حل تمرین :

مقاومت مصالح ۱

استاد ارجمند :

جناب آقای دکتر کرمی نژاد

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی

خدمتگزار دیرین

خدمتگزار نوین

فهرست حل تمرین

مقاومت مصالح یک

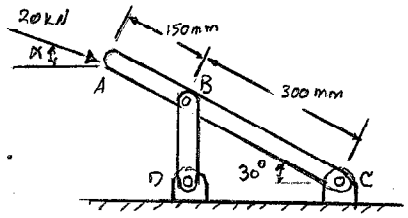
عنوان	صفحه
حل تمرین فصل اول	
مفهوم تنش	۱
حل تمرین فصل دوم	
تنش و کرنش – بارگذاری محوری	۸
حل تمرین فصل سوم	
پیچش	۲۲
حل تمرین فصل چهارم	
خمش خالص	۳۹
حل تمرین فصل پنجم	
بارگذاری عرضی	۵۱

حل تمرین فصل اول

مفهوم تنش

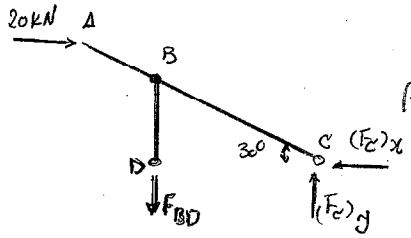
مقاومت مصالح

تمرین حل ۱



(۱۰۱۵) اندازه BD یک میله فولادی به قطر 40mm و به فاصله 12mm از سه پین در دو انتها متصل دارای 10mm قطر می باشد. مطلوب حداکثر مقدار متوسط تنش عمودی در اندازه BD (الف) $\alpha=0$ (ب) $\alpha=90^\circ$

حل الف) ترسیم آزادگاه را رسم می کنیم. و تعادل استاتیکی جسم را بکار می بریم



ترسیم آزادگاه

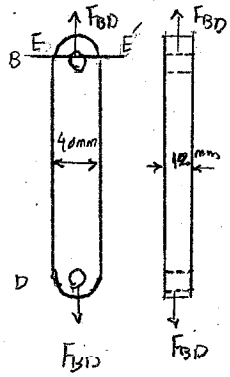
$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_c = 0$$

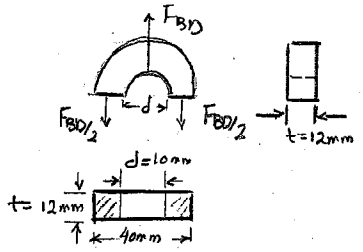
$$F_{BD}\cdot \bar{DC} - F_A \cdot \bar{AC}\sin 30^\circ = 0$$

$$F_{BD}\cdot (0.3\cos 30^\circ) - 20\,(0.45\sin 30^\circ) = 0$$

$$\rightarrow F_{BD} = 17.321\ kN \quad (\text{کششی})$$

با معلوم شدن نیرو در کل اعضاء، عضو BD را در نظر گرفته و کوچکترین مقطع را برای محاسبه حداکثر تنش انتخاب می کنیم





برای این منظور در مقطع DD در شکل نشان داده شده

حواهیم داشت:

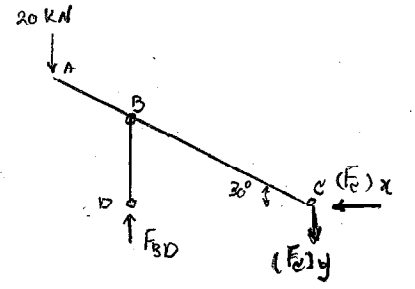
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{F_{BD/2}}{A}$$

$$A = \frac{1}{2}(40-d)\times t = \frac{1}{4}(40-10)\times 12$$

$$A = 180\ mm^2$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{17.321\times 10^3}{2\times 180} = 48.113\ MPa$$

ب) بطور مشابه داریم:

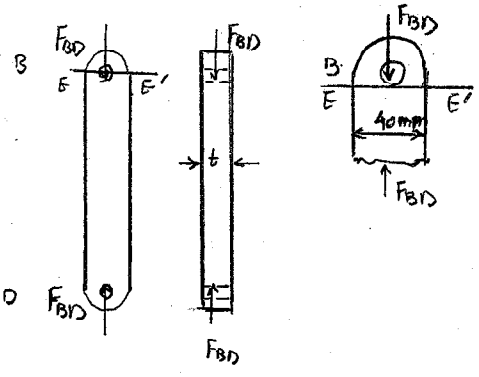


$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_c = 0 \;:\; 20\,(0.45\cos 30^\circ) - F_{BD}\,(0.3\cos 30^\circ) = 0$$

$$\rightarrow F_{BD} = 30\ kN \quad (\text{کششی})$$

مقاطع قبل از EE در شکل هیچ نیروی را تحمل نمی نماید در نتیجه

سطح مقطع مؤثر عبارت است از:



$$A = 40\times t = 40\times 12$$

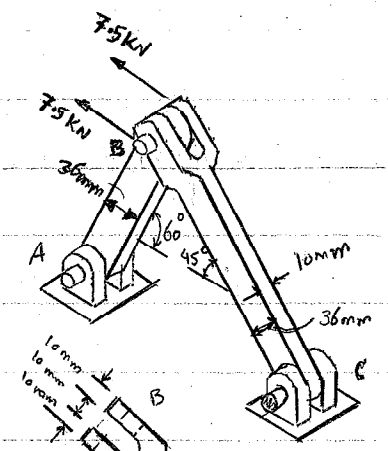
$$\sigma = \frac{30\times 10^3}{40\times 12} = 62.5\ MPa \quad (\text{تنش کششی})$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

(مقاومت مصالح)

(حل تمرین فصل ۱)

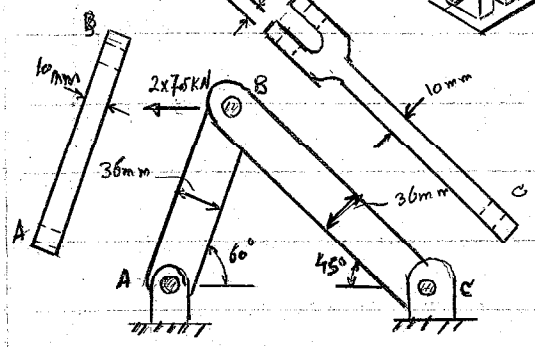
۱۰۱۲)

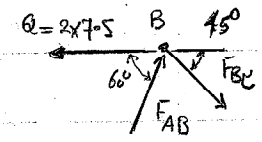


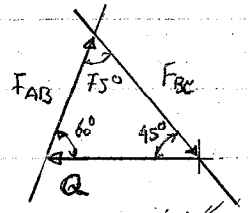
دو نیروی 7.5 KN بصورت افقی به راست و چپ محور اعمال می گردند و از این رو حل اتصالات از پین های به قطر 12mm استفاده شده است مطلوب است محاسبه حداکثر مقدار متوسط تنش عمودی در اعضای BC ب) در پین B

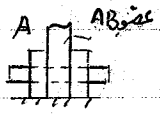
تحلیل دستی مجموعه :

عضوهای AB و BC دو نیروی وارده را تحمل نموده و با برقراری تعادل در نقطه B :





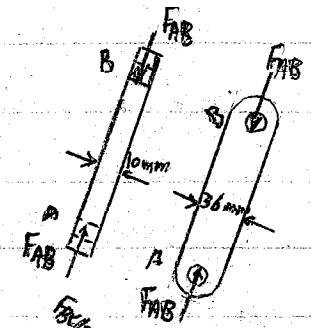




تحلیل دیاگرام نیرو :

$$\frac{Q}{\sin 75^\circ} = \frac{F_{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{F_{AB}}{\sin 45^\circ} \rightarrow F_{AB} = 10.981\ KN \quad F_{BC} = 13.449\ KN$$

ف) تحلیل تنش در عضو AB :



$$A = 36 \times 10 = 360\ mm^2$$

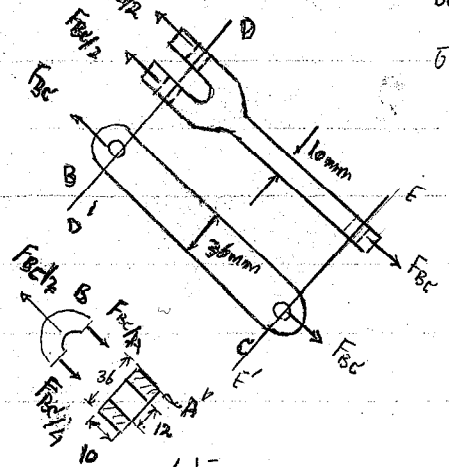
$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{-10.981 \times 10^{-3}}{360} = -30.5\ MPa$$

ب) تحلیل تنش در عضو BC :

در راستای B :

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}/4}{A'}, \quad A' = \frac{36-12}{2} \times 10 = 120\ mm^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{13.5 \times 10^3}{4 \times 120 \times 10^{-6}} = 28.125\ MPa$$



در راستای C :

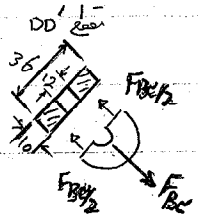
$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}/2}{A}, \quad A = \frac{1}{2}(36-12) \times 10 = 120\ mm^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{13.5 \times 10^3}{2 \times 120 \times 10^{-6}} = 56.25\ MPa$$

در پین در راستای :

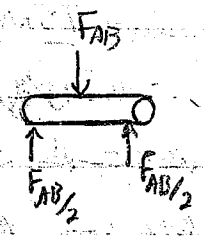
$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A}, \quad A = 10 \times 36 = 360\ mm^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{13.5 \times 10^3}{360 \times 10^{-6}} = 37.5\ MPa$$



صفحه ۱- ۳

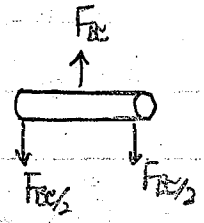
تنش برشی در پین اتصال A:



$$\tau_{ave} = \frac{F_{AB/2}}{A} \qquad A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (12)^2 = 113.097\ mm^2$$

$$\tau_{ave} = \frac{5.49 \times 10^3}{113.097} = 48.55\ MPa$$

در پین اتصال C:

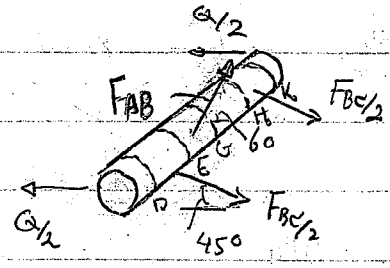


$$\tau_{ave} = \frac{F_{BC/2}}{A} \qquad A = \frac{\pi}{4} d^2 = 113.097\ mm^2$$

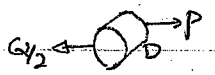
$$\tau_{ave} = \frac{6.725 \times 10^3}{113.097} = 59.46\ MPa$$

در پین اتصال B:

در مقطع D:

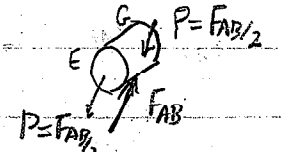


$$P = G/2 = 7.5\ kN$$



در مقطع E:

$$P = F_{AB/2} = 5.49 \times 10^3$$



با مقایسه بیشترین تنش برشی در پین D، $7.5\ kN$ می‌شود.

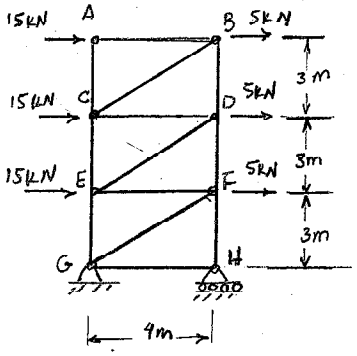
$$\tau_{ave} = \frac{7.5 \times 10^3}{113.097} = 66.315\ MPa$$

با مقایسه پین مشابه بیشترین تنش برشی مربوط به پین B می‌باشد.

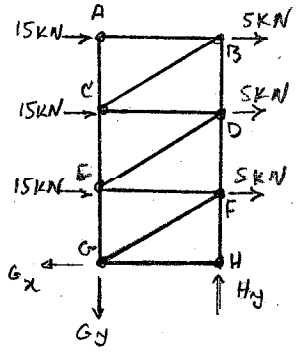
« مقاومت مصالح »

تمرین شماره ۱

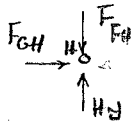
۱-۱۴) نیرو را بیابید که اعضای خرپای سه بعدی داده شده از میله‌های با مقطع دایره تشکیل شده‌اند. حداکثر تنش عمودی در اعضا 100 MPa می‌باشد. مطلوب است الف) عضو EG ب) عضو FG



پاسخ) ابتدا تحلیل نیروی را با رسم ترسیم آزاد کل سازه انجام می‌دهیم



مشاهده گره H



$\Sigma F_x = 0$:

$\rightarrow F_{GH} = 0$

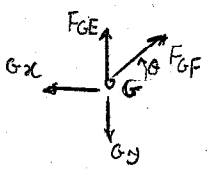
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{FH} = H_y$

با تحلیل به ترسیم آزاد کل مجموعه

$\curvearrowleft \Sigma M_H = 0$: $G_y(4) - 20(3) - 20(6) - 20(9) = 0$

$\rightarrow G_y = 90\ kN$

$\Sigma F_x = 0$: $G_x = 60\ kN$



گره G :

$\Sigma F_x = 0$: $F_{GF}\cos\theta - G_x = 0$

$\rightarrow F_{GF}(4/5) - 60 = 0 \rightarrow F_{GF} = 75\ kN$

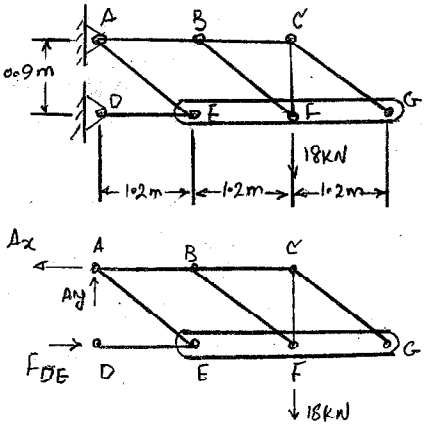
$\Sigma F_y = 0$: $F_{GF}\sin\theta + F_{GE} - G_y = 0$

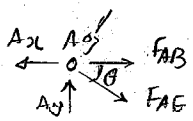
$75(3/5) + F_{GE} - 90 = 0 \longrightarrow F_{GE} = 45\ kN$

برای تعیین تنش عمودی از رابطه $\sigma = P/A$ استفاده می‌کنیم در حالیکه $A = \pi d^2/4$

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{F_{GE}}{\sigma} = \frac{45}{100} \rightarrow d_{EG} = 23.94\ mm \quad , \quad A = \frac{F_{GF}}{\sigma} = \frac{75}{100} \rightarrow d_{GF} = 30.9\ mm$$

۱-۱۶) میله صلب EFG بوسیله سازه نشان داده شده تحمل می‌شود مطلوب سطح مقطع عضو AE در صورتیکه تنش عمودی در عضو 105 MPa باشد.





حل) ابتدا به ترسیم آزاد کل مجموعه داریم:

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y = 18\ kN$

$\curvearrowleft \Sigma M_D = 0$: $A_x(0.9) - 18(2.4) = 0 \rightarrow A_x = 48\ kN$

گره A :

$F_{AE}\sin\theta = A_y \rightarrow F_{AE} = \frac{18}{\sin 36.87} \rightarrow F_{AE} = 30\ kN$

$\sigma_{AE} = \frac{F_{AE}}{A} \rightarrow A = \frac{30 \times 10^3}{105} = 285.71\ mm^2$

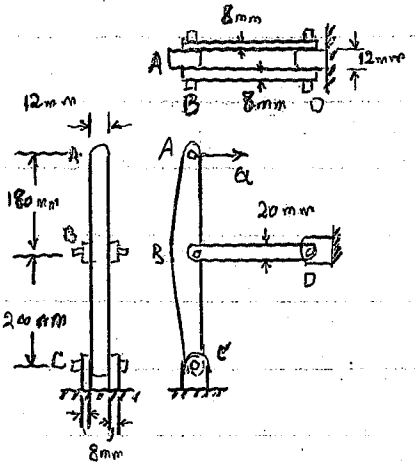
«مقاومت مصالح»

نام: Q

حل تمرین حمل ۱

P.1.41

در اتصال C پینی به قطر 10mm استفاده شده است. در حالی که در اتصالات B و D قطر پین 12mm می‌باشد. در آرایش اتصالات تنش برشی مجاز 100MPa و تنش عمودی مجاز در بازوی BD، 250MPa می‌باشد. مطلوب است محاسبه بار Q بطوریکه ضریب ایمنی 3 باشد.

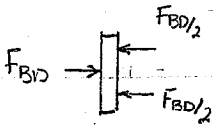


$\Sigma M_C = 0$: $Q(380) = F_{BD}(200) \rightarrow F_{BD} = 1.9Q$

$\Sigma F_x = 0$; $F_C + Q = F_{BD} \rightarrow F_C = 0.9Q$

⊛ در پین اتصال B :

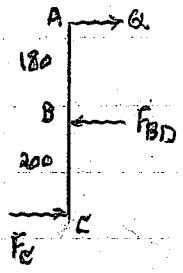
$F.S. = \frac{\tau_u}{\tau_{all}} \rightarrow \tau_{all} = \frac{100}{3} = 33.33\ MPa$



$\tau_{all} = \frac{F_{BD/2}}{A} = \frac{F_{BD}}{2A}$

$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4}(12)^2 = 113.097\ mm^2$

$\rightarrow F_{BD} = 7.54\ kN \rightarrow Q = 3.968\ kN$



⊛ در پین اتصال C :

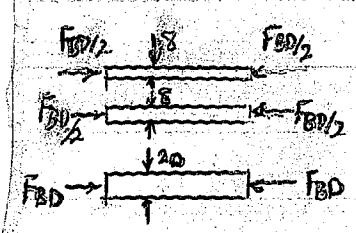
$F.S. = \frac{\tau_u}{\tau_{all}} \rightarrow \tau_{all} = \frac{100}{3} = 33.33\ MPa$

$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4}(10)^2 = 78.54\ mm^2$

$\tau_{all} = \frac{F_C/2}{A} = \frac{F_C}{2A} \rightarrow F_C = 5.235\ kN$

$F_C + Q = F_{BD} \rightarrow F_C + Q = \frac{380}{200} Q \rightarrow Q = 5.817\ kN$

⊛ در بازوی BD :



$\sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{F.S.} = \frac{250}{3} = 83.33\ MPa$

$\sigma_{all} = \frac{F_{BD/2}}{A} = \frac{F_{BD}}{2A}$ $\qquad A = 8 \times 20 = 160\ mm^2$

$F_{BD} = (83.33 \times 10^6)(2 \times 160 \times 10^{-6}) = 26.67\ kN$

$\rightarrow Q = 14.04\ kN$

در اینصورت برای تحمل کمترین تنش برشی مقدار $Q = 3.97\ kN$ صحیح است.

- تعیین Q برای تنش تسلیم $\sigma_y = 250\ MPa$

- در پین اتصال C : $\sigma_{ber} = \frac{\sigma_y}{F.S.} = \frac{100}{3} \rightarrow Q = 4.44\ kN$ ازوانی $\sigma_{ber} = \frac{F_C}{d_C \cdot t} = \frac{0.9Q}{(10)(12)}$

- در یکی از ورق‌های C :

$\sigma_{ber} = \frac{F_C}{d_C \cdot t} = \frac{0.45Q}{(10)(2\times8)} \Rightarrow Q = 5.93\ kN$

- در پین B و D :

$\sigma_{ber} = \frac{F_{BD}}{d_B \cdot t} = \frac{1.9Q}{(12)(12)} \rightarrow Q = 2.53\ kN$

$\sigma_b = \frac{F_{BD}}{2 \cdot t} = \frac{1.9Q}{(12 \times 2 \times 8)} \rightarrow Q = 3.37\ kN$

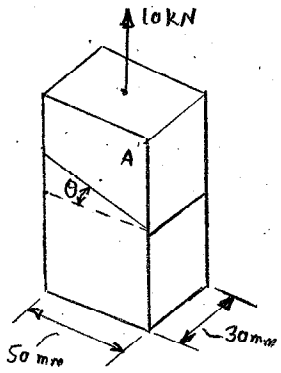
← محل B و D در عضو BD

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

صفحه: ۶۰

$$\sigma_{ber} = \frac{F_{BD}}{d_B \cdot t} = \frac{1.9Q}{(12)(12)} \rightarrow Q = 2.53\,KN$$

حل تمرین فصل ۱



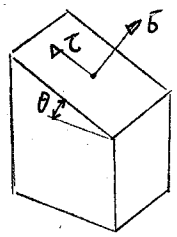
۱-۵۵,۵۶) دوست عضو AB روی صفحه‌ای مایل تحت زاویه θ به یکدیگر متصل شده‌اند. می‌دانیم که تنش‌های مجاز برای عضو اتصال عبارتند از $\tau_U = 9\,MPa$, $\sigma_U = 17\,MPa$

مطلوب محدوده زاویه θ برای آنکه ضرایب امنیت برای عضو عدد 3 باشد.

مسیر متقارن θ بعد از یکه ضریب امنیت کلی عضو صادق باشد.

$$\sigma = \sigma_0 \cos^2\theta \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\theta$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{A_0} = \frac{10\times10^3}{50\times30} = \frac{20}{3} = 6.67\,MPa$$



- تعیین حداقل θ برای تنش عمودی مجاز:

$$F.C. = \frac{\sigma_U}{\sigma_{all}} \rightarrow \sigma_{all} = \frac{\sigma_U}{F.C.} = \frac{17}{3}$$

$$\sigma = \sigma_{all} \rightarrow \frac{17}{3} = \frac{20}{3}\cos^2\theta_{min} \rightarrow \theta_{min} = 22.787^\circ$$

- تعیین حداکثر θ برای تنش برشی مجاز:

$$F.C. = \frac{\tau_U}{\tau_{all}} \rightarrow \tau_{all} = \frac{\tau_U}{F.C.} = \frac{9}{3} = 3\,MPa$$

$$\tau = \tau_{all} \rightarrow 3 = \frac{1}{2}\frac{20}{3}\sin 2\theta_{max} \rightarrow \theta_{max} = 32.079^\circ$$

برای محدوده مجاز θ خواهیم داشت:

$$22.787^\circ \le \theta \le 32.079^\circ$$

دقت کنید که هیچ صفحه‌ای تنش عمودی کمتر از مقدار σ_{all} و تنش برشی کمتر از مقدار τ_{all} نخواهد داشت.

برای زاویه حداکثر ضریب امنیت داریم:

$$F.C. = \frac{\sigma_U}{\sigma_{all}} \quad , \quad F.C. = \frac{\tau_U}{\tau_{all}}$$

با افزایش مقدار θ از θ_{min} مقدار $\sigma_{all} = \sigma$ کاهش، $\tau_{all} = \tau$ افزایش یافته و در این صورت صفحه‌ای که دوست دوم قرار گرفته صدمه خواهد دید؛ حداکثر مقدار F.C. را خواهیم داشت:

$$\frac{\sigma_U}{\sigma_{all}} = \frac{\tau_U}{\tau_{all}} \quad \text{یا} \quad \frac{\sigma_U}{\sigma_0\cos^2\theta} = \frac{\tau_U}{\frac{1}{2}\sigma_0\sin 2\theta}$$

$$\sigma_U \sin\theta = \tau_U \cos\theta \quad \text{یا} \quad \tan\theta = \frac{\tau_U}{\sigma_U} = \frac{9}{17} \rightarrow \theta = 27.897^\circ$$

$$\sigma_{all} = \sigma = \sigma_0\cos^2\theta = 5.209\,MPa \rightarrow F.S. = \frac{\sigma_U}{\sigma_{all}} = 3.26$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

حل تمرین فصل دوم

مفهوم تنش و کرنش

بارگذاری محوری

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

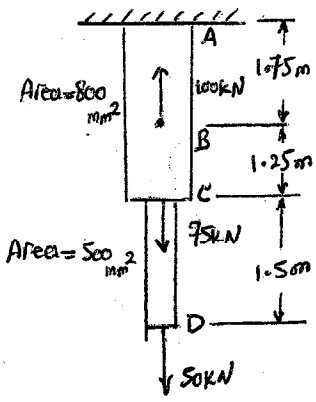
صفحه: ۹

مقاومت مصالح ۱

حل تمرین فصل ۲

۲-۱۰) میله ABCD از آلیاژ آلومینیوم با مدول $E=70GPa$ است. سربار نگهداری نزدیک داده شده و با صرف نظر کردن از وزن میله مطلوبست محاسبه

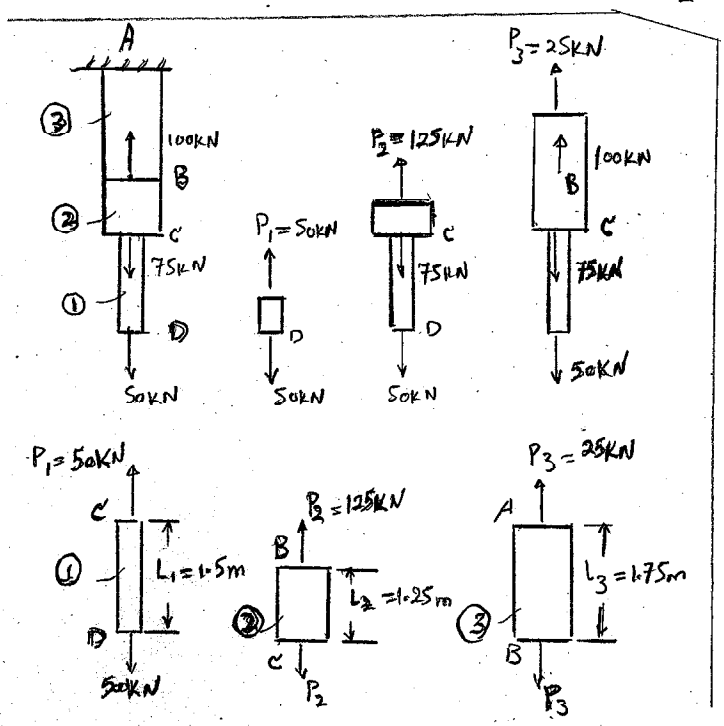
الف) تغییر طول B نسبت به A ب) تغییر طول D نسبت به A



$P_1 = 50\,kN$ $\quad P_2 = 125\,kN$ $\quad P_3 = 25\,kN$

$A_1 = 500\,mm^2$ $\quad A_2 = 800\,mm^2$ $\quad A_3 = 800\,mm^2$

$L_1 = 1.5\,m$ $\quad L_2 = 1.25\,m$ $\quad L_3 = 1.75\,m$



الف)

$$\delta_B = \delta_A + \delta_{B/A}$$

$$\delta_B = \delta_{B/A} = \frac{P_3 L_3}{E_3 A_3} = \frac{(25\times10^3)(1.75)}{(70\times10^9)(800\times10^{-6})}$$

$$\delta_B = 7.8125\times10^{-9}\,m^2 = 0.78125\,mm^2 \downarrow$$

ب)

$$\delta_D = \delta_A + \delta_{D/A} = \delta_{D/A} = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

$$\delta_{D/C} = \delta_1 = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{(50\times10^3)(1.5)}{(70\times10^9)(500\times10^{-6})}$$

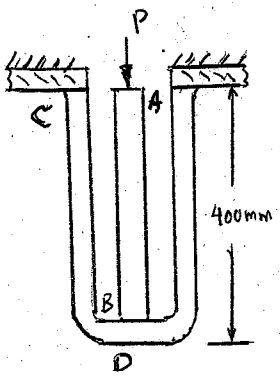
$$\delta_{D/C} = 2.149\times10^{-3}\,m = 2.149\,mm \downarrow$$

$$\delta_{C/B} = \delta_2 = \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} = \frac{(125\times10^3)(1.25)}{(70\times10^9)(800\times10^{-6})}$$

$$\delta_{C/B} = \delta_2 = 2.79\times10^{-3}\,m = 2.79\,mm \downarrow$$

$$\delta_D = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \sum_{i=1}^{3}\delta_i = 2.149 + 2.79 + 0.78125 = 5.714\,mm \downarrow$$

۲-۱۴) میله برنجی AB به انتهای فلزی CD به سطح مقطع $300\,mm^2$ متصل شده است. استاندارد تکیه‌گاه ثابت است. مدول کشسانی برنج $E=85GPa$ است. اگر قطر میله AB برابر $9mm$ باشد، مقدار نیروی P را چنان بیابید که نقطه A در اثر P، $1.2mm$ به طرف راست حرکت کند.



$$\delta_A = \delta_B + \delta_{A/B} \qquad \delta_B = \delta_D = \frac{P L_{CD}}{E_{CD} A_{CD}} = \frac{P(400\times10^{-3})}{(85\times10^9)(300\times10^{-6})} = 1.569\times10^{-8}P \downarrow$$

$$\delta_{A/B} = \frac{P L_{AB}}{A_{AB} E_{AB}} = \frac{P(400\times10^{-3})}{[\frac{\pi}{4}(9\times10^{-3})^2](85\times10^9)} = 7.397\times10^{-8}P \downarrow$$

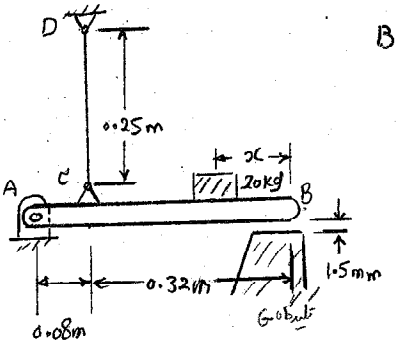
$$1.2\times10^{-3} = 1.569\times10^{-8}P + 7.397\times10^{-8}P \rightarrow P = 13.384\,kN$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

«مقاومت مصالح ۱»

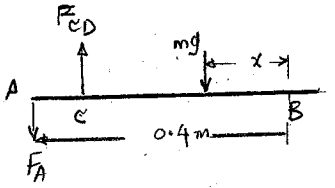
(حل تمرین فصل ۲)

۲-۱۷) سیم فولادی CD به قطر 2mm و به طول 0.25m به بازوی صلب AB مطابق شکل متصل گردیده در حالت عادی با نصب 1.5mm بین انتهای B و تکیه گاه G وجود دارد. اگر $E = 200\,GPa$ مطلوب است الف) محل قرارگیری وزنه ای 20kg به منظور آنکه انتهای B با تکیه گاه G تماس پیدا کند ب) مقدار وزنه ای که تماس بین B و G را از بین ببرد.



