معادلات دیفرانسیل

سرفصل	صفحه
فصل اول : مقدمات	۲-۱
فصل دوم : معادلات مرتبه اول	۲۱-۳
فصل سوم : معادلات مرتبه دوم و بالاتر	۵۰-۲۲
فصل چهارم : حل معادله به کمک سری	۶۱-۵۱
فصل پنجم : تبدیل لاپلاس	۸۲-۶۲
فصل ششم : دستگاه معادله دیفرانسیل	۸۶-۸۳

معادلات دیفرانسیل

فصل اول

مقدمات

تعریف: هر رابطه بین یک تابع مجهول و متغیر مستقل و مشتقات تابع را معادله دیفرانسیل می‌نامیم

نمونه هایی از معادله دیفرانسیل

۱) $xy'' + y' - y = 0$ مرتبه ۲ (خطی) همگن

۲) $y'' + y = \sin x$ مرتبه ۲ (خطی) غیرهمگن

۳) $y' + y^2 = e^x$ مرتبه ۱ (غیرخطی)

بیشترین شماره مشتق می‌شود مرتبه معادله

هر معادله دیفرانسیل یکی از دو حالت زیر است

۱) معادله خطی که به شکل زیر می‌باشد

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x)$$

۲) معادله غیرخطی: معادله‌ای که به شکل بالا نباشد

درصورتی که طرف دوم معادله خطی صفر باشد آن معادله همگن گفته می‌شود

تعریف: تابعی که در یک معادله دیفرانسیل صدق کند را جواب آن معادله می‌گویند

مانند $y = \sin x$ جواب $y'' + y = 0$ می‌باشد

تعریف: جوابی از معادله که به تعداد مرتبه آن عدد ثابت یا پارامتر دارد را جواب عمومی می‌نامند

شرط اولیه: شرایطی روی y و مشتقات آن هستند که همگی در یک نقطه مطرح می‌شوند

تشکیل معادله

برای یافتن معادله دیفرانسیل خانواده منحنی $Q(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ کافی است نسبت به x، n بار مشتق گرفته و c_1 تا c_n را بین آنها حذف نمائیم

نکته: اگر $y = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ آنگاه معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & y \\ f'(x) & g'(x) & y' \\ f''(x) & g''(x) & y'' \end{vmatrix}$$

$\frac{10}{17}$ معادله دیفرانسیل $y = cx^2 + d$ را بیابید

پارامتر دو مرتبه ۲

روش اول y' و y'' را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{cases} y = cx^2 + d \\ y' = 2cx \\ y'' = 2c \end{cases} \longrightarrow y' = \frac{y''}{2} \times 2 \times x = y''x \longrightarrow y''x - y' = 0$$

روش دوم $f(x) = x^2$ $g(x) = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & y \\ 0 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 2xy'' - 2y' = 0$$

فصل دوم
معادلات مرتبه اول

$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

معادله تفکیک پذیر

هر معادله به صورت $y' = f(x)\,g(y)$ تفکیک پذیر می باشد

برای حل $y' = \frac{dy}{dx}$ پس $dy/dx = f(x)g(y)$

برای رسیدن به جواب از دو طرف انتگرال می گیریم $dy/g(y) = f(x)dx$

۲۶/۳۴
$$\frac{dy}{dx} = \sec y \cdot tg x \qquad dy/\sec y = tg x\, dx$$
$$\sin y = -\ln\cos x + c = \ln\sec x + c$$

۳۷۴ / ۲ج، ۴۴۸
جوابی از معادله $y' = \frac{1}{(1+y)+x^2+yx^2}$ که از مبدا می گذرد را بیابید

$(1+y)+x^2+yx^2 = x^2(1+y)$ ...

$$y' = \frac{1}{(1+y)(1+x^2)}$$
$$\frac{dx}{1+x^2} = dy(1+y) \xrightarrow{\int} y + \tfrac{1}{2}y^2 = tg^{-1}x + c$$ جواب عمومی

$$\xrightarrow[x=0,\,y=0]{\text{اعمال شرط اولیه}} 0+0 = tg^{-1}0 + c \to c=0 \to y+\tfrac{1}{2}y^2 = tg^{-1}x$$

نکته: هر معادله $y' = f(ax+by+c)$ با تغییر تابع $u = ax+by+c$ به تفکیک پذیر (برحسب تابع u و متغیر x) تبدیل می شود

۴۱۳/۳۸
$$y' = 1 + \frac{1}{\sin(x-y+1)} = 1 + \frac{1}{\sin u} \qquad u = x-y+1$$
$$\xrightarrow{\text{مشتق}} u' = 1-y' \to y' = 1-u' \qquad \cancel{1} - u' = \cancel{1} + \frac{1}{\sin u} \qquad -\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sin u}$$
$$-\sin u\, du = dx \xrightarrow{\int} \cos u = x + c$$
$$\cos(x-y+1) = x + c$$

$\frac{۵\ ۱}{۲۶،۴۳۹}$ (عمران ۹۱)

$y' = 81x^2 + 18xy + y^2$

جواب عمومی معادله فوق را بیابید

$y' = (9x+y)^2 \qquad u = 9x+y$

$u' = 9 + y' \qquad y' = u' - 9 \qquad u' - 9 = u^2 \qquad \frac{du}{dx} = u^2 + 9$

$\xrightarrow{\int} \quad \frac{1}{3} tg^{-1} \frac{u}{3} = x + c \qquad \frac{1}{3} tg^{-1} \frac{(9x+y)}{3} = x + c$

معادله خطی $a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$

برای حل این معادله مراحل ذیل را طی می‌کنیم

مرحله ۱: دوطرف را بر $a_1(x)$ تقسیم می‌کنیم

$y' + \overbrace{\frac{a_0}{a_1}(x)}^{P(x)} y = \underbrace{f(x)/a_1(x)}_{q(x)} \qquad y' + P(x) y = q(x)$

مرحله ۲: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ را در دوطرف معادله ضرب می‌کنیم

