی و مدلسازی رفتار مکانیکی خاکهای ماسه‌ای سیمانته، رفتار ترمومکانیکی خاکهای رسی اشباع و غیر اشباع و همچنین چارچوب تبیین رفتار مکانیکی خاکهای غیر اشباع می‌باشد. در هر بخش، ابتدا توضیحاتی در خصوص ویژگیهای اصلی رفتاری مصالح مذکور ارائه داده شده و سپس مدلسازی رفتار این مواد بر اساس ساده ترین قوانین و اصول ممکن ارائه می‌شود تا امکان استفاده از مفاهیم ذکر شده در فصول قبلی، برای مدلسازی رفتار مکانیکی این خاکها نشان داده شود.

۱-۲- مدلسازی رفتار مکانیکی خاکهای سیمانته

عوامل محیطی و گذشت زمان، اغلب باعث ایجاد ساختار در خاکهای طبیعی می‌شود. ساختار^۱ و بافت^۲ خاک نقش مهمی در ویژگی‌های ژئوتکنیکی آن دارند. برخلاف رس‌ها که عموماً بر اثر عواملی

1 Structure

2 Texture

چون پیش تحکیمی، حرارت و همچنین خشک شدگی دارای ساختار می‌شوند، در خاکهای دانه‌ای مهمترین عامل ایجاد ساختار، سیمان‌تاسیون و ایجاد باندهای سیمانی بین ذرات خاک است. همچنین به عنوان یک روش بهسازی خاک، در بسیاری موارد از افزودن سیمان به آن در جهت افزایش مقاومت و ظرفیت باربری استفاده می‌نمایند. از این رو، بررسی و شناخت رفتار این خاک‌ها و همچنین ارائه مدل رفتاری برای شناسایی ویژگی‌های آنها حائز اهمیت بسیار است. وجود ساختار سیمانی در خاک موجب تفاوت های رفتاری با شرایط غیر سیمانته، تحت تنشهای اعمالی می‌گردد. با توجه به آنکه امکان اخذ نمونه دست نخورده از خاکهای دانه‌ای سیمانته بسیار دشوار است، عموماً از نمونه های با سیمان‌تاسیون مصنوعی^۱ جهت بررسی ویژگیهای رفتاری این خاکها پرداخته می‌شود. در ادامه به بررسی برخی از این مطالعات پرداخته می‌شود.

اتکینسون و کوپ^۲ (۱۹۹۳) با انجام آزمایش‌های مختلف بر ماسه سیمانته عنوان کردند به دلیل سختی بالای باندهای سیمانی، رفتار خاک تا قبل از خردشدگی باندها بصورت الاستیک و پس از آن خاک به مانند خاک‌های غیر سیمانته رفتاری الاستوپلاستیک نشان خواهد داد. بر اساس شکل (۱۰-۱) سه حالت مختلف قابل بررسی است.

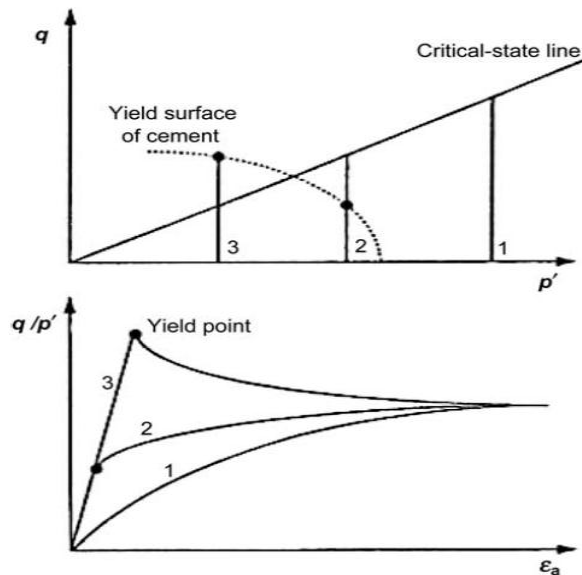
الف- در فشارهای دورگیر بسیار بالا، باندهای سیمانی در حین پروسه تحکیم ایزوتروپ از بین رفته و بنابراین در مرحله اعمال بار برشی، خاک رفتاری مشابه خاکهای غیر سیمانته خواهد داشت. در واقع، شروع مسیر تنش از خارج سطح تسلیم اولیه باندها بوده و رفتار خاک از ابتدای بارگذاری توام با بروز تغییرشکلهای پلاستیک خواهد بود. این شرایط با خط ۱ در شکل (۱۰-۱) نشان داده شده است.

ب- در شرایطی که فشار دورگیر کوچکتر از مقاومت باندهای سیمانی باشد، پس از مرحله تحکیم ایزوتروپ، بخشی از مقاومت باندها باقی خواهد ماند اما با افزایش تنش انحرافی، به تدریج باندهای سیمانی خرد و از بین می‌روند. پس از آن، رفتار خاک همانند خاک‌های غیر سیمانته می‌باشد تا وضعیت تنش به خط حالت بحرانی برسد. همانطور که خط ۲ در شکل (۱۰-۱) نشان می‌دهد، رفتار خاک قبل از رسیدن به سطح تسلیم باندهای سیمانی، کاملاً الاستیک بوده و پس از تسلیم باندها با تغییرشکلهای پلاستیک همراه خواهد بود. بدین ترتیب، در نمودار تنش- کرنش یک ناحیه خطی قبل از تسلیم باندها شکل خواهد گرفت و پس از شروع تسلیم، رفتار بصورت غیر خطی دنبال می‌شود.

ج- در شرایطی که نمونه تحت فشارهای همه جانبه بسیار کم‌تر از مقاومت باندهای سیمانی باشد، نمونه خاک تا رسیدن به سطح تسلیم باندهای سیمانته، رفتار الاستیک خطی از خود نشان خواهد داد. همانطور که خط ۳ در شکل (۱۰-۱) نشان می‌دهد، پس از بروز تسلیم در خاک، با کاهش تنش انحرافی و بروز رفتار نرم شونده، نمونه خاک به حالت بحرانی میل خواهد کرد.

1 Artificial cementation

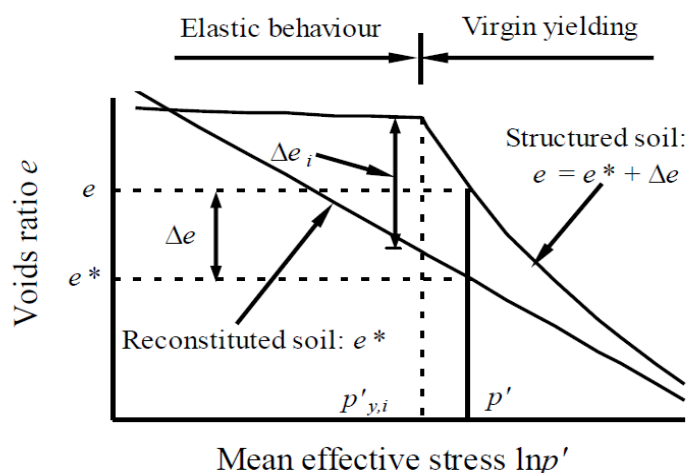
2 Atkinson and Coop



شکل ۱۰-۱: تقسیم بندی رفتار خاک سیمانته به حالات مختلف بر حسب فشار دورگیر (اتکینسون و کوپ ۱۹۹۳)

رفتار این خاکها در صفحه تراکم $e - \ln(p')$ مطابق شکل (۱۰-۲) می باشد. همان طور که در این شکل دیده می شود، قبل از رسیدن به سطح تنش $p'_{y,i}$ ، رفتار خاک دارای ساختار بصورت خطی^۱ با شیب بسیار کم مشاهده می گردد پس از آن، رفتار بصورت غیر خطی با شیب تندتر پیش می رود تا در تنشهای موثر میانگین بسیار بالا، به شرایط نظیر بر خط تحکیم عادی نمونه بازسازی شده^۲ برسد (در اینجا منظور از نمونه بازسازی شده، خاکی است که باندهای آن به دلیل هرگونه دست خوردگی از بین رفته باشد). $p'_{y,i}$ سطح تنشی است که در آن، باندهای سیمانته تحت اثر فشار ایزوتروپ خرد و مقاومت آنها از بین می رود. قبل از $p'_{y,i}$ ، افت در نسبت تخلخل بسیار بطئی بوده و رفتاری الاستیک را شاهد هستیم. در واقع، شیب این خط برابر شیب خط باربرداری ایزوتروپ است. پس از $p'_{y,i}$ ، تغییرات شدید نسبت تخلخل و بروز کرنشهای پلاستیک حجمی در خاک مشاهده می گردد. لیو و کارتر (۲۰۰۲) با استفاده از این ایده، نسخه ای جدید از مدل کم کلی، با نام مدل رفتاری کم کلی دارای ساختار^۳ را ارائه نمودند.

-
- 1 Structured soil
 - 2 Reconstituted soil
 - 3 Structured Cam clay model



شکل ۱۰-۲: رفتار خاک‌های دارای ساختار تحت فشار ایزوتروپ (لیو و کارتر ۲۰۰۲)

مالاندراکی و تول^۱ (۲۰۰۱) با انجام آزمایشهای سه محوری بر خاک سیمانته و اندازه گیری سختی خاک در کرنشهای بسیار پایین، نمودار سختی محوری- کرنش محوری را در مقیاس لگاریتمی برای بررسی شرایط تسلیم خاک سیمانی پیشنهاد دادند.

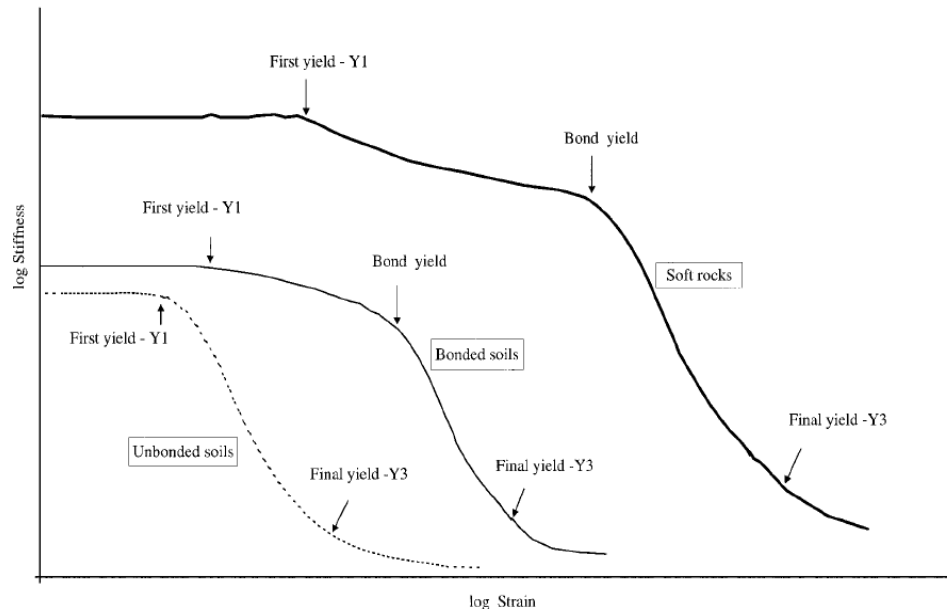
همان طور که در شکل (۱۰-۳) دیده می‌شود، پروسه تسلیم در خاک‌های سیمانته در سه مرحله رخ می‌دهد. تسلیم اولیه^۲ در خاک سیمانته، شروع ترک خوردگی و خردشدگی باندها می‌باشد. در این مرحله هنوز افت شدید در سختی خاک سیمانته مشاهده نخواهد شد. با ازدیاد سطح کرنشها، تسلیم باندها^۳ در خاک سیمانی شده اتفاق افتاده و افت شدید در میزان سختی خاک رویت می‌شود. در نهایت با کاهش شدید سختی و در کرنشهای بالا، بروز گسیختگی و یا ازدیاد بیش از حد تغییرشکل، تسلیم نهایی^۴ خاک بروز خواهد کرد و خاک بسمت گسیختگی می‌رود. در این شرایط، خاک توان مقاومت بیشتر در برابر بارهای وارده را نخواهد داشت.

1 Malandaraki and Toll

2 First yield

3 Bond yield

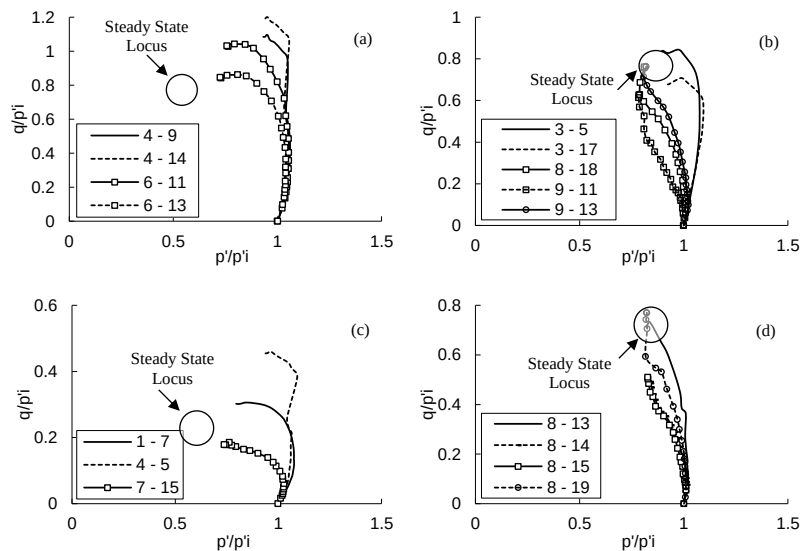
4 Final yield



شکل ۳-۱۰: منحنی تغییرات سختی محوری- کرنش محوری (مالاندراکی و تول ۲۰۰۱)

۳-۱-۱-۳-۱۰- مرور رفتار خاکهای سیمانته در چارچوب مفاهیم حالت بحرانی

مرور ادبیات فنی، مباحث محدودی را در زمینه بررسی و تبیین رفتار مکانیکی خاکهای مخلوط طبیعی نشان می‌دهد. حائری و حمیدی (۲۰۰۵) با نمونه گیری دست خورده از نقاط مختلف آبرفت تهران، رفتار خاکهای مخلوط شن و ماسه را بررسی نموده و با استفاده از مفاهیم حالت بحرانی به ارزیابی پتانسیل وقوع روانگرایی در آن پرداختند. بر اساس بررسی های انجام شده توسط ایشان، بروز حالت بحرانی در مخلوطهای شن و ماسه طبیعی حین آزمایش سه محوری مرسوم، در کرنشهای محوری بسیار بزرگ حدود ۲۵٪ یا بالاتر محتمل می‌باشد. شکل (۴-۱۰) بیانگر مسیرهای تنش موثر سه محوری زهکشی نشده نرمال شده به فشار دورگیر اولیه برای نمونه های دست خورده اخذ شده از اعماق مختلف گمانه های متعدد حفر شده توسط حائری و حمیدی (۲۰۰۵) در آبرفت تهران است. بر اساس این شکل، علی رغم ادامه بارگذاری تا سطوح کرنش بالا، حصول حالت پایدار نیازمند ادامه بارگذاری تا کرنشهای بیشتر خواهد بود. در وضعیت کنونی کرنش نهایی در این آزمایشها که بین ۲۰ تا ۲۵٪ است، بجای یک نقطه مشخص، محدوده‌ای برای بروز حالت پایدار وجود خواهد داشت.