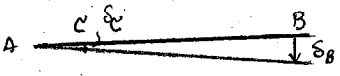
الف)

$$\Sigma M_A = 0 \;:\; F_{CD}(0.08) = mg(0.4 - x) \quad (I)$$



روابط طبق روابط تغییر شکل

$$\frac{\delta_B}{AB} = \frac{\delta_C}{AC} \;\Rightarrow\; \frac{1.5}{0.4} = \frac{\delta_C}{0.08} \;\longrightarrow\; \delta_C = 0.3\ mm$$

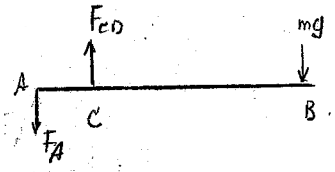


$$\delta_C = \frac{F_{CD} L_{CD}}{E_{CD} A_{CD}}$$

$$L_{CD} = 0.25\ m \qquad E_{CD} = 200\ GPa \qquad A_{CD} = \frac{\pi}{4}(2)^2 = 3.14\ mm^2$$

$$\longrightarrow F_{CD} = (0.3\times10^{-3})(200\times10^{9})(3.14\times10^{-6}) / 0.25 = 753.98\,N$$

$$(I) \longrightarrow x = 0.0927\ m$$



ب)

$$\Sigma M_A = 0 \;:\; F_{CD}(0.08) = mg(0.4) \quad (I)$$

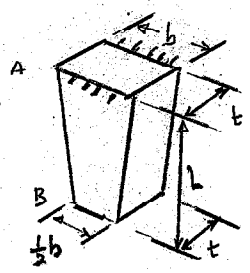
$\delta_C = 0.3\ mm$ روابط تغییر شکل

$$\delta_C = \frac{F_{CD} L_{CD}}{A_{CD} E_{CD}} \;\longrightarrow\; F_{CD} = 753.98\,N$$

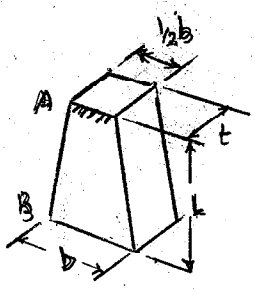
$$(I) \longrightarrow mg = 150.796 \;\longrightarrow\; m = 15.371\ kg$$

۲-۱۸) عضوی ذوزنقه ای شکل با ضخامت t از تکیه گاه انتهای A آویزان شده است با بهره گرفتن از وزن عضو مطلوب است محاسبه تنش در انتهای B در اثر بارگذاری P در مقطع B

پاسخ در پشت صفحه

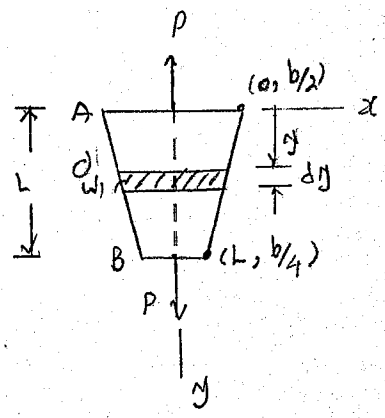


۲-۲۰) عضو همگن با ضخامت ثابت t از تکیه گاه A آویزان شده است. با در نظر گرفتن P به عنوان دانسیته (جرم بر واحد حجم) عضو، مطلوب است اندازه تنش حداکثر عضو ناشی از وزن خودش



صفحه ۱۱

پاسخ سوال (۲-۱۸)



برای المان دیفرانسیلی داریم:

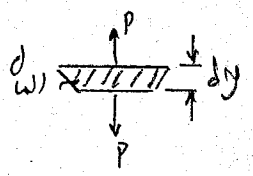
$$\delta = \int_0^L \frac{P}{EA}\, dy$$

برای تعیین سطح شکل ذوزنقه‌ای معادله خط را می‌نویسیم:

$$x - \frac{b}{2} = \frac{b/2 - b/4}{0 - L}(y - 0)$$

$$\rightarrow x = \frac{-b}{4L}y + \frac{b}{2}$$

سطح مقطع:



$$A = 2x(t) = \left(\frac{-b}{2L}y + b\right)t = \frac{bt}{2L}(-y + 2L)$$

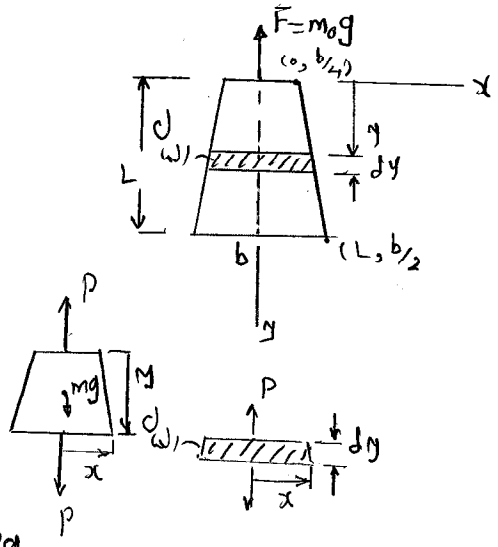
$$d\delta = \frac{P}{EA}dy = \frac{P}{\frac{bt}{2L}(-y+2L)E}dy$$

$$\rightarrow \delta = \int_0^L \frac{2PL}{btE}\frac{dy}{(-y+2L)} = \frac{-2PL}{btE}\ln(-y+2L)\Big|_0^L$$

$$\rightarrow \delta = \frac{-PL}{btE}(\ln L - \ln 2L) = \frac{-2PL}{btE}\ln\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\delta = 1.386\frac{PL}{btE}}$$

پاسخ سؤال (۲-۲۰)



برای تعیین پهنای شکل دو نقطه را داریم:

$$x-\frac{b}{4}=\frac{b/2-b/4}{L-0}(y-0)\rightarrow x=\frac{b}{4L}y+\frac{b}{4}$$

$$\rightarrow x=\frac{b}{4L}(y+L)$$

برای سطح مقطع:

$$A=2xt=\frac{bt}{2L}(y+L)$$

برای نیرو در سطح مقطع المان:

$$P=m_0g-mg=(V_0\rho-V\rho)g=(V_0-V)\rho g$$

حجم کل شکل است V_0 و حجم تکه با ارتفاع y و V چگالی جرمی ρ که

$$V_0=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}+b\right)Lt$$

$$V=\frac{1}{2}\left(2x+\frac{b}{2}\right)yt=\frac{1}{2}\left[\frac{b}{2L}(y+L)+\frac{b}{2}\right]yt$$

$$\rightarrow V=\frac{3bL}{4}t\left[\frac{1}{3L^2}y^2+\frac{2}{3L}y\right]$$

در اینصورت برای نیرو داخلی P داریم:

$$P=(\rho g)\left(\frac{3b}{4}tL\right)\left(1-\frac{1}{3L^2}y^2-\frac{2}{3L}y\right)$$

برای تغییر شکل جابجایی داریم:

$$d\delta=\frac{P}{EA}dy$$

برای جابجایی محوری یا جابجایی کل برای P و A داریم:

$$\delta=\int_0^L\frac{\rho g\left(\frac{3b}{4}tL\right)}{\left(\frac{bt}{2L}\right)E}\frac{\left(1-\frac{1}{3L^2}y^2-\frac{2}{3L}y\right)}{(y+L)}dy$$

$$=\frac{\rho g}{2E}\int_0^L\frac{(y+L)(3L-y)-4yL}{(y+L)}dy=\frac{\rho g}{2E}\left[\int_0^L(3L-y)dy-4L\int_0^L\frac{y}{y+L}dy\right]$$

$$=\frac{\rho g}{2E}\left[3Ly-\frac{y^2}{2}\Big|_0^L-4L\int_0^L\left(1-\frac{L}{y+L}\right)dy\right]$$

$$=\frac{\rho g}{2E}\left[3Ly-\frac{y^2}{2}\Big|_0^L-4L\left(y-L\ln(y+L)\Big|_0^L\right)\right]$$

$$=\frac{\rho g}{2E}\left[\frac{5L^2}{2}-4L(L-L\ln 2L+L\ln L\right]=\frac{\rho g}{2E}\left[\frac{5L^2}{2}-4L^2(1+\ln 1/2)\right]$$

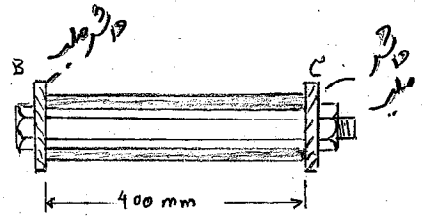
$$\rightarrow\boxed{\delta=0.636\frac{\rho gL^2}{E}}$$

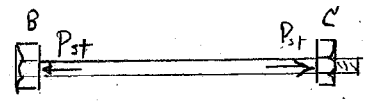
انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

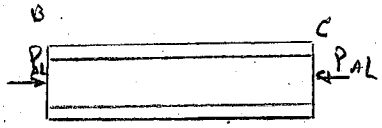
« مقاومت مصالح »

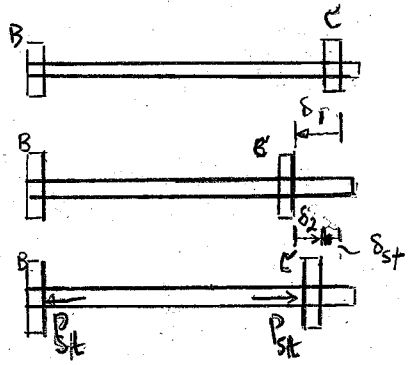
« حل تمرین مقاومت مصالح »

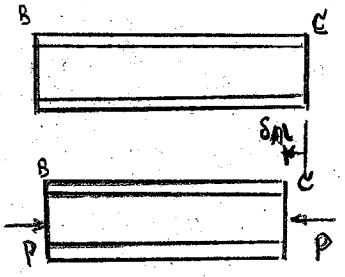
۲-۳۲) میله فولادی ($E_s = 200\ GPa$) به قطر $10\ mm$ داخل تیوپ آلومینیومی ($E_a = 70\ GPa$) به قطر خارجی $18\ mm$ و ضخامت دیواره $3\ mm$ قرار گرفته است. دو سیلندر یک سوراخ به آن لقمه شده است. اگر انتهای میله $2\ mm$ از تیوپ بیرون بزند، مطلوب است تنش عمودی الف) در میله ب) در تیوپ











$P_{AL} = P_{st} = P$

$\delta_{AL} = \delta_{st} = \delta_1 - \delta_2$

$\delta_1 = \frac{1}{4}(2) = \frac{1}{2}\ mm$

$\delta_2 = \frac{P_{st} L_{st}}{A_{st} E_{st}} = \frac{P(400)}{(200\times10^9)\left[\frac{\pi}{4}(10)^2\times10^{-6}\right]} = 2.546\times10^{-5} P$

$\delta_{st} = \frac{1}{2} - 2.546\times10^{-5} P$

$\delta_{AL} = \frac{P_{AL} L_{AL}}{E_{AL} A_{AL}} = \frac{P(400)}{(70\times10^9)\left\{\frac{\pi}{4}\left[(18)^2-(12)^2\right]\times10^{-6}\right\}} = 4.042\times10^{-5} P$

$\frac{1}{2} - 2.546\times10^{-5} P = 4.042\times10^{-5} P$

$\rightarrow P = 7589.52\ N = 7.589\ kN$

الف)

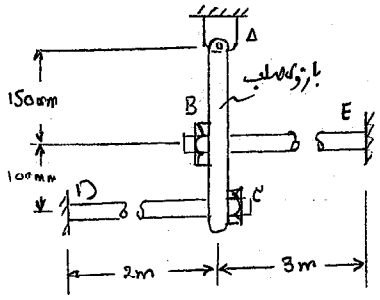
$\sigma_{st} = \frac{P_{st}}{A_{st}} = 96.69\ MPa$

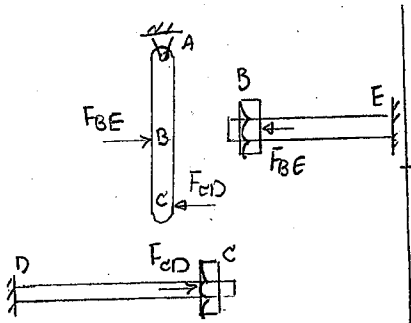
ب)

$\sigma_{AL} = \frac{P_{AL}}{A_{AL}} = 53.681\ MPa$

حل تمرین فصل ۲

۲-۳۴) میله‌های فولادی BE و CD هریک به قطر 16mm به ترتیب در A و C به یک بازوی صلب متصل شده‌اند. اگر $E_s = 200\,GPa$ و تنش مجاز در میله‌ها $100\,MPa$ باشد، حداکثر مقدار نیروی P را که می‌توان وارد کرد تا تغییر مکان قائم نقطه C از 2.5mm تجاوز نکند، محاسبه کنید.





تحلیل استاتیکی:

$$\Sigma M_A = 0: \quad F_{CD}(250) = F_{BE}(150)$$

$$F_{BE} = 1.67\,F_{CD} \quad (I)$$

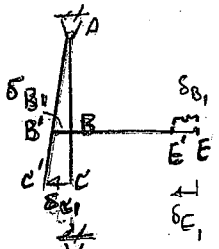
روش اول) اصل جمع اثرها: در مرحله اول تکیه‌گاه E را حذف می‌کنیم

$$\delta_{C_1} = 2.5\,mm$$

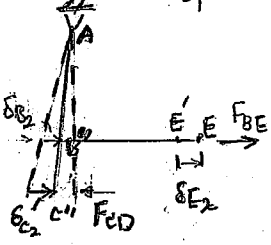
$$\frac{\delta_{B_1}}{\delta_C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{یا} \quad \frac{\delta_{B_1}}{2.5} = \frac{150}{250} \rightarrow \delta_{B_1} = \frac{3}{5}(2.5) = 1.5\,mm$$

$$\rightarrow \delta_{E_1} = \delta_{B_1} = 1.5\,mm$$

در مرحله دوم نیروی تکیه‌گاه E را اثر می‌دهیم:



$$\delta_{B/E} = \frac{F_{BE} L_{BE}}{E_{BE} A_{BE}} = \frac{F_{BE}(3000)}{(200\times10^9)\left[\frac{\pi}{4}(16\times10^{-3})^2\right]} = 7.46\times10^{-5} F_{BE}$$



$$\vec{\delta}_{B_2} = \vec{\delta}_{E_2} + \vec{\delta}_{B/E} \quad \text{یا} \quad \delta_{B_2} = \delta_{E_2} + \delta_{B/E}$$

جمع اثر دو مرحله:

$$\vec{\delta}_E = \vec{\delta}_{E_1} + \vec{\delta}_{E_2} \quad \text{یا} \quad \delta_{E_1} = \delta_{E_2} \rightarrow \delta_{E_2} = 1.5\,mm$$

$$\delta_{B_2} = 1.5 - 7.46\times10^{-5} F_{BE}$$

$$\frac{\delta_{C_2}}{\delta_{B_2}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \rightarrow \delta_{C_2} = \frac{2}{3}\delta_{B_2}$$

از طرفی:

همچنین:

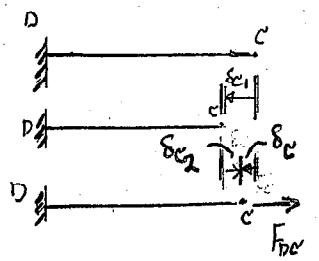
$$\delta_{C_2} = \frac{F_{DC} L_{DC}}{E_{DC} A_{DC}} = \frac{F_{DC}(2\times10^3)}{(200\times10^9)\left[\frac{\pi}{4}(16\times10^{-3})^2\right]} = 4.974\times10^{-5} F_{DC}$$

با جایگزینی:

$$4.974\times10^{-5} F_{DC} = \frac{2}{3}(1.5 - 7.46\times10^{-5} F_{BE})$$

$$\rightarrow F_{DC} = 9.729\,kN$$

روش دوم) اصل جمع اثرها:



$$\delta_{C_1} = 2.5\,mm$$

$$\delta_{C_2} = \frac{F_{DC} L_{DC}}{E_{DC} A_{DC}} = \frac{F_{DC}(2000)}{(200\times10^9)\left[\frac{\pi}{4}(16\times10^{-3})^2\right]} = 4.974\times10^{-5} F_{DC}$$

$$\vec{\delta}_C = \vec{\delta}_{C_1} + \vec{\delta}_{C_2} \quad \text{یا} \quad \delta_C = \delta_{C_1} - \delta_{C_2} = 2.5 - 4.974\times10^{-5} F_{DC} \quad (II)$$

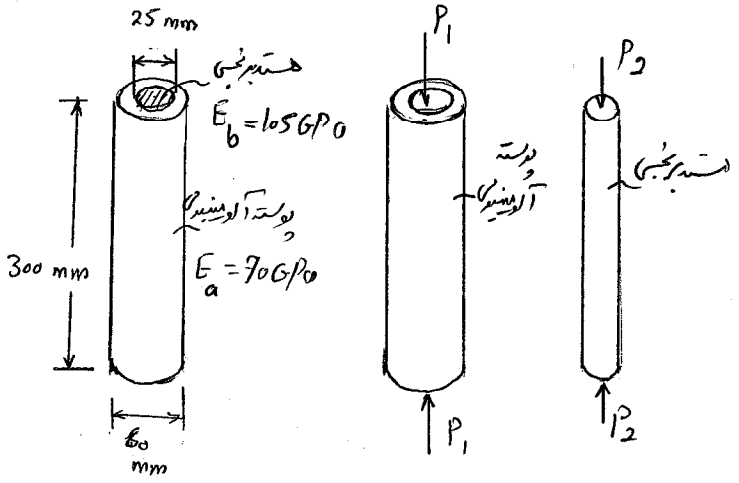
$$\frac{\delta_B}{\delta_C} = \frac{3}{5} \quad (III), \qquad \delta_B = \frac{F_{BE} L_{BE}}{E_{BE} A_{BE}} = 7.46\times10^{-5} F_{BE} \quad (IV)$$

از (III) و (IV) و (II) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$7.46\times10^{-5} F_{BE} = \frac{3}{5}(2.5 - 4.974\times10^{-5} F_{DC}) \rightarrow F_{CD} = 9.729\,kN \rightarrow \delta_C = 2.016\,mm$$

صفحه: ۱۵

مسئله (۲-۴۲) میله‌ای داده شده، دارای هسته برنجی و پوسته آلومینیومی می‌باشد. اگر نیروی $P=200\ KN$ بصورت فشاری به میله اعمال گردد، مطلوبست (الف) نیروی حمل شده توسط هسته و پوسته آلومینیومی
ب) تغییر طول هسته آلومینیومی



$$P = P_1 + P_2 \qquad (I)$$

$$\delta_1 = \delta_2 \qquad (II)$$

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{E_1 A_1}$$

$$\delta_2 = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}$$

$$(II):\ \frac{P_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2}{E_2 A_2}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(60^2 - 25^2) = 2336.56\ mm^2 \qquad A_2 = \frac{\pi}{4}25^2 = 490.87\ mm^2$$

$$\rightarrow \frac{P_1}{70(10^9)(2336.56\times10^{-6})} = \frac{P_2}{105(10^9)(490.87\times10^{-6})}$$

$$\rightarrow P_2 = 0.315 P_1$$

$$(I):\ 200 = P_1 + 0.315 P_1 \rightarrow P_1 = 152.077\ KN,\ P_2 = 47.904\ KN$$

الف)

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{152.077\times10^3}{2336.56} = 65.086\ MPa$$

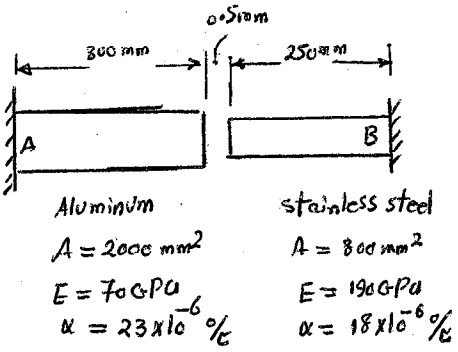
$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{(152.077\times10^3)(300\times10^{-3})}{(70\times10^9)(2336.56\times10^{-6})} = 2.789\times10^{-4}\ m$$

$$= 0.279\ mm$$

(فصل ۲)

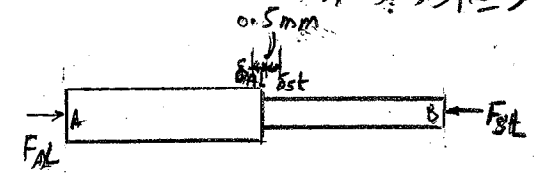
۲.۴۶) در دمای اتاق (کیف) 20°C یک نمونه 0.5mm بین انتهای دو میله مطابق شکل وجود دارد. در اثر بالا رفتن دمای مجموعه به 140°C افزایش ۱۲۰°C، مطلوبست: الف) متوسط تنش عمودی در آلومینیم

2.46



الف) ابتدا واکنش آلومینیم

ترسیم آزاد مجموعه:



$F_{AL} = F_{st}$ (I) رابطه استاتیکی:

رابطه تغییر شکلها: با توجه به اصل جمع اثرها

نتیجه تغییر در جهت وارد:

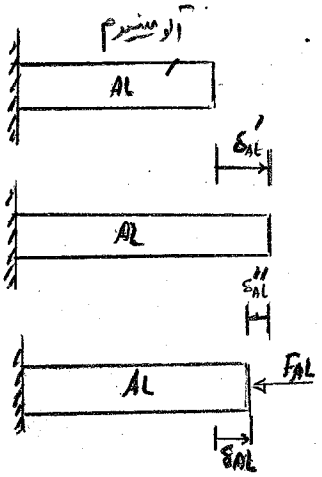
$\delta_{AL}' = (23\times10^{-6})(120)(300) = 0.828\ mm$

نتیجه تغییر ناشی از:

$\delta_{AL}'' = \frac{F_{AL} L_{AL}}{A_{AL} E_{AL}} = \frac{F_{AL}(0.3)}{(2000\times10^{-6})(70\times10^{9})} = 2.143\times10^{-9} F_{AL}$

با توجه به شکل

$\delta_{AL} = \delta_{AL}' - \delta_{AL}'' = 0.828\times10^{-3} - 2.143\times10^{-9} F_{AL}$



نتیجه تغییر در جهت وارد:

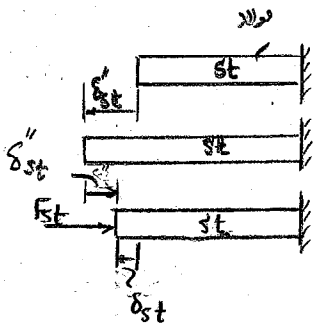
$\delta_{st}' = (18\times10^{-6})(120)(250) = 0.54\ mm$

نتیجه تأثیر نیروی مجهول F_{st}:

$\delta_{st}'' = \frac{F_{st} L_{st}}{A_{st} E_{st}} = \frac{F_{st}(0.25)}{(800\times10^{-6})(190\times10^{9})} = 1.645\times10^{-9} F_{st}$

با توجه به شکل

$\delta_{st} = \delta_{st}' - \delta_{st}'' = 0.54\times10^{-3} - 1.645\times10^{-9} F_{st}$



از روابط تازه به دست آمده شکل:

$\delta_{st} + \delta_{AL} = 0.5\times10^{-3}\ m$

$0.54\times10^{-3} - 1.645\times10^{-9} F_{st} + 0.828\times10^{-3} - 2.143\times10^{-9} F_{AL} = 0.5\times10^{-3}$ (II)

با توجه به رابطه I و II

$F_{st} = F_{AL} = 229.169\ kN$

ب) $\sigma_{AL} = \frac{F_{AL}}{A_{AL}} = 114.58\ MPa$

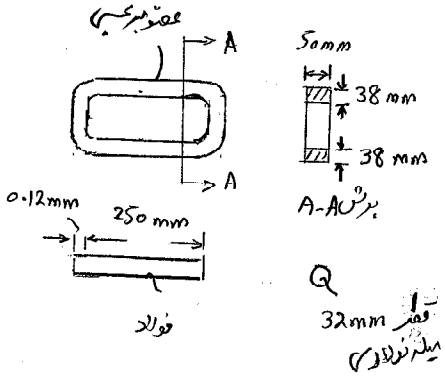
ج) $\delta_{AL} = 3.369\times10^{-4}\ m = 0.3369\ mm \rightarrow L_{AL}' = L_{AL} + \delta_{AL} = 300.3369\ mm$

$\delta_{st} = 1.63\times10^{-4}\ m = 0.163\ mm \rightarrow L_{st}' = L_{st} + \delta_{st} = 250.163\ mm$