$\mu(x) y' + \mu(x) P(x) = \mu(x) q(x)$

مرحله ۳: از دوطرف انتگرال می‌گیریم

$y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int (\mu(x) g(x) dx + c \right)$

$\frac{۶|۱۹}{۴۱}$

$xy' - y = x^2 \cos x \longrightarrow$ خطی

$y' - \frac{y}{x} = \underbrace{x \cos x}_{q(x)} \qquad y' + \underbrace{(-\frac{1}{x}) y}_{P(x)} = x \cos x$

$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$

$y = \frac{1}{\frac{1}{x}} \left(\int \frac{1}{x} (x \cos x) dx = x \sin x + c \right.$ جواب عمومی

نکته: $\int \frac{du}{u^2+a^2} = 1/a\, tg^{-1} u/a$

نکته: $e^{\int a/x\, dx} = x^a$

۷۱ / ۱۹۵ ج ۲: جواب معادله $y' = \frac{2y+x}{x}$ وقتی $x \to 0$ چقدر است

$y' - \underbrace{2/x}_{p}\, y = \underbrace{1}_{q}$ $\quad \mu(x) = e^{\int -2/x\, dx} = x^{-2}$

$y = 1/x^{-2} \left(\int x^{2} dx \right) + c$

$y = x^{2}(-x^{-1}+c) = x + cx^{2} = 0$

نکته: $\int x^{k} dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$

نکته: اگر در معادله $\overbrace{a_1(x) y' + a_0(x)}^{\text{مشتق}} y = f(x)$ داشته باشیم

$a_1'(x) = a_0(x)$ و $(a_1(x)y)' = f(x)$ معادله را از دو طرف انتگرال می‌گیریم

۸۲۱ / ۴۲: $xy' + y = \sin x \quad (yx)' = \sin x \quad yx = -\cos x + c$

$y = \frac{-\cos x + c}{x}$

در موارد ذیل معادله را می‌توان به خطی تبدیل نمود

۱) هر معادله به شکل زیر با تغییر تابع $z = f(y)$ به معادله خطی برحسب تابع z و مستقل x تبدیل می‌گردد

$$\overbrace{y' f'(y)}^{\text{مشتق}} + P(x) f(y) = q(x)$$

۲) هر معادله به فرم زیر با فرض آنکه x تابع و y مستقل باشد به معادله خطی تبدیل می‌گردد کافی است $y' = 1/x'$ را جایگذاری نمائید

$$y' = \frac{c(y)}{a(y)x + b(y)}$$

$$dy/dx = y' = 1/x' = dx/dy$$

$\frac{1.9}{2ج.124}$ جواب عمومی معادله را پیدا کنید

$2xe^{2y}y' = 3x^4 + e^{2y}$

$e^{2y} = z \qquad z' = 2y'e^{2y}$

$xz' = 3x^4 + z \qquad z' - \frac{1}{x}z = 3x^3 \qquad \mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = x^{-1}$

$z = \frac{1}{x^{-1}}\int x^{-1}\,3x^3\,dx = x(x^3+c) \qquad e^{2y} = x^4 + cx$

$y = \frac{1}{2}\ln(x^4+cx) = \ln\sqrt{x^4+cx}$

$\frac{1.14}{2ج.4.1}$ (برق ۹۰، ریاضی ۹۱)

$y' - x\sin 2y = xe^{-x^2}\cos^2 y$

$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } \cos^2 y} (\sec^2 y)y' - 2x\,tg\,y = xe^{-x^2} \qquad z = tg\,y \xrightarrow{\text{مشتق}} z' = y'\sec^2 y$

$z' - 2xz = xe^{-x^2} \qquad \mu(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$

$z = \frac{1}{e^{-x^2}}\int xe^{-2x^2}dx = e^{x^2}\left(-\frac{1}{4}e^{-2x^2}+c\right) \qquad tg\,y = -\frac{1}{4}e^{-x^2} + ce^{x^2}$

مثال ۸: جواب عمومی $y' = \frac{1}{x+e^{2y}}$ را بیابید.

$x' = x + e^{2y} \qquad \frac{1}{x'} = \frac{1}{x+e^{2y}} \to x' - x = e^{2y}$

$\mu(y) = e^{\int -dy} = e^{-y} \qquad x = \frac{1}{e^{-y}}\int e^{-y}e^{2y}dy = e^{y}(e^{y}+c)$

$x = e^{2y} + ce^{y}$

$\frac{24}{2ج.18}$ ۱۳

$4y^3y' + y = 2xy' \qquad y(1) = 1$

$4y^3y' - 2xy' = -y \qquad y' = \frac{y}{2x-4y^3} \qquad \frac{1}{x'} = \frac{-y}{2x-4y^3}$

$x' - 2x/y = -4y^2 \qquad \mu(y) = e^{\int -2/y\,dy} = y^{-2}$

$x = \frac{1}{y^{-2}}\int y^{-2}\times -4y^2\,dy = y^2(-4y+c)$

$x = y^2(-4y+c) \qquad 1 = 1(-4+c) \to c = 5$

$x = y^2(-4y+5) \qquad y^2 = \frac{x}{-4y+5}$

معادله برنولی $\quad y'+P(x)y=q(x)y^n \quad n\neq 0,1$

برای حل این معادله دو طرف را بر y^n تقسیم می‌کنیم

$y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}=q(x)$

حال با تغییر تابع $z=y^{1-n}$ داریم: $\quad z'=(1-n)y'y^{n}$

$\frac{z'}{1-n}+P(x)z=q(x)$

که معادله خطی می‌باشد

نکته: هر معادله برنولی $y'+P(x)y=q(x)y^n$ با تغییر تابع $z=y^{1-n}$ به خطی $\frac{z'}{1-n}+P(x)z=q(x)$ تبدیل می‌شود

۱۳ ۳۸/۴۸ کدام تغییر تابع معادله $y'+P(x)y=y^4q(x)$ را خطی می‌کند

$z=y^{1-4}=y^{-3}$

۱۴ ۳۰/۳ج ۳۴۱ $\quad y'=y\,tgx-y^2\sec x \qquad y'/y^2=\dfrac{y\,tgx-y^2\sec x}{y^2}$