شکل ۴-۱۰: مسیر تنش زهکشی نشده نمونه های مخلوط شن و ماسه طبیعی (حائری و حمیدی ۲۰۰۵)

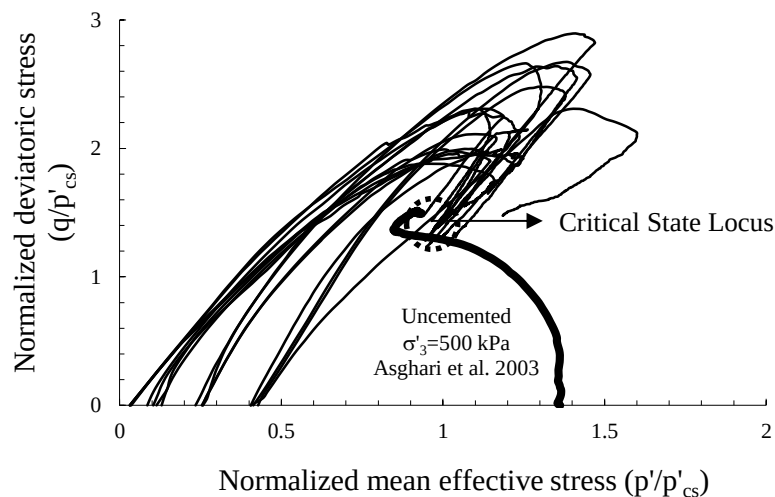
در تحقیق دیگر، حمیدی و حائری (۲۰۰۵) اصول و مفاهیم به کار رفته برای تبیین رفتار مکانیکی ماسه های شن دار را به مخلوطهای شن و ماسه ای سیمانته تعمیم دادند. شکل (۱۰-۵) تعدادی از مسیرهای تنش موثر سه محوری زهکشی نشده در صفحه تنش نرمال به فشار دورگیر اولیه را، برای خاک سیمانته در فشارهای دورگیر اولیه و درصد های سیمانته های مختلف نشان می دهد. به همراه این مسیرهای تنش، یک مسیر تنش موثر زهکشی نشده مربوط به نمونه غیر سیمانته از خاک مذکور نیز برای فشار دورگیر ۵۰۰ کیلو پاسکال ارائه شده است. این شکل نشان می دهد که تمامی مسیرهای تنش در نهایت به یک محدوده واحد که بیانگر همان حالت بحرانی در خاک است همگرا می شوند. با توجه به وقوع حالت بحرانی در کرنشهای بسیار بزرگ و خردشدگی عمده باندهای سیمانی در این وضعیت، تمامی مسیرهای تنش مربوط به نمونه های سیمانته و غیر سیمانته به یک محدوده واحد ختم می شوند. در این فضا، p'_{cs} ، مقدار تنش موثر ایزوتروپ، بر خط حالت بحرانی در نسبت تخلخل نظیر می باشد و بر اساس رابطه زیر تعریف می گردد. با توجه به ماهیت زهکشی نشده این آزمایشها، نسبت تخلخل در تمامی طول مسیر تنش ثابت و برابر نسبت تخلخل اولیه خواهد بود.

$$p'_{cs} = \exp\left(\frac{\Gamma - \nu}{\lambda}\right) \quad (1-10)$$

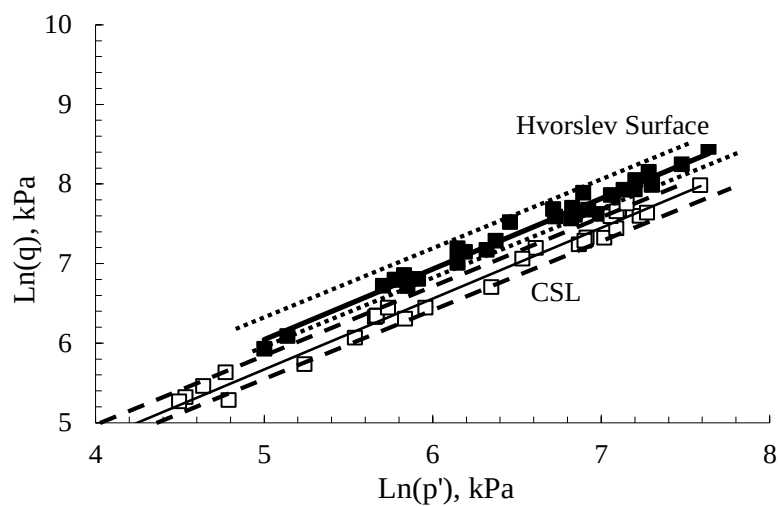
در این رابطه، Γ عرض از مبدا خط حالت بحرانی در $p' = 1$ و λ شیب خط حال بحرانی است. اتکینسون و لیتل^۱ (۱۹۸۸) استفاده از فضای تنش $Ln(p') - Ln(q)$ را برای تعیین تصویر سطح ورشلو پیشنهاد نمودند. بر اساس این شکل مشخص می‌شود که در نمونه های سیمانته، بجای یک خط واحد برای تصویر این دو سطح، دو محدوده بدست می‌آید که تصاویر سطوح مذکور در بین آن حدود قرار می‌گیرند.

مشابه این وضعیت، در صفحه تراکم $v - Ln(p')$ قابل مشاهده خواهد بود. ضمن اینکه به نظر می‌رسد در این صفحه، محدوده تغییرات تصاویر سطوح مربوطه، به ویژه در خصوص سطح ورشلو بیشتر است. این موضوع، لزوم پیشنهاد صفحه‌ای جدید، برای تعیین یک تصویر واحد از سطوح مذکور را برای خاک سیمانی شده، الزامی می‌نماید.

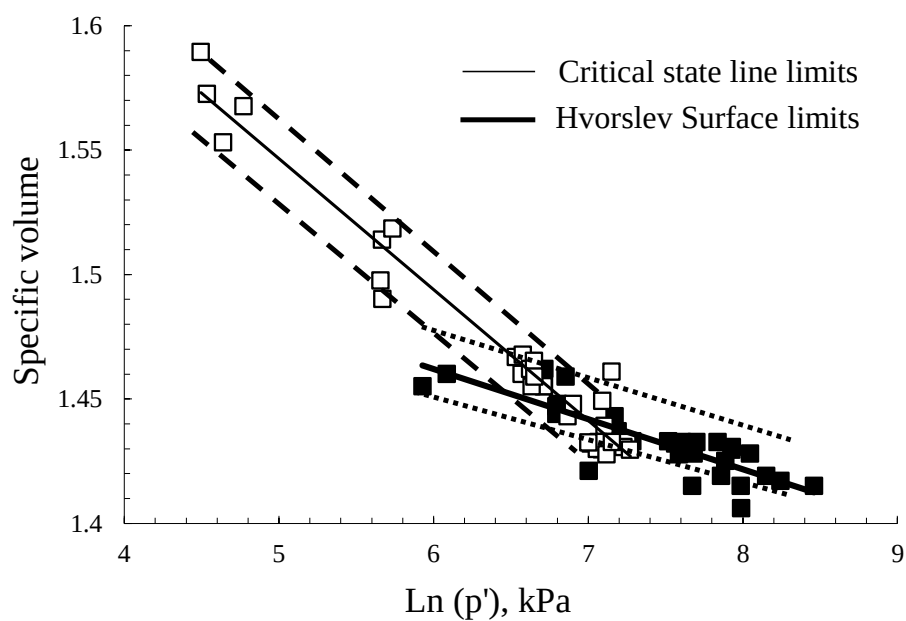
حمیدی و حائری (۲۰۰۵) بر مبنای شکل (۱۰-۸)، فضای جدیدی را برای تعریف خط حالت بحرانی و سطح ورشلو ارائه نمودند. این شکل به خوبی نشان می‌دهد که در این فضای جدید، علی‌رغم صد برابر نمودن مقیاس هر یک از محورها، میزان تفرق داده‌ها بسیار کمتر بوده و امکان تعریف یک تصویر یکتا از سطوح مذکور و ایجاد یک چارچوب رفتاری مناسب بر مبنای نظریه حال بحرانی برای خاکهای سیمانی شده وجود خواهد داشت. استفاده از فضای مذکور، توسط تول و همکاران (۲۰۰۶) برای سایر خاکهای ماسه‌ای سیمانته مورد ارزیابی قرار گرفت.



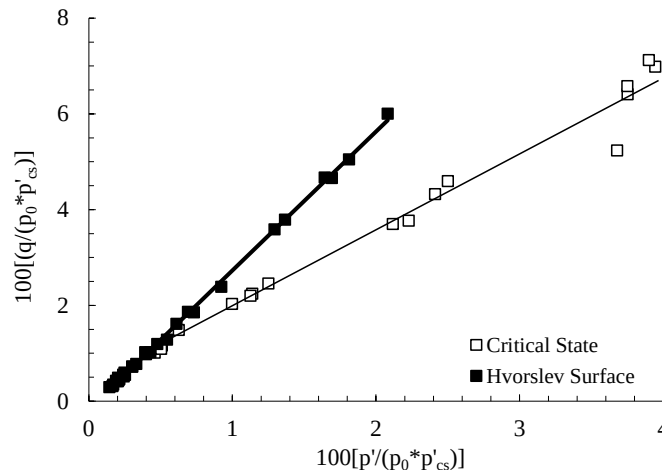
شکل ۱۰-۵: مسیر تنش زهکشی نشده نمونه های مخلوط شن و ماسه طبیعی (حمیدی و حائری ۲۰۰۵)



شکل ۶-۱۰: تصویر سطح حالت بحرانی و ورشلو نمونه سیمانته در صفحه $\ln(p') - \ln(q)$ (حمیدی و حائری ۲۰۰۵)



شکل ۷-۱۰: مسیر تنش زهکشی نشده نمونه های مخلوط شن و ماسه طبیعی (حمیدی و حائری ۲۰۰۵)



شکل ۱۰-۸: مسیر تنش زهکشی نشده نمونه های مخلوط شن و ماسه طبیعی (حمیدی و حائری ۲۰۰۵)

۱۰-۳-۲- ارائه و توسعه یک مدل رفتاری برای خاکهای سیمانته

با استفاده از مفاهیم ذکر شده در فصول قبل، در این قسمت چارچوبی برای مدلسازی رفتار خاکهای سیمانته ارائه می شود. اساس این مدل بر مبنای مطالعات حائری و حمیدی (۲۰۰۹) و روانبخش و حمیدی (۲۰۱۳) قرار دارد. رفتار ماسه های سیمانته متأثر از دو بخش ساختاری خاک شامل مقاومت باندها و دانه های خاک می باشد. در مدل ارائه شده، با اعمال بارگذاری خارجی بر نمونه خاک، بخشی به باندهای سیمانی و بخش دیگر به ماتریس غیر سیمانته وارد می شود. رفتار این خاکها تحت تاثیر باری که بر بخش غیر سیمانی وارد می شود را می توان بر اساس مدل های معمول موجود برای خاکهای دانه ای در نظر گرفت. بنابراین، برای تبیین مقاومت و رفتار باندها مدلی ارائه و گسترش می یابد که قادر به پیش بینی رفتار بخش سیمانی باشد. در انتها، سهم هر قسمت در روند بارگذاری محاسبه شده و با تلفیق این دو، رفتار تنش- کرنش خاک سیمانته پیش بینی خواهد شد.

جدا سازی جزء کرنش ها بر اساس روابط زیر انجام می شود. نکته قابل توجه آن است که به دلیل کاهش پتانسیل فشردگی و تغییر شکل با افزایش درجه سیمانته سیون، کرنش حجمی و برشی در خاک سیمانته کمتر از مقادیر نظیر در خاک غیر سیمانی است. بدین ترتیب می توان نوشت:

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_{vm} - d\varepsilon_{vb} \quad (2-10)$$

$$d\varepsilon_s = d\varepsilon_{sm} - d\varepsilon_{sb} \quad (3-10)$$

که در آن $d\varepsilon_{vm}$ و $d\varepsilon_{vb}$ به ترتیب جزء کرنش‌های حجمی ماتریس غیر سیمانی و باندهای سیمانی می‌باشد. به همین ترتیب $d\varepsilon_{vm}$ و $d\varepsilon_{vb}$ جزء کرنش‌های برشی در بخش غیر سیمانته و ساختار سیمانی است. با برقراری تعادل بین نیروهای داخلی ایجاد شده و خارجی اعمال شده می‌توان معادله تعادل انرژی در خاک سیمانته را به شکل زیر نوشت:

$$pd\varepsilon_v + qd\varepsilon_s = p_m d\varepsilon_{vm} + q_m d\varepsilon_{sm} + (p_b - p_{b0})d\varepsilon_{vb} + (q_b - q_{b0})d\varepsilon_{sb} \quad (۴-۱۰)$$

در معادله فوق p_m و p_b به ترتیب تنش میانگین در ماتریس خاک و باندهای سیمانی شده می‌باشند. q_m و q_b نیز به ترتیب تنش انحرافی در خاک غیر سیمانی و ساختار سیمانته است. مقادیر تنش میانگین و انحرافی اولیه در باندها نیز با p_{b0} و q_{b0} نشان داده شده است. با جداسازی بخش حجمی و برشی در معادله فوق معادله زیر حاصل می‌گردد:

$$p = p_m \left[1 + \frac{d\varepsilon_{vb}}{d\varepsilon_v} \right] + (p_b - p_{b0}) \frac{d\varepsilon_{vb}}{d\varepsilon_v} \quad (۵-۱۰)$$

$$q = q_m \left[1 + \frac{d\varepsilon_{sb}}{d\varepsilon_s} \right] + (q_b - q_{b0}) \frac{d\varepsilon_{sb}}{d\varepsilon_s} \quad (۶-۱۰)$$

با تعریف متغیر χ بعنوان پارامتر اضمحلال باندها^۱، رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\chi = (\varepsilon_{vb}/\varepsilon_v) \exp(-L) = \chi_0 \exp(-L) \quad (۷-۱۰)$$

$$p = (1 + \chi) p_m + \chi (p_b - p_{b0}) \quad (۸-۱۰)$$

$$q = (1 + \chi) q_m + \chi (q_b - q_{b0}) \quad (۹-۱۰)$$

پارامتر χ در روابط فوق ضریب وزنی است که سهم هر یک از بخش‌های باند سیمانی و ماتریس خاک را مشخص می‌نماید. مقدار χ_0 جزو ثوابت مدل بوده و از پروسه کالیبراسیون مدل حاصل می‌شود. پارامتر L نیز میزان افت در سختی خاک سیمانی در اثر خرد شدگی باندها با ازدیاد کرنش را مشخص می‌نماید. با توجه به آنکه در آزمایش سه محوری، نمونه تحت تاثیر مستقیم کرنشهای محوری است، از مدول الاستیسیته E ، در کرنش فعلی و E_0 بعنوان مدول الاستیسیته اولیه خاک در کرنشهای بسیار کوچک استفاده می‌گردد:

$$L = \ln \left(\frac{E_0}{E} \right) \quad (۱۰-۱۰)$$

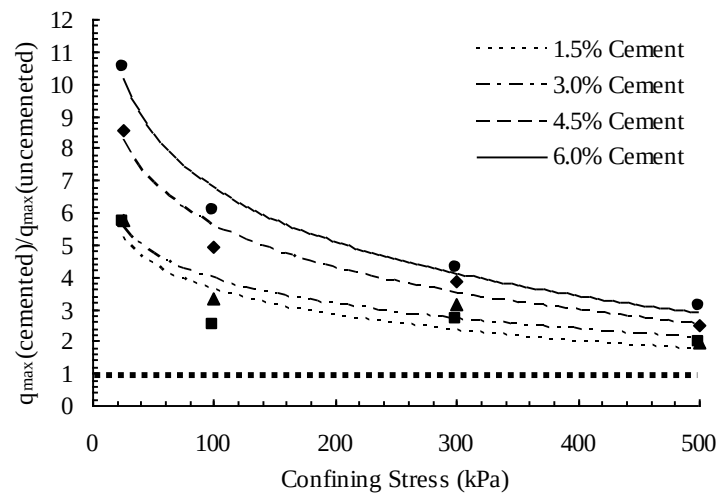
1 Bond degradation

بدین ترتیب، یک فرمولاسیون جدید برای جداسازی سهم باندهای سیمانی و ماتریس غیر سیمانی به دست می‌آید که با ادغام آنها توسط پارامتر اضمحلال باندها (χ)، رفتار خاک سیمانته با ازدیاد کرنش و خردشدگی باندها، به تدریج به رفتار خاک غیر سیمانته میل خواهد کرد.

برای مدلسازی رفتار باندهای سیمانی از مدل ارائه شده توسط حمیدی و حائری (۲۰۰۸) استفاده می‌گردد. با توجه به نمودار موجود در شکل (۹-۱۰)، مشاهده می‌شود که با افزایش فشار همه جانبه، نسبت مقاومت برشی خاک سیمانی شده به خاک غیر سیمانی کاهش می‌یابد. لذا با ازدیاد فشار همه جانبه، تاثیر باندهای سیمانی بر عملکرد خاک کاهش خواهد یافت. این فشار دورگیر را می‌توان با برون یابی داده‌ها و یافتن محل تلاقی نمودارها با محور افقی تعیین کرد. این فشار با p'_c نام گذاری می‌گردد. بر این اساس، حمیدی و حائری (۲۰۰۸)، معادله زیر را برای تعیین تغییرات مقاومت باندهای سیمانی با فشار دورگیر پیشنهاد دادند.

$$q_b^d = q_{bu} \left(1 - \frac{p'}{p'_c} \right)^a \quad (۱۱-۱۰)$$

در این معادله q_b^d مقاومت زهکشی شده باندها و q_{bu} مقاومت باندها در فشار همه جانبه صفر است. در ضمن a یکی از پارامترهای مدل است که در پروسه کالیبراسیون برای خاک مورد نظر به دست می‌آید. با توجه به معادله (۱۱-۱۰)، رابطه مشابهی نیز برای محاسبه تغییرات سختی باندهای سیمانی بصورت معادله (۱۲-۱۰) پیشنهاد شده است.