صفحه: ۱۷۰

۴۸-۲ عضو بی‌نهایت صلب AA توسط یک میله فولادی ($E_b = 105GPa$, $\alpha_b = 19\times10^{-6}/^\circ C$) و دو میله فولادی ($E_s = 200GPa$, $\alpha_s = 11.7\times10^{-6}/^\circ C$) دارای ابعاد مطابق شکل در دما $18^\circ C$ مرتبط شده‌اند. میله فولادی با نقص ساخت $0.12mm$ کوتاه‌تر از اندازه لازم ساخته شده است. در صورتی که دمای سیستم به $38^\circ C$ افزایش یابد، مطلوبست:

الف) تنش عمودی در میله فولادی ب) تغییر طول میله فولادی



(در مرحله اول) با توجه به هندسه شکل

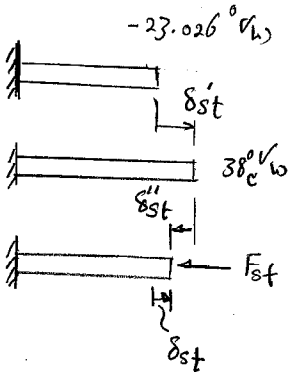
$\delta_{st} = -0.12\,m$

لذا

$\delta_{st} = \alpha \Delta T L$

$\rightarrow -0.12 = (11.7\times10^{-6})(\Delta T)(250) \rightarrow \Delta T = -41.025^\circ C$

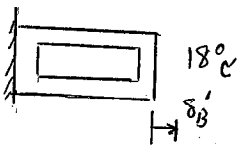
$\Delta T = T_2 - T_1 = T_2 - 18 \rightarrow T_2 = -23.026^\circ C$



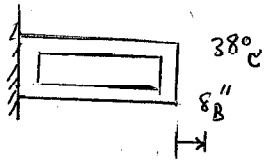
$\delta'_{st} = \alpha \Delta T' L = (11.7\times10^{-6})(38+23.026)(250) = 0.1785\,mm$ (در مرحله دوم)

$\delta''_{st} = \dfrac{F_{st}\cdot L_{st}}{A_{st}\cdot E_{st}} = \dfrac{F_{st}(250)}{[\pi/4(32)^2\times10^{-6}][200\times10^9]} = 1.554\times10^{-6} F_{st}$

$\delta_{st} = \delta'_{st} - \delta''_{st} = 0.1785 - 1.55\times10^{-6} F_{st}$

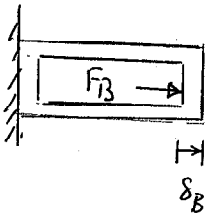


$\delta'_B = \alpha \Delta T L = (19\times10^{-6})(38-18)(250) = 0.095\,mm$



$\delta''_B = \dfrac{F_B L_B}{A_B E_B} = \dfrac{F_B(250)}{[(2\times50\times38)\times10^{-6}][105\times10^9]} = 6.266\times10^{-7} F_B$

$\delta_B = \delta'_B + \delta''_B = 0.095 + 6.266\times10^{-7} F_B$



$\delta_B = \delta_{st}$ & $F_{st} = F_B$

لذا

$0.095 + 6.266\times10^{-7} F_B = 0.1785 - 1.554\times10^{-6} F_{st}$

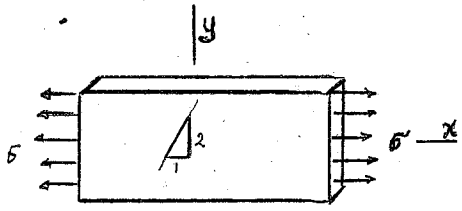
$\rightarrow F_B = F_{st} = 38.288\,KN$

الف) $\sigma_{st} = \dfrac{F_{st}}{A_{st}} = \dfrac{38.288\times10^3}{\pi/4(32)^2} = 47.608\,MPa$

ب) $\delta_{st} = 0.119\,mm$

$L'_{st} = L_{st} + \delta_{st} = 250.119\,mm$

(حل تمرین فصل ۲)



۲-۵۲) یک عضو آلومینیومی تحت یک بارگذاری محوری شامل تنش عمودی σ و دارای سطح مقطع A می‌باشد. قبل از بارگذاری یک خط با شیب 2:1 رسم شده است مطلوب است شیب خط بعد از اعمال تنش $\sigma = 130\ MPa$. برای آلومینیوم

$$E = 70\ GPa \quad , \quad \nu = 0.33$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{130\times10^6}{70\times10^9} = 1.857\times10^{-3}$$

$$\delta_x = \varepsilon_x L_x = (1.857\times10^{-3})(1) = 1.857\times10^{-3}$$

$$L_x' = L_x + \delta_x = 1 + 1.857\times10^{-3} = 1.00119$$

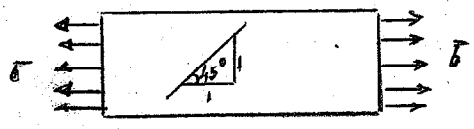
$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x = -\frac{0.33}{70\times10^9}(130\times10^6) = -6.129\times10^{-4}$$

$$\delta_y = \varepsilon_y L_y = (6.129\times10^{-4})(2) = -1.226\times10^{-3}$$

$$L_y' = L_y + \delta_y = 2 - 1.226\times10^{-3} = 1.999$$

$$\tan\theta' = \frac{L_y'}{L_x'} = 1.995$$

۲-۵۸) برای عضو تحت بارگذاری محوری مطلوب است مقدار تنش عمودی σ' در جهت زاویه 45° نسبت به محور عضو و جهت کرنش ε_x الف) با در نظر گرفتن مثلثی مانند مثلث ABC برای قبل و بعد از بارگذاری ب) استفاده از مقادیر σ_x و ε_x و تبدیل تقسیم یا متعامد.



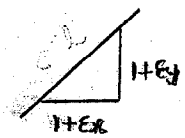
الف)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\sigma_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} = -\nu\varepsilon_x$$



$$l' = \sqrt{(1+\delta_x)^2 + (1+\delta_y)^2} = \sqrt{(1+\varepsilon_x)^2 + (1+\varepsilon_y)^2} = \sqrt{2+2\varepsilon_x+2\varepsilon_y} = \sqrt{2}\sqrt{1+\varepsilon_x(1-\nu)}$$

در واقع:

$$\delta_x = \varepsilon_x \frac{l}{L_x} = \varepsilon_x \qquad \delta_y = \varepsilon_y \frac{l}{L_y} = \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_x^2 \approx \varepsilon_y^2 \approx 0 \qquad l = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

برای کرنش با امتداد 45° داریم:

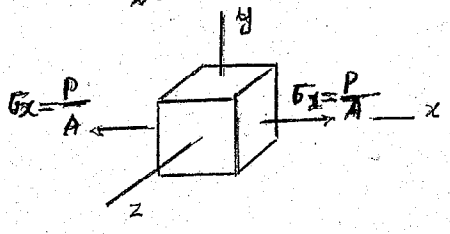
$$\varepsilon' = \frac{l'-l}{l} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\varepsilon_x(1-\nu)} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{1+\varepsilon_x(1-\nu)} - 1$$

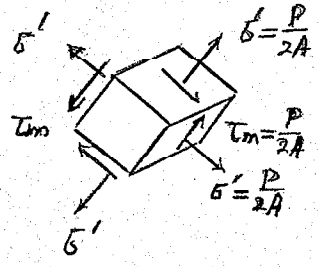
(تمرین فصل ۲)

ادامه مسئله ۵۸-۲)

$$1+\varepsilon' = \sqrt{1+\varepsilon_x(1-\nu)} \quad \rightarrow \quad (1+\varepsilon')^2 = 1+\varepsilon_x(1-\nu)$$

$$1+\varepsilon'^2+2\varepsilon' = 1+\varepsilon_x(1-\nu) \quad \rightarrow \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon_x}{2}(1-\nu)$$





$$\sigma_x' = \sigma' = \frac{P}{2A} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma}{2}$$

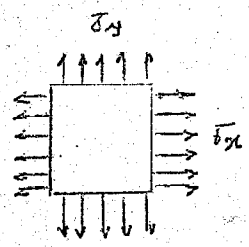
$$\sigma_y' = \sigma' = \frac{P}{2A} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma}{2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x' = \frac{\sigma_x'}{E} - \nu\frac{\sigma_y'}{E} - \nu\frac{\sigma_z'}{E}$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{1}{2}\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x}{E}(1-\nu)$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon_x(1-\nu)$$



2.59) در سه بعد از مثال می‌دانیم که تنش در یک جهت صفر می‌شود به عنوان مثال $\sigma_z=0$ و در حالت صفر از یک مثال داده شده برای این حالت که تنش صفر‌ای (Plane stress) خوانده می‌شود و همچنین ε_x و ε_y بعد از آزمایش به دست آمده‌اند داریم

$$\sigma_x = E\,\frac{\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y}{1-\nu^2}$$

$$\sigma_y = E\,\frac{\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x}{1-\nu^2}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

با توجه به قانون تعمیم یافته هوک:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad (I)$$

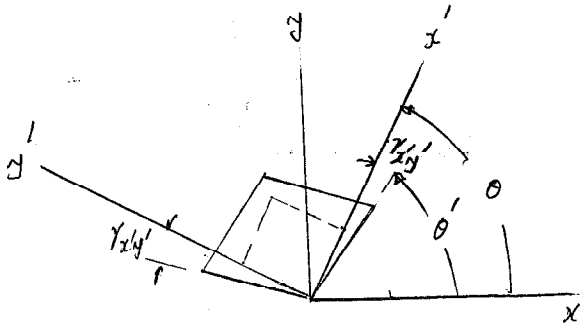
$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad (II)$$

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \qquad (III)$$

از ترکیب سه معادله فوق نتایج بالا به دست می‌آید.

۲-۵۲

صفحه: ۲۰۰



$$\tan\theta = \frac{2}{1} \longrightarrow \theta = 63.43^\circ$$

لذا صفحات مایل

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2}\sigma \sin 2\theta = \frac{1}{2}(130)(0.8) = 52\ MPa$$

از قانون تعمیم یافته هوک

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\tau_{x'y'}}{G}$$

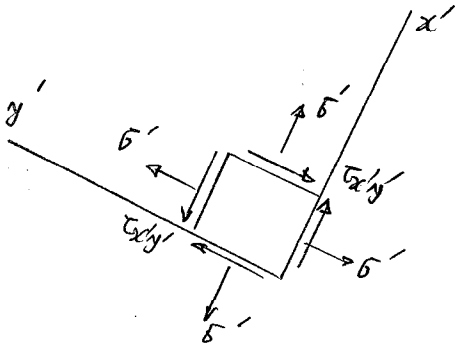
که در آن

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 26.32\ GPa$$

$$\gamma_{x'y'} = 1.976\times10^{-3}\ rad = 0.113^\circ$$

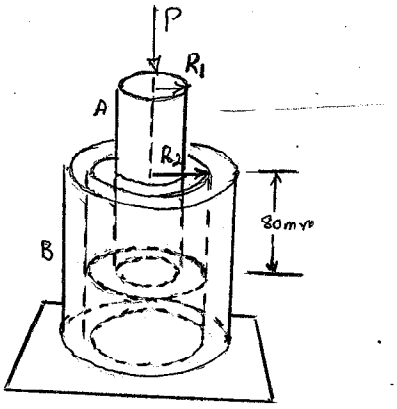
$$\theta' = \theta - \frac{\gamma_{x'y'}}{2} = 63.378^\circ$$

$$\longrightarrow \tan\theta' = 1.995$$



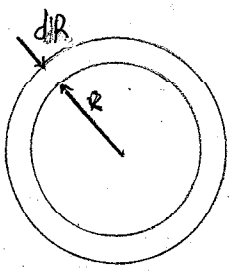
انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

(حل تمرین فصل ۲)



یک تکیه‌گاه حداکثر از قوس تا محل میله A به شعاع $R_1=10\,mm$ و شعاع داخلی $R_2=25\,mm$ است که به استفاده از استیل توخالی به ارتفاع $80\,mm$ و مدول صلبیت $G=12\,MPa$ متصل است. اگر حداکثر تنش برشی $2.5\,mm$ باشد، مطلوب است بزرگترین نیروی P که می‌تواند به این میله وارد شود.

پاسخ: در ناحیه R_1 تا R_2 المانی به شعاع R به ضخامت dR و طول L را در نظر می‌گیریم برای تعادل استاتیکی المان خواهیم داشت:



$$\tau(2\pi RL) = (\tau+d\tau)[2\pi(R+dR)L]$$

$$\tau R = \tau R + \tau dR + R d\tau + d\tau dR \quad (d\tau dR \approx 0)$$

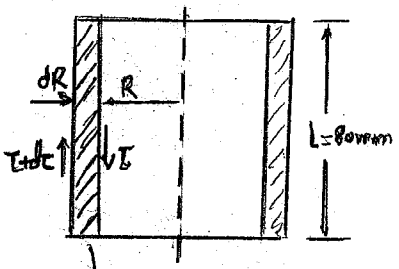
$$\tau dR = -R d\tau$$

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{dR}{R}$$

با انتگرال‌گیری از عبارتین رابطه:

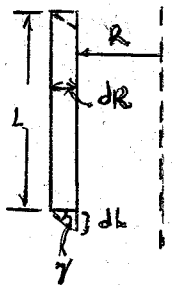
$$\ln\tau = -\ln R + \ln c$$

در شکل به شعاع R انتگرال‌گیری صورت گرفته:



$$\rightarrow \ln\tau = \ln c/R \quad \text{یا} \quad \tau = \frac{c}{R} \quad \text{یا} \quad \tau R = c = ct$$

المان مورد نظر تحت تأثیر تنش برشی τ دچار کرنش γ مطابق شکل خواهد شد.



$$\tan\gamma = \frac{-dL}{dR} \quad \text{یا} \quad \gamma = \frac{-dL}{dR} \quad \text{یا} \quad dL = -\gamma dR \quad \text{یا} \quad dL = -\frac{\tau}{G}dR$$

$$\int_0^{\delta} dL = \int_{R_1}^{R_2} \frac{-c}{RG} dR$$

$$\delta = \frac{c}{G}\ln\frac{R_2}{R_1} \rightarrow c = \frac{\delta G}{\ln R_2/R_1} = \frac{(2.5\times10^{-3})(12\times10^{6})}{\ln 25/10} = 32740.7$$

در شعاع R_1:

$$\tau_1 = \frac{c}{R_1} = \frac{32740.7}{10\times10^{-3}} = 3.274\ MPa$$

$$P = (2\pi R_1 L)\tau_1 = 2\pi(10\times10^{-3})(80\times10^{-3})(3.274\times10^{6}) = 16.457\ KN$$

حل تمرین فصل سوم

پیچش

صفحه ۲۳۰

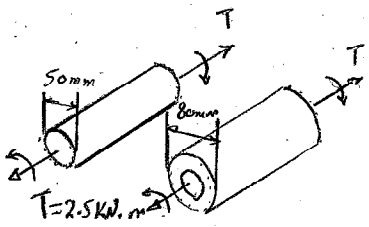
«مقاومت مصالح ۱»

(حل تمرین فصل ۳)

۳-۲) الف) برای محور توپر به قطر 50 mm و تحت بارگذاری نشان داده شده مطلوب حداکثر تنش برشی

ب) مطلوب نصف داخلی محور توخالی با قطر خارجی 80 mm در همان حداکثر تنش

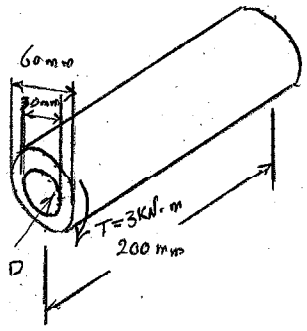
مقادیر محاسبه شده در قسمت "الف" را بیابید.



۳-۴) گشتاور T به محور توپر بر حسب مطابق شکل اعمال گردد مطلوب الف) حداکثر تنش برشی

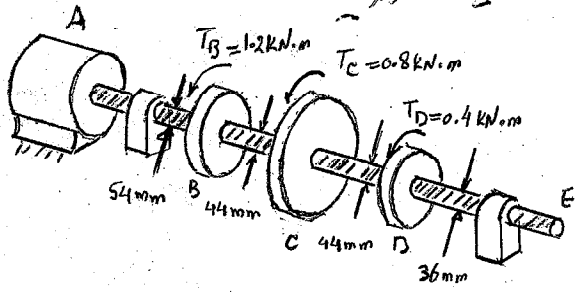
ب) تنش برشی در نقطه D روی شعاع 15mm ج) زاویه گشتاور حاصل شده بر حسب

درجه از انتهای داخل شعاع 15mm



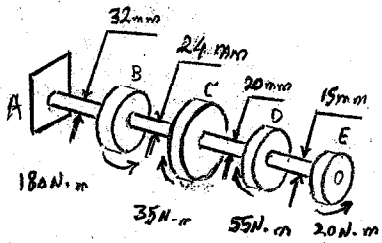
۳-۶) تحت شرایط عملکرد معمول، موتور الکتریکی گشتاور 2.4 kN.m را اعمال می‌کند

می‌دانیم که محورها توپر هستند، مطلوب حداکثر تنش برشی الف) در محور AB ب) در محور BC



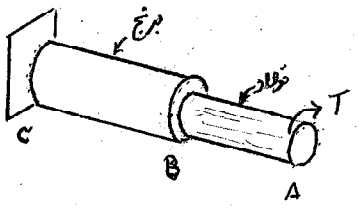
۳-۸) می‌دانیم که درشفت محور AE شامل یک میله توپر است. مطلوب حداکثر

تنش برشی نتیجه بارگذاری نمایی اعمال شده



۳-۱۰) تنش مجاز در میله AB، 85MPa و در میله BC، 50 MPa است. حداکثر گشتاور T=6.5KN.m قابل

تحمل میله‌های مرکب نشان داده شده را در صورتی که مطلوب حداکثر تنش برشی مجاز الف) در میله AB ب) در میله BC



پاسخ:

الف) برای محور AB:

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

$$85\times10^6 = \frac{(6.5\times10^3)c}{\pi c^4} \longrightarrow c = 36.51 \text{ mm} \longrightarrow d_{AB} = 2c = 73.028 \text{ mm}$$

ب) در محور BC:

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

$$50\times10^6 = \frac{(6.5\times10^3)c}{\frac{\pi}{2}c^4} \longrightarrow c = 43.579 \text{ mm}$$

$$d_{BC} = 2c = 87.157 \text{ mm}$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

(استاتیک مصالح یک)

(حل تمرین فصل ۳)

پاسخ سؤال (۳-۲)

الف)

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad , \quad \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\tau_{max} = \frac{(2.5\times10^{3})(25\times10^{-3})}{\frac{\pi}{2}(25\times10^{-3})^{4}} = 101.859\ MPa$$

ب)

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.04)^4 - c_1^4]$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc_2}{J} \longrightarrow J = \frac{Tc_2}{\tau_{max}} = \frac{(2.5\times10^{3})(0.04)}{101.859\times10^{6}} = 9.818\times10^{-6}\ m^4$$

$$\longrightarrow c_1 = 0.0373\ m = 37.3\ mm$$

$$\longrightarrow d_1 = 2c_1 = 74.6\ mm$$

پاسخ سؤال (۳-۴)

الف)

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(3\times10^{3})(0.03)}{\frac{\pi}{2}(0.03)^4} = 70.74\ MPa$$

ب)

$$\tau = \frac{T\rho}{J} = \frac{(3\times10^{3})(0.015)}{\frac{\pi}{2}(0.03)^4} = 35.368\ MPa$$

ج)

$$T' = \int(\tau dA)\rho = \int \frac{T}{J}\rho^2 dA = \frac{T}{J}\int \rho^2 dA$$

$$J' = \int \rho^2 dA$$

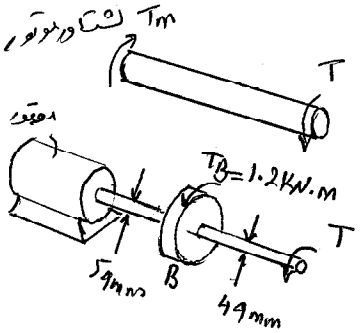
$$T' = \frac{T}{J}J' = \frac{J'}{J}T$$

$$J' = \frac{\pi}{2}(0.015)^4 = 7.952\times10^{-8}\ m^4$$

$$J = \frac{\pi}{2}(0.03)^4 = 1.273\times10^{-6}\ m^4$$

$$\longrightarrow T' = 0.0625\,T \quad \underline{\text{یا}} \quad \boxed{T' = 6.25\%\ T}$$

پاسخ سؤال (۳-۹)



الف)

$$T = 2.4\ KN.m$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(2.4\times10^{3})(27\times10^{-3})}{\frac{\pi}{2}(27\times10^{-3})^4} = 77.625\ MPa$$

ب)

$$T = T_m - T_B = 2.4 - 1.2 = 1.2\ KN.m$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(1.2\times10^{3})(22\times10^{-3})}{\frac{\pi}{2}(22\times10^{-3})^4} = 71.745\ MPa$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

(مقاومت مصالح یک)

(حل مسئله ۳)

پاسخ مسئله ۳-۱۱۵ (۳-۱۱۵)

$T_A = 180 + 20 - (35 + 55) = 110\ N.m$

برای محور AB:

$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{110 \times (16 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2}(16 \times 10^{-3})^4}$

$\tau_{max} = 17.097\ MPa$

برای محور BC:

$T = T_B - T_A = 70\ N.m$

$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{70 \times (12 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2}(12 \times 10^{-3})^4} = 25.789\ MPa$

برای محور CD:

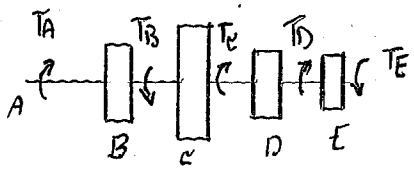
$T = T_B - T_A - T_C = 180 - 110 - 35 = 35\ N.m$

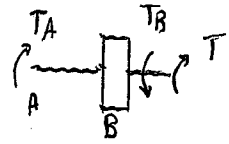
$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{35 \times (10 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2}(10 \times 10^{-3})^4} = 22.28\ MPa$

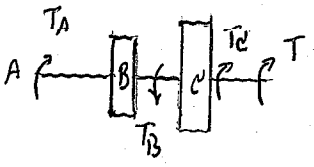
برای محور DE:

$T = 20\ N.m$

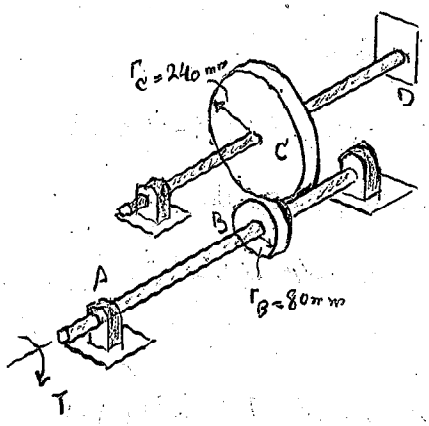
$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{20 \times (7.5 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2}(7.5 \times 10^{-3})^4} = 30.2\ MPa$







۲۹ : مثال



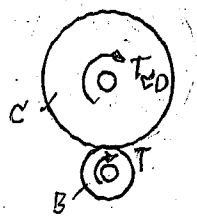
۴-۱۴) محور CD از میله‌ای به قطر 60 mm ساخته شده است. محور AB به قطر 48 mm از طریق دو چرخ دنده مرتبط شده است. اگر تنش برشی مجاز در هر محور 60 MPa باشد، حداکثر گشتاور T که می‌تواند اعمال گردد را بیابید.

پاسخ:

برای محور AB:

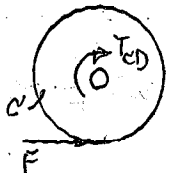
$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

$$60\times10^{6} = \frac{T(24\times10^{-3})}{\frac{\pi}{2}(24\times10^{-3})^4} \longrightarrow T = 1302.88\ N.m$$



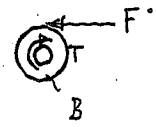
برای محور CD:

$$\tau_{max} = \frac{T_{CD}\cdot c}{J}$$



با توجه به روابط چرخ دنده‌ها:

$$F = \frac{T}{r_B}\ ,\quad T_{CD} = F\cdot r_C = T\frac{r_C}{r_B} = 3T$$



$$60\times10^{6} = \frac{3T(33\times10^{-3})}{\frac{\pi}{2}(33\times10^{-3})^4} \longrightarrow T = 1129\ N.m$$

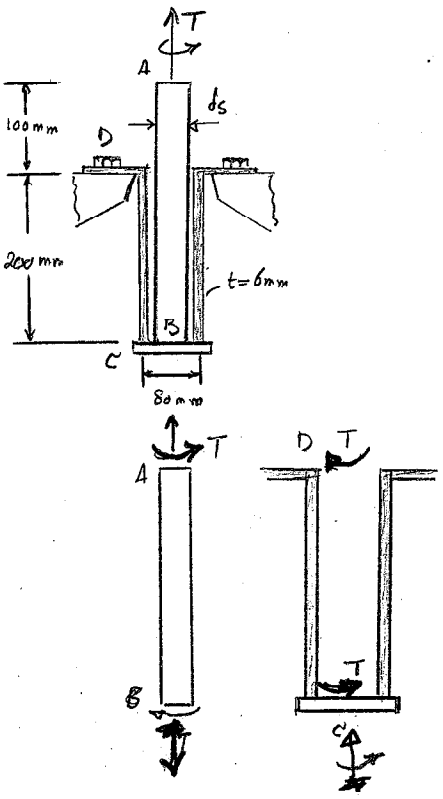
بنابراین

$$\boxed{T_{max} = 1129\ N.m}$$

«مقاومت مصالح»

(حل تمرین فصل ۳)

۳-۱۲) سفینه CD دارای قطر خارجی 80mm و ضخامت دیواره 6mm و از جنس برنج با تنش برشی مجاز 40MPa و قطر AB به قطر $d_s = 56mm$ و از جنس فولادی با تنش برشی مجاز آن 55MPa است مطلوب است حداکثر گشتاور مجاز قابل اعمال در محور AB



در محور AB:

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

$$T = \frac{\tau_{max} J}{c} = \frac{(55\times10^6)\left[\frac{\pi}{2}(28\times10^{-3})\right]}{28\times10^{-3}} = 1.897\ KN.m$$

در محور CD:

$$T = \frac{\tau_{max} J}{c_2}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4)$$

$$J = \frac{\pi}{2}\left[(40\times10^{-3})^4 - (34\times10^{-3})^4\right] = 1.922\times10^{-6}\ m^4$$

$$T = \frac{(40\times10^6)(1.922\times10^{-6})}{(40\times10^{-3})} = 1.922\ KN.m$$

بنابراین $T_{max} = 1.897\ KN.m$

۳-۴۰) در شکل بالا چنانچه قطر محور $d_s = 60mm$ باشد، مجموعه از جنس فولاد ($G = 80GPa$) باشد مطلوب است زاویه‌ای که انتهای A محور با ازای $T = 2KN.m$ دوران می‌کند.

$$\Phi_A = \Phi_B + \Phi_{A/B} \qquad \Phi_B = \Phi_C$$

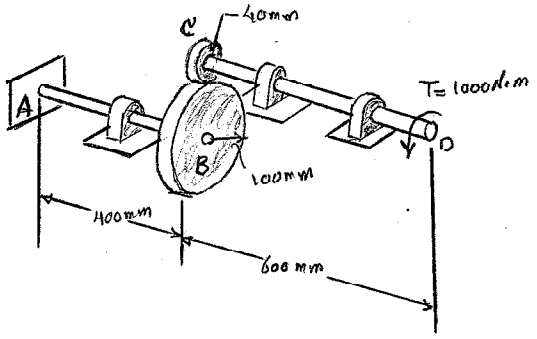
$$\Phi_{A/B} = \frac{T \cdot L_{AB}}{G J_{AB}} = \frac{(2\times10^3)(0.3)}{(80\times10^9)\left[\frac{\pi}{2}(30\times10^{-3})^4\right]} = 5.895\times10^{-3}\ rad = 0.338^\circ \curvearrowright$$

$$\Phi_C = \frac{T \cdot L_{CD}}{G J_{CD}} = \frac{(2\times10^3)(0.2)}{(80\times10^9)\left[\frac{\pi}{2}\left\{(40\times10^{-3})^4 - (34\times10^{-3})^4\right\}\right]} = 2.601\times10^{-3}\ rad = 0.149^\circ \curvearrowright$$

$$\Phi_A = \Phi_B + \Phi_{A/B} = 0.338^\circ + 0.149^\circ = 0.487^\circ$$

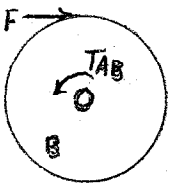
(حل تمرین فصل ۳)

۳-۴۴) نیروی محرکه چرخ دنده و گشتاور T داده شده در شکل به محورهای هم متصل AB و CD از جنس فولاد است $\tau_{max} \leq 60\,MPa$ مطلوب است محاسبه قطر محورها و زاویه پیچش انتهای محور CD کنترل Φ_B برحسب رادیان. همچنین اگر $G = 80\,GPa$ و زاویه پیچش مجاز 1.5° باشد.