$y'y^{-2}=y^{-1}tgx-\sec x \qquad z=y^{1-2}=y^{-1} \qquad z'=-y'y^{-2}$

$-z'=z\,tgx-\sec x \qquad z'+z\,tgx=\sec x \qquad \mu(x)=e^{\int tgx\,dx}=\sec x$

$z=\frac{1}{\sec}\int \sec^2x\,dx=\cos x(tgx+c) \qquad y^{-1}=\sin x+c\cos x$

۱۵ ۴۰/۴۸ $\quad xy'+y=x^4y^3 \qquad xy^{-3}y'+y^{-2}=x^4 \qquad z=y^{-2}$

$z'=-2y^{-3}y' \qquad x\frac{z'}{-2}+z=x^4 \qquad z'-\frac{2}{x}z=-2x^3$

$\mu(x)=e^{\int -2/x\,dx}=x^{-2}$

$z=\frac{1}{x^{-2}}\int x^{-2}\cdot -2x^3\,dx=x^2(-x^2+c$

$y^{-2}=-x^4+cx^2$

معادله همگن

تعریف: اگر $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y)$ می‌گوئیم تابع f همگن از درجه α است

تعریف: $f(x, y)$ همگن از درجه صفر باشد یعنی $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{0} f(x, y)$ معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ را معادله همگن می‌نامیم

روش حل: هر معادله همگن با تغییر تابع $u = y/x$ به یک معادله تفکیک پذیر (برحسب x و u) تبدیل می‌شود.

نکته: هرگاه درجه صورت و درجه مخرج با هم برابر شد معادله همگن می‌شود

$y' = \frac{2x^3 + y^3}{xy^2}$ $\quad f(x, y) = \frac{2x^3 + y^3}{xy^2}$ ۱۶ ۴۷/۵۳

$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3}{\lambda x \lambda^2 y^2} = \frac{\cancel{\lambda^3}(2x^3 + y^3)}{\cancel{\lambda^3}(xy^2)} = f(x, y)$

همگن از درجه $\alpha = 0$

$u = y/x \to y = xu \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = u + xu' = \frac{2x^3 + x^3u^3}{x^3u^2} = \frac{2 + u^3}{u^2}$

$x\,du/dx = \frac{2 + u^3}{u^2} - u = 2/u^2 \quad u^2 du = 2\,dx/x$

$\xrightarrow{\int} \frac{1}{3} u^3 = 2\ln x + c \quad \frac{1}{3} y^3/x^3 = 2\ln x + c$

۱۷ ۹۴/۱۰۳ مطلوبست جواب عمومی $y' - y/x = \cos^2 y/x$ همگن

$u = y/x \to y = xu \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = u + xu' \quad \cancel{u} + xu' - \cancel{u} = \cos^2 u$

$xu' = \cos^2 u \quad x\,du/dx = \cos^2 u \quad dx/x = \sec^2 u\,du$

$\tan u = \ln x + c \quad tg\, y/x = \ln x + c$

۱۸ ۴۹/۵۴

$(x+2y)dx+(2x+y)dy=0$

$y'=-\dfrac{x+2y}{2x+y} \qquad u+xu'=-\dfrac{x+2ux}{2x+ux}=\dfrac{1+2u}{2+u}$

$x\,du/dx=-\left(\dfrac{1+2u}{2+u}+u\right) \qquad x\,du/dx=-\left(\dfrac{u^2+4u+1}{2+u}\right)$

$\dfrac{2+u}{u^2+4u+1}du=-dx/x \xrightarrow{\int} \tfrac{1}{2}Ln(u^2+4u+1)=-Ln\,x+c$

$Ln(y^2/x^2+4y/x+1)=2Ln\,x+2c$

$Ln\dfrac{y^2+4xy+x^2}{x^2}+Ln\,x^2=2c \qquad Ln\,y^2+4xy+x^2=2c$

$y^2+4xy+x^2=e^{2c}=k$

نکته : $y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$

الف) اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\neq 0$ از حل دستگاه $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ نقطه $x=\alpha$, $y=\beta$

را بدست می‌آوریم. قرار می‌دهیم $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$ تا معادله $\dfrac{dY}{dX}=f\left(\dfrac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$

حاصل گردد که معادله‌ای همگن است

ب) اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0$ با تغییر تابع $u=ax+by$ معادله به معادله تفکیک پذیر

(برحسب x و u) می‌نویسیم.

۱۹ ۵۲/۵۵

با تغییر متغیری معادله $y'=\dfrac{x+y-2}{3x+2y-5}$ به معادله همگن تبدیل می‌شود

$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x+2y-5=0 \end{cases} \qquad x=1 \nearrow \alpha \;,\; y=1 \nearrow \beta$

$\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-1 \end{cases} \qquad dY/dX=\dfrac{X+Y}{3X+2Y}$

$\frac{۵۳}{۵۵}$ ۲۰ جواب عمومی $y' = \frac{x-y}{2x-2y+1}$ را بیابید

$$u = x - y \xrightarrow{\text{مشتق}} u' = 1 - y' \to y' = 1 - u' \to 1 - u' = \frac{u}{2u+1}$$

$$u' = 1 - \frac{u}{2u+1} = \frac{u+1}{2u+1} = \frac{du}{dx} \to du\left(\frac{2u+1}{u+1}\right) = dx$$

$$\to \left(2 - \frac{1}{u+1}\right) du = dx \xrightarrow{\int} 2u - \ln(u+1) = x + c$$

جواب عمومی: $2(x-y) - \ln(x-y+1) = x + c$

معادله کامل

تعریف: معادله $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ را معادله کامل می‌نامیم هرگاه: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

تذکر: معادله $y' = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ کامل است هرگاه $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$

روش حل: اگر معادله $M\,dx + N\,dy = 0$ کامل باشد آنگاه تابع $\varphi = \varphi(x,y)$ موجود است که $\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N \end{cases}$ آنگاه $\varphi(x,y) = c$ جواب عمومی خواهد بود.