شکل ۹-۱۰: تغییرات مقاومت برشی نرمال شده خاک سیمانته با فشار دورگیر (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)

$$k_b^d = k_{bu} \left(1 - \frac{p'}{p'_c} \right)^b \quad (۱۲-۱۰)$$

در این رابطه، k_b^d سختی باندها در شرایط زهکشی شده و k_{bu} سختی باندها در فشار همه جانبه صفر است. در این پژوهش برای ثوابت a و b که توابعی از درجه سیمانی شدن خاک هستند از کالیراسیون مدل در آزمایش های سه محوری تحت فشار دور گیر ۱۰۰ کیلوپاسکال استفاده شده است. با کالیراسیون مدل و جاگذاری پارامترها به صورت تابعی از میزان سیمانته شدن، معادله های زیر بدست می آید. در این روابط CC درصد سیمان و p' فشار موثر میانگین بر حسب کیلوپاسکال می باشد.

$$q_b^d = (130CC + 290) \left[1 - \frac{p'}{726.6 \exp(0.1CC)} \right]^{1.5+0.1CC} \quad (۱۳-۱۰)$$

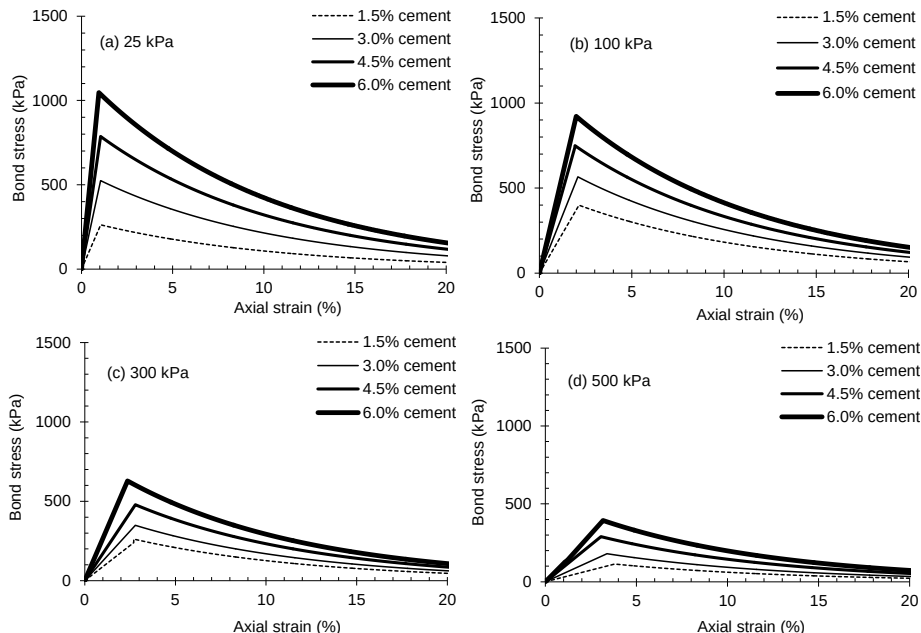
$$k_b^d = 17.5(CC - 0.75) \left[1 - \frac{p'}{726.6 \exp(0.1CC)} \right]^{2.1+0.3CC} \quad (۱۴-۱۰)$$

در این مدل رفتار باندها تا رسیدن به مقاومت گسیختگی q_b^d ، به صورت الاستیک خطی در نظر گرفته شده است. بعد از آن و با شروع خردشدگی باندها، تنش در باندها به صورت نمایی و بر اساس رابطه زیر کاهش خواهد یافت:

$$\frac{dq_b^d}{d\varepsilon_a} = -\alpha q_b^d \quad (۱۵-۱۰)$$

در این رابطه، پارامتر α نشان دهنده میزان کاهش تنش باندها با افزایش کرنش محوری خواهد بود.

با استفاده از این روابط، تغییرات تنش انحرافی-کرنش محوری باندهای سیمانی شده، در شرایط زهکشی شده قابل تعیین است. بر اساس شکل (۱۰-۱۰)، با افزایش درصد سیمان، مقاومت برشی افزایش می یابد اما ازدیاد فشار دور گیر عاملی در جهت کاهش مقاومت باندها خواهد بود.



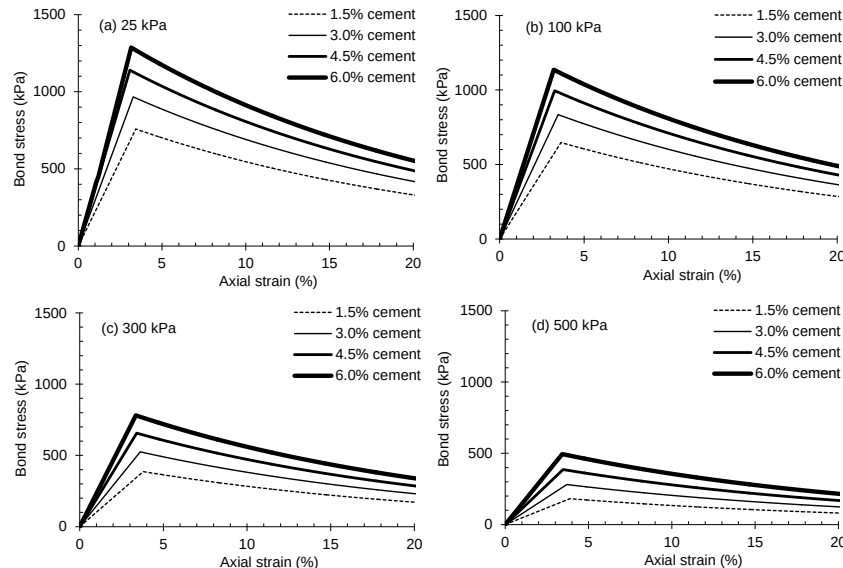
شکل ۱۰-۱: تغییرات مقاومت انحرافی زهکشی شده باندها با کرنش محوری در فشارهای دورگیر و درصد سیمان‌های مختلف (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)

در مدل پیشنهادی حائری و همکاران (۲۰۰۹)، بر اساس نتایج آزمایشگاهی، نسبت مقاومت برشی زهکشی شده به زهکشی نشده بصورت رابطه ارائه شده است. همچنین بطور مشابه، بر این اساس رابطه مشابهی برای نسبت سختی شرایط زهکشی شده به سختی زهکشی نشده مطابق رابطه (۱۰-۱۷) ارائه شده است.

$$\frac{q_b^d}{q_b^u} = 0.0009 p' + 0.044 CC + 0.5 \quad (10-16)$$

$$\frac{k_b^d}{k_b^u} = m p'^n \quad (10-17)$$

در رابطه دوم، m و n پارامترهای مدل بوده که بر حسب کالیبراسیون قابل تعیین هستند. شکل (۱۰-۱۱) نیز تغییرات مقاومت زهکشی نشده باندهای سیمانی با درصد سیمان و فشار دورگیر را ارائه می‌نماید. بدین ترتیب کلیه پارامترهای لازم جهت تبیین رفتار باندهای سیمانی مشخص خواهد بود. با ترکیب منحنیهای مقاومتی باندها با بخش غیر سیمانی بر اساس روابط (۱۰-۸) و (۱۰-۹)، رفتار تنش انحرافی-کرنش محوری خاک سیمانته تعیین خواهد شد.



شکل ۱۰-۱۱: تغییرات مقاومت انحرافی زهکشی نشده باندها با کرنش محوری در فشارهای دورگیر و درصد سیمانهای مختلف (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)

در بخش غیرسیمانی این مدل می‌توان از مدل‌های رایج برای خاکهای دانه‌ای استفاده کرد. در خاک‌های دانه‌ای، یکی از مدل‌های قابل قبول، مدل پلاستیسیته عمومی پاستور و همکاران^۱ (۱۹۸۳) می‌باشد. این مدل در فصل هفتم بطور کامل معرفی گردید. شکل (۱۰-۱۲)، منحنی‌های تنش انحرافی-کرنش محوری زهکشی شده و شکل (۱۰-۱۳)، منحنی‌های تنش انحرافی-کرنش محوری زهکشی نشده را در مدلسازی رفتار مکانیکی آبرفت درشت دانه سری A تهران، با استفاده از مدل پاستور و همکاران (۱۹۸۳) ارائه می‌نماید.

برای پیش بینی رفتار خاک سیمانی، ادغام منحنیهای تنش انحرافی-کرنش محوری باندها و خاک غیر سیمانی ضروری است. ثوابت مورد نیاز برای این ادغام با کالیبراسیون مدل به کمک نتایج آزمایش‌های مختلف انجام می‌شود. پارامتر اضمحلال مقاومت باند، α و پارامتر مربوط به سهم مقاومت هر بخش (χ)، برای شرایط زهکشی شده از روابط (۱۰-۱۸) و (۱۰-۱۹) و در شرایط زهکشی نشده از روابط (۱۰-۲۰) و (۱۰-۲۱) حاصل می‌شوند.

$$\chi_0^d = 35.2 \exp(-0.0018p') \quad (10-18)$$

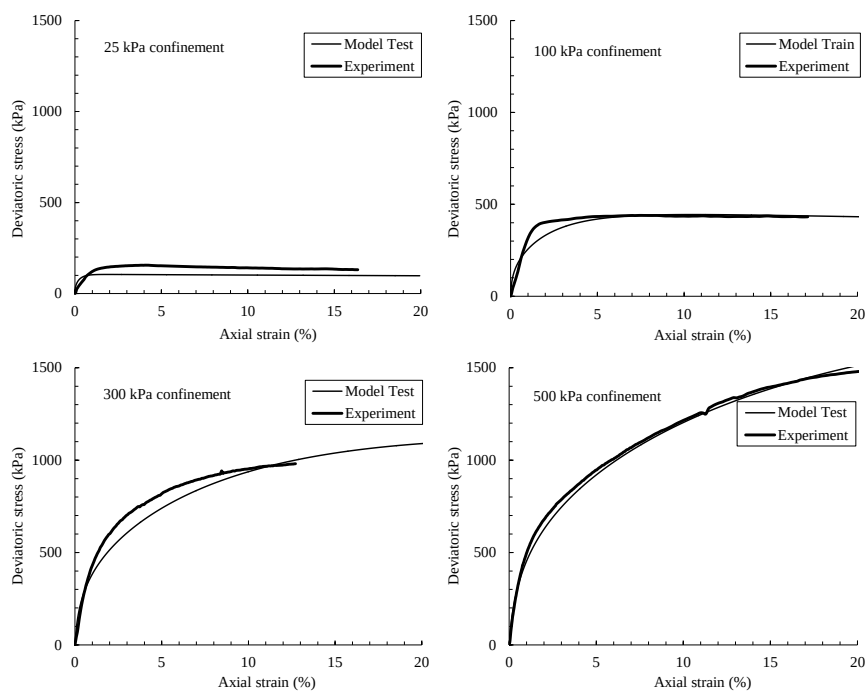
$$\alpha^d = 4.6 + 0.028p' + 0.00004p'^2 \quad (10-19)$$

$$\chi_0^u = 7.8 + 0.135p' + 0.00002p'^2 \quad (10-20)$$

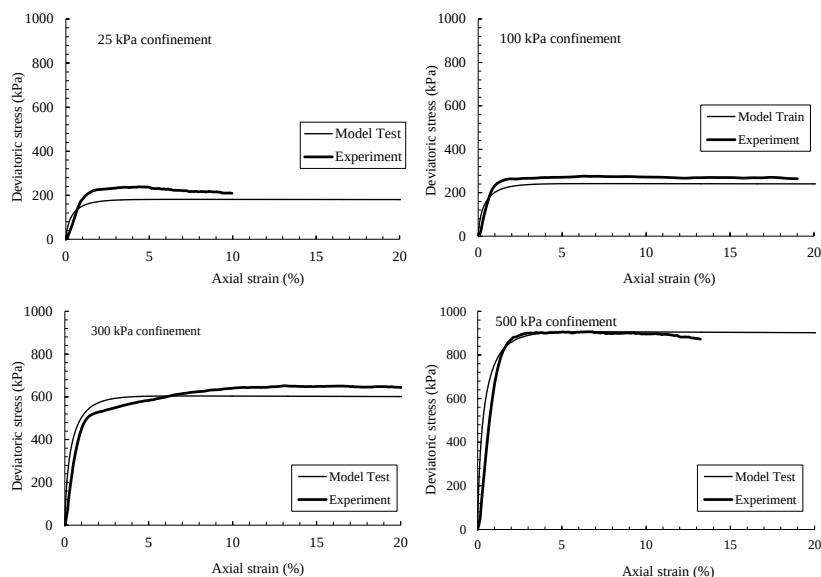
1 Pastor et al.

$$\alpha^u = 5$$

(۲۱-۱۰)

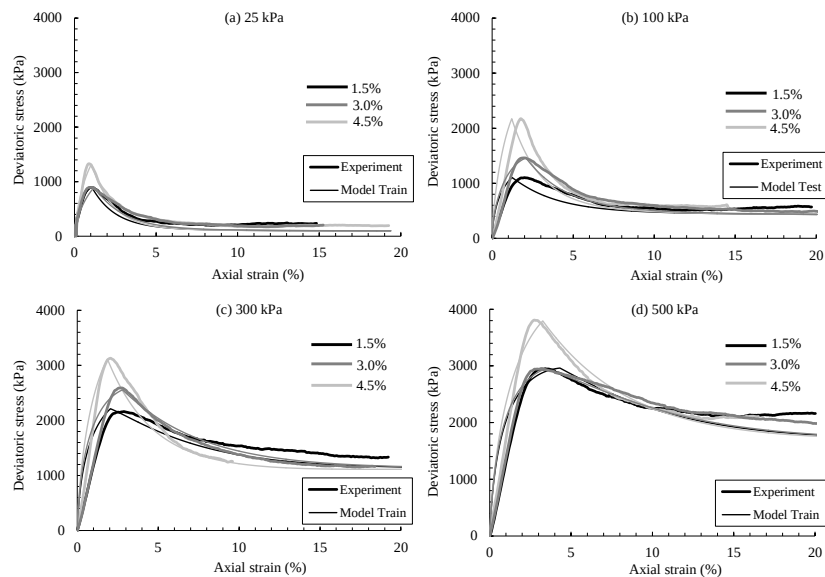


شکل (۱۰-۱۲): تغییرات تنش انحرافی زهکشی شده خاک غیر سیمانی با کرنش محوری (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)

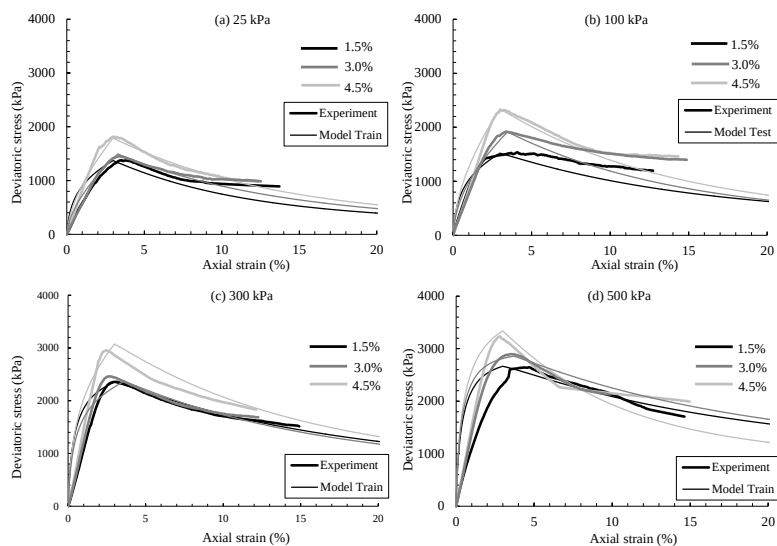


شکل (۱۰-۱۳): تغییرات تنش انحرافی زهکشی نشده خاک غیر سیمانی با کرنش محوری (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)

شکلهای (۱۰-۱۲) و (۱۰-۱۳) نتایج حاصل از مدلسازی رفتاری خاک سیمانی شده، با ادغام منحنی‌های (۱۰-۱۰) تا (۱۰-۱۳) را ارائه می‌نماید.



شکل ۱۰-۱۴: تغییرات تنش انحرافی زهکشی شده خاک غیر سیمانی با کرنش محوری (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)



شکل ۱۰-۱۵: تغییرات تنش انحرافی زهکشی نشده خاک غیر سیمانی با کرنش محوری (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)

۱۰-۳-۳- فشار آب حفره‌ای

در مدل رفتاری ارائه شده توسط حائری و حمیدی (۲۰۰۹)، فشار آب حفره‌ای نیز با روندی مشابه رفتار تنش-کرنش خاک سیمانته، با ترکیب مقادیر نظیر در دو بخش باندهای سیمانی و خاک غیر سیمانته صورت می‌پذیرد. در شرایط زهکشی نشده برای خاک غیر سیمانته، با فرض صفر بودن تغییرات حجم در مدل رفتاری پاستور و همکاران (۱۹۸۳)، رابطه زیر برای محاسبه فشار آب حفره‌ای به دست می‌آید. شکل (۱۰-۱۶) تغییرات فشار آب حفره‌ای در خاک سیمانی بر مبنای پیش بینی مدل مذکور در فشارهای مختلف دورگیر را ارائه می‌نماید. شایان ذکر است که رابطه زیر، فشار آب حفره‌ای منفی ایجاد شده تحت فشارهای دورگیر پایین را به خوبی پیش بینی نمی‌کند.

$$u_m = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{M_g} \right) q_m \quad (10-22)$$

برای محاسبه فشار آب حفره‌ای در باندها نیز می‌توان از تعریف جزء کرنش حجمی باندها ($\dot{\varepsilon}_{vb}$)، جزء فشار آب حفره‌ای ($\dot{u}_b$) و مدول برگشتی^۱ (E_{rb}) استفاده نمود. بر این اساس روابط (۱۰-۲۳) و (۱۰-۲۴) قابل حصول می‌باشد.

$$\dot{\varepsilon}_{vb} = \frac{\dot{p}_b}{K_b} \quad (10-23)$$

$$\dot{u}_b = \frac{E_{rb}}{K_b} \dot{p}_b \quad (10-24)$$

در روابط فوق $\dot{p}_b$ جزء تنش موثر میانگین در باندهاست که مشابه رابطه (۱۰-۱۵) به فرم زیر با کرنش محوری تغییر خواهد نمود:

$$\dot{p}_b = \frac{\partial p_b}{\partial \varepsilon_a} = -\alpha p_b \quad (10-25)$$

با قرار دادن رابطه (۱۰-۲۵) در رابطه (۱۰-۲۴) می‌توان تغییرات فشار آب حفره‌ای را بر اساس رابطه (۱۰-۲۶) به دست آورد:

$$\dot{u}_b = -\alpha \frac{E_{rb}}{K_b} p_b = -A \frac{E_{rb}}{K_b} \exp(-\alpha \varepsilon_a) \quad (10-26)$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۱۰-۲۶) و با تعیین ثوابت معادله با کالیبراسیون، می‌توان فشار آب حفره‌ای ایجاد شده در خاک را محاسبه نمود.