چرخ دنده C: $[\Sigma M_C = 0]$ $\quad F r_C = T_{CD} \rightarrow F = \frac{1000}{40} = 25\ N$

چرخ دنده B: $[\Sigma M_B = 0]$ $\quad F r_B = T_{AB} \rightarrow T_{AB} = \frac{1000}{40}(100) = 2500\ N.m$



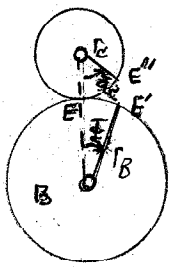
معیار همگرایی تنش برشی:

برای محور CD: $\quad \tau_{max} = \frac{T_{CD} \cdot c}{J} \qquad 60\times10^6 = \frac{(1000)c}{\frac{\pi}{2}c^4}$

$c = 0.02197\ m = 21.97\ mm \rightarrow d = 2c = 43.95\ mm$

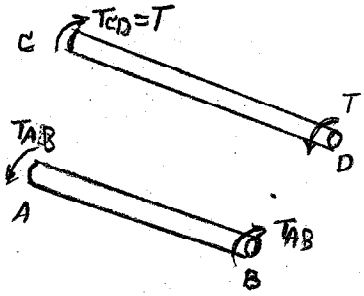
برای محور AB: $\quad \tau_{max} = \frac{T_{AB} \cdot c}{J} \qquad 60\times10^6 = \frac{2500\,c}{\frac{\pi}{2}c^4}$

$c = 0.0298\ m = 29.82\ mm \rightarrow d = 59.65\ mm$



بنابراین با توجه به معیار فوق $d_{min} = 59.65\ mm$

معیار زاویه پیچش:



در محور AB: $\quad \Phi_{B/A} = \Phi_B = \frac{T_{AB} L_{AB}}{JG} = \frac{(2500)(0.4)}{(\frac{\pi}{2}c^4)(80\times10^9)}$

$\Phi_{B/A} = \frac{3.97\times10^{-9}}{c^4}$

با توجه به سینماتیک چرخ دنده ها:

$\Phi_C r_C = \Phi_B r_B \quad$ یا $\quad \Phi_C = \frac{100}{40}\Phi_B = 2.5\,\Phi_B$

$\Phi_C = \frac{1.990\times10^{-8}}{c^4}$

برای محور CD: $\quad \Phi_D = \Phi_C + \Phi_{D/C}$

$\Phi_{D/C} = \frac{T_{CD} L_{CD}}{GJ} = \frac{(1000)(0.6)}{(\frac{\pi}{2}c^4)(80\times10^9)} = \frac{4.775\times10^{-9}}{c^4}$

$\Phi_D = 1.5\times\frac{\pi}{180} = \frac{1.99\times10^{-8}}{c^4} + \frac{4.775\times10^{-9}}{c^4}$

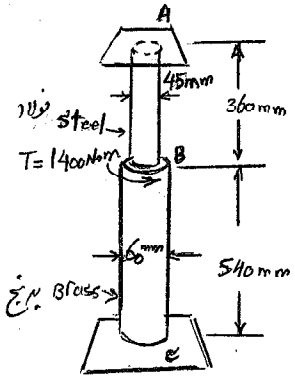
$\rightarrow c = 0.031\ m = 31.156\ mm$

$d = 2c = 62.31\ mm$

با استفاده دو معیار $d_{min} = 62.31\ mm$

(تمرین فصل ۳)

۳۰۸۰) استوانه مرکب توپر AB و BC در محل B به یکدیگر متصل شده‌اند و به تکیه‌گاه‌های صلب در A و C تکیه دارند. چرخ‌دنده‌ای که مدول صلبیت $G=80\,GPa$ برای فولاد و $G=40\,GPa$ برای برنج می‌باشد. مطلوب است محاسبه الف) تنش برشی ماکزیمم در هر کدام از قسمت‌های AB و BC



با توجه به تعادل استاتیکی مجموعه:

$$T_A + T_C = T = 1400\ N.m \qquad (I)$$

با توجه به تعادل تغییر شکل

$$\Phi_A = \Phi_C = 0$$

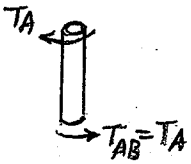
در محور AB:

$$T_{AB} = T_A$$

$$\Phi_B = \Phi_A + \Phi_{B/A} \qquad \Phi_{B/A} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB} G_{AB}}$$

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2}(22.5\times10^{-3})^4 = 4.026\times10^{-6}\ m^4$$

$$\Phi_B = \frac{T_A (0.36)}{(4.026\times10^{-6})(80\times10^9)}$$



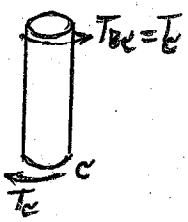
در محور BC:

$$T_{BC} = T_C$$

$$\Phi_B = \Phi_C + \Phi_{B/C} \qquad \Phi_{B/C} = \frac{T_{BC} L_{BC}}{J_{BC} G_{BC}}$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2}(30\times10^{-3})^4 = 1.272\times10^{-6}\ m^4$$

$$\Phi_B = \frac{T_B (0.54)}{(1.272\times10^{-6})(40\times10^9)}$$



با استفاده از رابطه:

$$T_A = 0.95\,T_C \qquad (II)$$

با توجه به رابطه I و II

$$T_A = 682.05\ N.m \qquad T_C = 717.95\ N.m$$

الف)

$$\tau_{max} = \frac{T_A \cdot c}{J_{AB}} = \frac{(682.05)(22.5\times10^{-3})}{4.026\times10^{-7}}$$

$$\tau_{max} = 38.12\ MPa$$

ب)

$$\tau_{max} = \frac{T_C \cdot c}{J_{BC}} = \frac{(717.95)(30\times10^{-3})}{1.272\times10^{-6}}$$

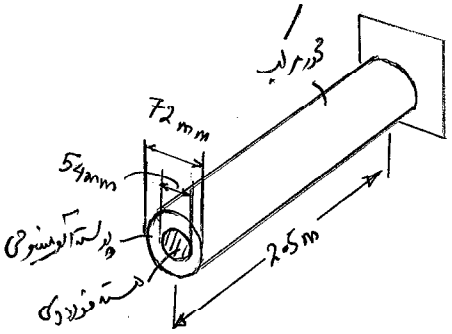
$$\tau_{max} = 16.93\ MPa$$

صفحه : ۱۰۷

(حل تمرین مقاومت مصالح ۱)

(فصل ۳)

۴-۴۲) میله مرکب نشان داده شده، گشتاور پیچشی T در سر A اعمال می‌گردد. چنانچه مدول صلبیت فولاد $80\,GPa$ و برای آلومینیم $27\,GPa$ باشد، مطلوبست حداکثر زاویه پیچش و حداکثر گشتاور پیچشی در سر A اگر حداکثر تنش برشی برای فولاد $60\,MPa$ و برای آلومینیم $45\,MPa$ تجاوز ننماید.



با توجه به رابطه: $T = T_{AL} + T_{st}$ (I)

با توجه به تغییر شکل: $\phi_{AL} = \phi_{st}$ (II)

(II): $\dfrac{T_{AL}\cdot L}{J_{AL}\cdot G_{AL}} = \dfrac{T_{st}\cdot L}{J_{st}\cdot G_{st}}$

$$J_{AL} = \frac{\pi}{2}\left[(36\times10^{-3})^4 - (27\times10^{-3})^4\right] = 1.804\times10^{-6}\ m^4$$

$$J_{st} = \frac{\pi}{2}\left[(27\times10^{-3})^4\right] = 8.348\times10^{-7}\ m^4$$

با جایگزینی در رابطه (II):

$$\frac{T_{AL}}{(1.804\times10^{-6})(27\times10^{9})} = \frac{T_{st}}{(8.348\times10^{-7})(80\times10^{9})} \longrightarrow T_{AL} = 0.729\,T_{st}$$

با توجه به تنش برشی مجاز:

$$(\tau_{max})_{AL} = \frac{T_{AL}\cdot C_2}{J_{AL}} \longrightarrow T_{AL} = \frac{(45\times10^{6})(1.804\times10^{-6})}{36\times10^{-3}} = 2254.44\ N.m$$

برای زاویه پیچش متناظر:

$$\phi = \frac{T_{AL}\cdot L}{J_{AL}\cdot G_{AL}} = \frac{(2254.44)(2.5)}{(1.804\times10^{-6})(27\times10^{9})} = 0.1157\ rad = 6.63^\circ$$

$$(\tau_{max})_{st} = \frac{T_{st}\cdot C'}{J_{st}} \longrightarrow T_{st} = \frac{(60\times10^{6})(8.348\times10^{-7})}{27\times10^{-3}} = 1855.08\ N.m$$

برای زاویه پیچش متناظر:

$$\phi = \frac{T_{st}\cdot L}{J_{st}\cdot G_{st}} = \frac{(1855.08)(2.5)}{(8.348\times10^{-7})(80\times10^{9})} = 0.069\ rad = 3.98^\circ$$

بنابراین

$$\phi_{max} = 3.98^\circ\ ,\quad T_{st} = 1855.08\ N.m$$

از رابطه (II):

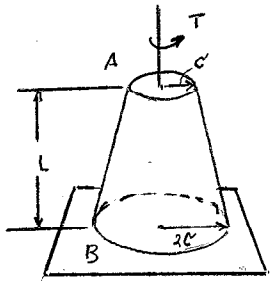
$$T_{AL} = 0.729\,T_{st} \longrightarrow T_{AL} = 1352.35\ N.m$$

(I): $T_{max} = 1352.35 + 1855.08 = 3207\ N.m$

$$T_{max} = 3.207\ kN.m$$

(حل تمرین فصل ۳)

(۳-۴۵) کابل پیچشی T به محور صلب AB مطابق شکل اعمال می‌گردد. نشان دهید که مقدار زاویه پیچش انتهای A عبارت است از:

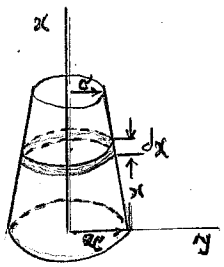


$$\Phi_A = \frac{7TL}{12\pi Gc^4}$$

(حل)

$$\Phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{GJ}$$

برای هر مقطع در فاصله x:



$$J = \frac{\pi}{2} y^4$$

با توجه به اینکه مختصات y برحسب x بدست می‌آید:

$$y - 2c = \frac{c-2c}{L-0}(x-0)$$

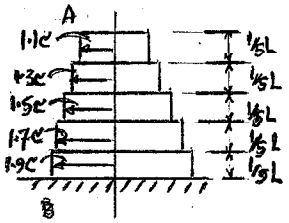
$$y = \frac{-cx}{L} + 2c$$

با جایگزینی در رابطه زاویه پیچش

$$\Phi = \frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{-cx}{L}+2c\right)^4} = \frac{2TL}{3\pi Gc}\left.\frac{1}{\left(\frac{-cx}{L}+2c\right)^3}\right|_0^L$$

$$\Phi = \frac{2TL}{3\pi Gc}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8c^3}\right) = \frac{7\pi L}{12\pi Gc^4} = \frac{0.5833TL}{\pi Gc^4}$$

(۳-۴۶) شفت زیر را با یک محور توپر بدون توخالی معادل تقریبی از نظر محور خروجی حل شده در صد خطا را بدست آورید.



$$\Phi_A = \sum_{i=1}^{5}\Phi_i = \sum \frac{T_i L_i}{G_i J_i} = \frac{TL/5}{G}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{J_i}$$

$$J_i = \frac{\pi}{2}c_i^4 = \frac{\pi}{2}(K_i c)^4 = \frac{\pi}{2}c^4 K_i^4$$

$$\Phi_A = \frac{2TL}{5\pi Gc^4}\left[\frac{1}{(1.1)^4} + \frac{1}{(1.3)^4} + \frac{1}{(1.5)^4} + \frac{1}{(1.7)^4} + \frac{1}{(1.9)^4}\right]$$

$$\Phi_A = \frac{0.5708TL}{\pi Gc^4}$$

در مقایسه با مقدار زاویه پیچش مسئله قبل:

$$\text{درصد خطا} = \frac{0.5833 - 0.5708}{0.5833} \times 100 = 2.149\%$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

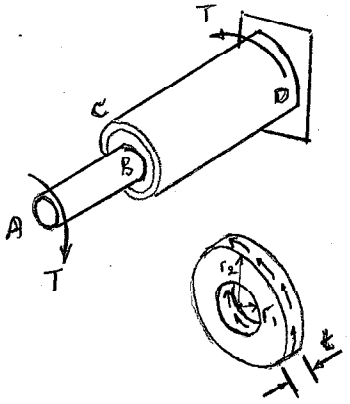
«مقاومت مصالح»

(حل تمرین سمستر ۳)

۳.۴۸) استوانه‌ای به ضخامت t برای انتقال گشتاور AB به شعاع r_1 به استوانه D به شعاع داخلی r_2 استفاده می‌شود. الف) زاویه‌ای که انتهای C استوانه نسبت به انتهای B گشتاور دوران می‌یابد عبارت است از:

(3.48)

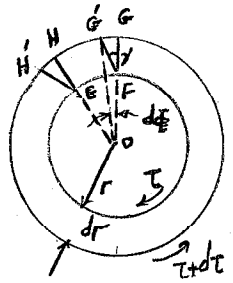
$$\phi_{C/B} = \frac{T}{4\pi G t}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$



ب) اگر r_2 بی‌نهایت شود حد رابطه قسمت الف به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\phi_{C/B} = \frac{\tau_1}{2G}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)$$

حل:



$$(2\pi r t)\tau = [2\pi(r+dr)(\tau+d\tau)t](r+dr)$$

$$r\tau = (r^2+2r\,dr+dr^2)(\tau+d\tau)$$

$$= r^2\tau + r^2 d\tau + 2\tau\,dr\,dr + 2r\,dr\,d\tau + 2\,dr\,dr\,d\tau$$

$$\rightarrow 2\tau\,dr = -r\,d\tau \rightarrow \frac{d\tau}{\tau} = -2\frac{dr}{r} \rightarrow \ln\tau = -2\ln r + D$$

$$r = r_1 \rightarrow \tau = \tau_1 \rightarrow \ln\tau_1 = -2\ln r_1 + D \rightarrow D = \ln \tau_1 r_1^2$$

$$\rightarrow \ln\tau = \ln\frac{1}{r^2} + \ln\tau_1 r_1^2 \rightarrow \ln\tau = \ln\frac{\tau_1 r_1^2}{r^2}$$

$$\tau = \frac{\tau_1 r_1^2}{r^2}$$

زاویه $EFGH$ به $EFG'H'$ تغییر می‌یابد. تغییر زاویه بین دو وجه همسایه برشی برابر γ است. برای وجه GG' داریم:

$$\widehat{GG'} = \gamma\,dr = (r+dr)\,d\phi \rightarrow \gamma\,dr = r\,d\phi + dr\,d\phi$$

$$d\phi = \gamma\frac{dr}{r} = \frac{dr}{r}\frac{\tau_1 r_1^2}{r^2 G} = \frac{\tau_1 r_1^2}{r^3 G}\,dr$$

$$\phi = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\tau_1 r_1^2}{r^3 G}\,dr = \frac{\tau_1 r_1^2}{-2G}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = \frac{\tau_1}{2G}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)$$

ادامه

$$\tau_1(2\pi r_1 t)r_1 = T$$

$$\rightarrow \phi = \frac{T}{4\pi G t}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

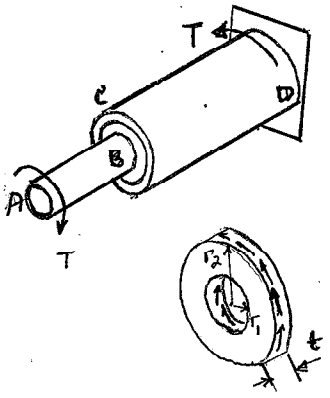
(تمرین فصل ۳)

۳-۴۹) الف) با استفاده از روابط بدست آمده در مسئله (۳-۴۸)

مطلوب است مقدار $\Phi_{C/B}$ برای میله‌ی آلومینیومی دستگاه $T=1500N.m$

$G=27GPa$ ، $r_2=100\ mm$ ، $r_1=25\ mm$ ، $t=6mm$

ب) گشتاور $T=1500N.m$ که یک میله آلومینیومی توپر به شعاع $r_1=25mm$ اعمال می‌گردد مطلوب است طول میله برای آنکه زاویه پیچش انتهای آن $\Phi_{C/B}$ در حالت "الف" باشد.



الف)

$$\Phi_{C/B}=\frac{1500}{\frac{\pi}{2}(27\times10^{9})(6\times10^{-3})}\left[\frac{1}{(25\times10^{-3})^2}-\frac{1}{(100\times10^{-3})^2}\right]$$

$$\Phi_{C/B}=1.105\times10^{-3}\ rad=0.063^{\circ}$$

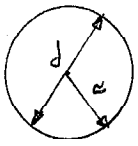
ب)

$$\Phi=\frac{TL}{GJ}\rightarrow 1.105\times10^{-3}=\frac{1500L}{(27\times10^{9})\left[\frac{\pi}{2}(25\times10^{-3})^4\right]}$$

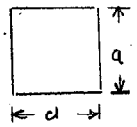
$$\rightarrow L=0.0122\ m=12.204\ mm$$

(حل تمرین فصل ۳)

۳-۱۰۲، ۳-۱۰۳) دو میله A و B از یک ماده ساخته شده اند و دارای یک محور یک سطح مقطع می باشند. آنها A دارای سطح مقطع مربعی و B دارای سطح مقطع دایره ای است. مطلوبست (الف) نسبت صلبیت پیچشی T_A و T_B که تولید می کنند با اعمال یک گشتاور پیچشی یکسان و (ب) نسبت زوایای پیچش ϕ_A و ϕ_B که در اثر اعمال یک گشتاور یکسان به دو میله ایجاد می شود.



B میله



A میله

$$A = \pi c^2 = a^2 \longrightarrow a = \sqrt{\pi}\, c$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 a b^2} \qquad \phi = \frac{TL}{c_2 a b^3 G}$$

در میله A:

$$a = b \longrightarrow c_1 = 0.208 \qquad c_2 = 0.1406$$

$$(\tau_{max})_A = \frac{T_A}{0.208\, a^3} \quad , \quad \phi_A = \frac{T_A L}{0.1406\, a^4 G}$$

در میله B:

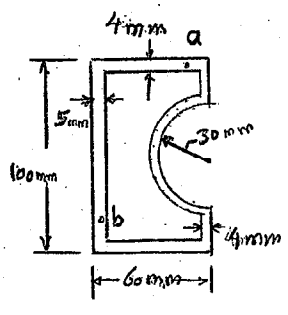
$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} \Rightarrow (\tau_{max})_B = \frac{T_B c}{\frac{\pi}{2} c^4} \longrightarrow (\tau_{max})_B = \frac{2T_B}{\pi c^3}$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \longrightarrow \phi_B = \frac{T_B L}{G\frac{\pi}{2} c^4} \quad \text{یا} \quad \phi_B = \frac{2T_B L}{\pi G c^4}$$

$$(\tau_{max})_A = (\tau_{max})_B \quad \text{یا} \quad \frac{T_A}{0.208\, a^3} = \frac{2T_B}{\pi c^3} \longrightarrow \frac{T_A}{T_B} = 2(0.208)\sqrt{\pi} = 0.737$$

$$T_A = T_B \longrightarrow \frac{\phi_A}{\phi_B} = \frac{\frac{T_A L}{0.1406\, a^4}}{\frac{T_B L}{\frac{\pi}{2} c^4}} = 1.132$$

۳-۱۰۴) گشتاور پیچشی $T = 1.2\,kN.m$ به مقطع نشان داده شده اعمال می گردد. مطلوبست تعیین کردن از اثر متمرکز تنش برشی در a و b.



$$\tau = \frac{T}{2tQ}$$

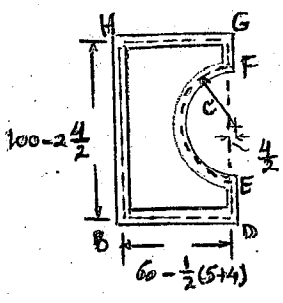
$$Q = A_1 - (A_2 - A_3) = (100-4)\left[60 - \frac{1}{2}(5+4)\right] - \left[\frac{1}{2}\pi\left(30+\frac{4}{2}\right)^2 - 2c\frac{4}{2}\right]$$

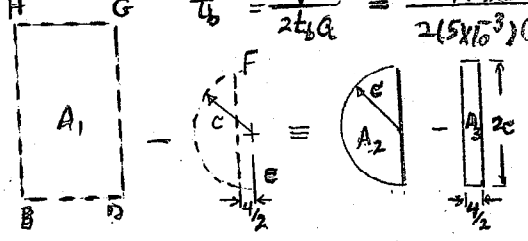
$$Q = 3847.5\ mm^2$$

در نقطه $c = 32\ mm$

$$\tau_a = \frac{T}{2t_a Q} = \frac{1.2\times10^3}{2(4\times10^{-3})(3847.5)} = 38.99\,MPa$$

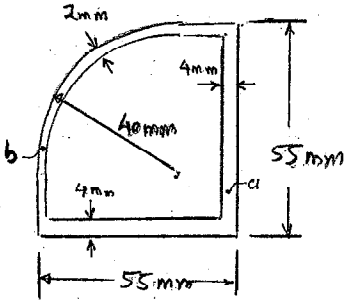
$$\tau_b = \frac{T}{2t_b Q} = \frac{1.2\times10^3}{2(5\times10^{-3})(3847.5)} = 31.189\,MPa$$





(حل تمرین فصل ۳)

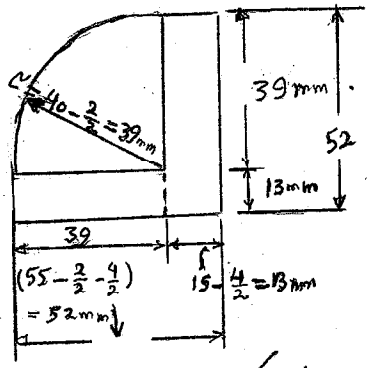
۳-۱۰۶) شفت $T=90\,N\cdot m$ را در قطعات مدل داده شده اعمال می‌کند. با صرف نظر کردن از اثر تمرکز تنش مطلوب تنش برشی در a و b



$$\tau_a = \frac{T}{2t_a Q}$$

$$Q = (52-13)(13) + (52)(13) + \frac{1}{4}\pi\left(40-\frac{2}{2}\right)^2 = 2377.59\,mm$$

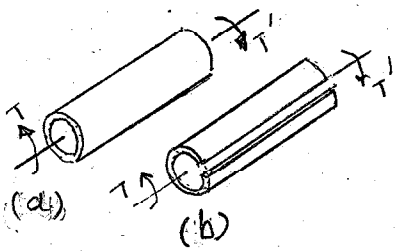
$$\tau_a = \frac{90}{2(4\times10^{-3})(2377.59)} = 4.73\,MPa$$



$$\tau_b = \frac{T}{2t_b Q}$$

$$\tau_b = \frac{90}{2(2\times10^{-3})(2377.59)} = 9.46\,MPa$$

۳-۱۱۱) شفت‌های یک پارچه استقامت‌های برشی به ضخامت یک‌نواخت t و شعاع یکسان c اعمال می‌شوند. یکی از استقامت‌ها دارای شکاف باریک است. مطلوب است نسبت τ_b/τ_a برحسب c و t در استانه تسلیم.



$$\tau_a = \frac{T}{2tQ} = \frac{T}{2t\pi c^2}$$

$$\tau_b = \frac{T}{c_1 ab^2} \qquad a=2\pi c,\ b=t,\ c_1=0.333$$

$$\tau_b = \frac{T}{0.333(2\pi c)(t^2)}$$

$$\tau_b/\tau_a = \frac{2\pi t c^2}{2\times0.333\pi c t^2} = \frac{c}{0.333\,t} = \frac{3c}{t}$$

$$\Phi_b = \frac{TL}{c_2 ab^3 G} = \frac{TL}{(0.333)(2\pi c)t^3 G}$$

$$\Phi_a = \frac{TL}{GJ} \qquad J = 2\pi c^3 t \qquad \Phi_a = \frac{TL}{(2\pi c^3 t)G}$$

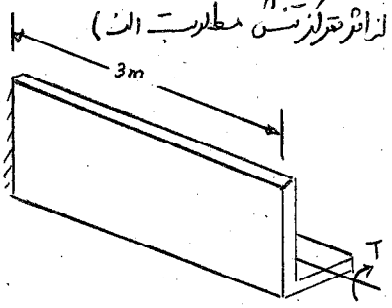
$$\frac{\Phi_b}{\Phi_a} = \frac{2\pi c^3 t}{(0.333)(2\pi c)t^3} = 3\left(\frac{c}{t}\right)^2$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

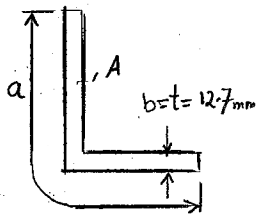
مقاومت مصالح

حل مسئله ۳ فصل ۳

مقطع یک شاه فولادی به طول 3m بصورت L203x152x12.7 است. انتهای به پیوست ج درمی یابیم که مشخصات این مقطع



ضخامت 12.7mm و سطح آن $A = 4350\ mm^2$ است. همچنین $\tau_{all} = 50\ MPa$ و $G = 77\ GPa$ و صرف نظر کردن از اثر تمرکز تنش مطلوب است الف) بزرگترین گشتاور T که می‌توان اعمال کرد ب) زاویه پیچش.