مثال: ۲۱ جواب عمومی معادله $(y + 2x)\,dx + (x + y^2)\,dy = 0$ را بدست آورید

$\frac{\partial M}{\partial y} = M_y = 1$ ، $\frac{\partial N}{\partial x} = N_x = 1$ پس معادله کامل است

بنابراین $\varphi = \varphi(x,y)$ موجود است که:

$$\begin{cases} \partial\varphi / \partial x = M = y + 2x \quad ① \xrightarrow{\int} \varphi = \varphi(x,y) = xy + x^2 + f(y) \\ \partial\varphi / \partial x = N = x + y^2 \quad ② \end{cases}$$

برای محاسبه $f(y)$ با توجه به رابطه (۲) مشتق φ را نسبت به y محاسبه می‌کنیم و با N مساوی قرار می‌دهیم

$x+y^2 \overset{2}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x+0+f'(y) \to f'(y)=y^2$

$\to f(y) = \int y^2 dy = 1/3\, y^3 + \cancel{c}$

$\varphi(x,y) = xy + x^2 + 1/3\, y^3 \to xy + x^2 + 1/3\, y^3 = c$ جواب عمومی

نکته ۱: جواب عمومی معادله کامل $M dx + N dy = 0$ عبارت است از

1) $\int M dx + \int N^* dy = C$ (N^* جملاتی از N که x ندارد (که مشتق آن نسبت x صفر شود))

2) $\int N dy + \int M^* dx = C$ (M^* جملاتی از M که y ندارد (که مشتق آن نسبت y صفر شود))

۲۲۱ / ۲ج.۴۳۱ با فرض کامل بودن معادله زیر $2a+b$ را بیابید

$(ax^b \sin^2 y - \sin y)dx + (x^3 \sin y \cos y - x \cos y)dy = 0$

$M_y = 2ax^b \sin y \cos y - \cos y \quad N_x = 3x^2 \sin y \cos y - \cos y$

$\xrightarrow[\text{معادله کامل}]{M_y = N_x} 2a = 3 \;,\; b = 2 \to 2a+b = 5$

۲۲۵. / ۲ج.۳۱۵ مطلوبست جواب عمومی $(2x^3+3y)dx + (3x+y-1)dy = 0$

$M_y = 3 \quad N_x = 3 \to$ معادله کامل $\quad N^* = y-1$

$\int M dx + \int N^* dy = 1/2\, x^4 + 3yx + 1/2\, y^2 - y = c$

۲۴۱. / ۲ج.۳۱۰ جواب عمومی؟ $\cos(x+y)dx = x\sin(x+y)dx + x\sin(x+y)dy$

$\to (\cos(x+y) - x\sin(x+y))dx - x\sin(x+y) = 0$

$N_y = \sin(x+y) - x\cos(x+y) = N_x$ کامل است

$M^* = 0 \rightarrow \int N dy + \int M^* dx = c \quad x\cos(x+y) = c$ جواب عمومی

۵ ۲۵ / ۲ج۲۵۲ در جواب معادله $y' = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$ و $y(4) = 0$ به ازای اول مقدار x چقدر است

$M_y = 2x$ و $N_x = -2x \rightarrow$ کامل است

$dy/dx = \frac{2xy}{y^2 - x^2} \qquad 2xy\,dx = (y^2 - x^2)\,dy$

$2xy\,dx - (y^2 - x^2)\,dy \qquad N^* = -y^2 \rightarrow \int M dx + \int N^* dy = c$

$\rightarrow x^2 y - \frac{1}{3} y^3 = c$ جواب عمومی

$y(4) = 0 \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow c = 0 \quad x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

فاکتور (عامل) انتگرال

تعریف: به تابع $\mu = \mu(x, y)$ فاکتور (عامل) انتگرال معادله $M dx + N dy = 0$ می‌گوئیم هرگاه این معادله با ضرب در μ، به معادله کامل تبدیل گردد

۴۳ ۲۶ / ۲ج۲۰۱ اگر $x^\alpha y^\beta$ عامل انتگرال معادله زیر باشد آنگاه α و β را بیابید.

$y\,dx + x(x^2 y - 1)\,dy = 0$

باید $x^\alpha y^\beta$ را در معادله ضرب کرده و شرط کامل بودن را بنویسیم

$x^\alpha y^{\beta+1} dx + (x^{\alpha+3} y^{\beta+1} - x^{\alpha+1} y^\beta)\,dy = 0$

$M_y = (\beta+1) x^\alpha y^\beta \qquad N_x = (\alpha+3) x^{\alpha+2} y^{\beta+1} - (\alpha+1) x^\alpha y^\beta$

$M_y = N_x \rightarrow \begin{cases} \beta + 1 = -(\alpha+1) \\ \alpha + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 1 \end{cases}$

نکته: هر معادله به صورت زیر دارای عامل $x^\alpha y^\beta$ است

$$y(Ax^a y^b + Bx^c y^d)dx + x(A'x^a y^b + B'x^c y^d)dy = 0$$

محاسبه عامل انتگرال

برای یافتن عامل انتگرال معادله $Mdx+Ndy=0$ فرض می‌کنیم $\mu=\mu(x,y)$ عامل انتگرال باشد. آن را در معادله ضرب و شرط کامل بودن را می‌نویسیم

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$\to \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \to (M_y - N_y)\mu = N\mu_x - M\mu_y$$

فرض کنید می‌دانیم عامل انتگرال فقط تابع $z = z(x,y)$ می‌باشد یعنی $\mu = \mu(z)$ آنگاه:

$$(M_y - N_x)\mu = N z_x \mu' - M z_y \mu' = (N z_x - M z_y)\mu'$$

$$\longrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N z_x - M z_y} \qquad \mu(z) = e^{\int k(z)dz}$$