$$u_b = \int -A \frac{E_{rb}}{K_b} \exp(-\alpha \varepsilon_a) d\varepsilon_a = A \frac{E_{rb}}{K_b} \exp(-\alpha \varepsilon_a) \pm C \quad (10-27)$$

1 Rebound modulus

رابطه فوق را می‌توان با تغییر شیوه نگارش بصورت رابطه (۲۸-۱۰) نیز ارائه نمود:

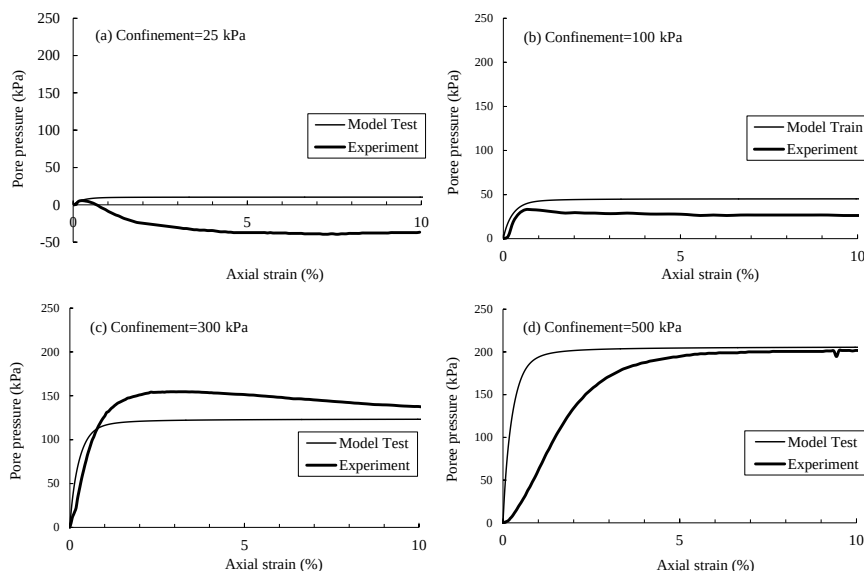
$$u_b = -C \left(1 - \frac{AE_{rb}}{CK_b} \exp(-\alpha \varepsilon_a) \right) \quad (28-10)$$

با توجه به مقدار $\alpha = 5$ در شرایط زهکشی نشده و $D = \frac{AE_{rb}}{CK_b}$ رابطه (۲۸-۱۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

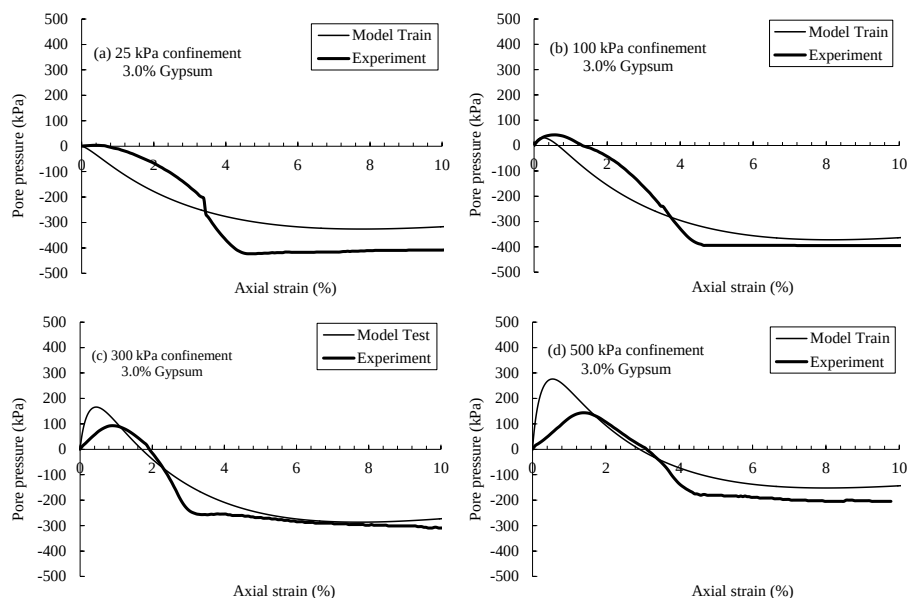
$$u_b = E(1 - D \exp(-5\varepsilon_a)) \quad (29-10)$$

بر این اساس، فشار حفره‌ای ایجاد شده در باندها با استفاده از دو پارامتر E و D قابل تبیین خواهد بود. این دو پارامتر با کالیبراسیون مدل بر اساس نتایج آزمایشها قابل محاسبه خواهد بود. با تعیین فشار حفره‌ای در بخش غیر سیمانی و باندهای سیمانته و سپس تلفیق آنها بر اساس رابطه (۳۰-۱۰)، فشار حفره‌ای تولید شده طی بارگذاری زهکشی نشده در خاک سیمانی قابل محاسبه خواهد بود. شکل (۱۷-۱۰) نتایج مدلسازی فشار آب حفره‌ای تولید شده در خاک سیمانی شده با ۳ درصدی گچ در فشارهای مختلف دورگیر و شکل (۱۸-۱۰) نتایج مدلسازی فشار آب حفره‌ای در خاک سیمانی شده با درصدهای مختلف گچ را ارائه می‌نماید.

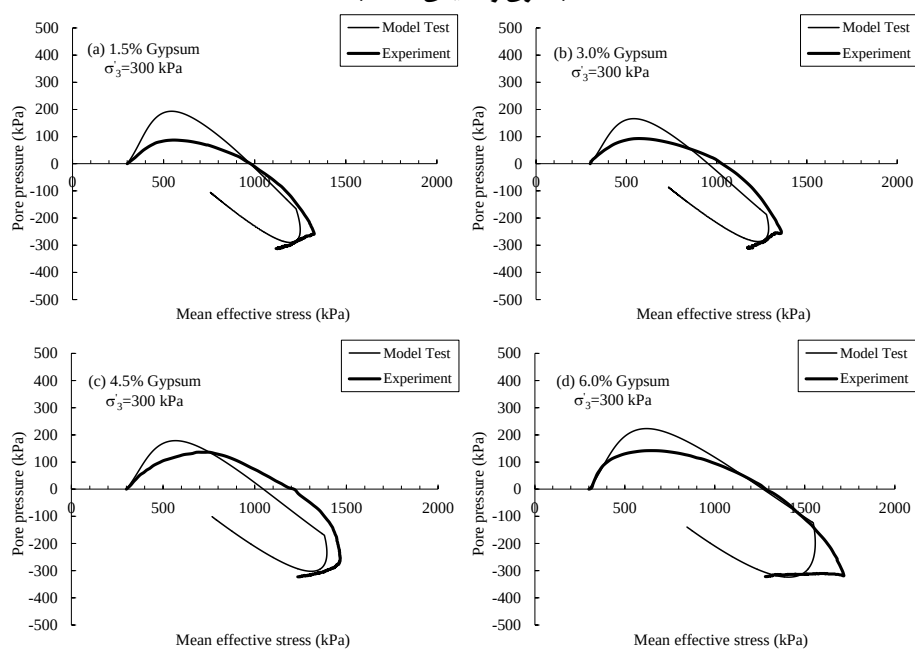
$$u = (1 + \chi)u_m + \chi u_b \quad (30-10)$$



شکل ۱۶-۱۰: فشار آب حفره‌ای در خاک غیر سیمانی بر مبنای مدل پاستور و همکاران ۱۹۸۳ (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)



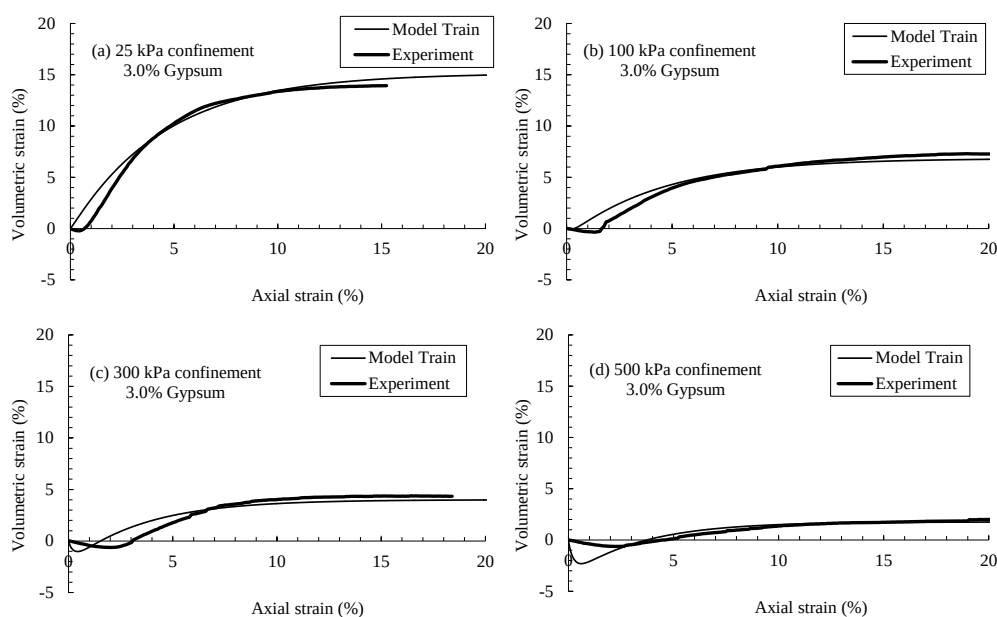
شکل ۱۰-۱۷: بررسی نتایج مدل برای فشار آب حفره‌ای در خاک سیمانی شده با ۳ درصد گچ (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)



شکل ۱۰-۱۸: نتایج مدل برای فشار آب حفره‌ای در خاک سیمانی شده با درصد‌های مختلف گچ (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)

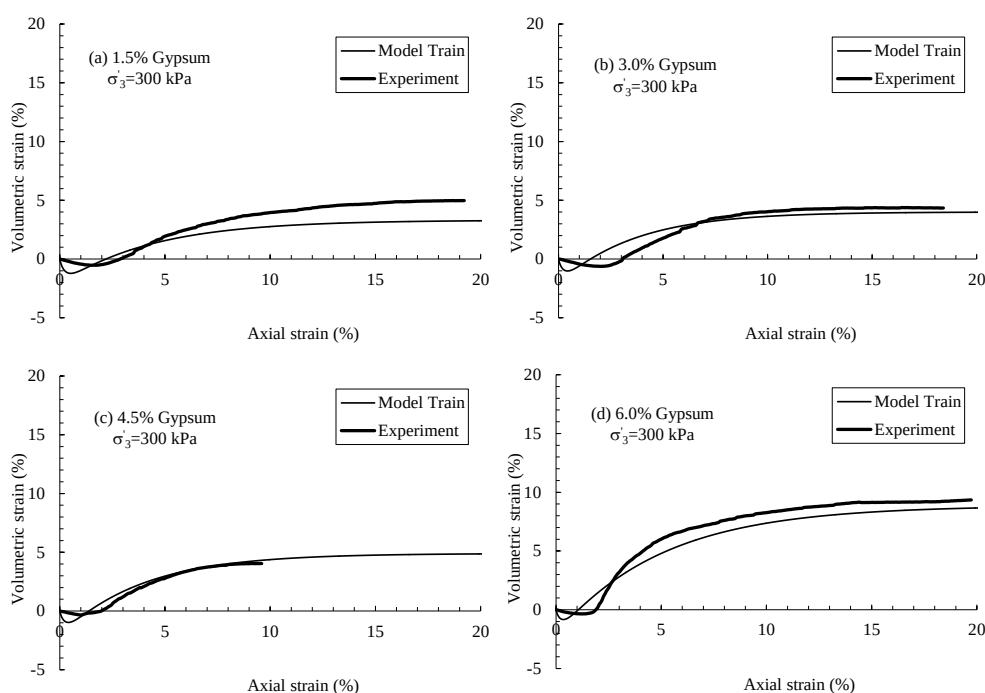
۱۰-۳-۴- کرنشهای حجمی

به مانند فشار آب حفره‌ای تولید شده در شرایط زهکشی نشده، در شرایط زهکشی شده نیز باید کرنشهای حجمی محاسبه شوند. کرنشهای حجمی خاک سیمانی، با استفاده از رابطه (۱۰-۲) بر مبنای مقادیر کرنش حجمی در خاک غیر سیمانی و باندهای سیمانته محاسبه می‌شوند. کرنش حجمی در خاک غیر سیمانی بر اساس مدل پاستور و همکاران (۱۹۸۳) محاسبه می‌گردد. کرنش حجمی در باندهای سیمانی نیز بر اساس روابط (۱۰-۲۳) و (۱۰-۲۴) با تقسیم فشار آب حفره‌ای محاسبه شده بر مدول برگشتی تعیین می‌شود. حائری و حمیدی (۲۰۰۹) با کالیبراسیون نتایج مدل برای آبرفت درشت دانه سری A تهران، مقدار مدول برگشتی متوسط ۵۵۰۰ کیلوپاسکال را پیشنهاد دادند. بر این اساس با تلفیق مقادیر کرنش حجمی بخش غیر سیمانی و باندهای سیمانی، کرنش حجمی خاک سیمانی شده با ۳ درصد گچ مشابه شکل (۱۰-۱۹) بدست خواهد آمد. همچنین شکل (۱۰-۲۰) نمودار تغییرات کرنش حجمی با کرنش محوری را در خاک سیمانی شده با درصدهای مختلف سیمان گچی ارائه خواهد نمود.



شکل ۱۰-۱۹: بررسی نتایج مدل برای کرنشهای حجمی در خاک سیمانی شده با ۳ درصد گچ (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)

در این بخش کلیات روشی برای مدلسازی رفتار مکانیکی خاکهای سیمانی شده ارائه گردید. روانبخش و حمیدی (۲۰۱۳) نیز با تغییر پارامترها در مدل پلاستیسیته عمومی مانزانال و همکاران^۱ (۲۰۱۱)، که نسخه جدیدی از مدل پاستور و همکاران (۱۹۹۰) است به مدلسازی رفتار خاکهای سیمانی شده پرداختند. که خوانندگان برای اطلاع بیشتر از عملکرد آن مدل می‌توانند به مقاله مذکور رجوع نمایند.



شکل ۱۰-۲۰: نتایج مدل برای فشار آب حفره‌ای در خاک سیمانی شده با درصدهای مختلف گچ (حائری و حمیدی ۲۰۰۹)

۱۰-۴- مدلسازی رفتار ترمومکانیکی خاکهای رسی

در بسیاری موارد مانند مدفن زباله های هسته ای، سازه های ژئوترمال مثل شمع های حرارتی، حفاری چاه های نفتی، کابل های فشار قوی مدفون در خاک، نمونه برداری و آزمایشات برجا خصوصا در بستر اقیانوس ها و همچنین حرکت شتابدار برخی زمین لغزه ها و سایر پدیده های مشابه، خاک در معرض تولید و انتشار حرارت قرار می گیرد. با توجه به تاثیرات بسزایی که حرارت بر رفتار مکانیکی خاکهای رسی دارد، لازم است این اثرات به نحو مناسبی در مدلسازی رفتار مکانیکی خاکها وارد گردد.

1 Manzanal et al.

بر اساس مطالعات آزمایشگاهی، تاثیرات دما بر رفتار مکانیکی خاکهای ریزدانه بویژه رسها مشخص شده است. علت این امر آن است که به دلیل شکل صفحه‌ای کانی‌های رسی، نیروهای جذب سطحی در رفتار این خاک‌ها نقش مهمی را ایفا می‌نماید. توزیع بار الکتریکی بر سطح دانه‌ها نیز باعث جذب یون‌های غیر هم نام آب شده بدین ترتیب، لایه آب جذب سطحی نیز در اطراف کانی رسی شکل می‌گیرد. با توجه به تفاوت گرمای ویژه آب و کانی رسی، وجود این لایه منجر به تاثیر دما بر رفتار مکانیکی خاک خواهد شد. در واقع، افزایش دما باعث انبساط توأمان و ناهمگون ذرات خاک و لایه آب شده که بر رفتار خاک تاثیر گذار است.

۱-۴-۱۰- تاثیر دما بر خصوصیات فیزیکی و مکانیکی خاک رس

دما بر ویژگی‌های مختلف خاک رسی تاثیر گذار است. از جمله این ویژگی‌ها که دما سبب تغییر آن می‌شود می‌توان به وزن مخصوص، حدود اتربرگ، نفوذ پذیری، مقاومت برشی، تغییر حجم و فشار آب حفره‌ای اشاره نمود. در ادامه تاثیر دما بر این پارامترها توضیح داده خواهد شد.

۱-۴-۲- تاثیر دما بر وزن مخصوص

با توجه به اینکه دانسیته آب با افزایش دما تا حدی کاهش می‌یابد، انتظار می‌رود که با ازدیاد دما از ۲۰ تا ۱۰۰ درجه سانتیگراد، چگالی ویژه رس‌ها در دمای مشخص افزایش یابد و سرد کردن مجدد خاک تا دمای ۲۰ درجه، وزن مخصوص را به میزان اولیه کاهش دهد. در نتیجه اثر دما بر وزن مخصوص پدیده‌ای برگشت پذیر است.

۱-۴-۲-۱- حدود اتربرگ

نتایج تحقیقات بلز و استانکولسکو^۱ (۱۹۵۸) نشان می‌دهد که تاثیر حرارت بر حد روانی و شاخص خمیری بیش از حد پلاستیک می‌باشد. در خاک‌هایی که کانی بنتونیت به عنوان کانی غالب خاک به حساب می‌آید، افزایش دما باعث کاهش شدید حد رئانی و شاخص خمیری می‌گردد. ولی در خاکهای رسی که کانی غالب آن کائولونیت باشد، افزایش دما تا حدود ۴۰۰ درجه سانتی گراد تغییری در حد روانی و شاخص خمیری ایجاد نمی‌نماید (ونگ و همکاران^۲ ۱۹۹۰). نتایج این تحقیقات نشان داد که در دماهای بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ درجه سانتی گراد تاثیر حرارت بر حدود اتربرگ زیاد نیست و فقط اندکی با گرم شدن کاهش پیدا می‌کند.