$$a = \frac{A}{t} = \frac{4350}{12.7} = 342.52\ mm$$

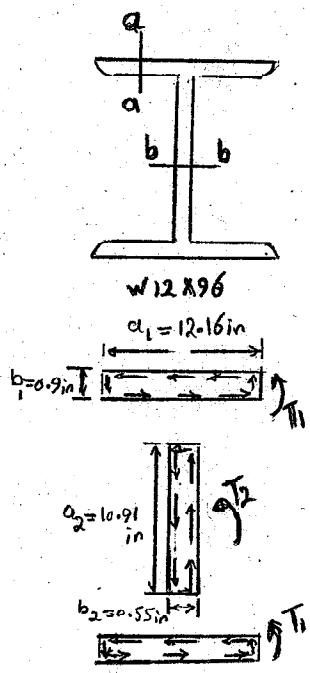
$$b = t = 12.7\ mm \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{342.52}{12.7} = 26.97$$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{3}(1 - 0.63\,b/a) = 0.326$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 a b^2} \qquad 50\times10^6 = \frac{T}{0.326(342.5\times10^{-3})(12.7\times10^{-3})^2} \rightarrow T = 899.24\ N.m$$

$$\phi = \frac{TL}{c_2 a b^3 G} = \frac{899.24(3)}{0.326(342.5\times10^{-3})(12.7\times10^{-3})^3(77\times10^9)} = 8.777^\circ$$

یک عضو فولادی به طول 12ft با مقطع W12X96 در معرض گشتاوری به مقدار 40 kip-in قرار گرفته است. همچنین $G = 11.2\times10^6\ Psi$ و با مراجعه به پیوست ج برای ابعاد این مقطع، مطلوب است الف) تنش برشی حداکثر در امتداد خط b-b ب) تنش برشی حداکثر در خط aa ج) زاویه پیچش (راهنمایی: جان و بال تیر را جداگانه در نظر بگیرید و با برابر قرار دادن زاویه پیچش جان و بال رابطه‌ای بین گشتاور وارد بر بال و گشتاور وارد بر جان به دست آورید)



$$\phi_1 = \frac{T_1 L}{c_{21} a_1 b_1^3 G} \qquad \phi_2 = \frac{T_2 L}{c_{22} a_2 b_2^3 G}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = 13.5 \qquad \frac{a_2}{b_2} = 19.84$$

$$c_{11} = c_{21} = \frac{1}{3}(1 - 0.63\,b/a_1) = 0.318 \qquad c_{12} = c_{22} = \frac{1}{3}(1 - 0.63\,b_2/a_2) = 0.323$$

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \frac{T_1}{(0.318)(12.16)(0.9)3} = \frac{T_2}{(0.323)(10.091)(0.55)^3}$$

$$\rightarrow T_2 = 0.208\,T_1$$

$$T = 2T_1 + T_2 \rightarrow T_1 = 18.116\ Kip\text{-}in, \quad T_2 = 3.768\ Kip\text{-}in$$

الف)

$$\tau_{b-b} = \frac{T_2}{c_{12} a_2 b_2^2} = \frac{3768}{0.323(10.91)(0.55)^2} = 3.535\ Ksi$$

ب)

$$\tau_{a-a} = \frac{T_1}{c_{11} a_1 b_1^2} = \frac{18.116\times6^3}{(0.318)(12.16\times0.9)^2} = 5.783\ Ksi$$

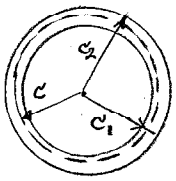
ج)

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 = \frac{(18116)(12\times12)}{(0.318)(12.16)(6.9)^3(11.2\times10^6)} = 0.0826\ rad = 4.73^\circ$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

(حل تمرین فصل ۳)

روابط مربوط به پوسته‌های نازک تحت پیچش را برای پوسته‌های دایره‌ای شکل با ضخامت یکنواخت تحقیق کنید



$$\tau = \frac{T}{2tQ} \qquad c = \frac{c_1+c_2}{2} \qquad Q = \pi c^2 \qquad \tau = \frac{\tau_1+\tau_2}{2} \qquad t = c_2 - c_1$$

در مورد مقاطع دایره‌ای توخالی داریم

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{Tc_1}{J} = \dfrac{Tc_1}{\frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4)} \\ T = \dfrac{\tau_1 J}{c_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_2 = \dfrac{Tc_2}{J} = \dfrac{Tc_2}{\frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4)} \\ T = \dfrac{\tau_2 J}{c_2} \end{cases}$$

$$\rightarrow T = \frac{\pi}{4}(c_2^4 - c_1^4)\left(\frac{\tau_1}{c_1} + \frac{\tau_2}{c_2}\right) = \frac{\pi}{4}(c_2^2 - c_1^2)(c_2^2 + c_1^2)\left(\frac{\tau_1}{c_1} + \frac{\tau_2}{c_2}\right)$$

از روابط ۱

$$c_2^2 + c_1^2 = (c_2 + c_1)^2 - 2c_1c_2 = (2c)^2 - 2(c - t/2)(c + t/2) = 4c^2 - 2c^2 + 2\underbrace{(t/2)^2}_{\approx 0} = 2c^2$$

$$T = \frac{\pi c^2}{2}(c_2^2 - c_1^2)\left(\frac{\tau_1}{c_1} + \frac{\tau_2}{c_2}\right) = \frac{\pi c}{2}(c_2^2 - c_1^2)\left(\frac{\tau_1}{c_1/c} + \frac{\tau_2}{c_2/c}\right)$$

از روابط

$$\frac{c_1}{c} = \frac{c - t/2}{c} = 1 - \underbrace{\frac{t}{2c}}_{\approx 0} = 1 \qquad \frac{c_2}{c} = \frac{c + t/2}{c} = 1 + \underbrace{\frac{t}{2c}}_{\approx 0} = 1$$

$$\rightarrow T = \pi c(c_2^2 - c_1^2)\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) = \pi c(c_2^2 - c_1^2)\tau = \pi c(c_2 + c_1)(c_2 - c_1)\tau$$

$$\rightarrow T = 2\pi c^2(c_2 - c_1)\tau = 2Q(c_2 - c_1)\tau = 2Qt\tau$$

$$\rightarrow \tau = \frac{T}{2tQ}$$

برای زاویه پیچش ؛

$$\Phi = \frac{TL}{4Q^2G}\oint \frac{ds}{t} \qquad ds = c\,d\theta$$

$$\Phi = \frac{TL}{4Q^2G}\int_0^{2\pi} \frac{c}{t}\,d\theta = \frac{\pi c\tau L}{2Q^2Gt} = \frac{TL}{G\frac{2Q^2t}{\pi c}}$$

از روابط ؛ $\Phi = \frac{TL}{GJ}$ است که دارای دستاورد است ؛

$$J = \frac{2Q^2t}{\pi c} \quad ! \quad \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{2Q^2t}{\pi c}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}(c_2^2 - c_1^2)(c_2^2 + c_1^2) = \frac{2\pi c^2}{2}(c_2^2 - c_1^2) = \pi c^2(c_2 - c_1)(c_2 + c_1)$$

$$J = 2\pi c^3 t = 2t\frac{(\pi c^2)^2}{\pi c} = \frac{2tQ^2}{\pi c}$$

صفحه ۳۸

با استفاده از روش انرژی:

$$u = \int \tau_{xy}\, d\gamma_{xy} = \int \tau_{xy}\, d\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{1}{G}\int \tau_{xy}\, d\tau_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2$$

$$dU = u\,dV \longrightarrow U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\, dV$$

$$\tau = \frac{T}{2tA} \qquad dV = t\,ds\,dx$$

$$U = \int_0^L \oint \frac{T^2}{8Gt^2A^2}(t\,dx\,ds) = \frac{T^2}{8GA^2}\int_0^L dx \oint \frac{ds}{t} = \frac{T^2 L}{8A^2G}\oint \frac{ds}{t}$$

$$U = \frac{1}{2}\Phi T \longrightarrow \Phi = \frac{TL}{4GA^2}\oint \frac{ds}{t}$$

بررسی مقاطع دایروی:

$$\tau = \frac{Tc}{J}$$ رابطه مقاطع دایروی

$$\tau = \frac{T}{2tA}$$ رابطه پوسته‌های نازک

با مساوی قرار دادن این دو:

$$\frac{c}{J} = \frac{1}{2tA}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}(c_2^2 - c_1^2)(c_2^2 + c_1^2) = \frac{\pi}{2}(2tc)(2c^2)$$

درهمبنگ؛

$$c_2^2 - c_1^2 = (c_2 - c_1)(c_1 + c_2) = 2tc$$

درهمبنگ

$$c_2 - c_1 = t$$

$$c_1 + c_2 = 2c$$

$$c_2^2 + c_1^2 = (c_2 - c_1)^2 + 2c_1c_2 = 2c^2$$

درهمبنگ

$$c_1c_2 = (c - t/2)(c + t/2) = c^2 - \frac{t^2}{4} = c^2$$

$\frac{t^2}{4} \approx 0$

$$\boxed{J = 2\pi t c^3}$$

$$\frac{c}{J} = \frac{1}{2\pi t c^2} = \frac{1}{2(\pi c^2)t} = \frac{1}{2tA}$$

درهمبنگ

$$\boxed{A = \pi c^2}$$

حل تمرین فصل چهارم

خمش خالص

صفحه: ۴۰

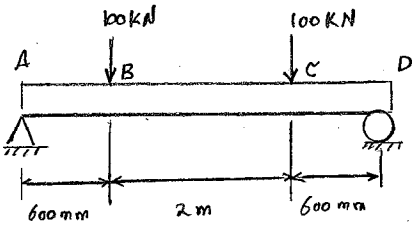
(تمرین فصل ۴)

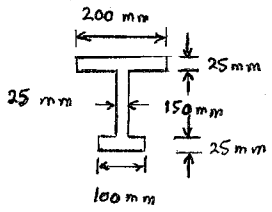
۴-۶ , ۴-۱۲) دوتیرک عمودی به تیری با مقطع T داده شده متصل گردیده

مطلوبست الف) حداکثر تنش عمودی در قسمت BC ب) حداکثر تنش برشی

ج) تنش انحنای تیر د) شیب در قسمت بالای تیر به ابعاد $25\times200\ mm^2$

مدار $E=200\ GPa$ در نظر گرفته شود



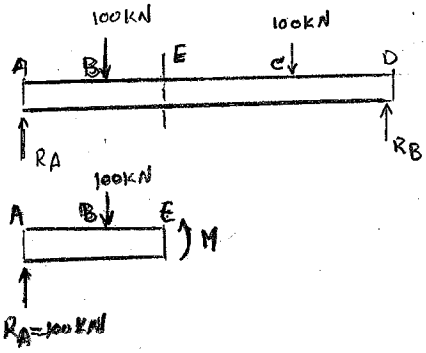


تعادل استاتیکی تیر AD :

$$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad R_A + R_B = 200\ kN$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad R_B(3.2) = 100(2.6) + 100(0.6)$$

$$\rightarrow R_B = 100\ kN \qquad \rightarrow R_A = 100\ kN$$

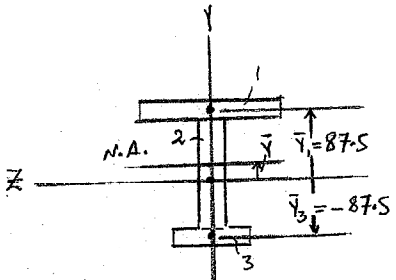


تعادل استاتیکی تکه AE :

$$\Sigma M_A = 0 : \qquad M = 100(0.6) = 60\ kN.m$$

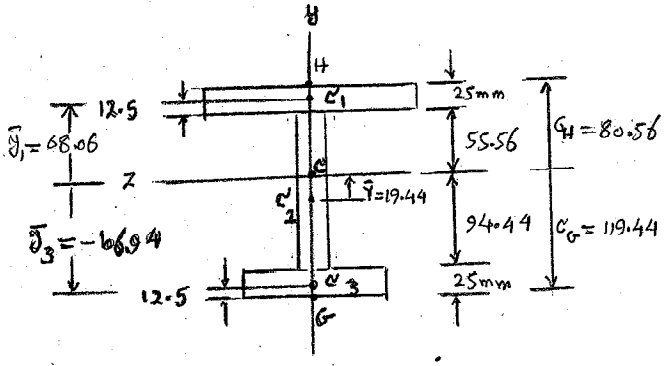
تعیین موقعیت محور خنثی :

	Area, mm^2	$\bar{Y}$, mm	$\bar{Y}A$, mm^3
1	25x200	87.5	437500
2	25x150	0	0
3	25x100	-87.5	-218750
	$\Sigma A = 11250$		218750



$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{Y}A \quad \rightarrow \bar{Y} = 19.44\ mm$$

تعیین ممان اینرسی مقطع :



$$I = \Sigma(\bar{I} + Ad^2)$$

$$I = \frac{1}{12}(200)(25)^3 + (25\times200)\underbrace{(55.56+12.5)}_{68.06}{}^2$$

$$+ \frac{1}{12}(25)(150)^3 + (25\times150)(19.44)^2$$

$$+ \frac{1}{12}(100)(25)^3 + (25\times100)\underbrace{(94.44+12.5)}_{106.94}{}^2$$

$$I = 60.59\times10^6\ mm^4 = 6.059\times10^{-5}\ m^4$$

الف) حداکثر تنش فشاری در نقطه H :

$$C_H = 55.56 + 25 = 80.56\ mm$$

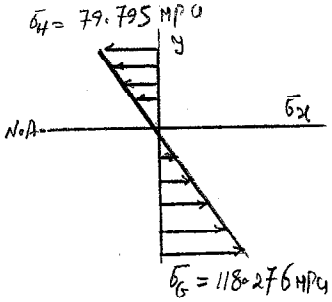
انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

(حل تمرین فصل ۴)

ادامه حل مسئله ۴-۶، ۴-۱۲

$$\sigma_H = \frac{-MC_H}{I} = -\frac{(60\times10^3)(80.56\times10^{-3})}{60.059\times10^{-5}}$$

$$\sigma_H = -79.795\ MPa$$



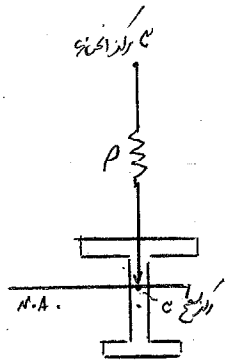
ب) حداکثر تنش کششی در نقطه G:

$$C_G = 94.44 + 25 = 119.44\ mm$$

$$\sigma_G = -\frac{MC_G}{I} = -\frac{(60\times10^3)(-119.44\times10^{-3})}{60.059\times10^{-5}}$$

$$\sigma_G = 118.276\ MPa$$

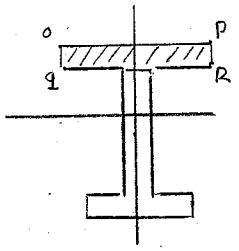
ج) شعاع انحنا:



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{60\times10^3}{(200\times10^9)(6.059\times10^{-5})} = 4.951\times10^{-3}\ 1/m$$

$$\rho = 201.968\ m$$

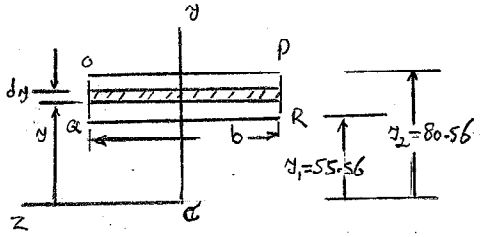
د) تعادل نیرو در بالای تیر در قسمت هاشور زده شده



$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$dF = \sigma_x dA = -\frac{M}{I}\, y(b\,dy)$$

$$dF = -\frac{Mb}{I}\, y\,dy$$



تعادل نیرو در مقطع

$$F = \int_{y_1}^{y_2} -\frac{Mb}{I}\, y\,dy$$

$$F = -\frac{Mb}{I}\int_{y_1}^{y_2} y\,dy = -\frac{Mb}{2I}(y_2^2 - y_1^2)$$

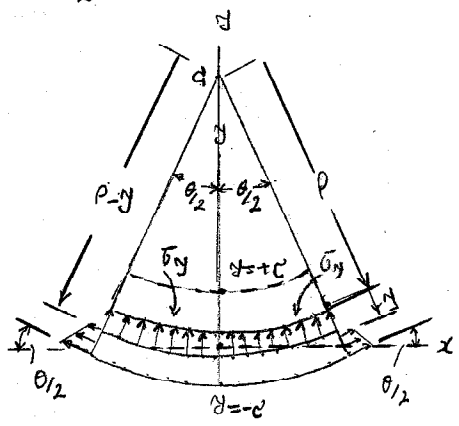
$$F = \frac{-(60\times10^3)(0.2)}{2(6.059\times10^{-5})}\left[(80.56\times10^{-3})^2 - (55.56\times10^{-3})^2\right]$$

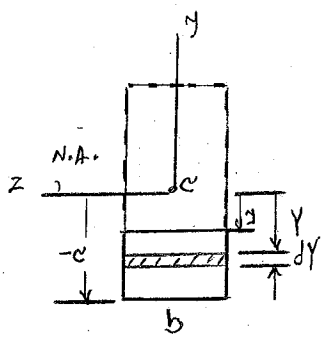
$$F = -336.99\ kN$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

(حل مسائل فصل ۴)

۴-۳۴) در بخش 4.4 نشان داده شد که تنش عمودی σ_y در عضو تحت خمش خالص تابع صفحه تقارن است. برای یک عضو با سطح مقطع مستطیلی که در حالت الاستیک مستقیم است مطلوب است: (الف) بیان عبارتی تقریبی برای σ_y بعنوان تابعی از y ← راه حل: دهید که $(\sigma_y)_{max} \approx -(c/2\rho)\sigma_m$ و به این ترتیب σ_y در مقایسه با تنش عمودی قابل صرف نظر کردن است.





$$\Sigma F_y = 0$$

$$\sigma_y (\rho - y)\theta\, b = -2\int \sigma_x\, b\, dy\, \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \qquad y = -y \rightarrow \sigma_x = \frac{y}{c}\sigma_m$$

$$\int \sigma_x\, dy = \frac{-\sigma_m}{c}\int_{-y}^{+c} y\, dy = \frac{\sigma_m}{2c}(y^2 - c^2)$$

$$\sigma_y (\rho - y)\theta b = -b\theta\left[-\frac{\sigma_m}{2c}(y^2 - c^2)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{+\sigma_m}{2c}\,\frac{y^2 - c^2}{\rho - y}$$

از طرفی $\rho \gg y$

$$\sigma_y \approx \frac{-\sigma_m}{2c}\,\frac{c^2 - y^2}{\rho}$$

ب) برای $y=0$

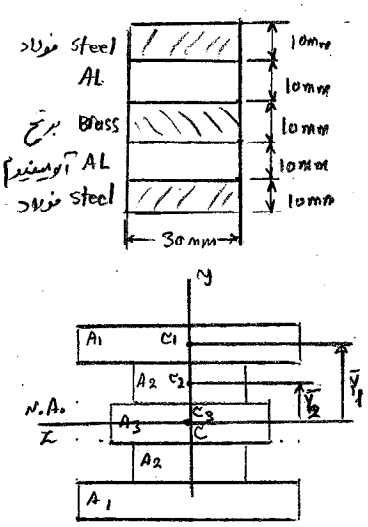
$$(\sigma_y)_{max} \approx -\frac{\sigma_m c}{2\rho}$$

$$\rho \gg c \rightarrow (\sigma_y)_{max} \approx 0$$

(حل تمرین فصل ۴)

۴-۴۶) پنج قطعه هر یک به سطح مقطع 10×30mm به یکدیگر متصل شده‌اند. مدول کشسانی برای فولاد 210GPa برای برنج 105GPa و برای آلومینیم 70GPa است. در اثر گشتاور خمشی $M = 1500\ N.m$ تار گذرای میله خمشی می‌گردد. مطلوب است حداکثر تنش در:

الف) فولاد ب) برنج ج) آلومینیم



$$n_1 = \frac{E_S}{E_{AL}} = \frac{210}{70} = 3 \qquad n_2 = \frac{E_{br}}{E_{AL}} = \frac{105}{70} = 1.5$$

$$\bar{Y}_1 = 20\ mm \quad , \quad \bar{Y}_2 = 10\ mm$$

$$I_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 \bar{Y}_1^2 = \frac{1}{12}(90)(10)^3 + (90\times10)(20)^2 = 367.5\times10^3\ mm^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 \bar{Y}_2^2 = \frac{1}{12}(30)(10^3) + (30\times10)(10)^2 = 32.5\times10^3\ mm^4$$

$$I_3 = \frac{1}{12} b_3 h_3^3 = \frac{1}{12}(45)(10)^3 = 3750\ mm^4$$

$$I = 2(I_1 + I_2) + I_3 = 807.5\times10^3\ mm^4 = 8.038\times10^{-7}\ m^4$$

(الف)

$$(\sigma_{st})_{max} = n_1 \frac{Mc_1}{I} \qquad c_1 = 25\ mm$$

$$= 3\ \frac{1500(25\times10^{-3})}{8.0375\times10^{-7}} = 139.97\ MPa$$

(ب)

$$(\sigma_{br})_{max} = n_2 \frac{Mc_3}{I} \qquad c_3 = 5\times10^{-3}\ m$$

$$= 1.5\ \frac{1500(5\times10^{-3})}{8.0375\times10^{-7}} = 13.997\ MPa$$

(ج)

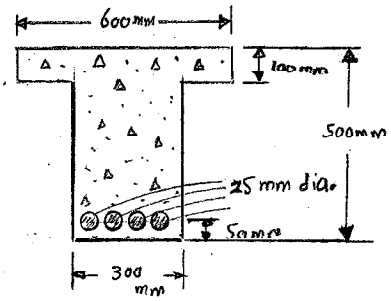
$$(\sigma_{AL})_{max} = \frac{Mc_2}{I} \qquad c_2 = 15\times10^{-3}\ m$$

$$= \frac{1500(15\times10^{-3})}{8.0375\times10^{-7}} = 27.994\ MPa$$

«مقاومت مصالح»

(حل تمرین شماره ۴)

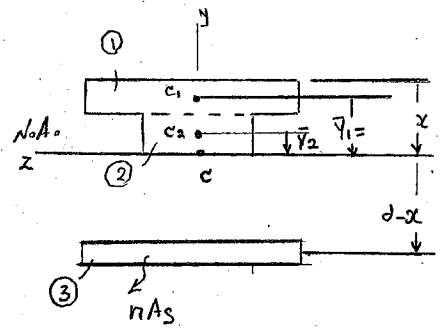
۴-۴۴) تیر مرکب بتنی دارای سطح مقطع نشان داده شده تحت اثر لنگر خمشی $120\ kN\cdot m$ قرار گرفته است. مدول الاستیسیته بتن $25\ GPa$ و برای فولاد $200\ GPa$ است. مطلوب است: الف) تنش در فولاد ب) حداکثر تنش در بتن



$$n=\frac{E_s}{E_c}=\frac{200}{25}=8$$

$$\bar{Y}_0=\frac{\sum A_i\bar{Y}_i}{\sum A_i} \rightarrow \sum A_i\bar{Y}_i=0$$

$$A_1\bar{Y}_1+A_2\bar{Y}_2+A_3\bar{Y}_3=0$$



$$A_1=100\times600=6\times10^4\ mm^2 \qquad A_2=300\times(x-100)=300x-3\times10^4$$

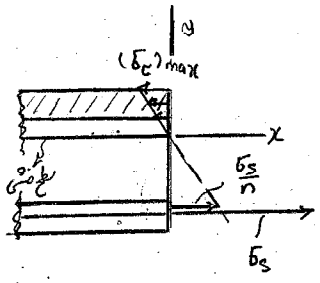
$$A_3=nA_s=8\left[4\frac{\pi}{4}(25)^2\right]=1570.96\ mm^2$$

$$\bar{Y}_1=x-\frac{100}{2}=x-50 \qquad \bar{Y}_2=\frac{1}{2}(x-100)=\frac{1}{2}x-50$$

$$\bar{Y}_3=-(d-x)=-[(500-50)-x]=x-450$$

$$6\times10^4(x-50)+(300x-3\times10^4)\left(\frac{1}{2}x-50\right)+1570.96(x-450)=0$$

$$150x^2+45707.96x-8.5685\times10^6=0 \rightarrow x=131.078\ mm$$



$\bar{Y}_1=81.078\ mm$ $\bar{Y}_2=15.539\ mm$ $\bar{Y}_3=-318.922\ mm$

$$I_1=\frac{1}{12}b_1h_1^3+A_1\bar{Y}_1^2=\frac{1}{12}(600)(100)^3+(600\times100)(81.078)^2=444.419\times10^6\ mm^4$$

$$I_2=\frac{1}{12}b_2h_2^3+A_2\bar{Y}_2^2=\frac{1}{12}(300)(131.077-100)^3+[(300)(131.077-100)](15.539)^2$$

$$=3.0016\times10^6\ mm^4$$

$$I_3=nA_s\bar{Y}_3^2=1570.96(-318.922)^2=1597.676\times10^6\ mm^4$$

در ضمن:

$$\bar{Y}_1=131.077-50=81.078\ mm \qquad \bar{Y}_2=\frac{1}{2}(131.077-100)=15.539\ mm$$

$$\bar{Y}_3=x-450=-318.922\ mm$$

$$I=I_1+I_2+I_3=2045.0995\times10^6\ mm^4=2045.0995\times10^{-6}\ m^4$$

الف) تنش کششی:

$$\sigma_{st}=\sigma_t=n\left(-\frac{Mc_2}{I}\right) \qquad c_2=d-x=-318.92\ mm$$

$$\sigma_t=-8\frac{(120\times10^3)(-318.92\times10^{-3})}{2045.0995\times10^{-6}}=149.706\ MPa$$

ب) تنش فشاری:

$$(\sigma_c)_{max}=-\frac{Mc_1}{I} \qquad c_1=x=131.078\ mm$$

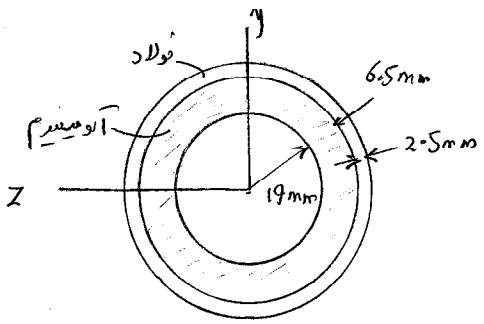
$$(\sigma_c)_{max}=-\frac{(120\times10^3)(131.078\times10^{-3})}{2045.0995\times10^{-6}}=-7.691\ MPa$$

حل تمرین درس مقاومت مصالح ۱

(فصل ۴)

۴-۵۸) المانی از آلومینیوم و فولاد که در داخل یکدیگر مطابق شکل قرار دارند تیر مرکب را بوجود آورده اند. برای مقطع تیر مطلوبست محاسبه: الف) تنش در آلومینیم ب) تنش در فولاد ج) شعاع انحنای تیر

$M = 1\ kN.m$



$$\int_A -\sigma_x y\,dA = \int_{A_1} -\sigma_1 y\,dA + \int_{A_2} -\sigma_2 y\,dA = M$$

$$\sigma_1 = -E_1 \frac{y}{\rho}\ ,\quad \sigma_2 = -E_2 \frac{y}{\rho}\ ,\quad \frac{E_2}{E_1} = n$$

$$\rightarrow \sigma_2 = n\sigma_1$$

$$\int_{A_1} -\sigma_1 y\,dA + n\int_{A_2} -\sigma_1 y\,dA = M$$

$$-\frac{E_1}{\rho}\left[\int_{A_1} y^2 dA + n\int_{A_2} y^2 dA\right] = M$$

$$-\frac{E_1}{\rho}\left(I_1 + nI_2\right) = M$$

$$-\frac{E_1}{\rho} I = M$$

از روابط زیر داریم:

$$\boxed{I = I_1 + nI_2}$$

در صورتیکه I نگردد از سطح تبدیل یافته و I_1 و I_2 مربوط به سطح واقعی المان

$$I = I_a + nI_s \qquad n = \frac{E_s}{E_a} = \frac{200}{72} = 2.778$$

$$I_a = \frac{\pi}{4}\left[(25.5)^4 - (19)^4\right] = 0.2297\times10^6\ mm^4$$

$$I_s = \frac{\pi}{4}\left[(28)^4 - (25.5)^4\right] = 0.1506\times10^6\ mm^4$$

$$I = 0.6482\times10^6\ mm^4$$

در سطح تبدیل یافته:

الف) تنش در آلومینیم

$$\sigma_a = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_a = -\frac{My}{I} \qquad (\sigma_a)_m = \frac{Mc_a}{I} = \frac{(1000)(25.5\times10^{-3})}{0.6482\times10^{-6}}$$

$$\boxed{(\sigma_a)_m = 39.337\ MPa}$$

ب) تنش در فولاد

$$\sigma_s = -n\frac{My}{I} \qquad (\sigma_s)_m = n\frac{Mc_s}{I} = 2.778\frac{(1000)(28\times10^{-3})}{0.6482\times10^{-6}}$$

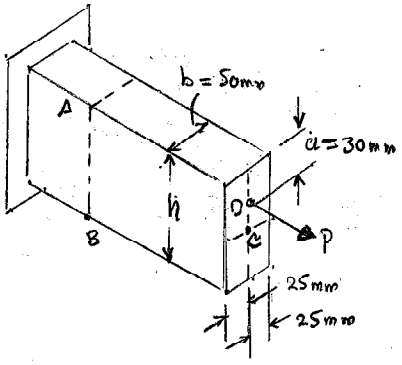
$$\boxed{(\sigma_s)_m = 119.98\ MPa}$$

ج) شعاع انحنا:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1000}{(72\times10^9)(0.6482\times10^{-6})}$$

$$\boxed{\rho = 46.67\ m}$$

« مقاومت مصالح »



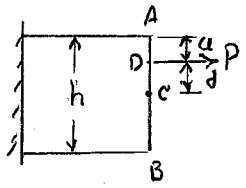
حل تمرین فصل ۴

۴-۱۲۴) بار خارج از مرکز P در نقطه D اثر می‌نماید. مطلوبست تنش در نقطه A و B مقطع شکل زیر

$P = 90\ KN$ برای $30\ mm$ زیر سطح بالایی میله‌ها

الف) ارتفاع h میله تنش کششی در A حداکثر است

ب) مقدار تنش فشاری در نقطه A

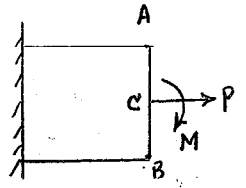


الف)

$$M = Pd = P\left(\frac{h}{2} - a\right)$$

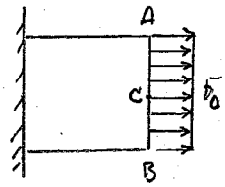
- تنش بار مرکزی محوری P:

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{P}{bh}$$



- تنش بار لنگر خمشی M:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{P\left(\frac{h}{2} - a\right)\frac{h}{2}}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{3P(h-2a)}{bh^2}$$

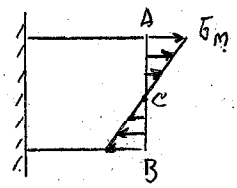


در نقطه A:

$$\sigma_A = \sigma_0 + \sigma_m$$

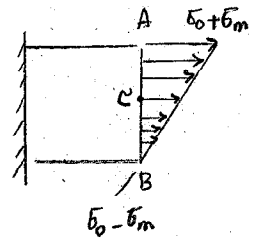
$$\sigma_A = \frac{P}{bh} + \frac{3P(h-2a)}{bh^2}$$

+



$$\frac{d\sigma_A}{dh} = 0$$

$$\frac{3P}{b}\left[\frac{h^2 - 2h(h-2a)}{h^4}\right] - \frac{P}{bh^2} = 0$$



$$-4h^2 + 12ah = 0 \longrightarrow h = 0 \ , \ h = 3a = 90\ mm$$

ب)

$$\sigma_0 = \frac{P}{bh} = \frac{90 \times 10^3}{50 \times 90} = 20\ MPa$$

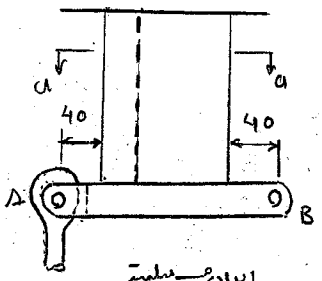
$$\sigma_m = \frac{3P(h-2a)}{bh^2} = \frac{3(90\times10^3)(90-2\times30)}{(50)(90)^2} = 20\ MPa$$

$$\sigma_A = \sigma_0 + \sigma_m = 40\ MPa$$

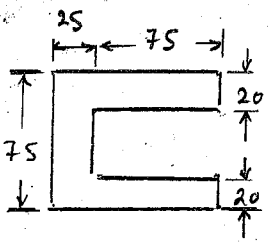
$$\sigma_B = \sigma_0 - \sigma_m = 0$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

حل تمرین مقاومت مصالح



ابعاد بر حسب میلیمتر

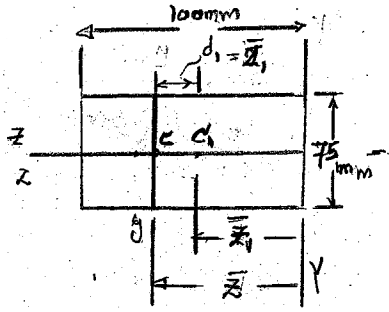


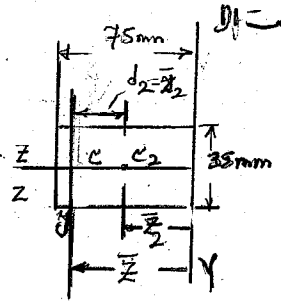
مقطع a-a

(حل ۴)

مطابق شکل ۴-۱۲۸ میله عمودی متصل به تکیه‌گاه A، نیروی عمودی به مقطع جدار نازک وارد می‌کند. ضخامت جدار در مقطع چقدر باشد تا تنش‌های مجاز در مقطع از حدود $\sigma_{all} = 35\ MPa$ و $\sigma_{all} = -85\ MPa$ تجاوز نکند؟

مطلوب است محاسبه مرکز سطح مقطع نسبت به پایین و محاسبه ممان اینرسی حول محور گذرنده از مرکز سطح





$$\bar{z} = \frac{A_1\bar{z}_1 - A_2\bar{z}_2}{A_1 - A_2}$$

$A_1 = 100 \times 75$ $\quad A_2 = 75 \times 35$

$\bar{z}_1 = 50\ mm$ $\quad \bar{z}_2 = 37.5\ mm$

$\bar{z} = 56.731\ mm$

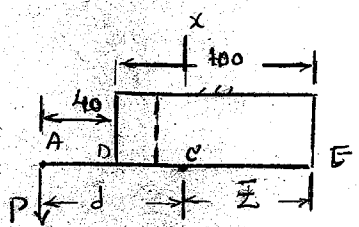
$I_y = I = I_1 - I_2$

$I_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 d_1^2 = \frac{1}{12}(75)(100)^3 + (75\times100)(6.731)^2 = 6.5898 \times 10^6\ mm^4$

$I_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 d_2^2 = \frac{1}{12}(35)(75)^3 + (35\times75)(19.231)^2 = 2.201 \times 10^6\ mm^4$

$I = 4.389 \times 10^6\ mm^4$

برای بار در لبه پایین:



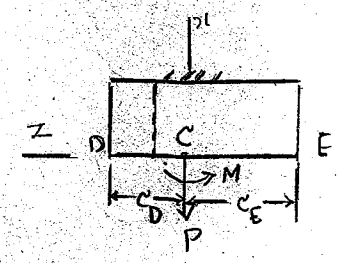
$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{P}{4875} = 2.051 \times 10^{-4} P$$

$$(\sigma_D)_M = \frac{M c_D}{I}$$

$c_D = 100 - \bar{z} = 100 - 56.731 = 43.269\ mm$

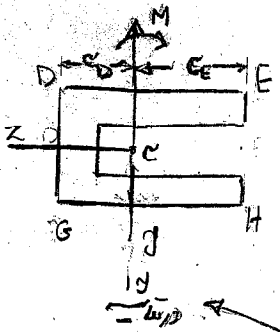
$c_E = \bar{z} = 56.731\ mm$

$M = Pd$ $\quad d = 100 - \bar{z} + 40 = 83.269\ mm$



$$(\sigma_D)_M = \frac{P(83.269)(43.269)}{4.389 \times 10^6} = 8.209 \times 10^{-4} P$$

$$(\sigma_E)_M = -\frac{M c_E}{I} = -10.763 \times 10^{-4} P$$



با توجه به شکل، بار P در نقطه E بیشترین تنش کششی و در نقطه D بیشترین مقدار تنش فشاری وجود خواهد داشت

$(\sigma_t)_m = \sigma_0 + (\sigma_D)_M = 2.051 \times 10^{-4} P + 8.209 \times 10^{-4} P = 10.26 \times 10^{-4} P$

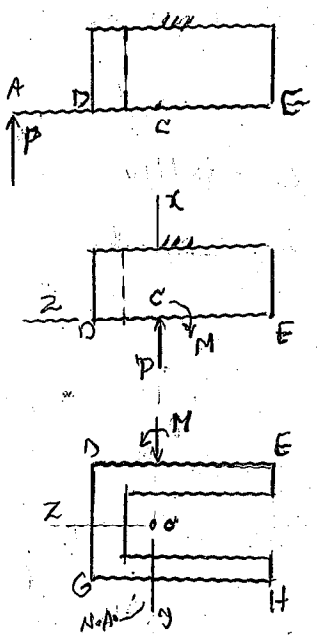
$(\sigma_t)_m = 35\ MPa \rightarrow P = 34.11\ KN \downarrow$

$(\sigma_c)_m = \sigma_0 + (\sigma_E)_M = 2.051 \times 10^{-4} P - 10.763 \times 10^{-4} P = -8.712 \times 10^{-4} P$

$(\sigma_c)_m = -85\ MPa \rightarrow P = 97.567\ KN \downarrow$

$P_{max} = 34.11\ KN \downarrow$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد



$$\sigma_0 = -\frac{P}{A} = -2.05\times10^{-4}P$$

$$(\sigma_D)_M = -\frac{Mc_D}{I} = -8.209\times10^{-4}P$$

$$(\sigma_E)_M = \frac{Mc_E}{I} = 10.763\times10^{-4}P$$

$$(\sigma_t)_m = (\sigma_E)_M + \sigma_0 = 10.763\times10^{-4}P - 2.05\times10^{-4}P = 8.712\times10^{-4}P$$

$$(\sigma_t)_m = 35\ MPa \rightarrow P = 40.174\ KN \uparrow$$

$$(\sigma_c)_m = (\sigma_D)_M + \sigma_0 = -8.209\times10^{-4}P - 2.05\times10^{-4}P = -10.259\times10^{-4}P$$

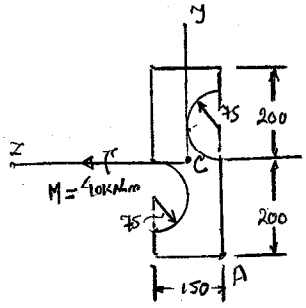
$$(\sigma_c)_m = -85\ MPa$$

$$\rightarrow P = 82.85\ KN \uparrow$$

$$P_{max} = 40.174\ KN \uparrow$$

(حل تمرین فصل 4)

۴-۱۴ گشتاور M در صفحه عمودی بر سطح مقطع تیر داده شده اعمال می‌گردد. مطلوب تنش در A.



تعیین لنگر دوم سطح نسبت به محورهای z و y:

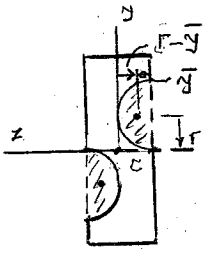
$$I_z = (I_1)_z - 2(I_2)_z$$

$$(I_1)_z = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(150)(400)^3 = 800\times10^6\ mm^4$$

$$(I_2)_z = \left(\frac{1}{8}\pi r^4 + Ar^2\right) = \frac{1}{8}\pi r^4 + \frac{1}{2}\pi r^4 = \frac{5}{8}\pi r^4 = \frac{5}{8}\pi(75)^4 = 62.126\times10^6\ mm^4$$

($I_{z'}$)

$$I_z = 675.748\times10^6\ mm^4$$

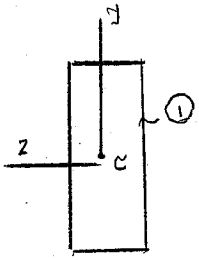


$$I_y = (I_1)_y - 2(I_2)_y$$

$$(I_1)_y = \frac{1}{12}hb^3 = \frac{1}{12}(400)(150)^3 = 112.5\times10^6\ mm^4$$

$$(I_2)_y = \left(\frac{1}{8}\pi r^4 - A\bar{y}^2\right) + A(r-\bar{y})^2$$

$$(I_2)_y = \frac{1}{8}\pi r^4 + Ar^2 - 2Ar\bar{y} = (I_2)_z - 2\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)r\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = (I_2)_z - \frac{4}{3}r^4$$



$$(I_2)_y = 62.126\times10^6 - \frac{4}{3}(75)^4 = 19.939\times10^6\ mm^4$$

$$I_y = 72.623\times10^6\ mm^4$$

تعیین حاصلضرب اینرسی مقطع:

$$P_{yz} = I_{yz} = (I_{yz})_1 - (I_{yz})_2 - (I_{yz})_3$$

برای مقطع 1: به دلیل تقارن

$$(I_{yz})_1 = 0$$

برای مقطع 2: به دلیل تقارن

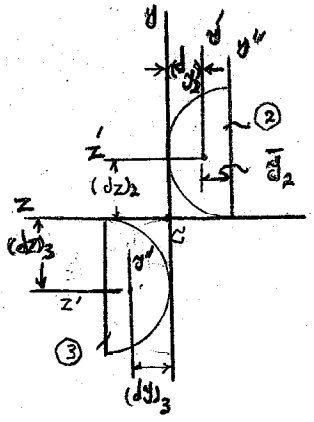
$$(I_{z''y''})_2 = (I_{z'y'})_2 = 0$$

تغییر محورهای مختصاتی

$$(I_{yz})_2 = (I_{y'z'})_2 + A_2(d_y)_2(d_z)_2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\pi r^2 \qquad (d_y)_2 = -(r-\bar{y}) \qquad (d_z)_2 = r$$

$$(I_{yz})_2 = \frac{1}{2}\pi r^2\left[-\left(r-\frac{4r}{3\pi}\right)\right](r) = -\frac{1}{2}\pi r^4\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)$$



برای مقطع 3: به دلیل تقارن

$$(I_{y''z''})_3 = (I_{y'z'})_3 = 0$$

$$(I_{yz})_3 = (I_{y'z'})_3 + A_3(d_y)_3(d_z)_3$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\pi r^2 \qquad (d_y)_3 = (r-\bar{y}) \qquad (d_z)_3 = -r$$

$$(I_{yz})_3 = \frac{1}{2}\pi r^2\left(r-\frac{4r}{3\pi}\right)(-r) = -\frac{1}{2}\pi r^4\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)$$

$$I_{yz} = 2\,\frac{1}{2}\pi r^4\left(1-\frac{4}{3\pi}\right) = \pi(75)^4\left(1-\frac{4}{3\pi}\right) = 57.214\times10^6\ mm^4$$

تعیین موقعیت محورهای اصلی: روش دایره‌ای

$$\tan 2\theta_m = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2(57.214\times10^6)}{(675.748\times10^6 - 72.623\times10^6)}$$

$$\theta_m = 5.3710^\circ \curvearrowleft$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

«مقاومت مصالح»

(حل مسائل فصل ۴)

ادامه حل ۴-۳۴) تعیین مقدار و موقعیت محاسبه و محاسبه لنگر در سطح

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\theta - I_{yz}\sin 2\theta$$

$$\theta = \theta_m$$

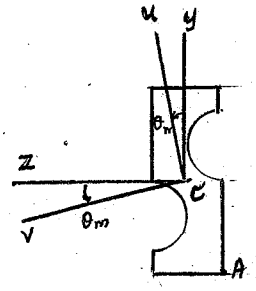
$$I_{y'} = \frac{(72.623 + 675.748)\times 10^6}{2} + \frac{(72.623 - 675.748)\times 10^6}{2}\cos 2(5.371) - 57.214\times 10^6 \sin 2(5.371)$$

$$I_{y'} = 67.243 \times 10^6 \ mm^4 = I_{min} = I_u$$

بنابراین محور حداقل مقدار I (محور u) است که محور y دارای زاویه θ_m خواهد بود. برای محاسبه I_{max} داریم

$$I_{max} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}$$

$$I_{max} = 681.127 \times 10^6 \ mm^4 = I_v$$

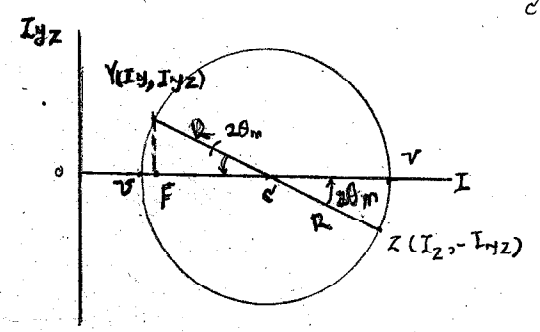


روش رسم دایره موهر :

$$OC = I_{ave} = \frac{I_y + I_z}{2} = \frac{(72.623 + 675.748)}{2} = 374.3$$

$$CF = OC - OF = I_{ave} - I_y = 301.7$$

$$\tan 2\theta_m = \frac{FY}{CF} = \frac{I_{xy}}{CF} = \frac{57.214}{301.7} \rightarrow \theta_m = 5.37^\circ \ \text{ساعتگرد}$$



$$R = \sqrt{CF^2 + YF^2} = 307.07$$

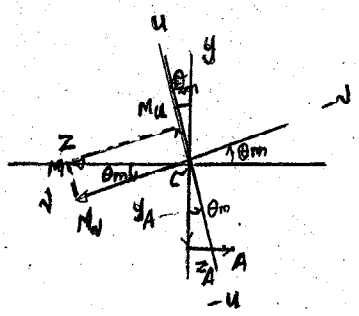
$$OV = I_{ave} - R = 67.243$$

$$I_u - I_{min} = 67.243 \times 10^6 \ mm^4$$

$$OV = I_{ave} + R = 681.127$$

$$I_v = I_{max} = 681.127 \times 10^6 \ mm^4$$

تعیین موقعیت A در محورهای اصلی :



$$u_A = -y_A \cos\theta_m - z_A \sin\theta_m$$

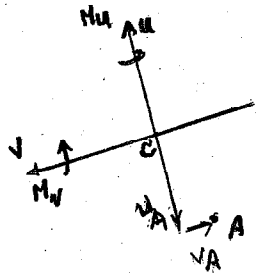
$$y_A = 200 \ mm \qquad z_A = 75 \ mm \rightarrow u_A = -206.139 \ mm$$

$$v_A = y_A \sin\theta_m - z_A \cos\theta_m \rightarrow v_A = -55.96 \ mm$$

تعیین مؤلفه‌های لنگر خمشی :

$$M_N = M\cos\theta_m = 40\cos 5.371 = 39.825 \ KN.m$$

$$M_u = M\sin\theta_m = 3.742 \ KN.m$$



تعیین تنش در نقطه A :

$$\sigma_A = -\frac{M_N u_A}{I_N} + \frac{M_u v_A}{I_u}$$

$$\sigma_A = -\frac{(39.825)(-206.139)}{681.127\times 10^{-6}} + \frac{(3.742)(-55.96)}{67.243}$$

$$\sigma_A = 8.934 MPa$$

حل تمرین فصل پنجم

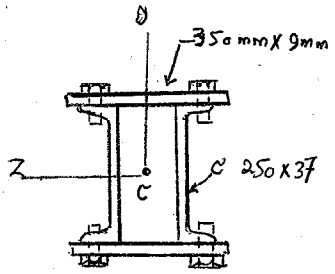
بارگذاری عرضی

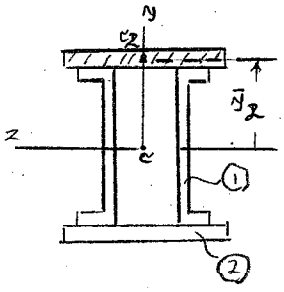
۵۲۱/۶۵۰

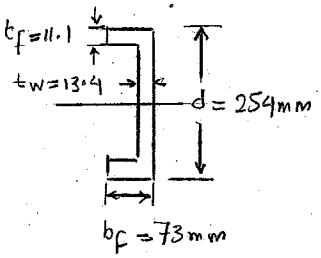
« مقاومت مصالح »

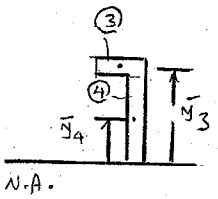
(حل نمونه سئوال ۵)

۵ - ۸) تیری بوسیله اتصال صفحات فولادی به مقاطع ناودانی در محل اتصالات چندین پرچ برای اتصال از پیچ‌هایی با قطر 18mm در هر سه طولی 150mm استفاده شده است. مطلوب است تنش برشی متوسط در پیچ‌ها و سپس تنش برشی 125kN در محل اتصال تحت تأثیر نیروی برشی









$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$I = 2I_1 + 2I_2$$

$I_1 = 38\times10^6\ mm^4$, $d = 254\ mm$

$$\bar{y}_2 = \frac{254+9}{2} = 131.5\ mm$$

$$I_2 = \frac{1}{12}(350)(9)^3 + (350\times9)(131.5)^2 = 54.492\times10^6\ mm^4$$

$$\rightarrow I = 184.984\times10^6\ mm^4$$

$$Q_2 = A_2\bar{y}_2 = (350\times9)(131.5) = 414.225\times10^3\ mm^3$$

$$q = \frac{(125\times10^3)(414.225\times10^{-6})}{(184.984\times10^{-6})} = 279.906\times10^3$$

$$\Delta H = q\,\Delta x \quad , \quad \Delta x = 150\ mm$$

$$\Delta H = (279.906)(150\times10^{-3}) = 41.986\ kN$$

$$\tau_{ave} = \frac{\Delta H}{2A}$$

$$A = \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}(18)^2 = 254.47\ mm^2$$

$$\tau_{ave} = \frac{41.986\times10^3}{2(254.47\times10^{-6})} = 82.497\ MPa$$

تنش برشی:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{I(2t_w)}$$

$$Q = Q_2 + 2(Q_3 + Q_4)$$

$$Q_2 = A_2\bar{y}_2 = 414.225\times10^3\ mm^3$$

$$Q_3 = A_3\bar{y}_3 = (t_f\cdot b_f)\bar{y}_3 = (11.1)(73)\left[\frac{254}{2} - \frac{11.1}{2}\right]$$

$$= 98.91\times10^3\ mm^3$$

$$Q_4 = A_4\bar{y}_4 = t_w\cdot(d/2 - t_f)\left(\frac{1}{2}\right)(d/2 - t_f)$$

$$= \frac{1}{2}t_w\left(\frac{d}{2} - t_f\right)^2 = 90\times10^3\ mm^3$$

$$Q = 791.04\times10^3\ mm^3$$

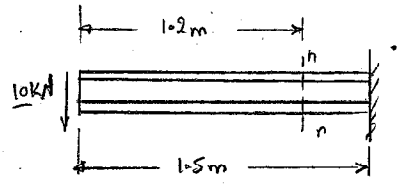
$$\tau_{xy} = \frac{(125\times10^3)(791.04\times10^{-6})}{(184.984\times10^{-6})[2(13.4\times10^{-3})]} = 19.95\ MPa$$

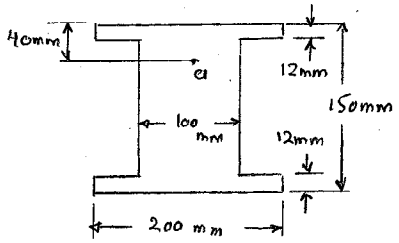
«مقاومت مصالح»

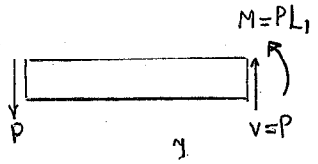
(حل مثرین فصل 5)

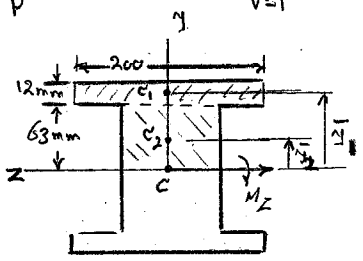
5-10) برای تیر بارگذاری شده نشان داده شده مطلوب در مقطع n-n

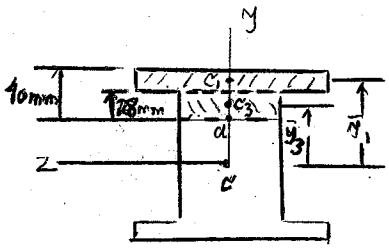
الف) حداکثر تنش عمودی ب) حداکثر تنش برشی ج) تنش برشی در d.











تعادل استاتیکی:

$M = PL_1 = 10(1.2) = 12\ kN.m$

$V = 10\ kN$

$I = 2I_1 + 2I_2$

$A_1 = 12 \times 200 = 2400\ mm^2 \qquad A_2 = 63 \times 100 = 6300\ mm^2$

$I_1 = \frac{1}{12}(200)(12)^3 + (2400)(69)^2 = 11.455 \times 10^6\ mm^4$

$I_2 = \frac{1}{12}(100)(63)^3 + (6300)(31.5)^2 = 8.335 \times 10^6\ mm^4$

$I = 39.58 \times 10^6\ mm^4$

الف)

$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(12\times10^3)(75\times10^{-3})}{39.58\times10^{-6}} = 22.739\ MPa$

ب)

$(\tau_{ave})_{max} = \frac{VQ_{max}}{It}$

$Q = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 = (2400)(69) + (6300)(31.5)$

$Q = 364.05 \times 10^3\ mm^3$

$(\tau_{ave})_{max} = \frac{(10\times10^3)(364.05\times10^{-6})}{(39.58\times10^{-6})(100\times10^{-3})} = 919.778\ kPa$

ج)

$(\tau_a)_{ave} = \frac{VQ}{It}$

$Q = A_1\bar{y}_1 + A_3\bar{y}_3$

$A_3 = 100 \times 28 = 2800\ mm^2 \qquad \bar{y}_3 = 63 - 14 = 49\ mm$

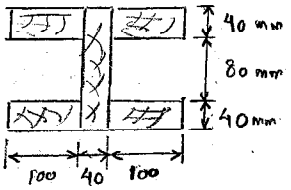
$Q = (2400)(69) + (2800)(49) = 302.8 \times 10^3\ mm^3$

$(\tau_a)_{ave} = \frac{(10\times10^3)(3.028\times10^{-4})}{(3.958\times10^{-5})(100\times10^{-3})} = 765.029\ kPa$

«مقاومت مصالح»

(حل تمرین فصل ۵)

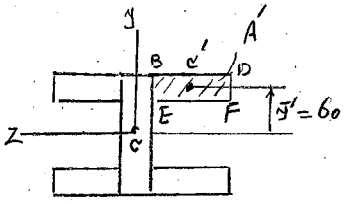
۵-۲۸ تیر طره‌ای با مقطع نشان داده شده تحت اثر نیروی برشی قائم V قرار دارد. تنش برشی حداکثر در مقطع a-a را در نقطه‌ای که تنش برشی $350\ kPa$ است، محاسبه کنید.



$$\tau_{ave} = \tau_{xz} = \frac{VQ}{It}$$

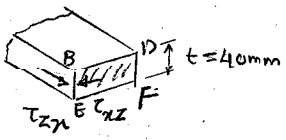
$$I = 2\left\{\frac{1}{12}(240)(40)^3 + (240)(40)(60)^2\right\} + \frac{1}{12}(40)(80)^3$$

$$I = 73.387 \times 10^6\ mm^4$$



$$Q = A'\bar{y}' = (100 \times 40)(60) = 240 \times 10^3\ mm^3$$

$\tau_{xz} = 350\ kPa$ $\quad t = 40\ mm$



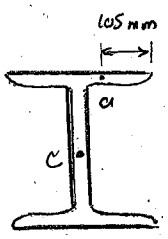
$$350 \times 10^3 = \frac{V\,[240 \times 10^{-6}]}{(73.738 \times 10^{-6})(40 \times 10^{-3})}$$

$$V = 4.281\ kN$$

۵-۲۹) تیر طره‌ای برشی عمودی $250\ kN$ به مقطع $W\,360 \times 122$ فولادی اعمال می‌شود. مطلوب است:

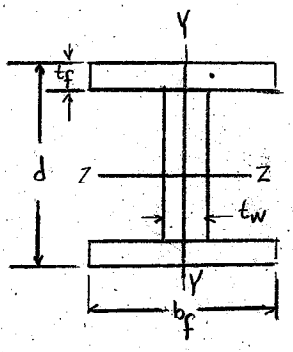
الف) تنش برشی در نقطه a

ب) در مرکز C.