$k(z)$: فقط تابع z است

نکته: اگر عامل انتگرال $Mdx+Ndy=0$ فقط تابع z باشد آنگاه

$\frac{M_y - N_x}{M z_x - N z_y}$ فقط تابع z است

$$\mu(z) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{M z_x - N z_y}}$$

۲۷ ۴۴ / ۴۲ مطلوب است عامل انتگرال $(y+xy^2)dx - xdy = 0$

۱) y^2 ۲) y ۳) $1/y^2$ ✓   ۴) $1/y$

همه گزینه‌ها تابعی از y هستند پس $z=y$

$$\frac{M_y - N_x}{M z_x - M z_y} = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1+2xy+1}{-(y+xy^2)} = \frac{2(1+xy)}{-y(1+xy)} = -2/y$$

$$\mu = e^{\int -2/y\, dy} = y^{-2}$$

$\frac{2881}{\text{۲ج۳۶۲}}$ مطلوبست عامل انتگرال $\overbrace{y(x+y)}^{M}dx+\overbrace{(x+2y-1)}^{N}dy=0$

1) e^{y} 2) e^{-y} 3) e^{x} 4) e^{-x}

$\frac{M_y-N_x}{N z_x^{1}-M z_y^{0}}=\frac{x+2y-1}{N}$ توجه کنید که عبارت بالا با ضریب dy که یعنی N

(صفر)

ساده می‌شود یعنی $z=x$

$=\frac{x+2y-1}{x+2y-1}=1 \to \mu(x)=e^{\int dx}=e^{x}$

$\frac{2917}{\text{۲ج۳۵۹}}$ مطلوبست عامل انتگرال $\underbrace{y}_{M}dx-\overbrace{(x^2+y^2+x)}^{N}dy=0$

1) x^2+y^2 2) $(x^2+y^2)^2$ 3) $\frac{1}{x^2+y^2}$ 4) $\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$

$z=x^2+y^2$

$$\frac{M_y-N_x}{N\underbrace{z_x}_{2x}-M\underbrace{z_y}_{2y}}=\frac{1+2x+1}{-2x(x^2+y^2+x)-2y^2}=\frac{2(1+x)}{-2xz-\underbrace{2x^2-2y^2}_{-2z}}$$

$$=\frac{2(1+x)}{-2z(x+1)}=-\frac{1}{z}\to \mu=e^{\int -\frac{1}{z}dz}=z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

تذکر: برای حل معادله غیرکامل $Mdx+Ndy=0$ داریم

۱) چنانچه $\frac{M_y-N_x}{\text{ضریب } dy}$ تابعی از x باشد آنگاه $z=x$

۲) چنانچه $-\frac{M_y-N_x}{\text{ضریب } dx}$ تابعی از y باشد آنگاه $z=y$

$\frac{3055}{\text{۲ج۴۴۷}}$ جواب $(e^{x+y}+ye^{y})dx+(xe^{y}-1)dy=0$, $y(0)=1$

1) $e^{x}+xy+e^{-y}=e+1$ 2) $e^{x}+e^{-y}-1=1+xy$

3) $e^{x}+xy+e^{-y}-1=e+1$ 4) $xy=e-e^{x}-e^{y}$

$M_y - N_x = e^{x+y} + e^y + ye^y - e^y = e^{x+y} + ye^y = M$

$z = y \Rightarrow \dfrac{M_y - N_x}{-M} = \dfrac{M}{-M} = -1 \longrightarrow \mu = e^{\int -dy} = e^{-y}$

$\xrightarrow{e^{-y} \times \text{معادله}} (e^x + y)dx + (x - e^{-y})dy = 0$ کامل

$N^* = -e^{-y} \longrightarrow \int M dx + \int N^* dy = c \longrightarrow e^x + xy + e^{-y} = c$ جواب عمومی

$\xrightarrow[y=-1]{x=0} 1 + 0 + e = c$

۳۱۸/۲۱۹۶ج — اگر جوابی از معادله $\underbrace{(x^3 - y)}_{M} dx + \underbrace{(x + x^2 y)}_{N} dy = 0$ که از نقطه $(1,1)$ عبور می‌کند را در نظر بگیریم، به ازای $x=2$ مقدار y چقدر است؟

$M_y - N_x = -1 - (1 + 2xy) = -2 - 2xy = -2(1 + xy)$

$Z = x \longrightarrow \dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{-2(1+xy)}{x(1+xy)} = -\dfrac{2}{x} \longrightarrow \mu = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = x^{-2}$

$\xrightarrow{x^{-2} \times \text{معادله}} \underbrace{(x - x^{-2} y)}_{M} dx + \underbrace{(x^{-1} + y)}_{N} dy = 0 \quad N^* = y \longrightarrow \int M dx + \int N^*_0 dy = c$

$\longrightarrow \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{x} y + \frac{1}{2} y^2 = c \xrightarrow[y=1]{x=1} c = 2 \longrightarrow \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y}{x} + \frac{1}{2} y^2 = 2$

$\xrightarrow{x=2} 2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{2} y^2 = 2 \longrightarrow \frac{1}{2} y(1 + y) = 0 \longrightarrow y = 0 , -1$

نکته: هر معادله خطی $a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$ دارای عامل انتگرال $\mu(x) = \dfrac{1}{a_1(x)} e^{\int \frac{a_0}{a_1} dx}$ می‌باشد.

خصوصاً عامل انتگرال $y' + P(x) y = q(x)$ برابر $e^{\int P(x) dx}$ است.

۳۲۶۷/۴۳ — عامل انتگرال $xy' - 2y = x^3$

$\mu(x) = \frac{1}{x} e^{\int -2/x \, dx}$

$= \frac{1}{x} \cdot x^{-2} = x^{-3}$

حل معادله با تشکیل دیفرانسیل کامل

اگر $\varphi=\varphi(x,y)$ دیفرانسیل کل (کامل) عبارت است از

$$d\varphi=\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

۱) $d(xy)=y\,dx+x\,dy$

۲) $d(y/x)=\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$

۳) $d(x/y)=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$

با دیدن سمت راست هریک از عبارات بالا فرمول دیفرانسیل سمت چپ را جایگزین و با ایجاد دیفرانسیل کامل سؤال را حل می‌کنیم.