۱-۴-۲-۲- نفوذ پذیری

ابو النجا^۳ (۲۰۰۵) نشان داد که نفوذ پذیری خاک با ازدیاد دما افزایش می‌یابد. علت این افزایش،

1 Beles and Stanculescu

2 Wang et al.

3 Abuel-Naga

کاهش ویسکوزیته آب در اثر حرارت و در نتیجه کاهش مقاومت ساختار داخلی خاک در برابر جریان سیال در توده آن تحت تنش ثابت است. این امر باعث تسهیل تراوش در رس و تسریع جریان درون آن می‌شود. نتایج تحقیقات دیلاژ^۱ و همکاران (۲۰۰۰) نشان داده که در دماهای بالا، تعیین نفوذ پذیری از منحنی های تحکیم موجب تخمین بیش از حد نفوذ پذیری می‌شود.

۱۰-۴-۲-۳- مقاومت برشی خاک

در مطالعات آزمایشگاهی مختلف در زمینه اثر دما بر مقاومت برشی خاک رس اختلافات زیادی به چشم می‌خورد. علت این اختلاف مسیر های مختلف تنش و حرارت اعمالی در آزمایشهای صورت گرفته توسط محققین مختلف می‌باشد. هوکل و بلدی^۲ (۱۹۹۰) نشان دادند که مقاومت برشی سه محوری تحکیم یافته زهکشی شده نمونه های رس با افزایش دما کاهش می‌یابد. اما محققان دیگر مانند چکراواک و لالویی^۳ (۲۰۰۴) در آزمایشات سه محوری تحکیم یافته زهکشی شده بر روی نمونه های رس لای دار دست خورده نشان دادند که مقاومت برشی زهکشی شده و مدول الاستیسیته نمونه های عادی تحکیم یافته و پیش تحکیم یافته با ازدیاد دما افزایش می‌یابد.

۱۰-۴-۲-۴- تغییر حجم در شرایط زهکشی شده

نتایج تحقیقات نشان می‌دهد که بخش عمده‌ای از تغییرات حجم پلاستیک در خلال سیکل اول حرارت روی می‌دهد و در سیکل های بعدی، تغییر حجم دائمی به مراتب کمتری رخ خواهد داد. بر اساس تعریف کامپانلا و میچل^۴ (۱۹۶۸)، این موضوع تثبیت حرارتی^۵ با ازدیاد سیکلهای حرارت نامیده می‌شود.

۱۰-۴-۲-۵- فشار آب حفره‌ای در شرایط زهکشی نشده

حرارت دادن خاک در شرایط زهکشی نشده تحت تنش کل ثابت، سبب افزایش حجم نمونه خاک می‌شود. در نتیجه، به دلیل تفاوت ضرایب انبساط حرارتی آب و ذرات خاک، فشار آب حفره‌ای افزایش خواهد یافت. ابو النجا (۲۰۰۵) نشان داد که اگر افزایش دما سریع باشد، به دلیل انبساط حجمی بیشتر آب حفره‌ای نسبت به کانی های جامد، ازدیاد قابل توجه فشار آب حفره‌ای رس عادی تحکیم یافته در شرایط زهکشی شده رخ خواهد داد. همچنین حرارت دادن نمونه های ایلیت در شرایط زهکشی نشده نیز باعث افزایش فشار آب حفره‌ای شده که این افزایش فشار در هنگام سرد شدن تا حد زیادی برگشت پذیر است.

1 Delage et al.

2 Baldi

3 Laloui

4 Mitchell

5 Thermal Stabilization

۱۰-۴-۳- مدلسازی رفتار ترمومکانیکی رس اشباع

با توجه به مطالب بیان شده و همچنین مطالعات محققان پیشین می‌توان دریافت که اثر دما بر خاک‌های رسی قابل‌تأمل می‌باشد و به منظور جلوگیری از هرگونه رخداد غیر قابل کنترل بر رفتار خاک رسی در اثر افزایش دما، باید آن را به دقت بررسی و کنترل نمود. از طرف دیگر، آب نیز نقش بسزایی در این تغییر رفتار دارد. لذا در این بخش، ابتدا چارچوب کلی مدلسازی رفتار ترمومکانیکی خاک رس اشباع معرفی شده و پس از آن مختصری درباره مدلسازی رفتار خاکهای غیر اشباع بحث می‌گردد. به منظور یافتن روابط مناسب برای پیش‌بینی رفتار خاک لازم است به مانند هر مدل رفتاری دیگر، تغییرشکلهای الاستیک، سطوح تسلیم و پتانسیل و قانون سخت‌شوندگی مدل بصورت گام به گام معرفی و محاسبه گردد. مبانی ارائه شده در خصوص خاک اشباع، بر مبنای مدل ارائه شده توسط حمیدی و خزاعی (۲۰۱۰) و حمیدی و همکاران (۲۰۱۵) قرار دارد.

۱۰-۴-۳-۱- فرضیات مدلسازی رفتاری

اصول مدل ارائه شده توسط حمیدی و خزاعی (۲۰۱۰) که بعدها توسط حمیدی و همکاران (۲۰۱۵) مورد بازبینی و اصلاح قرار گرفت، بر مبنای حرکات خط تحکیم ایزوتروپ (NCL) با ازدیاد حرارت در صفحه تراکم مطابق شکل (۱۰-۲۱) مطابق با فرضیات زیر می‌باشد.

الف- با افزایش دما، خط NCL به سمت مقادیر کمتر نسبت تخلخل (e) حرکت کرده و به خط حالت بحرانی (CSL) نزدیک می‌شود (چکراواک و لالویی ۲۰۰۴ و ابو النجا ۲۰۰۵).

ب- شیب خط حالت بحرانی CSL در صفحه تنش $q - p'$ و صفحه تراکم $e - Lnp'$ به دما وابسته نیست (گراهام و همکاران^۱ ۲۰۰۱ و چکراواک و لالویی ۲۰۰۴).

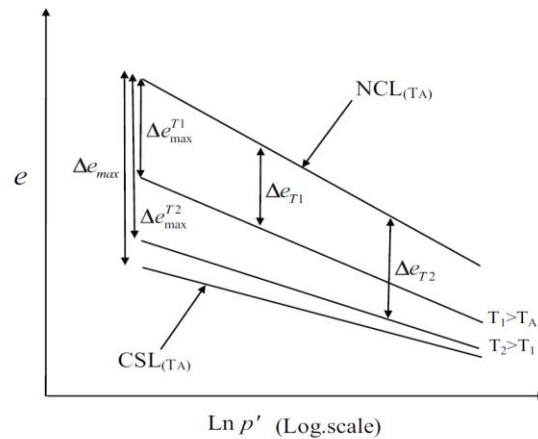
ج- در صورتی که شیب NCL و CSL در دمای محیط، یکسان در نظر گرفته شود، افزایش دما تاثیری بر شیب NCL در دماهای بالاتر نداشته و موازی با NCL اولیه به سمت پایین و نسبت تخلخل‌های کمتر حرکت می‌کند.

د- در صورتی که شیب NCL و CSL در دمای محیط، متفاوت در نظر گرفته شود (شیب NCL از CSL بیشتر باشد)، با افزایش دما شیب NCL کاهش پیدا می‌کند. بطوریکه در حداکثر دمای قابل تحمل توسط خاک، با شیب CSL یکسان خواهد شد.

ه- کاهش در نسبت تخلخل در اثر افزایش حرارت، نسبتی از حداکثر اختلاف بین نسبت تخلخل خطوط NCL و CSL در دمای محیط است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که خط NCL در درجه حرارت‌های بالا هیچ‌گاه زیر خط CSL در درجه حرارت محیط قرار نخواهد گرفت.

و- در جهت سادگی مدل، از کرنش حجمی حرارتی دانه‌های خاک صرف نظر شده است.

1 Graham et al.



شکل ۱۰-۲۱: مدلسازی رفتار خط تحکیم نرمال در درجه حرارت بالاتر (حمیدی و خزاعی ۲۰۱۰)

همانطور که بیان شد، خط NCL با افزایش دما از دمای محیط^۱ به T ، در صفحه تراکم به سمت پایین حرکت می‌کند. در نتیجه می‌توان برای بیان نسبت تخلخل در تنش موثر میانگین p' نوشت:

$$e_T = e_A - \Delta e_T \quad (10-31)$$

در عبارت فوق e_T نسبت تخلخل در دمای T ، e_A نسبت تخلخل در دمای محیط و Δe_T کاهش نسبت تخلخل در اثر حرکت خط NCL به سمت خط حالت بحرانی CSL با افزایش دما می‌باشد. برای در نظر گرفتن کاهش شیب خط NCL در دماهای بالاتر فرض می‌شود که Δe_T به تنش وابسته است. رابطه (۱۰-۳۲) کاهش Δe_T را در اثر افزایش تنش موثر میانگین نشان می‌دهد.

$$\Delta e_T = (\omega \Delta e_{\max}) \left(\frac{p'_0}{p'} \right)^n \quad (10-32)$$

p'_0 تنش موثر میانگین در ابتدای آزمایش و n پارامتر بی بعدی است که از کالیبراسیون مدل به دست می‌آید. مطابق شکل (۱۰-۲۱)، $\Delta e_{\max}$ اختلاف نسبت تخلخل بین خطوط NCL و CSL در ابتدای آزمایش در دمای محیط است. ضریب اول در رابطه بالا ($\omega \Delta e_{\max}$) نشان دهنده فرض پنجم مدل است که قبلاً توضیح داده شد و در آن ω ضریبی بین صفر و یک است. عبارت $\left(\frac{p'_0}{p'} \right)^n$ برای نشان دادن وابستگی میزان کاهش در نسبت تخلخل به تنش موثر میانگین با افزایش حرارت در نظر گرفته شده است. پارامتر n مقدار مثبتی است که اگر کاهش در نسبت تخلخل مستقل از تنش موثر میانگین باشد، صفر در نظر گرفته می‌شود.

1 Ambient temperature

موقعیت NCL در دماهای بالاتر تابعی از اختلاف بین CSL و NCL در دمای محیط در نظر گرفته می‌شود. بنابراین در رابطه (۳۲-۱۰)، ω در دمای محیط صفر و در حداکثر دمای قابل تحمل توسط خاک، یک لحاظ خواهد شد. به همین منظور، رابطه زیر برای تعیین ω پیشنهاد شده است:

$$\omega = 1 - \exp \left[\chi \left(1 - \frac{T}{T_A} \right) \right] \quad (33-10)$$

که در آن T و T_A به ترتیب دمای محیط و دمای افزایش یافته می‌باشند. از رابطه (۳۳-۱۰) می‌توان نتیجه گرفت که ω در محدوده صفر تا یک تغییر خواهد کرد. همچنین χ پارامتر مدل است که از پروسه کالیبراسیون به دست خواهد آمد. با فرض اینکه کرنش‌های الاستیک حجمی از درجه حرارت مستقل می‌باشند و فقط از تغییرات در تنش موثر میانگین به دست می‌آیند، و با دانستن اینکه کرنش‌های پلاستیک حجمی نیز از تغییر در فشار پیش تحکیمی که پارامتر سخت شونده است نتیجه می‌شوند، می‌توان نتیجه گرفت که کرنش‌هایی که از کاهش در نسبت تخلخل به دلیل افزایش حرارت حاصل می‌شوند، کرنش‌های حجمی پلاستیک می‌باشند و بنابراین p' در رابطه (۱۰-۳۲) باید با فشار پیش تحکیمی p'_c جایگزین شود:

$$\Delta e_T = (\omega \Delta e_{\max}) \left(\frac{p'_0}{p'_c} \right)^n \quad (34-10)$$

از تئوری حالت بحرانی، نسبت تخلخل اولیه در صفحه تراکمی به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$e_A = N - \lambda \ln(p'_c) + \kappa \ln \left(\frac{p'_c}{p'} \right) \quad (35-10)$$

N طبق تعریف فصول گذشته، حجم مخصوص در تنش موثر میانگین واحد و در دمای محیط می‌باشد، λ شیب خط تحکیم ایزوتروپ و κ شیب خط باربرداری-بارگذاری مجدد می‌باشد. با ترکیب روابط (۳۱-۱۰)، (۳۲-۱۰) و (۳۴-۱۰) در رابطه (۳۵-۱۰)، رابطه زیر برای تعیین نسبت تخلخل در دمای افزایش یافته به دست می‌آید:

$$e_T = N - \kappa_T \ln p' - (\lambda - \kappa_T) \ln p'_c - \omega \Delta e_{\max} \left(\frac{p'_0}{p'_c} \right)^n \quad (36-10)$$

که در آن κ_T شیب خط باربرداری-بارگذاری مجدد در دمای افزایش یافته می‌باشد. در مدل حمیدی و خزاعی (۲۰۱۰)، شیب خط باربرداری-بارگذاری مجدد بر اساس رابطه گراهام و همکاران (۲۰۰۱)، به صورت زیر وابسته به دما در نظر گرفته شده است.

$$\frac{\kappa_T}{\kappa_A} = 1 + C \ln \left(\frac{T}{T_A} \right) \quad (37-10)$$

که در آن K_A شیب خط باربرداری-بارگذاری مجدد در دمای محیط (T_A) می‌باشد. همچنین C پارامتر مدل برای در نظر گیری تغییرات در شیب خط باربرداری-بارگذاری مجدد با حرارت است که باید از نتایج آزمایشگاهی به دست آید.

۱۰-۴-۳-۲- تعیین کرنش های حجمی

رابطه نسبت تخلخل با کرنش های حجمی ایجاد شده به صورت زیر قابل بیان است:

$$de = -d\varepsilon_v (1+e) \quad (۳۸-۱۰)$$

که در آن de و $d\varepsilon_v$ نمو نسبت تخلخل و کرنش حجمی می‌باشند. با توجه به صرفنظر نمودن از کرنشهای حجمی حرارتی دانه های خاک در این مدل، تغییرشکل های الاستیک تنها با تغییر در تنش موثر میانگین ایجاد می‌شوند. بنابراین، با مشتق گیری از رابطه (۳۶-۱۰) نسبت به p' و با جایگذاری مقادیر از رابطه (۳۸-۱۰)، رابطه زیر را برای تعیین کرنش الاستیک حجمی نتیجه می‌دهد.

$$d\varepsilon_v^e = \frac{\kappa_T}{\nu_0} \frac{dp'}{p'} \quad (۳۹-۱۰)$$

که در آن ν_0 حجم مخصوص اولیه ($\nu_0 = 1+e_0$) در دمای افزایش یافته T می‌باشد. مدول بالک K بر اساس رابطه زیر، وابسته به تنش موثر میانگین تعیین می‌گردد:

$$K = K_0 \left(\frac{p'}{p'_0} \right)^a \quad (۴۰-۱۰)$$

که در آن p' و p'_0 به ترتیب تنش موثر میانگین کنونی و اولیه و a نیز پارامتر مدل است. بر اساس رابطه (۳۹-۱۰)، مدول بالک اولیه (K_0) در تنش موثر میانگین اولیه (p'_0) به صورت زیر قابل تعیین است:

$$K_0 = \frac{\nu_0 p'_0}{\kappa_T} \quad (۴۱-۱۰)$$

$$d\varepsilon_v^e = \frac{1}{K} dp' \quad (۴۲-۱۰)$$

همانطور که قبلاً توضیح داده شد، کرنش حجمی پلاستیک نتیجه تغییر در فشار پیش تحکیمی p'_c می‌باشد. با مشتق گیری از رابطه (۳۶-۱۰) نسبت به p'_c و با جایگذاری Δe_T و de از روابط (۳۴-۱۰) و (۳۸-۱۰)، رابطه زیر برای کرنش های حجمی پلاستیک نتیجه می‌شود.

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda_A - \kappa_T}{1+e} \frac{dp'_c}{p'_c} - \frac{n\Delta e_T}{1+e} \frac{dp'_c}{p'_c} \quad (۴۳-۱۰)$$

بر اساس نظر زینکوویچ و همکاران^۱ (۱۹۹۹)، تغییر در حالت تنش یک المان خاک به صورت مجموع دو حالت جداگانه زیر در نظر گرفته می‌شود:

الف) تغییر در تراز تنش، که در این حالت معادل تغییر در تنش موثر p' می‌باشد، درحالی‌که نسبت تنش ثابت است.

ب) تغییر در نسبت تنش به صورتی که تراز تنش (p') ثابت بماند.