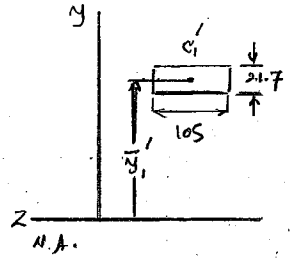


برای مقطع $W\,360 \times 122$ داریم:

$$d = 363\ mm \quad b_f = 257\ mm \quad t_f = 21.7\ mm \quad t_w = 13\ mm \quad I_z = 367 \times 10^6\ mm^4$$



الف)



$$\tau_{xz} = \frac{VQ_1}{It_1}$$

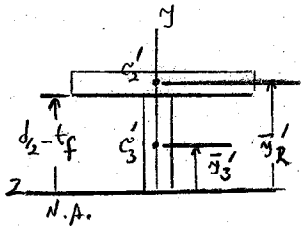
$$I = 367 \times 10^6\ mm^4 \qquad \bar{y}_1' = \frac{d}{2} - \frac{t_f}{2} = \frac{1}{2}(363 - 21.7) = 170.65\ mm$$

$$Q_1 = A_1'\bar{y}_1' = (105 \times 21.7)(170.65) = 388.83 \times 10^3\ mm^3$$

$$t_1 = t_f = 21.7\ mm$$

$$\tau_{xz} = \frac{(250 \times 10^3)(388.83 \times 10^{-6})}{(367 \times 10^{-6})(21.7 \times 10^{-3})} = 12.21\ MPa$$

ب)



$$Q_2 = A_2'\bar{y}_2' + A_3'\bar{y}_3'$$

$$A_2' = b_f t_f = (257)(21.7) = 5576.9\ mm^2$$

$$\bar{y}_2' = \frac{1}{2}(d - t_f) = 170.65\ mm$$

$$A_3' = \left(\frac{d}{2} - t_f\right)t_w = \left(\frac{363}{2} - 21.7\right)(13) = 2077.4\ mm^2$$

$$\bar{y}_3' = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} - t_f\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{363}{2} - 21.7\right) = 79.9\ mm$$

$$Q_2 = (5576.9)(170.65) + (2077.4)(79.9) = 1.118 \times 10^6\ mm^3$$

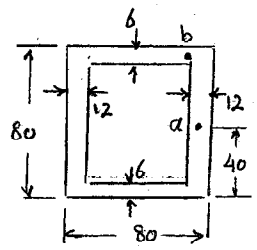
$$\tau_{xy} = \frac{VQ_2}{It_2} = \frac{(250 \times 10^3)(1.118 \times 10^{-3})}{(367 \times 10^{-6})(13 \times 10^{-3})} = 58.867\ MPa$$

مقاومت مصالح

(حل تمرین فصل ۵)

۵-۴۶) تعلق دارد. مطلوب تنش برشی در

الف) نقطه a ب) نقطه b



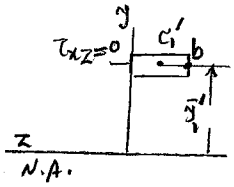
$$I = 2I_1 + 2I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{12}(80-24)(6)^3 + [(80-24)(6)](37)^2 = 460.992\times10^3\ mm^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12}(12)(80)^3 = 512\times10^3\ mm^4$$

$$I = 1.946\times10^6\ mm^4$$

الف)



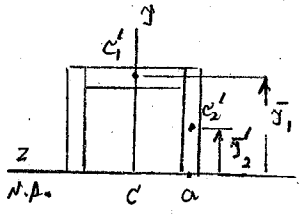
$$Q = A_1'\bar{y}_1' \qquad A_1' = \frac{1}{2}[6(80-24)] = 168\ mm^2$$

$$\bar{y}_1' = 40 - \frac{6}{2} = 37\ mm$$

$$Q = 6216\ mm^3 \qquad t = 6\ mm$$

$$\tau_{xz} = \frac{VQ}{It} = \frac{(75\times10^3)(6216\times10^{-9})}{(1.946\times10^{-6})(6\times10^{-3})} = 39.928\ MPa$$

ب)



$$Q_1 = 2(6216) = 12432\ mm^3$$

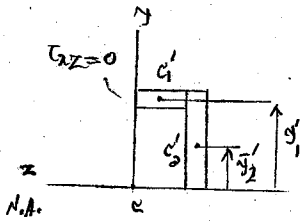
$$Q_2 = 2(12\times40)\left(\frac{40}{2}\right) = 19200\ mm^3$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 31632\ mm^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} \qquad t = 24-12 = 24\ mm$$

$$\tau_{xy} = \frac{(75\times10^3)(31632\times10^{-9})}{(1.946\times10^{-6})(24\times10^{-3})} = 50.797\ MPa$$

روش دوم)



$$Q_1 = 6216\ mm^3 \qquad Q_2 = (12\times40)\left(\frac{40}{2}\right) = 9600\ mm^3$$

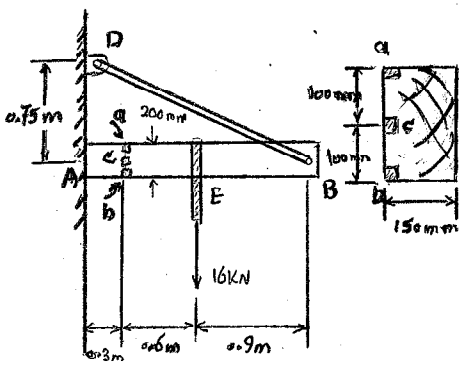
$$Q = Q_1 + Q_2 = 15816\ mm^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} \qquad t = 12\ mm$$

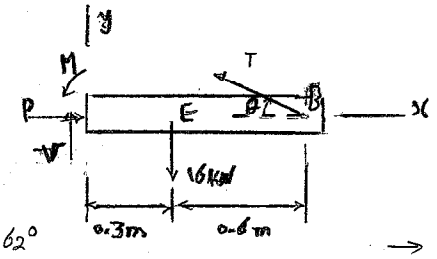
$$\tau_{xy} = \frac{(75\times10^3)(15816\times10^{-9})}{(1.946\times10^{-6})(12\times10^{-3})} = 50.797\ MPa$$

(حل تمرین فصل ۵)

۵-۶۴) تیر یکسر گیردار AB دارای مقطع مستطیلی 150 x 200 mm از سه سیم کابل کشش دهنده BD، 10.4 kN، وزن سنگین 16 kN مطابق شکل تحمل کرده است. مطلوب تنش‌های عمودی و برشی در نقطه‌های داده شده.



پاسخ) تحلیل استاتیکی:

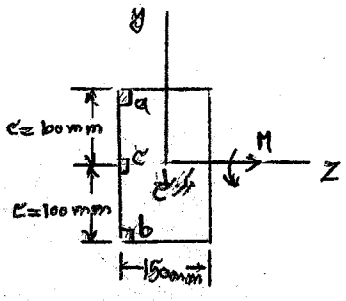


$\Sigma F_x = 0$

$P - T\cos\theta = 0 \rightarrow P = 10.4\cos 22.62^\circ \rightarrow P = 9.6\ KN$

$\Sigma F_y = 0: \quad V = 16 - T\sin\theta = 12\ KN$

$+\circlearrowleft \Sigma M_z = 0 \quad M = 16(0.3) - T\sin\theta(0.9) \rightarrow M = 3.6\ KN.m$



- تحلیل تنش عمودی:

$I_z = I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(150)(200)^3 = 100\times10^6\ mm^4 = 100\times10^{-6}\ m^4$

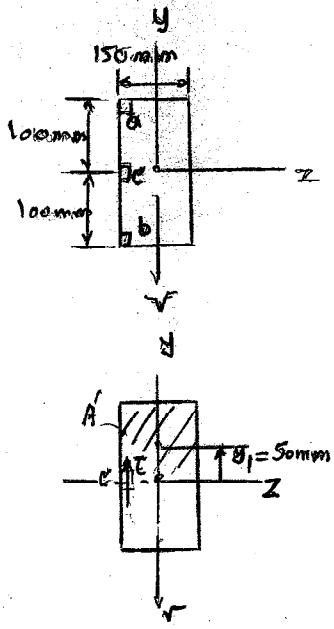
$A = 150\times200 = 30\times10^3\ mm^2 = 30\times10^{-3}\ m^2$

در نقطه a: $\sigma_a = -\frac{P}{A} + \frac{M_z\cdot c}{I_z} = -\frac{9.6\times10^3}{30\times10^{-3}} + \frac{(3.6\times10^3)(100\times10^{-3})}{100\times10^{-6}}$ (3.6 MPa)

$\sigma_a = 3.28\ MPa$

در نقطه c: $\sigma_c = -\frac{P}{A} = -\frac{9.6\times10^3}{30\times10^{-3}} = -320\ kPa = -0.32\ MPa$

در نقطه b: $\sigma_b = -\frac{P}{A} - \frac{M_z\cdot c}{I_z} = -\frac{9.6\times10^3}{30\times10^{-3}} - \frac{(3.6\times10^3)(100\times10^{-3})}{100\times10^{-6}} = -3.92\ MPa$



- تحلیل تنش برشی:

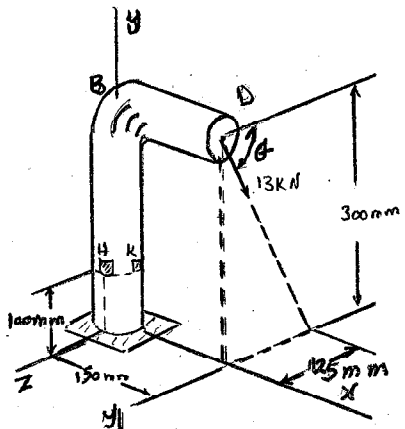
- در نقطه a و b: $\tau_a = 0$ ، $\tau_b = 0$

- در نقطه c: $\tau_c = \frac{VQ}{It}$

$t = b = 150mm$

$Q = A'\bar{y}_1 = (150\times100)\times(50) = 750\times10^3\ mm^3 = 750\times10^{-6}\ m^3$

$\tau_c = \frac{(12\times10^3)(750\times10^{-6})}{(100\times10^{-6})(150\times10^{-3})} = 600\ kPa = 0.6\ MPa$



(حل تمرین فصل ۵)

۵-۷) میله فولادی به قطر ۶۰mm مطابق شکل زیر تحت اثر نیروی ۱۳KN قرار دارد. مطلوب است تنش های عمودی و برشی در نقطه الف) H ب) K

پاسخ: تحلیل استاتیکی:

$\Sigma F_y = 0 : \quad V_y = P = 13\sin\theta = 15kN$

$\Sigma F_z = 0 : \quad V_z = 13\cos\theta = 5kN$

$\theta = 67.38^\circ \quad ! \quad \tan\theta = \frac{300}{125}$ درجه تکیه

$\Sigma M_y = 0 \rightarrow M_y = T = (13\cos\theta)(0.15) = 0.75 KN.m$

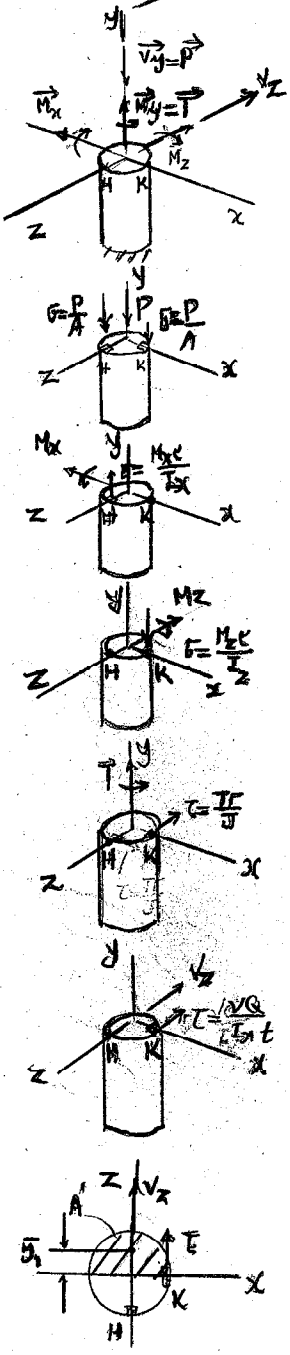
$\Sigma M_z = 0 \rightarrow M_z = (13\sin\theta)(0.15) = 1.8 KN.m$

$\Sigma M_x = 0 \rightarrow M_x = (13\cos\theta)(0.2) = 1 KN.m$

تحلیل هندسی:

$I_x = I_z = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{1}{4}\pi(30)^4 = 636.2\times10^3 mm^4 = 0.636\times10^{-6} m^4$

$J = 2I_x = 2I_z = \frac{1}{2}\pi r^2 = 1.272\times10^{-6} m^4 \quad , \quad A = \pi r^2 = 2.827\times10^{-3} m^2$



الف) در نقطه H:

$\sigma_H = -\frac{P}{A} + \frac{M_x c}{I_x} = \underbrace{-\frac{12\times10^3}{2.827\times10^{-3}}}_{-4.42MPa} + \underbrace{\frac{(1\times10^3)(30\times10^{-3})}{636.2\times10^{-9}}}_{47.15MPa} = +42.9 MPa$

$\tau_H = \frac{Tr}{J} = \frac{(0.75\times10^3)(30\times10^{-3})}{1.272\times10^{-6}} = 17.68 MPa$

ب) در نقطه K:

$\sigma_K = -\frac{P}{A} - \frac{M_z c}{I_z} = \underbrace{-\frac{12\times10^3}{2.827\times10^{-3}}}_{-4.42MPa} \underbrace{-\frac{(1.8\times10^3)(30\times10^{-3})}{0.6362\times10^{-6}}}_{-84.9MPa} = -89.13 MPa$

$\tau_K = \frac{Tr}{J} + \frac{V_z Q}{I_x t}$

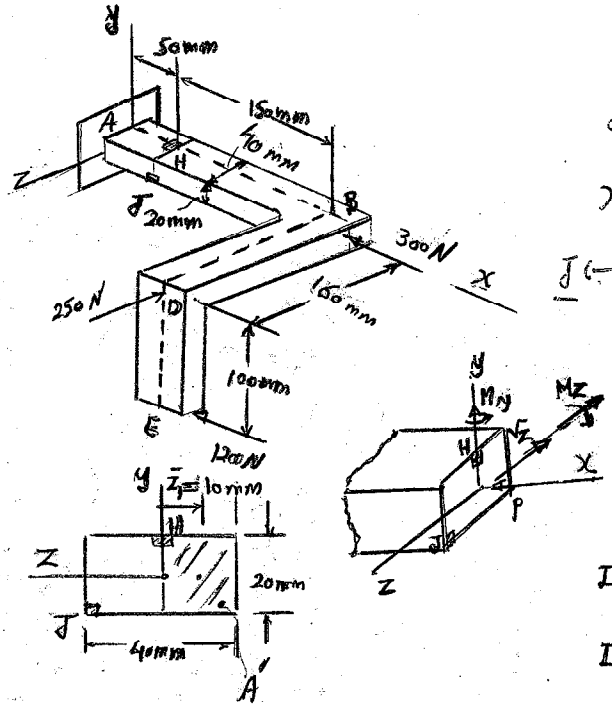
$I = I_x \quad , \quad t = 2r \quad , \quad Q = A'\bar{y}_1$

$A' = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}A \qquad \bar{y}_1 = \frac{4r}{3\pi} \rightarrow Q = 18\times10^{-6} m^3$

$\tau_K = \underbrace{\frac{(0.75\times10^3)(30\times10^{-3})}{1.272\times10^{-6}}}_{17.68} + \underbrace{\frac{(5\times10^3)(18\times10^{-6})}{(0.636\times10^{-6})(60\times10^{-3})}}_{2.358} = 20.04 MPa$

حل تمرین «فصل ۵»

۵-۷۸) سیستم تیرهای نشان داده شده به مقطع ABDG متصل شده است. می‌خواهیم در دو نقطه H و J مقطع مستطیلی را ایجاد کنیم. ابعاد مقطع 20×40mm باشد مطلوب است تنش‌های عمود بر سطح در نقطه الف H ← J



تحلیل استاتیکی:

$M_y = 250(0.15) + 120(0.16) = 18.3\ N.m$

$M_z = 120(0.1) = 12\ N.m$

$P = 300 + 120 = 420\ N \qquad V_z = 250\ N$

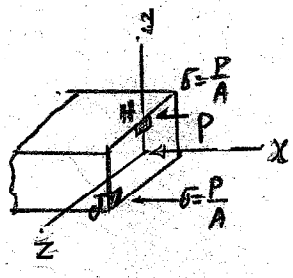
تحلیل هندسی:

$I_y = \frac{1}{12} 20(40)^3 = 0.1067 \times 10^{6}\ mm^4 = 0.1067 \times 10^{-6}\ m^4$

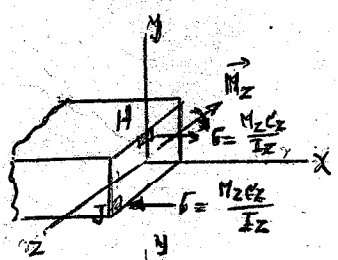
$I_z = \frac{1}{12} 40(20)^3 = 0.0267 \times 10^{6}\ mm^4 = 0.0267 \times 10^{-6}\ m^4$

$A = 20 \times 40 = 800\ mm^2 = 800 \times 10^{-6}\ m^2$

الف) تحلیل تنش در نقطه H:



$\sigma_H = -\frac{P}{A} + \frac{M_z c_z}{I_z} = \underbrace{-\frac{420}{800\times10^{-6}}}_{-0.525\ MPa} + \underbrace{\frac{12(10\times10^{-3})}{0.0267\times10^{-6}}}_{4.494\ MPa} = 3.969\ MPa$

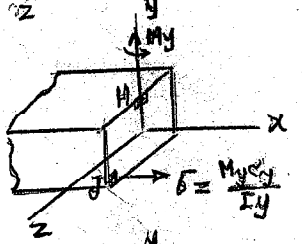


$\tau_H = \frac{VG}{It} \qquad G = A'\bar{z}_1 \qquad , \quad t = 20\ mm$

$A' = 20\times20 = 400\ mm^2 = 400\times10^{-6}\ m^2 \qquad , \quad \bar{z}_1 = 10\ mm$

$G = (400\times10^{-6})(10\times10^{-3}) = 4\times10^{-6}\ m^3$

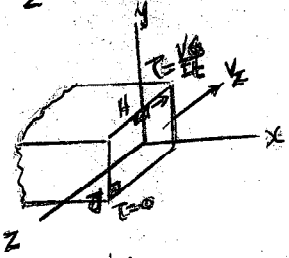
$\tau_H = \frac{(250)(4\times10^{-6})}{(0.1067\times10^{-6})(20\times10^{-3})} = 0.469\ MPa$

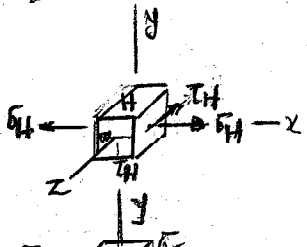


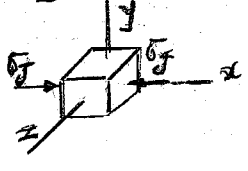
ب) تحلیل تنش در نقطه J:

$\sigma_J = -\frac{P}{A} + \underbrace{\frac{M_y c_y}{I_y}}_{-0.525} - \underbrace{\frac{M_z c_z}{I_z}}_{3.43} \qquad \underbrace{\quad}_{-4.494}$

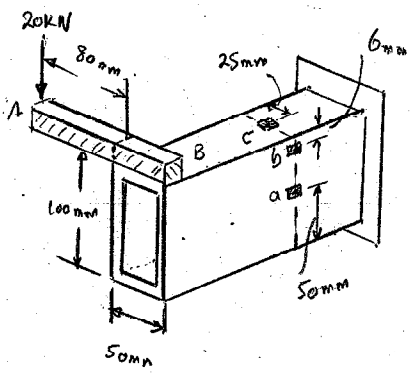
$\sigma_J = \underbrace{\frac{-420}{800\times10^{-6}}}_{} + \underbrace{\frac{18.3(20\times10^{-3})}{0.1067\times10^{-6}}}_{} - \underbrace{\frac{12(10\times10^{-3})}{0.0267\times10^{-6}}}_{} = -1.589\ MPa$







«مقاومت مصالح»



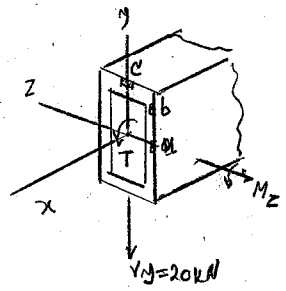
(حل تمرین فصل ۵)

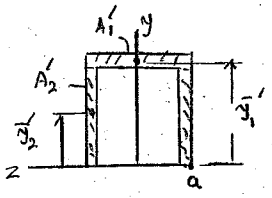
۵-۹۲) نیروی عمودی 20kN در سر A میله AB که به تیوب آلومینیومی جدار نازک متصل است اعمال می‌گردد. ضخامت تیوب در ناحیه نشان داده شده 6mm است. مطلوب تنش برشی در نقطه‌های a و b.

در نقطه a:

$$\tau_a = -\frac{VQ_a}{2It_a} + \frac{T}{2t_aA}$$

$V_y = 20kN$ $t_a = 6mm$



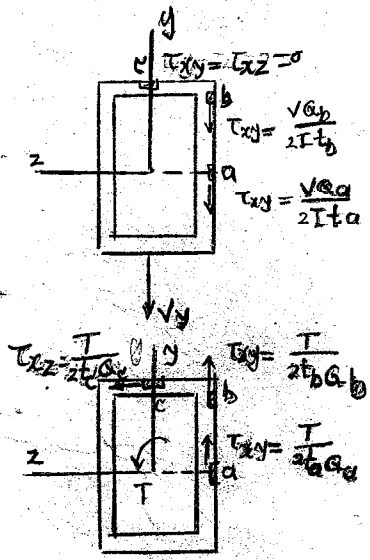


$$Q_a = A_1'\bar{y}_1' + 2A_2'\bar{y}_2'$$

$A_1' = 50\times6 = 300\ mm^2$ $\bar{y}_1' = 50 - \frac{6}{2} = 47mm$

$A_2' = (50-6)(6) = 264\ mm^2$ $\bar{y}_2' = \frac{50-6}{2} = 22mm$

$Q_a = 25.716\times10^3\ mm^3$



$$I = \frac{1}{12}(50)(100)^3 - \frac{1}{12}(50-12)(100-12)^3 = 2.0087\times10^6\ mm^4$$

$$T = 20\times10^3\ [(80+25)\times10^{-3}] = 2100\ N\cdot m$$

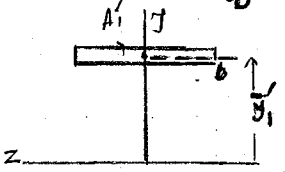
$$A = (100-6)(50-6) = 4136\ mm^2$$

$$\tau_a = -\frac{(20\times10^3)(25.716\times10^{-6})}{2(2.0087\times10^{-6})(6\times10^{-3})} + \frac{2100}{2(6\times10^{-3})(4136\times10^{-6})}$$

$$\tau_a = -21.337\times10^6 + 42.311\times10^6 = 20.977\ MPa$$

در نقطه b:

$$\tau_b = -\frac{V_yQ_b}{2It_b} + \frac{T}{2t_bA}$$

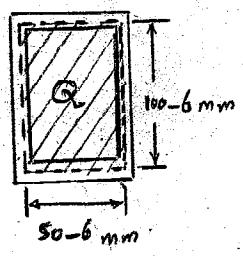


$$Q_b = A_1'\bar{y}_1' = (50\times6)(47) = 14.1\times10^3\ mm^3$$

$$\tau_b = -\frac{(20\times10^3)(14.1\times10^{-6})}{2(2.0087\times10^{-6})(6\times10^{-3})} + \frac{2100}{2(6\times10^{-3})(4136\times10^{-6})}$$

$$\tau_b = -11.699\times10^6 + 42.311\times10^6$$

$$\tau_b = 30.612\ MPa$$



در نقطه c:

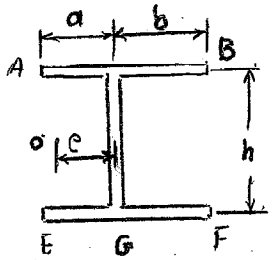
$$\tau_c = \frac{T}{2t_bA} = \frac{2100}{2(6\times10^{-3})(4136\times10^{-6})} = 42.311\ MPa$$

انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

«مقاومت مصالح»

تمرین «فصل ۵»

۵-۹۸ معلومیت محل مرکز برش O برای مقاطع جداره نازک با ضخامت یکنواخت



$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$Q = st\,h/2$$

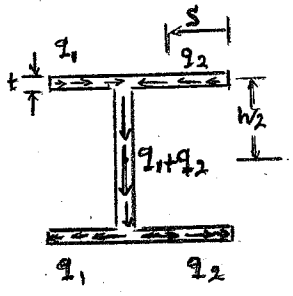
$$I = 2\left\{\frac{1}{12}(a+b)t^3 + (a+b)t\left(\frac{h}{2}\right)^2\right\} + \frac{1}{12}th^3$$

($t^3 \approx 0$)

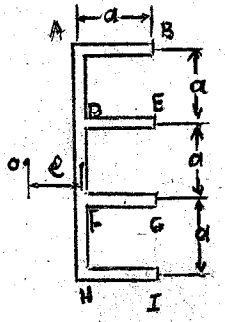
$$I = \frac{1}{2}(a+b)th^2 + \frac{1}{12}th^3$$

$$F = F_1 - F_2 = \int_0^b q\,ds - \int_0^a q\,ds = \int_a^b q\,ds$$

$$F = \int_a^b \frac{Vsth}{2I}\,ds = \frac{Vth}{4I}(b^2-a^2)$$



$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{th^2(b^2-a^2)}{2(a+b)th^2 + \frac{1}{3}th^3} = \frac{3(b^2-a^2)}{6(a+b)+h}$$



۵-۱۰۰)

$$Q_1 = st\left(\frac{3a}{2}\right) \qquad q_1 = \frac{VQ_1}{I} = \frac{3Vsta}{2I}$$