۲۰ـ الف $\frac{۳۳}{۶۵}$ جواب عمومی این معادله را بیابید: $xy^2dy+y^3dx=y\,dx-x\,dy$

$$y^2(x\,dy+y\,dx)=y^2d(xy)=y\,dx-x\,dy$$

$$\rightarrow d(x,y)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=d(x/y)\rightarrow d(x,y)=d(x/y)$$

$$\xrightarrow{\int} xy=x/y+c$$ جواب عمومی

۲۰ـ ب $\frac{۳۴}{۶۵}$

$$(x+x^2y)dy+(xy^2-y)dx=0$$

$$\rightarrow xy\underbrace{(x\,dy+y\,dx)}_{d(xy)}+\overbrace{(x\,dy-y\,dx)}^{-d(x/y)}=0$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } y^2} x/y\,d(xy)+\frac{x\,dy-y\,dx}{y^2}=0\rightarrow x/y\,d(xy)=d(x/y)$$

$$\xrightarrow[v=x/y]{u=xy} v\,du=dv\rightarrow du=dv/v\xrightarrow{\int} u=\ln v+c$$

$$\rightarrow xy=\ln x/y+c$$

$\frac{۲۰}{۳۵}$ $\frac{۴۰۱}{۲ج}$

جواب عمومی $x(\overbrace{ydx+xdy}^{d(xy)})=(1+x^2y^2)\ln x\,dx$

$\xrightarrow{u=xy} x\,du=(1+u^2)\ln x\,dx \rightarrow \frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{x}\ln x\,dx$

$\xrightarrow{\int} tg^{-1}u=\frac{1}{2}(\ln x)^2+c \rightarrow tg^{-1}(xy)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$

معادله درجه دوم برحسب y'

هر معادله به شکل $A(x,y)y'^2+B(x,y)y'+C(x,y)=0$

یک معادله درجه دوم برحسب y' است. برای حل این معادله ابتدا y' را محاسبه می کنیم

$$y'=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

دو معادله دیفرانسیل را حل می کنیم

جواب عمومی آنها عبارتند از $\Phi_1(x,y,c_1)=0$ و $\Phi_2(x,y,c_2)=0$

و جواب عمومی معادله اول عبارت است از:

$\Phi_1(x,y,c_1)\cdot\Phi_2(x,y,c_2)=0$

$\frac{۸۵}{۷۳}$ ۳۶ جواب عمومی معادله را بیابید $xyy'^2+(x^2+y^2)y'+xy=0$

معادله برحسب y' درجه دوم است

$$y'=\frac{-(x^2+y^2)\pm\sqrt{(x^2+y^2)^2-4(xy)^2}}{2xy}=\frac{-x^2-y^2\pm(x^2-y^2)}{2xy}$$

$$=\begin{cases}-y/x \rightarrow y'=-y/x \rightarrow dy/dx=-y/x \quad dxy=0 \rightarrow xy-c_1=0\\ -x/y \rightarrow y'=-x/y \rightarrow y\,dy=-x\,dx \rightarrow y^2+x^2-c_2=0\end{cases}$$

جواب عمومی $\rightarrow (xy-c_1)(y^2+x^2-c_2)=0$

معادلات حل شده برحسب x یا y

۱) $y=f(x,y')$: $y=xy'^2+e^{y'}$

۲) $x=g(y,y')$: $x=y'^3+y^2y'$

روش حل: قرار دهید $p=y'$ و از آنچه حاصل می‌شود $\frac{d}{dx}$ بگیرید

۷۹/۳۷ جواب عمومی $y=3y'^2-2y'^3$

گزینه ۲
$$\begin{cases} x=6p-3p^2+c \\ y=3p^2-2p^3 \end{cases}$$

$y'=p \rightarrow y=3p^2-2p^3$

باید x را نیز برحسب p بدست می‌آوریم پس $\frac{d}{dx}$ می‌گیریم:

$y'=(6p-6p^2)\frac{dp}{dx} \rightarrow p\,dx=(6p-6p^2)dp \xrightarrow{\int} x=6p-3p^2+c$

$$\begin{cases} x=6p-3p^2+c \\ y=3p^2-2p^3 \end{cases}$$ جواب عمومی

مثال ۳۸: جواب عمومی $x=y'^3+\ln y'$ را بیابید.

$y'=p \rightarrow x=p^3+\ln p$

$\xrightarrow{d/dx} 1=(3p^2+1/p)\frac{dp}{dx}$　　$dx=(3p^2+1/p)dp$

$dy/dx=p \rightarrow dx=1/p\,dy$　　$1/p\,dy=(3p^2+1/p)dp$

$dy=(3p^3+1)dp \xrightarrow{\int} y=3/4\,p^4+p+c$

$$\begin{cases} x=p^3+\ln p \\ y=3/4\,p^4+p+c \end{cases}$$ جواب عمومی پارامتری

تعریف پوش: منحنی یا منحنی که بر هم اعضای یک خانواده منحنی $\phi(x,y,c)=0$ مماس باشند را پوش آنها می‌نامیم.