پاسخ خاک در برابر این دو نوع بارگذاری متفاوت است. بر اساس نظر لیو و کارتر^۲ (۲۰۰۸)، ویژگیهای تغییر شکل خاک با تغییر در نسبت تنش به اثرات مکانیزم برشی مربوط می‌شود. به دلیل تفاوت در مشخصه های رفتاری خاک تحت این دو حالت تنش، قوانین رفتاری که از آزمایشات با نسبت تنش ثابت بدست آیند، برای شرایطی که نسبت تنش متغیر است مناسب نخواهند بود. بر این اساس، اصلاحات پیشنهادی لیو و کارتر^۳ (۲۰۰۲)، برای در نظرگیری اثر مکانیزم برشی بر کرنش های پلاستیک با ضریب $\frac{\eta}{M - \eta}$ در مدل حاضر اضافه گردید:

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda_A - \kappa_T}{1+e} \frac{dp'_c}{p'_c} - n\Delta e_T \left(1 + \frac{\eta}{M - \eta} \right) \frac{dp'_c}{(1+e)p'_c} \quad (44-10)$$

در این مدل، η نسبت تنش و M شیب خط حالت بحرانی در صفحه $q - p'$ می‌باشد. در نهایت، کرنش حجمی کل از جمع مولفه های کرنش حجمی الاستیک و پلاستیک به دست می‌آید. محققان بسیاری با انجام آزمایش بر انواع رس اشباع به این نتیجه رسیدند که فشار پیش تحکیمی به دما وابسته است (موریتز^۳ ۱۹۹۵، بودالی و همکاران^۴ ۱۹۹۴، تیدفور و سالفور^۵ ۱۹۸۹ و سلطان و همکاران^۶ ۲۰۰۲). همانطور که در شکل (۱۰-۲۲) مشاهده می‌شود با افزایش دما، فشار پیش تحکیمی کاهش می‌یابد.

1 Zienkiewicz et al.

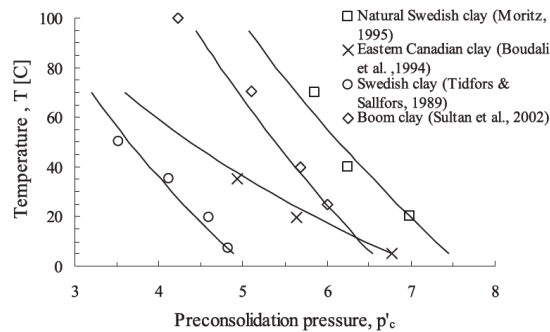
2 Liu and Carter

3 Moritz

4 Boudali et al.

5 Tidfors and Sällfors

6 Sultan et al.



شکل ۱۰-۲۲: تغییرات فشار پیش تحکیمی با درجه حرارت از نتایج آزمایشگاهی (حمیدی و همکاران ۲۰۱۵)

خطوط پیوسته در شکل بالا با درون یابی نتایج آزمایشگاهی به صورت زیر قابل تعیین می‌باشند:

$$p'_{cT} = p'_c \exp(-\rho \Delta T) \quad (10-45)$$

که p'_{cT} فشار پیش تحکیمی در دمای T ، ΔT تغییر در درجه حرارت و ρ پارامتر مدل است و با استفاده از رابطه زیر با تقریب خوبی به دست می‌آید:

$$\rho = \frac{3\rho^p v_0}{\lambda - \kappa_T} = 3\rho^p H_0 \quad (10-46)$$

در این رابطه $H_0 = \frac{v_0}{(\lambda - \kappa_T)}$ و ρ^p تابع ضریب انبساط حرارتی می‌باشد. رابطه دیگری توسط

چکراواک و لالویی (۲۰۰۴) پیشنهاد شده که نتایج مشابهی برای p'_{cT} ارائه می‌نماید. با استفاده از روابط (۱۰-۴۵) و (۱۰-۴۶) داریم:

$$p'_{cT} = p'_c \exp(-3\rho^p H_0 \Delta T) \quad (10-47)$$

با مشتق گیری از رابطه (۱۰-۳۶) نسبت به p'_{cT} و با جایگذاری روابط (۱۰-۳۴) و (۱۰-۳۸)، نمو کرنش حجمی پلاستیک به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d\varepsilon_v^p = \frac{1}{H_L} \frac{dp'_{cT}}{p'_{cT}} \quad (10-48)$$

در این رابطه، H_L به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H_L = \frac{v}{\lambda - \kappa_T - (n\Delta e_T) \left(\frac{M_T}{M_T - \eta} \right)} \quad (10-49)$$

که در آن v حجم مخصوص، M_T شیب خط CSL در درجه حرارت افزایش یافته و η نسبت تنش می باشد.

۱۰-۴-۳- تعیین کرنش های برشی

پاستور و همکاران (۱۹۹۰) و مدرسی^۱ و لالویی (۱۹۹۷) مدول برشی را وابسته به سطح تنش کنونی فرض نمودند. گراهام و همکاران (۲۰۰۰) وابستگی مدول برشی به نسبت بیش تحکیمی را بر اساس مطالعات راس و هولزیای^۲ (۱۹۸۵) پیشنهاد داده و رابطه خطی آن با دما را بررسی نمودند. در مدل حاضر نیز مدول برشی طبق رابطه زیر وابسته به تراز تنش و درجه حرارت فرض می گردد:

$$G = G_A \left(\frac{p'}{p'_0} \right)^b \left[1 + D \ln \left(\frac{T}{T_A} \right) \right] \quad (50-10)$$

که در آن G_A مدول برشی در دمای محیط و در تنش متوسط میانگین اولیه p'_0 می باشد. بعلاوه، D و b نیز دو پارامتر مدل هستند که بر اساس کالیبراسیون با داده های آزمایشگاهی به دست می آیند. بنابراین داریم:

$$d\varepsilon_s^e = \frac{1}{3G} dq \quad (51-10)$$

از طرف دیگر، کرنش های برشی پلاستیک نیز بر اساس معیار زیر به دست آید:

$$d\varepsilon_s^p = \frac{d\varepsilon_v^p}{\psi} \quad (52-10)$$

که در آن ψ نسبت کرنش حجمی پلاستیک به کرنش برشی پلاستیک یا همان قانون جریان در مدل رفتاری است.

۱۰-۴-۳- قانون جریان

گراهام و همکاران (۲۰۰۱) مستقل بودن قانون جریان از دما را پیشنهاد نمودند. آنها نشان دادند که جهت بردار نمو کرنش پلاستیک با افزایش دما در رس ایلیت بازسازی شده ثابت باقی می ماند. اما نتایج آزمایشگاهی ابو النجا (۲۰۰۵) برای رس نرم بانکوک نشان می دهد که افزایش دما موجب افزایش در نسبت کرنش های پلاستیک می شود. بر خلاف این، قهرمان نژاد^۳ (۲۰۰۳) نیز ثابت کرد که نسبت کرنشهای پلاستیک، با افزایش دما کاهش می یابد. حمیدی و خزاعی^۴ (۲۰۱۰)، قانون جریانی را پیشنهاد دادند که قادر به مدلسازی تمام سه حالت ممکن برای تغییرات در نسبت کرنشهای پلاستیک

1 Modaressi

2 Wroth and Houlsby

3 Ghahremannejad

4 Khazaei

با ازدیاد درجه حرارت باشد. ایشان رابطه زیر را برای ψ پیشنهاد کردند تا اثرات حرارت در تغییرات کرنش پلاستیک لحاظ شود:

$$\psi = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\theta_T \eta} \quad (۵۳-۱۰)$$

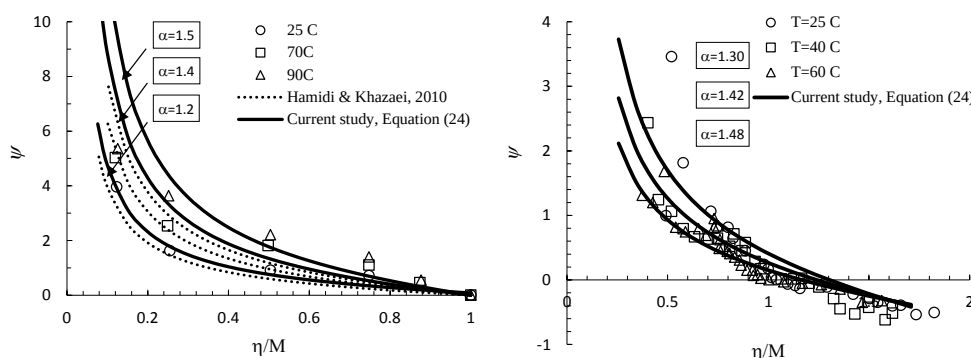
که در آن θ_T پارامتر مدل است. پیش از این ذکر شد که افزایش در درجه حرارت باعث کاهش در نسبت تخلخل می‌شود. در مدل حمیدی و خزاعی (۲۰۰۹)، پارامتری که به طور صریح وابستگی نسبت تخلخل به دما را نشان می‌دهد، ω است. به عبارت دیگر، افزایش دما معادل با افزایش ω خواهد بود. بنابراین برای بیان پارامتر قانون جریان θ_T به صورت تابعی از دما، آن را به عنوان تابعی از ω در نظر گرفته اند. بر این اساس، همبستگی بین θ_T و ω به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد:

الف- مستقل بودن ψ از دما (گراهام و همکاران ۲۰۰۱)، که نظیر $\theta_T = 1$ می‌باشد.

ب- افزایش در ψ در اثر ازدیاد دما (ابو النجا ۲۰۰۵)، که نظیر $\theta_T = 1 - \omega$ است.

پ- کاهش در ψ به علت افزایش دما (قهرمان نژاد ۲۰۰۳)، که نظیر $\theta_T = 1 + \omega$ خواهد بود.

برای بررسی آنکه کدام حالت باید در مدلسازی رفتار خاک مورد استفاده قرار گیرد، مطابق شکل (۲۳-۱۰)، تغییرات $\psi : \eta / M$ در دماهای مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد (حمیدی و همکاران ۲۰۱۵).



شکل ۲۳-۱۰: تغییرات فشار پیش تحکیمی با درجه حرارت از نتایج آزمایشگاهی (حمیدی و همکاران ۲۰۱۵)

اگر نسبت کرنش پلاستیک مستقل از حرارت باشد، مدل کم کلی اصلاح شده با فرض $\theta_T = 1$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. افزایش در نسبت کرنشهای پلاستیک با افزایش درجه حرارت در نسبت تنش ثابت مطابق شکل چپ، با کاهش $\theta_T = 1$ بر اساس معادله $\theta_T = 1 - \omega$ رخ می‌دهد. همچنین کاهش در نسبت کرنشهای پلاستیک با افزایش درجه حرارت در نسبت تنش ثابت مطابق شکل راست، با $\theta_T = 1 + \omega$ مدلسازی می‌شود.

۱۰-۴-۳-۵- سطح تسلیم

تاناکا (۱۹۹۵)، چکراواک (۲۰۰۳) و ابو النجا (۲۰۰۵) اثرات حرارت بر سطوح تسلیم خاکها را مورد بررسی قرار دادند. با فرض ایده حفظ انرژی در زمان تسلیم و با انتگرال گیری از قانون جریان، روسکو و همکاران (۱۹۶۸) رابطه زیر را برای تعیین سطح تسلیم ارائه نمودند:

$$\int_{p'_c}^{p'} \frac{dp'}{p'} + \int_0^\eta \frac{d\eta}{\eta + \psi} = 0 \quad (۵۴-۱۰)$$

در مدل حمیدی و خزاعی (۲۰۰۹)، با جایگذاری قانون جریان مدل مطابق رابطه (۵۳-۱۰)، رابطه زیر برای سطح تسلیم مدل به دست می آید:

$$q = \frac{p'M}{\sqrt{2\theta_T - 1}} \left[\left(\frac{p'_c}{p'} \right)^{\frac{2\theta_T - 1}{\theta_T}} - 1 \right]^{0.5} \quad (۵۵-۱۰)$$

با توجه به قانون جریان همراه در این مدل، از رابطه فوق می توان برای تعیین کرنشهای پلاستیک در تمامی درجه حرارتها استفاده نمود. در شرایط $\theta_T = 1$ ، سطح تسلیم مشابه مدل کم کلی اصلاح شده خواهد بود. با استفاده از رابطه (۵۵-۱۰)، تنش موثر میانگین در نقطه تقاطع خط حالت بحرانی با سطح تسلیم، p'_{cs} ، محاسبه خواهد شد:

$$p'_{cs} = p'_c (2\theta_T)^{\frac{\theta_T}{1-2\theta_T}} \quad (۵۶-۱۰)$$

استفاده از روابط (۳۹-۱۰) و (۴۳-۱۰) برای ارضا شدن شرایط صفر شدن کرنش حجمی پلاستیک در حالت زهکشی نشده، یعنی $d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p = 0$ ، منجر به رابطه زیر می شود:

$$\frac{p'_{c1}}{p'_{c2}} = \left(\frac{p'_1}{p'_2} \right)^{\frac{\kappa_T}{n\Delta e_T - (\lambda_A - \kappa_T)}} \quad (۵۷-۱۰)$$

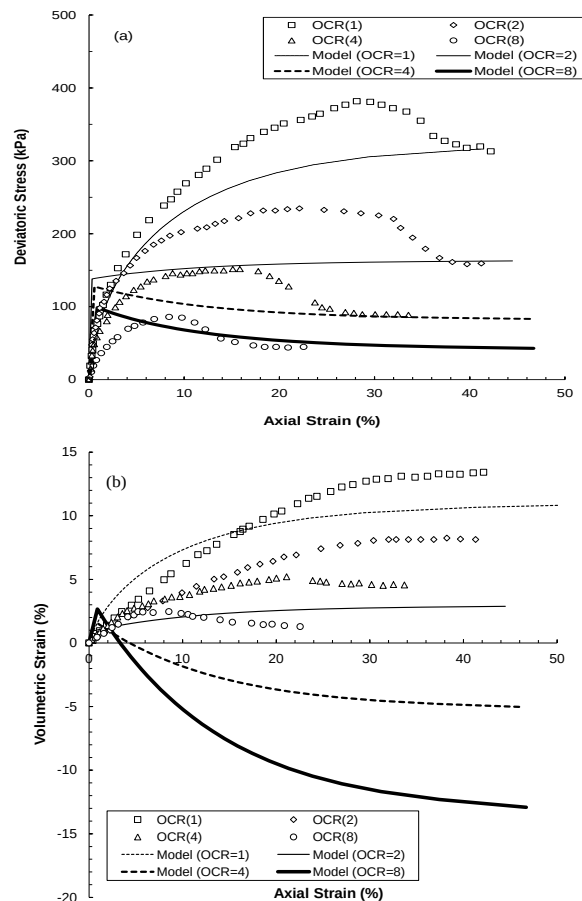
اندیس ۱ و ۲ به هر دو گام مختلف محاسبات مربوط می شود. پارامتر Λ مشابه مدل کم کلی، بر اساس معادله (۵۸-۱۰) تعریف می شود:

$$\Lambda = \frac{\kappa_T}{n\Delta e_T - (\lambda_A - \kappa_T)} \quad (۵۸-۱۰)$$

و بنابراین:

$$\frac{p'_{c1}}{p'_{c2}} = \left(\frac{p'_1}{p'_2} \right)^\Lambda \quad (۵۹-۱۰)$$

شکل (۱۰-۲۴) پیش‌بینی مدل حمیدی و خزاعی (۲۰۰۹) را در خصوص تبیین رفتار سه محوری زهکشی شده رس بانکوک ارائه می‌نماید. داده‌های آزمایشگاهی در این شکل بر اساس مطالعات ابو النجا (۲۰۰۵) انتخاب شده است.



شکل (۱۰-۲۴): پیش‌بینی مدل از رفتار تنش انحرافی- کرنش محوری و تغییر حجم- کرنش محوری نمونه‌های عادی تحکیم یافته و پیش تحکیم یافته رس بانکوک در دمای ۷۰ درجه سانتیگراد و فشار پیش تحکیمی $p'_c = 300 \text{ kPa}$ (حمیدی و خزاعی ۲۰۰۹)

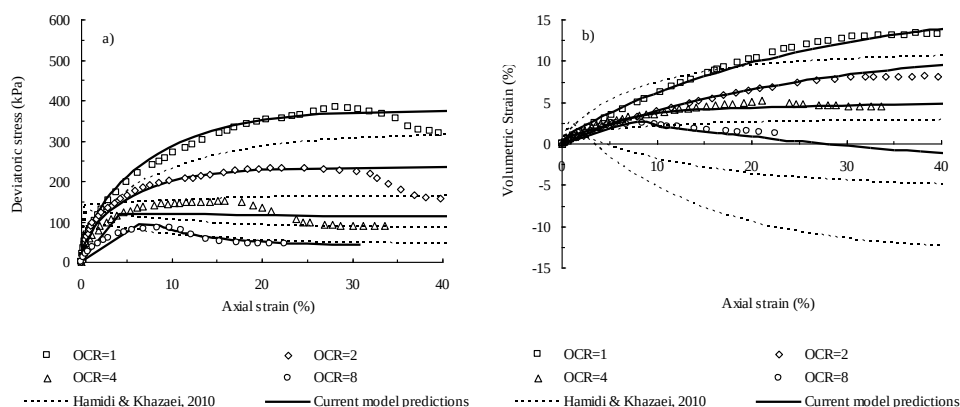
نکته مهم در خصوص سطح تسلیم مدل پیشنهادی حمیدی و خزاعی (۲۰۰۹) آن بود که با افزایش دما، سطوح تسلیم با یکدیگر تلاقی می‌نمودند. برای رفع این اشکال، حمیدی و همکاران (۲۰۱۵)، قانون جریان متفاوتی از معادله (۱۰-۵۳) را به شکل زیر در نظر گرفته‌اند:

$$\psi = \frac{\alpha [M^2 (\beta - 1) - \eta^2]}{2\theta_T \eta} \quad (۱۰-۶۰)$$

در این رابطه، α و β پارامترهای ساختاری نامیده می‌شوند. با جایگذاری این رابطه در (۱۰-۵۴) می‌توان نوشت:

$$q = M_T p' \left\{ \frac{\alpha^2 (\beta - 1)}{2\theta - 1} \left[\left(\frac{p'_{cT}}{p'} \right)^{\frac{1}{\Omega}} - 1 \right] \right\}^{0.5} \quad (۱۰-۶۱)$$

شکل (۱۰-۲۵) مقایسه پیش‌بینی‌های حمیدی و همکاران (۲۰۱۵) با مدل حمیدی و خزاعی (۲۰۰۹) در خصوص تبیین رفتار سه محوری زهکشی شده رس بانکوک بصورت منحنی‌های تنش انحرافی-کرنش محوری و کرنش حجمی-کرنش محوری در دمای ۷۰ درجه سانتیگراد و نسبت‌های مختلف پیش تحکیمی را ارائه می‌نماید. بر اساس این شکل، بهبود کیفی و کمی مدل در پیش‌بینی رفتاری خاک بدیهی می‌رسد. کلیه داده‌های آزمایشگاهی از نتایج مطالعات ابو النجا (۲۰۰۵) اقتباس شده است.