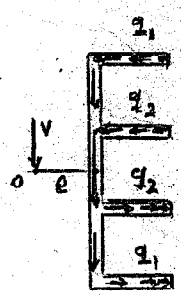
$$Q_2 = st\left(\frac{a}{2}\right) \qquad q_2 = \frac{VQ_2}{I} = \frac{Vsta}{2I}$$

$$I = 2\left\{\frac{1}{12}at^3 + at\left(\frac{3a}{2}\right)^2\right\} + 2\left\{\frac{1}{12}at^3 + at\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\} + \frac{1}{12}t(3a)^3$$

($at^3 \approx 0$)

$$I = \frac{29ta^3}{4}$$

$$F_1(3a) + F_2(a) = Ve \rightarrow e = \frac{F_1(3a)+F_2(a)}{V}$$



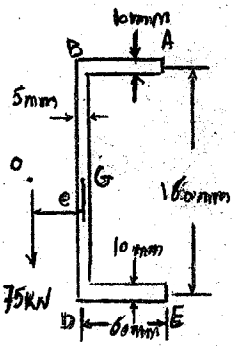
$$F_1 = \int_0^a q_1\,ds = \int_0^a \frac{3Vsta}{2I}\,ds = \frac{3Vta^3}{4I}$$

$$F_2 = \int_0^a q_2\,ds = \int_0^a \frac{Vsta}{2I}\,ds = \frac{Vta^3}{4I}$$

$$\rightarrow e = \frac{10a}{29}$$

۵-۱۰۲) برای مقطع زیر داده شده مطلوبست الف) موقعیت مرکز برش O

ب) توزیع تنش برشی ناشی از نیروی برشی 75KN اعمال شده در O



الف)

$$Q = st\left(\frac{h}{2}\right) \qquad q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vsth}{2I}$$

$$I = 2\left\{\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right\} + \frac{1}{12}t'h^3 = \frac{bth^2}{2} + \frac{1}{12}t'h^3$$

($bt^3 \approx 0$)

$$Fh = Ve \rightarrow e = \frac{Fh}{V}$$

$$F = \int_0^b q\,ds = \int_0^b \frac{Vsth}{2I}\,ds = \frac{Vth}{2I}\int_0^b s\,ds = \frac{Vth}{4I}b^2$$

$$e = \frac{tb^2h^2}{4\left(\frac{bth^2}{2} + \frac{1}{12}t'h^3\right)} = \frac{3tb^2h^2}{6bth^2 + t'h^3}$$

«حل تمرین فصل 5»

$$e = \frac{3(10)(60)^2(160)^2}{6(60)(10)(160)^2+(5)(160)^3} = 24.55\ mm$$ (پاسخ کتاب 24.5 mm)

ب)

درست با لگما:

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{Vh}{2I}s$$

درست ملاق:

$$Q = bt\left(\frac{h}{2}\right) + st'\left(\frac{h}{2}-\frac{s}{2}\right) = \frac{bht}{2} + \frac{t'h}{2}s - \frac{t's^2}{2}$$

$$q = \frac{VQ}{I}, \quad \tau = \frac{q}{t'} = \frac{VQ}{It'}$$

$$\tau = \frac{V}{It'}\left(-\frac{t'}{2}s^2 + \frac{t'h}{2}s + \frac{bht}{2}\right)$$

پاسخ کلی:

در بالگی: $\tau = \frac{Vh}{2I}s$, $V=75\ kN$, $h=160\ mm$

$$I = \frac{bt^2}{2} + \frac{1}{12}t'h^3 = \frac{(60)(10)(160)^2}{2} + \frac{1}{12}(5)(160)^3 = 9.387\times10^{6}\ mm^4 = 9.387\times10^{-6}\ m^4$$

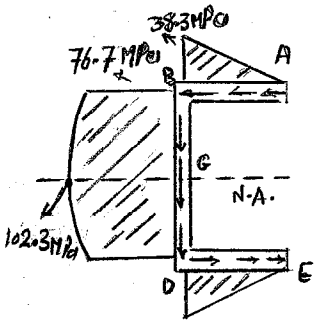
$$\tau = \frac{(75\times10^3)(160\times10^{-3})}{2(9.387\times10^{-6})}s = 639.2\times10^6\, s$$

$$\tau_B = 639.2\times10^6(60\times10^{-3}) = 38.352\ MPa$$

در جان: $\tau = 6.598\times10^{12}\left(-2.5\times10^{-3}s^2 + 4\times10^{-4}s + 4.8\times10^{-5}\right)$

$s_B = 0 \rightarrow \tau_B = 76.7\ MPa$

در بالهٔ فوقانی: $s_G = 80\ mm \rightarrow \tau_G = 102.272\ MPa$



۵-۱۰۴) برای تیری با سطح مقطع نشان داده شده مطلوب است الف) موقعیت مرکز برش O

ب) توزیع تنش برشی

الف)

$$Q_1 = (st_1)\frac{1}{2}(\bar{AG}+s), \quad q_1 = \frac{VQ_1}{I} = \frac{Vt_1}{2I}(s^2+\bar{AG}s)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}a_1t_1(\bar{AG}+a_1) + (st_2)\left(\frac{h}{2}\right)$$

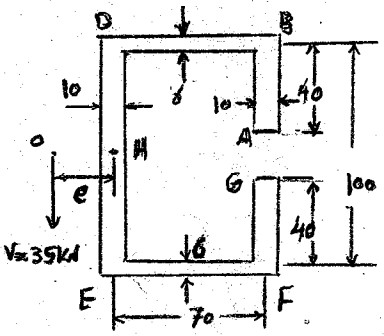
$$q_2 = \frac{VQ_2}{I} = \frac{V}{2I}(ht_2s + a_1^2t_1 + a_1\bar{AG}t_1)$$

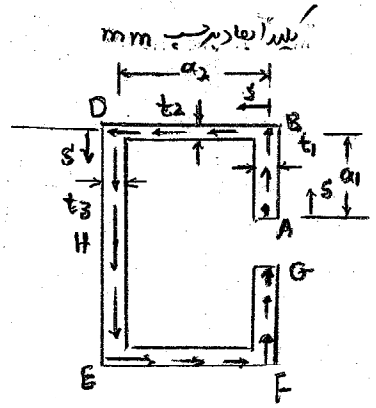
$$Q_3 = \frac{1}{2}(ht_2a_2 + a_1^2t_1 + a_1\bar{AG}t_1) + st_3\left(\frac{h}{2}-\frac{s}{2}\right)$$

$$Q_3 = -\frac{t_3}{2}s^2 + \frac{ht_3}{2}s + \frac{1}{2}(ht_2a_2 + a_1^2t_1 + a_1\bar{AG}t_1)$$

$$q_3 = \frac{VQ_3}{I}$$

$$I = 2\left\{\frac{1}{12}t_1a_1^3 + t_1a_1\left(\frac{\bar{AG}}{2}+\frac{a_1}{2}\right)^2\right\} + 2\left\{\frac{1}{12}a_2t_2^3 + a_2t_2\left(\frac{h}{2}\right)^2\right\} + \frac{1}{12}t_3h^3$$





«تمرین فصل ۵»

ادامه مسئله ۵-۱۰۴

$$F_1(a_2) + F_2 h = Ve$$

$$F_1 = 2\int_0^{a_1} q_1\,ds = \frac{Vt_1}{I}\int_0^{a_1}(s^2 + A\bar{G}s)\,ds = \frac{Vt_1}{I}\left(\frac{a_1^3}{3} + \frac{A\bar{G}}{2}a_1^2\right)$$

$$F_2 = \int_0^{a_2} q_2\,ds = \frac{V}{2I}\int_0^{a_2}(ht_2 s + a_1^2 t_1 + a_1 A\bar{G} t_1)\,ds$$

$$= \frac{V}{2I}\left[\frac{ht_2}{2}a_2^2 + a_1^2 t_1 a_2 + a_1 A\bar{G} t_1 a_2\right]$$

اعداد مسئله:

$a_1 = 40\,mm$, $a_2 = 70\,mm$, $a_3 = 50\,mm$, $h = 100\,mm$

$t_1 = 10\,mm$, $t_2 = 6\,mm$, $t_3 = 6\,mm$, $V = 35\,KN$

$\rightarrow I = 3.7625 \times 10^{-6}\ m^4$, $F_1 = 3.473\,KN$, $F_2 = 14.661\,KN$

$\rightarrow e = 48.83\,mm$

ب)

$$\tau_1 = q_1/t_1 = \frac{V}{2I}(s^2 + A\bar{G}s)$$

$$\tau_2 = q_2/t_2 = \frac{V}{2I}\left(hs + a_1^2\frac{t_1}{t_2} + a_1 A\bar{G}\frac{t_1}{t_2}\right)$$

$$\tau_3 = q_3/t_3 = \frac{V}{2I}\left[-s^2 + hs + \left(h\frac{t_2}{t_3}a_2 + a_1^2\frac{t_1}{t_3} + a_1 A\bar{G}\frac{t_1}{t_3}\right)\right]$$

برش در جهت راست:

نقطه B :
$$\tau_B = \frac{V}{2I}(a_1^2 + A\bar{G}a_1) = \frac{35\times10^3}{2(3.76\times10^{-6})}\left[(40\times10^{-3})^2 + (20\times10^{-3})(40\times10^{-3})\right]$$

$$\tau_B = 11.163\ MPa$$

برش بالا به پایین:

نقطه D :
$$\tau_D = \frac{V}{2I}\left(hs + a_1^2\frac{t_1}{t_2} + a_1 A\bar{G}\frac{t_1}{t_2}\right)$$

$$\tau_D = 51.2\ MPa$$

نقطه B :
$$\tau_B = \frac{V}{2I}\left(a_1^2\frac{t_1}{t_2} + a_1 A\bar{G}\frac{t_1}{t_2}\right)$$

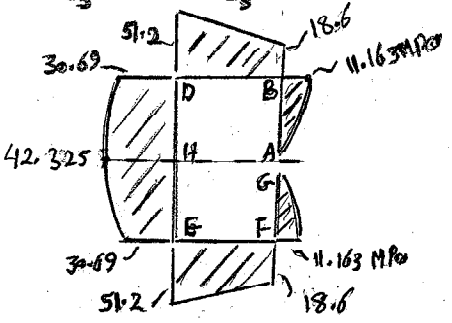
$$\tau_B = 18.6\ MPa$$

برش در جهت چپ:

نقطه D :
$$\tau_D = \frac{V}{I}\left[\frac{1}{2}\left(h\frac{t_2}{t_3}a_2 + a_1^2\frac{t_1}{t_3} + a_1 A\bar{G}\frac{t_1}{t_3}\right)\right] = 30.69\ MPa$$

نقطه H :
$$\tau_H = \frac{V}{I}\left[-\frac{1}{2}a_3^2 + \frac{h}{2}a_3 + \frac{1}{2}\left(h\frac{t_2}{t_3}a_2 + a_1^2\frac{t_1}{t_3} + a_1 A\bar{G}\frac{t_1}{t_3}\right)\right]$$

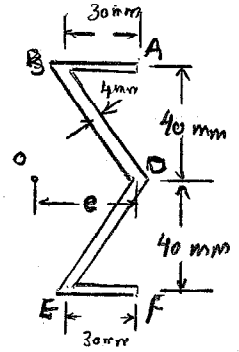
$$\tau_H = 42.325\ MPa$$



انتشارات دانشجویی دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

«تمرین شعل ۵»

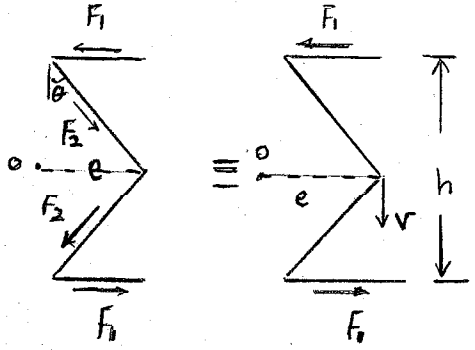
۵-۱۵۶) معادلات موقعیت مرکز برش ○ برای تیرهای جدار نازک با مقطع یکنواخت.



$$q_1 = \frac{th}{2}s \qquad q_1 = \frac{Vth}{2I}s$$

$$F_1 = \int_0^a \frac{Vth}{2I} s\,ds = \frac{Vth}{4I}a^2$$

$$F_1 h = Ve \longrightarrow e = \frac{F_1 h}{V} = \frac{th^2a^2}{4I}$$

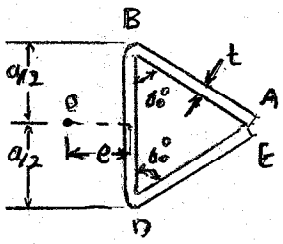


$$I = 2\left\{\frac{1}{12}at^3 + at\left(\frac{h}{2}\right)^2\right\} + 2\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\cos\theta}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^3\right\} \quad (\text{term} \approx 0)$$

$$\tan\theta = \frac{30}{40} \longrightarrow \theta = 36.87^\circ$$

$$\longrightarrow I = 597.333\times10^3 \ mm^4$$

$$e = \frac{4(80)^2(30)^2}{4(597.333\times10^3)} = 9.64 \ mm$$

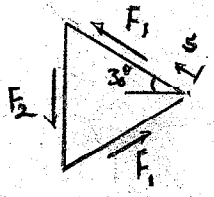


۵-۱۱۶

$$q_1 = st\left(\frac{s\sin30^\circ}{2}\right) = \frac{1}{4}ts^2$$

$$q_1 = \frac{Vt}{4I}s^2 \longrightarrow F_1 = \frac{Vt}{12I}a^3$$

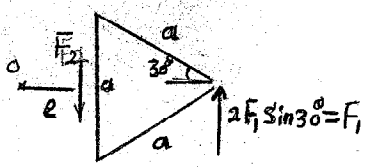
$$I = 2\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\cos60^\circ}\right)\left(\frac{a}{2}\right)3\right\} + \frac{1}{12}ta3 = \frac{1}{4}ta^3$$



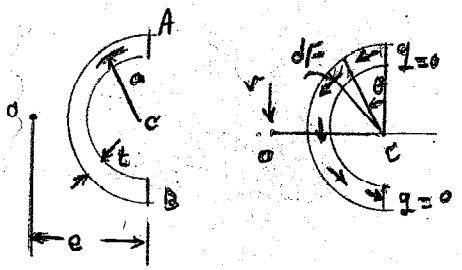
$$\Sigma M_O = 0$$

$$F_1(a\cos30 + e) = F_2 e$$

$$F_1 a\cos30 = (F_2 - F_1)e \qquad F_2 - F_1 = V$$



$$e = \frac{F_1}{V}a\cos30^\circ = \frac{ta3(a\cos30^\circ)}{12\left(\frac{1}{4}ta^3\right)} = \frac{\cos30}{3}a = 0.289a$$



$$Q = \int y\,dA \ , \quad y = a\cos\theta \ , \quad dA = (a\,d\theta)t$$

$$Q = \int_0^\theta a^2 t\cos\theta\,d\theta = a^2 t\sin\theta$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{I}a^2\sin\theta \qquad dF = \tau\,dA = \frac{V}{I}a^3 t\sin\theta\,d\theta$$

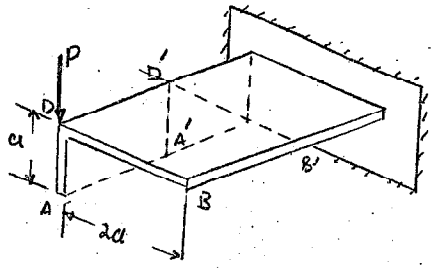
$$\Sigma M_C = \int_0^\pi dF\cdot a = Ve \ \text{ or } \ \frac{a^4t}{I}\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = e$$

$$e = \frac{-a^4t}{I}\cos\theta\Big|_0^\pi \ \text{ or } \ e = \frac{2a^4t}{I}$$

$$I = \frac{1}{8}\pi\left[\left(a+\tfrac{t}{2}\right)^4 - \left(a-\tfrac{t}{2}\right)^4\right] = \frac{\pi a^3 t}{2} \longrightarrow e = \frac{4a}{\pi}$$

(حل تمرین فصل ۵)

۵-۱۲۸) مطلوب است توزیع تنش برشی در طول خط D'B' روی بازوی افقی شکل زیر برای تیری که برای بارگذاری نشان داده شده. ضخامت تمام قطعات یکنواخت است.



تعیین محل مرکز سطح:

$$A\bar{x} = \sum A_i \bar{x}_i$$

$$A = at + 2at = 3at \qquad A_1 = at \qquad A_2 = 2at$$

$$\bar{x}_1 = a/2 \,, \quad \bar{x}_2 = 0 \qquad \bar{y}_1 = 0 \,, \quad \bar{y}_2 = a$$

$$3at\,\bar{x} = (at)\left(\frac{a}{2}\right) \longrightarrow \bar{x} = \frac{a}{6}$$

$$A\bar{y} = \sum A_i \bar{y}_i$$

$$(3at)\,\bar{y} = (2at)(a) \longrightarrow \bar{y} = \frac{2a}{3}$$

تعیین ممان دوم سطح:

$$I_x = \frac{1}{3}(t)(2a)^3 + \frac{1}{12}a(t)^3 \approx \frac{8ta^3}{3}$$

$$I_y = \frac{1}{3}ta^3 + \frac{1}{12}(2a)t^3 \approx \frac{ta^3}{3}$$

$$I_x = I_{x'} + A d_x^2 \qquad d_x = \bar{y} = \frac{2a}{3}$$

$$I_{x'} = \frac{8ta^3}{3} - (3at)\left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{4a^3t}{3}$$

$$I_y = I_{y'} + A d_y^2 \qquad d_y = \bar{x} = \frac{a}{6}$$

$$I_{y'} = \frac{ta^3}{3} - (3at)\left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{ta^3}{4}$$

*** روش دوم در صفحه بعد:**

تعیین حاصلضرب اساسی:

روش اول:

$$I_{xy} = (I_{xy})_1 + (I_{xy})_2$$

$(I_{xy})_1 = 0$ $\qquad$ $(I_{xy})_2 = 0$ به دلیل تقارن هر یک از سطوح نسبت به x یا y

$$\longrightarrow I_{xy} = 0$$

تعویض محورهای موازی:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + A d_x d_y$$

$$I_{x'y'} = -A d_x d_y = -(3at)\left(-\frac{2a}{3}\right)\left(-\frac{a}{6}\right) = -\frac{a^3t}{3}$$

ب: (روش دوم)

$(I_{x_1y_1})_1 = 0$ $\qquad$ $(I_{x_2y_2})_2 = 0$

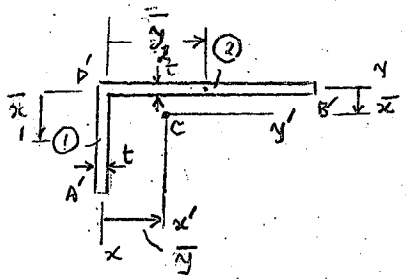
$$(I_{x'y'})_1 = (I_{x_1y_1})_1 + A_1 d_{x_1} d_{y_1} \qquad A_1 = at \quad d_{x_1} = \frac{2}{3}a \quad d_{y_1} = \frac{a}{2} - \frac{a}{6}$$

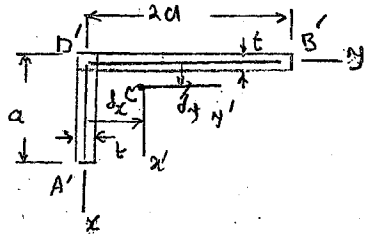
$$(I_{x'y'})_1 = (at)\left(-\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\right) = -\frac{4a^3t}{18}$$

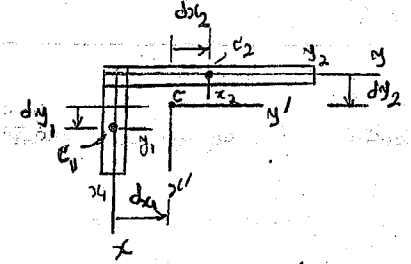
$$(I_{x'y'})_2 = (I_{x_2y_2})_2 + A_2 d_{x_2} d_{y_2} \qquad A_2 = 2at \quad d_{x_2} = a - \frac{2a}{3} \quad d_{y_2} = -\frac{a}{6}$$

$$(I_{x'y'})_2 = (2at)\left(a - \frac{2a}{3}\right)\left(-\frac{a}{6}\right) = -\frac{a^3t}{9}$$

$$I_{x'y'} = (I_{x'y'})_1 + (I_{x'y'})_2 = -\frac{a^3t}{3}$$



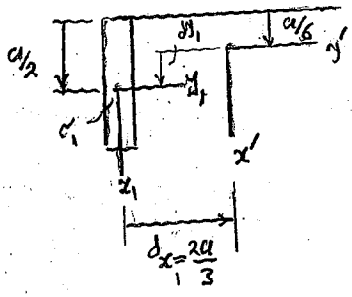




(شکل مربوط به روش دوم)

صفحه: ۹۵

* روش دوم محاسبه ممان اینرسی سطح



$$I_{x_1} = \frac{1}{12} a (t)^3 \approx 0$$

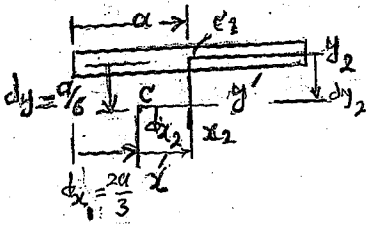
$$I_{y_1} = \frac{1}{12} t a^3$$

$$I'_{x_1} = I_{x_1} + A_1 d_{x_1}^2 = \frac{1}{12} a t^3 + at\left(\frac{2a}{3}\right)^2 \approx 0$$

$$= \frac{4a^3 t}{9}$$

$$I'_{y_1} = I_{y_1} + A_1 \left(\frac{a}{2} - d_y\right)^2$$

$$= \frac{1}{12} t a^3 + at\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\right)^2 = \frac{7a^3 t}{36}$$



$$I_{x_2} = \frac{1}{12} t (2a)^3$$

$$I_{y_2} = \frac{1}{12} (2a) t^3 \approx 0 = 0$$

$$I'_{x_2} = I_{x_2} + A_2 (\underbrace{a - d_x}_{dx_2})^2$$

$$= \frac{8}{12} t a^3 + (2at)(a - \frac{2a}{3})^2 = \frac{8}{9} t a^3$$

$$I'_{y_2} = I_{y_2} + A_2 d_y^2$$

$$= (2at)\left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{a^3 t}{18}$$

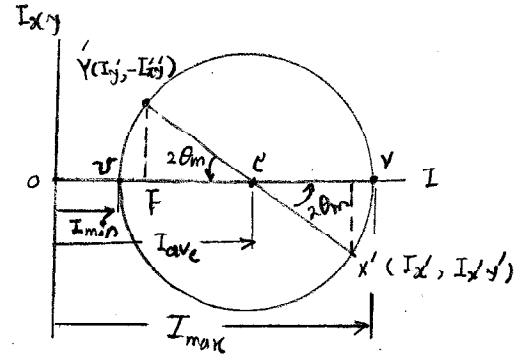
$$I'_x = I'_{x_1} + I'_{x_2} = \left(\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\right) a^3 t$$

$$= \frac{4a^3 t}{3}$$

$$I'_y = I'_{y_1} + I'_{y_2} = \left(\frac{7}{36} + \frac{1}{18}\right) a^3 t$$

$$= \frac{a^3 t}{4}$$

مقاومت مصالح ۱



(حل مثرین فصل ۵)

ادامه حل مسئله ۸-۱۲۸) تعیین کرههای اصلی:

$$\bar{CF} = \bar{oC} - \bar{oF} \qquad \bar{oC} = I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{19}{24} ta^3$$

$$\bar{oF} = I_{y'} = \frac{ta^3}{4} \rightarrow \bar{CF} = \frac{13}{24} ta^3$$

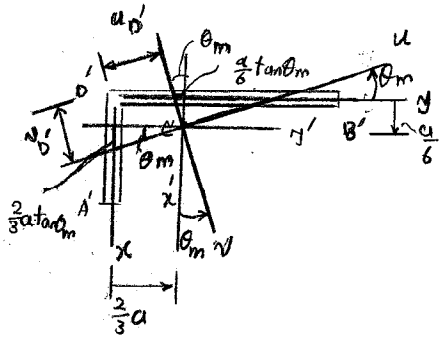
$$\bar{FY'} = -I_{xy} = \frac{a^3 t}{3}$$

$$\tan 2\theta_m = \frac{\bar{FY'}}{\bar{CF}} \Rightarrow \theta_m = 15.8^\circ \quad \text{(ccw)} \qquad R = \sqrt{\bar{CF}^2 + \bar{FY'}^2} = 0.636\, ta^3$$

$$I_u = I_{min} = I_{ave} - R = 0.15565\, ta^3 \qquad I_v = I_{max} = I_{ave} + R = 1.42768\, ta^3$$

تعیین تنش در استاد $\overline{DB}$:

برای موقعیت نقطه D در دستگاه مختصات اصلی uv داریم:



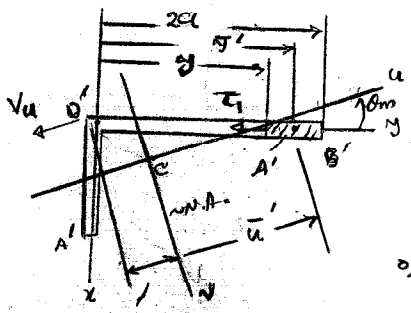
$$u_{D'} = -\left(\frac{2}{3}a - \frac{a}{6}\tan\theta_m\right)\cos\theta_m = -0.5961\, a$$

$$v_{D'} = -\left(\frac{a}{6} + \frac{2}{3}a\tan\theta_m\right)\cos\theta_m = -0.3419\, a$$

تجزیه نیروی P در راستای کرههای اصلی:

$$V_u = P\sin\theta_m = 0.272\, P \qquad V_v = P\cos\theta_m = 0.962\, P$$

تأثیر V_u در تنش برشی استاد $\overline{DB}$:



$$\tau_1 = \frac{V_u Q_1}{I_v t} \qquad Q_1 = A'\bar{u}' \qquad \bar{u}' = \bar{y}'\cos\theta_m - 0.5961a$$

سطح باقیمانده $A' = (2a - y)t \qquad \bar{y}' = \frac{2a+y}{2}$

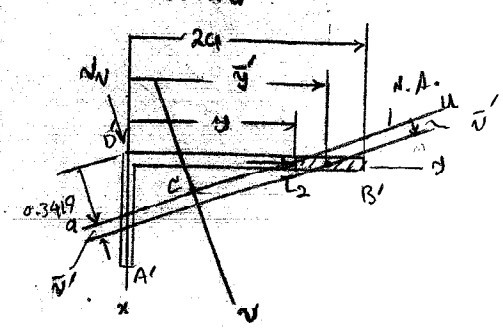
$$Q_1 = (2a-y)t\left[\left(\frac{2a+y}{2}\right)0.962 - 0.5961a\right]$$

$$Q_1 = (-0.481y^2 + 0.596ay + 0.732a^2)t$$

$$\tau_1 = \frac{0.272P}{1.42768\, a^3 t^2}(-0.481y^2 + 0.596ay + 0.732a^2)t$$

$$\tau_1 = \frac{P}{a^3 t}(-0.0917y^2 + 0.1136ay + 0.1394a^2)$$

تأثیر V_v در تنش برشی استاد $\overline{DB}$:



$$\tau_2 = \frac{V_v Q_2}{I_u t} \qquad Q_2 = A'\bar{v}' \qquad \bar{v}' = \bar{y}'\sin\theta_m - 0.3419a$$

$$\tau_2 = \frac{P}{ta^3}(-0.84y^2 + 2.113ay - 0.859a^2)$$

اصل جمع اثرها:

$$\tau = \tau_1 - \tau_2$$

$$\tau = \frac{P}{ta^3}(+0.75y^2 - 2ay + a^2)$$