روش محاسبه پوش

کافی است از معادله خانواده منحنی نسبت به c مشتق بگیرید و ثابت c را حذف کنید

مثال ۳۹: پوش $y=cx+\frac{1}{c^2}$ را بدست آورید

$$\begin{cases} y = cx + \frac{1}{c^2} \\ 0 = x - \frac{2}{c^3} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{3}{c^2} \\ x = \frac{2}{c^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3 = \frac{27}{c^6} \\ x^2 = \frac{4}{c^6} \end{cases} \Rightarrow \frac{y^3}{x^2} = \frac{27}{4}$$

$4y^3 = 27x^2$ پوش

معادلات کلرو

$$y = xy' + g(y')$$

برای حل این معادلات $p=y'$ بگیرید و از طرفین $\frac{d}{dx}$ بگیرید

مثال ۴۰: جواب $y=xy'+\frac{1}{y'^2}$ را یابید

$y'=p \rightarrow y = xp + \frac{1}{p^2} \quad (*) \xrightarrow{d/dx} y' = p + \left(x - \frac{2}{p^3}\right)p'$

$\rightarrow \left(x - \frac{2}{p^3}\right)\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow$ حالت اول $\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c$ ثابت

$\xrightarrow{*} y = cx + \frac{1}{c^2}$ جواب معادلات کلرو همواره خطی باشد

حالت دوم $x - \frac{2}{p^3} = 0 \xrightarrow{*} \begin{cases} y = \frac{3}{p^2} \\ x = \frac{2}{p^3} \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } p} 4y^3 = 27x^2$ جواب تکین ازوله غیرعادی

نکته: در معادلات کلرو $y=xy'+g(y')$

الف: با جاگذاری $y'=c$ جواب عمومی بدست می‌آید

ب: پوش جواب عمومی، جواب ازوله (ویژه) است.

۴۱۸۰
۷۰ جواب غیرعادی (ویژه) y'^2 ـ $y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$ را بیابید

$y' = c \quad \begin{cases} y = cx - \frac{1}{4}c^2 \\ 0 = x - \frac{1}{2}c \to c = 2x \end{cases}$

جواب ازوله (ویژه) $y = 2x^2 - \frac{1}{4}(2x)^2 \Rightarrow y = x^2$ ← معادله اول

۴۲۲۴
۳ج۴،۲ جواب عمومی $x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 - e^{2y'} = 0$

حواب عمومی $(xy' - y)^2 - e^{2y'} = 0 \quad (xy' - y)^2 = e^{2y'}$

$\to xy' - y = \pm e^{y'} \to y = xy' \pm e^{y'}$ (کلرو)

$\left\{\begin{array}{l} y = c_1x + e^{c_1} \to y - c_1x - e^{c_1} = 0 \\ y = c_2x - e^{c_2} \to y - c_2x + e^{c_2} = 0 \end{array}\right\}$

جواب عمومی $(y - c_1x - e^{c_1})(y - c_2 + e^{c_2}) = 0$

مسیر متعامد (قائم)

تعریف: مسیر متعامد خانواده منحنی $\phi(x, y, c) = 0$ منحنی هایی هستند که بر اعضای ϕ عمود باشد.

روش محاسبه:

۱) معادله دیفرانسیل ϕ را می یابیم.

۲) y' را به $-\frac{1}{y'}$ تبدیل می کنیم (تا معادله ψ بدست آید)

۳) معادله دیفرانسیل مرحله ۲ را حل می کنیم

نکته: اگر معادله منحنی در قطبی داده شود در مرحله دو باید r'/r را به $-r/r'$ تبدیل می کنیم

مسیرهای قائم $x^2y=c$ ۴۳ $\frac{۸۶}{۷۶}$

$\xrightarrow{\text{مشتق } x}$ $2xy + x^2y' = 0$ (معادله دیفرانسیل)

$y' \to -\frac{1}{y'} \Rightarrow 2xy - \frac{x^2}{y'} = 0$ مسیر متعامد

$\to 2xyy' = x^2 \to 2y\,dy = x\,dx$

$\xrightarrow{\int} y^2 = \frac{1}{2}x^2 + k$

۴۴

مسیرهای قائم $y=cx^2$ $\frac{۱۵۴}{۱۱۷}$

$\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{y}{y'} = \frac{x}{2}$

$y' \to -\frac{1}{y'} \to -yy' = \frac{x}{2}$ (مسیر متعامد)

$-y\,dy = \frac{x}{2}\,dx \xrightarrow{\int} -\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^2 + k$

۴۵

مسیر متعامد $x^2-y^2=cx$ $\frac{۴۶}{۲ج۲۰۱}$

$2x - 2yy' = c \to x^2 - y^2 = x(2x - 2yy')$

$\to -x^2 - y^2 = -2xyy' \quad y' \to -\frac{1}{y'} \to -x^2 - y^2 = \frac{2xy}{y'}$

$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2xy}{-x^2-y^2}$ مسیر متعامد $\to 2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = 0$ کامل است

$N^* = y^2 \quad \int M\,dx + \int N^*\,dy = c_1 \to x^2y + \frac{1}{3}y^3 = c_1$

مسیر متعامد $r = c(\sin\theta - \cos\theta)$ ۴۶ $\frac{۸۹}{۷۷}$

$r' = c(\cos\theta + \sin\theta)$ تقسیم می‌کنیم $\to \frac{r}{r'} = \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$

$\to -\frac{r'}{r} \to -\frac{r'}{r} = \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \to \frac{dr}{r} = \frac{-\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\,d\theta$

$\xrightarrow{\int} \ln r = \ln(\cos\theta + \sin\theta) + k \xrightarrow{\exp} r = e^k(\cos\theta + \sin\theta)$

فصل سوم

معادله مرتبه n

$y'' = F(x, y, y')$

* جواب عمومی شامل c_1 و c_2 است

* شرط اولیه: $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y_1$

۱) معادلات فاقد y — $y'' = F(x, y')$

برای حل $z = y'$ تا به معادله $z' = F(x, z)$ تبدیل شود که مرتبه اول است.