شکل ۱۰-۲۵: مقایسه پیش‌بینی‌های مدل حمیدی و همکاران (۲۰۱۵) با نتایج مدل حمیدی و خزاعی (۲۰۰۹) از رفتار تنش انحرافی-کرنش محوری و تغییر حجم-کرنش محوری نمونه‌های عادی تحکیم یافته و پیش تحکیم یافته رس بانکوک در دمای ۷۰ درجه سانتیگراد و فشار پیش تحکیمی $p'_c = 300 \text{ kPa}$ (حمیدی و خزاعی ۲۰۱۵)

۱۰-۴-۴- رفتار ترمومکانیکی خاکهای غیر اشباع

خاک غیر اشباع از سه فاز ذرات جامد، فاز مایع و فاز گاز (هوا) تشکیل شده است. به علت وجود هوا در بین خلل و فرج خاک، حین بارگذاری فشار آب حفره‌ای منفی یا مکش^۱ رخ خواهد داد و در نتیجه‌ی این موضوع تغییراتی در روابط تنش موثر خاک ایجاد می‌گردد. در ضمن همانطور که در بخش قبل گفته شد، روابط ارائه شده برای مدلسازی رفتار ترمومکانیکی خاک رس اشباع، براساس تنش موثر میانگین می‌باشند. در نتیجه می‌توان با محاسبه تنش موثر در حالت غیر اشباع و جایگذاری آن در روابط قبلی، مدل رفتاری ترمومکانیکی را برای خاک رس غیر اشباع اصلاح نمود. این روش مدلسازی، توسط تورچی و حمیدی (۲۰۱۵) انجام گرفت. براساس رابطه بیشاپ^۲ (۱۹۵۴) تنش موثر در خاک غیر اشباع از قرار زیر است:

$$p'_B = p - u_a + X(u_a - u_w) = \bar{p} + Xs \quad (۶۲-۱۰)$$

در رابطه فوق p'_B تنش میانگین موثر بیشاپ، p تنش میانگین کل، u_a فشار هوای حفره‌ای، u_w فشار آب حفره‌ای، X تابعی از درجه اشباع خاک، $\bar{p}$ تنش میانگین موثر خاک خشک و s مکش ایجاد شده در خاک می‌باشد. X بر اساس رابطه خلیلی و خباز^۳ (۱۹۹۸) به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$X = \begin{cases} \left[\frac{s_e(T)/s}{s_e} \right]^\Omega & (s \geq s_e) \\ 1 & (s \leq s_e) \end{cases} \quad (۶۳-۱۰)$$

که در آن S_e فشار حبابی^۴ یا نقطه ورود هوا^۵ در درجه حرارت T و $\Omega = 0.5$ می‌باشد.

۱۰-۴-۴-۱- مبانی مدل رفتاری ترمومکانیکی حالت غیر اشباع

با وارد نمودن تعریف ساده تنش بیشاپ در مدل ترمومکانیکی خاک اشباع که توسط حمیدی و همکاران (۲۰۱۵) پیشنهاد شده است، تغییرات حجم ایجاد شده توسط مکش در نظر گرفته شد. ولی پیش بینی‌های به دست آمده معمولاً با نتایج آزمایشگاهی تطابق مناسبی نداشتند. به ویژه، وابستگی تراکم پذیری خاک به مکش به طور مناسبی ایجاد نمی‌شد. همچنین، تنش تسلیم همه جانبه با افزایش مکش کاهش پیدا می‌کرد که این موضوع مغایر با نتایج آزمایشگاهی فردلاندر^۶ و همکاران (۱۹۷۸) می‌باشد. تورچی و حمیدی (۲۰۱۵) نشان دادند که تغییر برخی دیگر از ویژگیهای مدل اولیه موجب بهبود مناسب پیشبینی‌ها و جبران نقاط ضعف شده و سبب می‌شود رفتار آزمایشگاهی به نحو مناسبی بازسازی گردد.

1 Suction

2 Bishop

3 Khalili and Khabbaz

4 Bubbling pressure

5 Air entry value

6 Fredlund

۱۰-۴-۲- اصلاح سخت شونده‌گی برای مکش

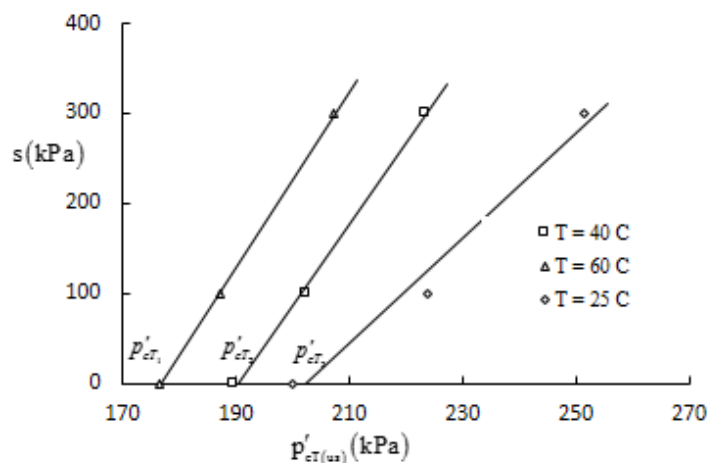
فردلاند و مورگنسترن^۱ (۱۹۷۷) با معرفی مکش به عنوان پارامتر مستقل تنش در خاکهای غیر اشباع، نمو کرنش حجمی پلاستیک را به صورت زیر تعریف کردند:

$$d\varepsilon_v^p = \frac{1}{H_L} \frac{d(\bar{p}_{ct} + Xs)}{\bar{p}_{ct} + Xs} \quad (۱۰-۶۴)$$

که در آن $\bar{p}_{ct}$ فشار پیش تحکیمی در درجه حرارت T و H_L مدول سخت شونده‌گی می‌باشد. با این حال، وابستگی تراکم پذیری خاک به مکش بطور مناسبی در این رابطه لحاظ نشده و کرنش های حجمی پلاستیک که از رابطه فوق حاصل می‌شوند، نتایج آزمایشگاهی را دست بالا برآورد می‌کنند. بدین ترتیب مدول سخت شونده‌گی در این رابطه تغییر داده شد تا اثرات مکش به نحو مناسب تری در ویژگیهای تراکم پذیری خاک لحاظ گردد.

$$\tilde{H}_s = H_L (1 + \Lambda s) = H_L H_{ws} \quad (۱۰-۶۵)$$

در این رابطه $\tilde{H}_s$ سخت شونده‌گی در مکش s و Λ پارامتر مدل می‌باشد. شکل (۱۰-۲۶) تغییرات مدول سخت شونده‌گی $\tilde{H}_s$ با مکش و درجه حرارت را ارائه می‌نماید.



شکل ۱۰-۲۶: تغییرات مدول سخت شونده‌گی با مکش و درجه حرارت در مدل تورچی و حمیدی ۲۰۱۵ (داده های آزمایشگاهی از یوچایپیچات و خلیلی^۲ ۲۰۰۹ اقتباس شده است)

1 Morgenstern

2 Uchaipichat and Khalili

۱۰-۴-۳- اصلاح تابع تسلیم برای مکش

با تعریف فشار پیش تحکیمی خاک غیر اشباع، امکان تعریف سطح تسلیم در دماهای بالاتر امکان پذیر خواهد بود.

$$p'_{cT(us)} = p'_{cT} + \varpi s \quad (۶۶-۱۰)$$

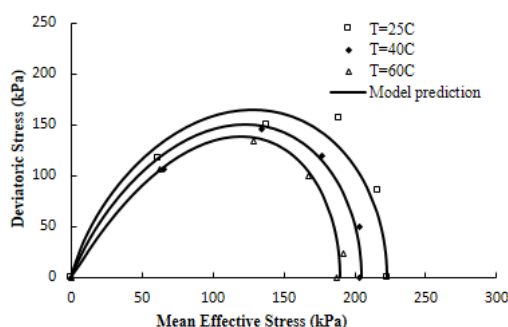
در این رابطه، $p'_{cT(us)}$ فشار پیش تحکیمی خاک غیر اشباع در دمای T و ϖ پارامتر مدل است که با کالیبراسیون محاسبه می گردد. بدین ترتیب رابطه زیر برای سطح تسلیم بدست می آید.

$$f = \left(\frac{q}{M_T (\bar{p} + Xs)} \right)^2 - \frac{\alpha^2 (\beta - 1)}{2\theta_T - 1} \left[\left(\frac{\bar{p}_{cT(us)} + Xs}{\bar{p} + Xs} \right)^{\frac{1}{\Omega}} - 1 \right] \quad (۶۷-۱۰)$$

در این رابطه، M_T شیب خط حال بحرانی در دمای T و Ω پارامتر مدل رفتاری است. همانطدر که مشاهده می شود، در مدل تورچی و حمیدی (۲۰۱۵)، وابستگی شیب خط حالت بحرانی به درجه حرارت محیط نیز در نظر گرفته شده است. ایشان رابطه زیر را برای تعیین شیب خط حالت بحرانی خاک غیر اشباع در دمای T پیشنهاد دادند:

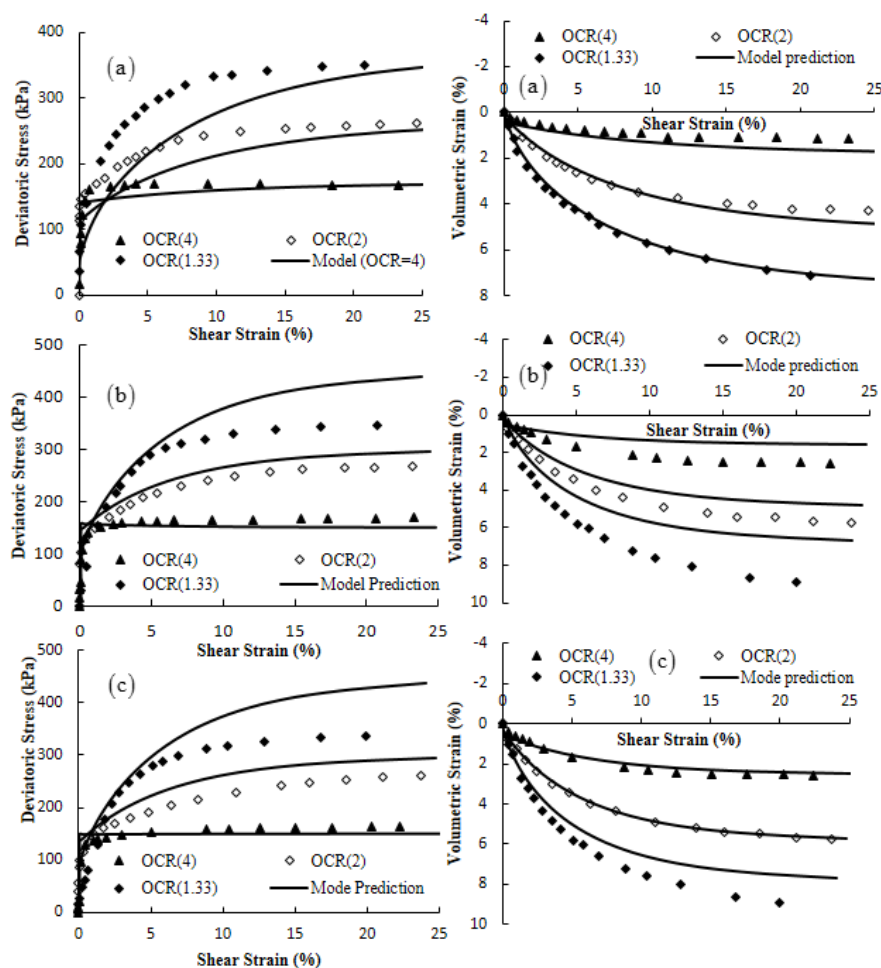
$$M_{Ts} = M_A + (-1)^{(x+1)} \zeta \ln \left(\frac{T}{T_A} \right) + (-1)^{y+1} \ln \left(\frac{Xs}{s_e + 1} \right) \quad (۶۸-۱۰)$$

در این رابطه، M_{Ts} شیب خط بحرانی خاک غیر اشباع در دمای T ، M_A این شیب در دمای محیط، x ثابتی است که در صورت کاهش شیب خط بحرانی با دما مقدار صفر و در صورت افزایش شیب خط بحرانی با دما مقدار یک را اختیار می کند، ζ ثابت مدل رفتاری و y ثابت دیگری با مقادیر صفر یا یک است. معمولاً با ازدیاد مکش در خاک غیر اشباع، شیب خط بحرانی افزایش می یابد. اما پس از یک مکش بحرانی (s_{cr})، شیب این خط با ازدیاد مکش، کاهش خواهد یافت. بنابراین در مقادیر مکش کمتر از s_{cr} مقدار یک، و برای مکش بزرگتر از s_{cr} مقدار صفر را اختیار خواهد کرد. شکل (۱۰-۲۷) تغییرات سطح تسلیم مدل پیشنهادی را با مکش و درجه حرارت ارائه می نماید.



شکل ۱۰-۲۷: تغییرات تابع تسلیم با مکش و درجه حرارت در مدل تورچی و حمیدی ۲۰۱۵

شکل (۱۰-۲۸) پیش بینی های مدل از رفتار مکانیکی رس غیر اشباع، تحت آزمایش سه محوری زهکشی شده در مکش ۱۰۰ کیلوپاسکال و درجه حرارت های متفاوت را نشان می دهد. کلیه منحنیهای آزمایشگاهی موجود از نتایج یوچایپیچات و خلیلی (۲۰۰۹) اقتباس گردیده است.



شکل (۱۰-۲۸): منحنیهای تنش انحرافی- کرنش محوری (در سمت چپ) و منحنیهای کرنش حجمی- کرنش محوری (در سمت راست) برای مکش ۱۰۰ کیلوپاسکال و مقادیر مختلف درجه حرارت بر اساس مدل رفتاری پیشنهادی حمیدی و تورچی (۲۰۱۵) (داده های آزمایشگاهی از یوچایپیچات و خلیلی^۱ ۲۰۰۹ اقتباس شده است)

a) ۲۵°C ، b) ۴۰°C ، c) ۶۰°C

تمرینات فصل دهم

- ۱- با استفاده از مفاهیم ارائه شده در این فصل، در خصوص امکان مدلسازی رفتار مکانیکی خاکهای دارای ساختار در دماهای بالا تحقیق نمایید.
- ۲- معادلات ارائه شده برای تبیین رفتار مکانیکی خاک غیر اشباع در دماهای بالا را با استفاده از تغییرات خط تحکیم ایزوتروپ ncl در فضای تراکم بدست آورید.
- ۳- بر اساس تمرینات اول و دوم، چارچوبی برای تبیین رفتار مکانیکی خاکهای رسی غیر اشباع دارای ساختار، در دماهای بالا ارائه کنید.
- ۴- بررسی نمایید که چه چارچوبی برای تبیین رفتار مکانیکی خاکهای ماسه‌ای مسلح با ترکیب سیمان و الیاف مناسب می‌باشد.

منابع و مراجع

- Abuel-Naga, H. (2005). "Thermo-mechanical behavior of soft Bangkok clay: Experimental results and constitutive modeling", *Ph.D. Thesis*, Asian Institute of Technology, Thailand.
- Airey, D.W., Budhu, M. and Wood, D.M. (1985). "Some aspects of the behaviour of soils in simple shear", In Banerjee, P.K. and Butterfield, R (eds.), *Developments in soil mechanics and geotechnical engineering: Stress-strain modelling of soils*, Elsevier, pp. 185-213.
- Alizadeh, M. and Hamidi, A. (2009). " Shear strength characteristics of sand-gravel mixtures in high gravel contents", *Engineering Geology Journal of Kharazmi University*, 3(2), pp. 735-756 (In Persian).
- Amini, Y. and Hamidi, A. (2014). "Triaxial shear behavior of a cement-treated sand-gravel mixture", *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 6, pp. 455-465.
- Amini, Y., Hamidi, A. and Asghari, E. "Shear strength-dilation characteristics of cemented sand-gravel mixtures", *International Journal of Geotechnical Engineering*, 8(4), pp. 406-413.
- Asghari, E., Toll, D.G. and Haeri, S.M. (2003). "Triaxial behavior of a cemented gravely sand, Tehran alluvium", *Geotechnical and Geological Engineering Journal*, 21(1), pp. 1-28.
- Atkinson, J.H. and Bransby, P.L. (1978). "The mechanics of soils, An introduction to critical state soil mechanics", McGraw-Hill, UK.
- Atkinson, J.H. and Little, J.A. (1988). "Undrained triaxial strength and stress-strain characteristics of a glacial till soil", *Canadian Geotechnical Journal*, 25, pp. 428-439.
- Bels, A.A. and Stanculescu, L.I. (1958). "Thermal treatment as a mean of improving the stability of earth masses", *Géotechnique*, 8(4), pp. 158-165.
- Bishop, A.W. (1954). "The use of pore pressure coefficients in practice", *Géotechnique*, 4(4), pp. 148-152.
- Bolton, M.D. (1986). "The strength and dilatancy of sands", *Géotechnique*, 36(1), pp. 65-78.
- Bolton, M.D. (1987). "The strength and dilatancy of sands", *Géotechnique*, 37(1), pp. 219-226.
- Boudali, M., Leroueil, S. and Srinivasa Murthy, B.R. (1994). "Viscous behaviour of natural clays", *Proc., 13th Int. Conf. On Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Oxford & IBH Publishing, New Delhi, India, pp. 411-416.
- Campanella, R.G. and Mitchell, J.K. (1968). "Influence of temperature variations on soil behavior", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, 94(3), pp. 709-734.

- Casagrande, A. (1936). "Characteristics of cohesionless soil affecting the stability of slopes and earth fills, *Journal of Boston Society of Civil Engineering*, pp. 13-32.
- Cekerevac, C. (2003). "Thermal effects on the mechanical behaviour of saturated clays : An experimental and constitutive study", Ph.D. thesis, Ecole polytechnique Fédéral de Lausanne, Lausanne, Switzerland.
- Cekerevac, C. and Laloui, L. (2004). "Experimental study of thermal effects on the mechanical behavior of a clay", *International Journal for Numerical Analytical Methods Geomechanics*, 28(3), pp. 209-228.
- Coloumb, C.A. (1973). "Essai sur une application des règles de maximis & minimi à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture", *Mémoires de Mathématique & de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans, & lus dans ses Assemblées*, 7, pp. 343-82.
- Coop, M.R. and Atkinson, J.H. (1993). "The mechanics of cemented carbonate sands", *Géotechnique*, 43(1), pp. 53-67.
- Das, B.M. (1990). "Principles of soil dynamics", Kent Publishing, USA.
- Delage, P., Sultan, N. and Cui, Y.J. (2000). "On the thermal consolidation of Boom clay", *Canadian Geotechnical Journal*, 37(2), pp. 343-354.
- Desai, C.S., Perumpral, J.V., Sture, S., Phan, H.V. (1979), "Geometric and material nonlinear three-dimensional analysis of structures moving on ground", Report to NSF, Department of Civil Engineering, Virginia Polytechnical Institute and State University, Blacksburg.
- Desai, C.S., Siriwardane, H.J., (1984). "Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials", Prentice-Hall Inc., USA.
- DiMaggio, F.L. and Sandler, I.S., (1971). "Material model for granular soils", *Journal Engineering Mechanical Division*, ASCE, 97(EM3), pp. 935-950.
- Drucker, D.C. (1949). "Relations of experiments to mathematical theories of plasticity", *Journal of Applied Mechanics*, 16, pp. 349-357.
- Drucker, D. C. (1951). "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations", *First U.S. National Congress of Applied Mechanics*, ASME, pp. 487-491.
- Drucker, D. C. and Prager, W. (1952). "Soil mechanics and plastic analysis for limit design", *Quarterly of Applied Mathematics*, 10 (2), pp. 157-165.
- Drucker, D. C. (1953). "Limit analysis of two and three Dimensional soil mechanics problems", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1, pp. 217-226.
- Drucker, D. C. (1954). "A definition of stable inelastic material", *Journal of Applied Mechanics*, ASCE, 26, pp. 101-106.
- Drucker, D. C. (1966). "Concepts of path independence and material stability for soils", In Kravtchenko, J. and Sirieys, P.M. (eds.), *Proceedings of First UTAM*

Symposium on Rheology and Soil Mechanics, Grenoble, Springer-Verlag, pp. 23-46.

Evans, M.D. and Zhou, S. (1995). "Liquefaction behavior of sand-gravel composites", *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, 121(3), pp. 287-298.

Fragaszy, R.J., Su, W. and Siddiqi, F.H. (1990). "Effect of oversized particles on the density of clean granular soils", *Geotechnical Testing Journal*, 13(2), pp. 106-114.

Fragaszy, R.J., Su, W., Siddiqi, F.H. and Ho, C.L. (1992). "Modeling strength of sandy gravel", *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, 118(6), pp. 920-935.

Fredlund, D.G. and Morgenstern, N.R. (1977). "Stress state variables for unsaturated soils", *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, 103(GT5), pp. 447-466.

Fredlund, D.G., Morgenstern, N.R. and Widger, R.A. (1978). "The shear strength of unsaturated soils", *Canadian Geotechnical Journal*, 15(3), pp. 313-321.

Fredlund, D.G. and Rahardjo, H. (1993). "Soil Mechanics for unsaturated soils", *John Wiley & Sons*.

Frossard, E. (1983). "Une équation d'écoulement simple pour les matériaux granulaires", *Géotechnique*, 33(1), pp. 21-29.

Ghahremannejad, B. (2003). "Thermo-mechanical behaviour of two reconstituted clays", *Doctorial Thesis*, University of Sydney.

Ghanbari, A., Sadeghpour, A.H., Mohammadzadeh, H. and Mohammadzadeh, M. (2008). "An experimental study on the behavior of rockfill materials using large scale tests", *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 13(G), pp. 8-23.

Ghanbari, E. Hamidi, A. and Abdolazadeh, N. (2013). "A study of the rockfill material behavior in large-scale tests", *Civil Engineering Infrastructures Journal*, 46(2), pp. 125-143.

Graham, J., Noonan, M.L. and Lew, K.V. (1983), "Yield states and stress-strain relationships in a natural plastic clay", *Canadian Geotechnical Journal*, 20(3), pp. 502-516.

Graham, J., Tanaka, N., Crilly, T. and Alfaro, M. (2001). "Modified Cam-clay modeling of temperature effects in clays", *Canadian Geotechnical Journal*, 38, pp. 608-621.

Haeri, S.M. and Hamidi, A. (2005). "Steady state and liquefaction characteristics of gravely sands", *Geotechnical and Geological Engineering Journal*, 23(2), pp. 141-156.

Haeri, S.M., Hosseini, S.M. and Toll, D.G. (2005a). "The behaviour of an artificially cemented sandy gravel", *Geotechnical and Geological Engineering Journal*, 23 (5), pp. 537-560.

- Haeri, S.M. and Hamidi, A., and Tabatabaee, N. (2005b). "The effect of gypsum cementation on the mechanical behavior of gravely sands", *Geotechnical Testing Journal*, 28 (4), pp. 180-190.
- Haeri, S.M., Hamidi, A., Hosseini, S.M., Asghari, E., Toll, D.G. (2006). "Effect of cement type on the mechanical behavior of a gravely sand", *Geotechnical and Geological Engineering Journal*, 24 (2), pp. 335-360.
- Hamidi, A. and Haeri, S.M. (2008). "Application of a Bond Model for Constitutive Modeling of Cemented Gravely Sands", *12th Conference of the International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Goa, India.
- Haeri, S.M. and Hamidi, A. (2009). "Constitutive modeling of cemented gravelly sands", *Geomechanics and Geoengineering: An international Journal*, 4 (2), pp. 123-139.
- Hamidi A. and Haeri, S.M. (2005). "Critical state concepts for a cemented gravely sand", *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 10(E), pp. 1-12.
- Hamidi, A. and Haeri, S.M. (2008). "Stiffness and deformation characteristics of a cemented gravely sand", *International Journal of Civil Engineering*, 6(3), pp. 159-173.
- Hamidi, A., Alizadeh, M. and Soleimani, S.M. (2009-a). "Effect of particle crushing on shear strength and dilation characteristics of sand-gravel mixtures", *International Journal of Civil Engineering*, 7 (1), pp. 62-72.
- Hamidi, A., Yazdanjou, V. and Salimi, S.N. (2009-b). "Shear strength characteristics of sand-gravel mixtures", *International Journal of Geotechnical Engineering*, 3(1), pp. 29-38.
- Hamidi, A. and Khazaei, C. (2010). "A thermo-mechanical constitutive model for saturated clays", *International Journal of Geotechnical Engineering*, 10(4), pp. 445-459.
- Hamidi, A., Azini, E. and Masoudi, B. (2012). "Impact of gradation on the shear strength-dilation behavior of well graded sand-gravel mixtures", *Scientia Iranica*, 19(3), pp. 393-402.
- Hamidi, A. and Soleimani, M. (2012). "Shear strength characteristics of sand-gravel mixtures", *International Journal of Geotechnical Engineering*, 6, pp. 415-425.
- Hamidi, A., Tourchi, S. and Khazaei, C. (2015). "Thermo-mechanical constitutive model for saturated clays based on critical state theory", *International Journal of Geomechanics*, ASCE, 15(1), pp. 1-9.
- Hardin, B.O. (1985). "Crushing of soils particles", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE 111, pp. 1177-1192.
- Hazen, A. (1911). "Discussion of dams on sand foundation", by A.C. Koenig, Transactions, American Society of Civil Engineers, 73, pp. 199.

- Hueckel, T. and Baldi, M. (1990). "Thermoplastic of saturated clays: An experimental constitutive study", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 116, pp. 1778-1796.
- Indraratna, B., Wijewardena, L.S.S. and Balasubramaniam, A.S. (1993). "Large-scale triaxial testing of greywacke rockfill", *Geotechnique*, 43(1), pp. 37-51.
- Islam, M.K., Carter, J.P. and Airey, A.W. (2004), "Comparison of the yield locus and stress-dilatancy function of some critical state constitutive models with experimental data for carbonate sand", *IE(I) Journal*, 84, pp. 267-274.
- Khalili, N. and Khabbaz, M.H. (1998). "A unique relationship for χ for the determination of the shear strength of unsaturated soils", *Géotechnique*, 48(2), pp. 1-7.
- Kokusho, T., Hara, T. and Hiraoka, R. (2004). "Undrained shear strength of granular soils with different particle gradations", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, 130(6), pp. 621-629.
- Lade, P.V. (1977). "Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces", *International Journal of Solids and Structures*, 13(11), pp. 1019-1035.
- Lee, K. and Farhoodmand, I. (1967). "Compressibility and breakage of granular soil in anisotropic triaxial compression", *Canadian Geotechnical Journal*, IV(1), pp. 68-86.
- Levy, M. (1871). "Extrait du memoire sur les equations generals des mouvements interieurs des corps solides ductiles au dela des limites ou l'élasticite pourrait les ramener a leur premier état", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 16, pp. 369-372.
- Liu, M.D. and Carter, J.P. (2002). "Structured Cam clay model", *Canadian Geotechnical Journal*, 39(6), pp. 1313-1332.
- Malandraki, V. and Toll, D.G. (2001). "Triaxial tests on a weakly bonded soil with changes in stress path", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, 127(3), pp. 282-291.
- Manzanal, D., Merodo, J.A.F. and Pastor, M. (2011). "Generalized plasticity state parameter-based model for saturated and unsaturated soils. Part 1: saturated state", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 35(18), pp. 1899-1917.
- Marsal, R.J. (1967). "Discussion of shear strength", *Proceeding of the 6th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 3, pp. 310-316.
- Mendelson, A. (1968). "Plasticity: Theory and application", Mc Millan Publishing Co., Cleveland, USA.

- Modaressi, H. and Laloui, L. (1997). "A thermo-viscoplastic constitutive model for clays", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 21(5), pp. 313-335.
- Moritz, L. (1995). "Geotechnical properties of clay at elevated temperatures", Report No. 47, Swedish Geotechnical Institute, Linköping, Sweden.
- Pastor, M., Zienkiewicz, O.C. and Leung, K.H. (1985). "Single model for transient soil loading in earthquake analysis, part II: non associative models for sands", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 9, pp. 447-498.
- Pastor, M., Zienkiewicz, O.C. and Chan, A.H.C. (1990). "Generalized plasticity and the modeling of soil behavior", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 14(3), pp. 151-190.
- Poorooshasb, H.B., Holubec, I. and Sherbourne, A.N. (1967), "Yielding and flow of sand in triaxial compression: Part II and III", *Canadian Geotechnical Journal*, 4(4), pp. 376-397.
- Poulos, S.J. (1981). "The steady state of deformation", *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 107(GT5), pp. 553-562.
- Prager, W. (1945). "Strain hardening under combined stresses", *Journal of Applied Physics*, 16, pp. 837-840.
- Prager, W. (1949). "Recent developments in mathematical theory of plasticity", *Journal of Applied Physics*, 20, pp. 235-241.
- Prager, W. (1955). "The theory of plasticity: A survey of recent achievements", *Institution of Mechanical Engineers*, 169, pp. 41-57.
- Rankine, W. (1853). "On the general law of transformation of energy", *Philosophical Magazine*, 34, pp. 106-117.
- Ravanbakhsh, E. and Hamidi, A. (2013). "constitutive model for cemented sands using critical state concepts", *International Journal of Geotechnical Engineering*, 7(4), pp. 364-373.
- Reuss, A. (1930). "Zeitschrift für angewandte mathematic und Mechanik", 10, pp. 266.
- Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Wroth, C.P. (1958). "On the yielding of soils", *Géotechnique*, 8(1), pp. 22-52.
- Roscoe, K.H. and Schofield, A.N. (1963). "Mechanical behavior of an idealized 'wet' clay", *Proceeding of European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Wiesbaden, Germany, pp. 47-54.
- Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Thurairajah, A. (1963). "Yielding of clays in states wetter than critical", *Géotechnique*, 13(3), pp. 211-240.
- Roscoe, K.H. and Burland, J.B. (1968). "On the generalized stress-strain behavior of 'wet' clay", In Heyman, J. and Leckie, F.A. (eds.), *Engineering plasticity*, Cambridge University Press, pp. 535-609.

- Rowe, P.W. (1962). "The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact", *Proceedings of Royal Society, London*, pp. 500-527.
- Saint Venant, B. (1870). "Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements interieurs opérés dans les corps solides ductiles au dela des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état", *Comptes Rendus hebdomadaires des Seances de l' Academie des Sciences*, 70, pp. 473-480.
- Saxena, S.K. and Lastrico, R.M. (1978). "Static properties of lightly cemented sand", *Journal of Geotechnical Engineering Division*, 104, pp. 1449-1465.
- Schofield, A.N. and Wroth, C.P. (1968). "*Critical state soil mechanics*", McGraw-Hill, London.
- Simoni, A. and houlby, G.T. (2006). "The direct shear strength and dilatancy of sand-gravel mixtures", *Geotechnical and Geological Engineering Journal*, 24(3), pp. 523-549.
- Stroud, M.A. (1971). "*The behaviour of sand at low stress levels in the simple shear apparatus*", Ph.D. Thesis, Cambridge University, UK.
- Sultan, N., Delage, P. and Cui, Y.J. (2002). "Temperature effects on the volume change behaviour of Boom clay", *Engineering Geology*, 64(2-3), pp. 135-145.
- Tanaka, N. (1995). "*Thermal elastic plastic behavior and modeling of saturated clays*", Ph.D. Thesis, Department of Civil and Geological Engineering, University of Manitoba, Winnipeg, Canada.
- Taylor, D.W. (1948). "*Fundamentals of soil mechanics*", John Wiley, New York.
- Tidfors, M. and Sällfors, S. (1989). "Temperature effect on preconsolidation pressure", *Geotechnical Testing Journal*, ASTM, 12(1), pp. 93-97.
- Toll, D.G., Malandraki, V., Ali Rahman, Z. and Gallipoli, D. (2006). "Bonded soils: problematic or predictable?", *2nd International Conference on Problematic Soils*, Malaysia.
- Tourchi, S. and Hamidi, A. (2015). "Thermo-mechanical constitutive modeling of unsaturated clays based on the critical state concepts", *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 7(2), pp. 193-198.
- Tresca, H. (1864). "Sur l'écoulement des corps solides soumis a de fortes pressions", *Comptes Rendus hebdomadaires des Seances de l' Academie des Sciences*, 59, pp. 754-758.
- Uchaipichat, A. and Khalili, N. (2009). "Experimental investigation of thermo-hydro-mechanical behavior of an unsaturated silt", *Géotechnique*, 59(4), pp. 339-353.
- Vallejo, L.E. (2001). "Interpretation of the limits in shear strength in binary granular mixtures", *Canadian Geotechnical Journal*, 38(5), pp. 1097-1104.

- Vermeer, P.A. (1984). "A five-constant model unifying well-established concepts", Constitutive relations for soils, In Gudehus, G., Darve, F. and Vardoulakis, I. (eds.), Rotterdam, Balkema, pp. 175-197.
- Von Mises, R. (1913). "Mechanik der plastischen Körper im plastisch deformablen Zustand", *Göttinger Nachrichten Math. Phys.*, Klasse 1, pp. 582-592.
- Wang, M.C., Benway, J.M. and Arayssi, A.M. (1990). "The effect of heating on engineering properties of clays", ASTM Special publication, Philadelphia.
- Wood, D.M., (1990). "Soil behavior and critical state soil mechanics", Cambridge University Press, UK.
- Wroth, C.P. and Houlsby, G.T. (1985). "Soil mechanics property characterization and analysis procedures", *Proceeding of 11th Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*, San Francisco, California, pp. 1-54.
- Yagiz, S. (2001). "Brief note on the influence of shape and percentage of gravel on the shear strength of sand and gravel mixture", *Buletin of Engineering Geology and Environment*, 60(4), pp. 321-323.
- Zienkiewicz, O.C., Chan, A., Pastor, M., Schrefler, B.A. and Shiomi, T. (1999). "Computational geomechanics with special reference to earthquake", John Wiley & Sons, Chichester, US.