$\frac{٤٧١۴}{٢ج٣٥٨}$

$y'' + (\tan x) y' = \cos 2x$

فاقد y $\to y' = z \xrightarrow{\text{در معادله}} z' + (\tan x) z = \cos^2 x$

$\mu(x) = e^{\int \tan x \, dx} = e^{\ln(\sec x)} = \sec x$

$\to z = \frac{1}{\sec x} \int \cos x \, dx \qquad z = \cos x(\sin x + c_1)$

$z = \frac{1}{2} \sin 2x + c_1 \cos x \xrightarrow{\int} y = -\frac{1}{4} \cos 2x + c_1 \sin x + c_2$

$\frac{٤٨۴}{٢ج٣٠٩}$ جواب معادله $y'y'' = 2$ و $y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$ در $x = 3$ چقدر است

فاقد y $\to y' = z \xrightarrow{\text{در معادله}} z \frac{dz}{dx} = 2 \to z\,dz = 2\,dx$

$\xrightarrow{\int} \frac{1}{2} z^2 = 2x + c_1 \to \frac{1}{2} y'^2 = 2x + c_1$

$\xrightarrow{y'(0) = 2} \frac{1}{2} \times 4 = 0 + c_1 \qquad c_1 = 2 \to y'^2 = 4(x+1)$

$\xrightarrow{\sqrt{}} y' = 2\sqrt{x+1} = 2(x+1)^{1/2} \xrightarrow{\int} \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + c_2$

$\xrightarrow{y(0) = 1} 1 = \frac{4}{3} + c_2 \to c_2 = -\frac{1}{3} \to y = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}$

$\xrightarrow{x = 3} y = \frac{4}{3}\overbrace{(4)^{3/2}}^{8} - \frac{1}{3} = \frac{31}{3}$

۲) معادله فاقد x 　 $y''=g(y,y')$

برای حل قرار می‌دهیم $y'=z$ و y را متغیر مستقل می‌گیریم پس:

$$y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'=z}\to y''=z\frac{dz}{dy}$$

و با جایگذاری به معادله $z\frac{dz}{dy}=g(y,z)$ می‌رسیم که مرتبه اول است

۴۹۹/۱۵۷ 　 جواب عمومی 　 $y''+y'^3e^{2y}=0$

فاقد x $\begin{cases} y'=z \\ y \text{ مستقل} \end{cases}$ $\to y''=z\frac{dz}{dy}\xrightarrow{\text{در معادله}} z\frac{dz}{dy}+z^3e^{2y}=0$

$$\to z\frac{dz}{dy}=-z^3e^{2y}\to -\frac{dz}{z^2}=e^{2y}dy\xrightarrow{\int}\underbrace{\frac{1}{z}}_{y'}=\frac{1}{2}e^{2y}+c_1$$

(تفکیک پذیر)

$$y'=\frac{1}{\frac{1}{2}e^{2y}+c}$$

$$\to\left(\frac{1}{2}e^{2y}+c_1\right)dy=dx\xrightarrow{\int}\frac{1}{4}e^{2y}+c_1y=x+c_2$$

۵۰۱۲/۲ج۲۵۷ 　 جواب عمومی 　 $yy''+2y'^2=0$

فاقد x $\begin{cases} y'=z \\ y \text{ مستقل} \end{cases}$ $\to y''=z\frac{dz}{dy}$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} yz\frac{dz}{dy}+2z^2=0\to yz\frac{dz}{dy}=-2z^2\to\frac{dz}{z}=-2\frac{dy}{y}$$

(تفکیک پذیر)

$$\xrightarrow{\int}\ln z=-2\ln y+k\xrightarrow{exp}\underbrace{z}_{y'}=c_1y^{-2},\quad y'=c_1y^{-2}$$

$$\to dy/dx=c_1y^{-2}\to y^2dy=c_1dx\xrightarrow{\int}\frac{1}{3}y^3=c_1x+c_2$$ جواب عمومی

فضای معادلات دیفرانسیل

تعریف: توابع y_1 و ... و y_k را مستقل خطی می‌نامیم هرگاه از رابطه‌ی $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k = 0$ نتیجه شود که $c_1 = 0$ و ... و $c_k = 0$ و در غیر اینصورت آنها را وابسته خطی می‌نامیم.

مثال: بررسی کنید $\sin x$ و $\cos x$ مستقل هستند یا وابسته؟

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 & 0 + c_2 = 0 \\ x = \pi/2 & c_1 + 0 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0 , c_2 = 0$$

پس توابع مستقل خطی اند

تعریف: اگر y_1 و ... و y_k تابع باشند، رونسکین آنها عبارت است از

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_k' \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

قضیه: اگر رونسکین y_1 و ... و y_k در نقطه‌ای ناصفر باشد آنگاه توابع مستقل خطی می‌باشند.

مثال ۵۱: بررسی کنید توابع 1 و x و $\sin x$ مستقل هستند یا وابسته؟

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & \sin x \\ 0 & 1 & \cos x \\ 0 & 0 & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin x \qquad W(\pi/2) = -1 \neq 0$$

مستقل خطی اند

تذکر: اگر به ازای هر x رونسکین صفر باشد نمی‌توان نتیجه گرفت توابع مستقل یا وابسته هستند.

مثال ۵۲: توابع $y_1 = x^3$ و $y_2 = |x^3|$ مفروض اند

الف: رونسکین را بیابید — ب: مستقل اند یا وابسته؟

الف:

$$y_2 = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases} \rightarrow y_2' = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases} = 3x|x|$$

$$W = \begin{vmatrix} x^3 & |x^3| \\ 3x^2 & 3x|x| \end{vmatrix} = 3x^4|x| - 3x^2|x^3| = 0$$

ب: با تعریف بررسی می‌کنیم

$$c_1 x^3 + c_2 |x^3| = 0 \xrightarrow[x=-1]{x=1} \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0 \text{ و } c_2 = 0$$

پس y_1 و y_2 مستقل خطی اند

* معادله دیفرانسیل خطی و مرتبه n و همگن $L(y) = y^{(n)} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + P_0(x) y = 0$ مفروض است که در آن P_0 و ... و P_{n-1} پیوسته اند

۱) اگر y_1 و y_2 جواب $L(y)=0$ باشند آنگاه $y_1 + y_2$ نیز جواب $L(y)=0$ است

۲) ثابت می‌شود توابع مستقل خطی y_1 و ... و y_n موجودند که در معادله $L(y)=0$ صدق کنند پس $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ جواب عمومی است و $\{y_1, \dots, y_n\}$ مجموعه اساسی (پایه) جواب گفته می‌شود

۳) اگر y_1 و ... و y_n جواب‌های معادله $L(y)=0$ باشند آنگاه:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} P_{n-1}(x)\,dx} \quad \text{(قضیه آبل)}$$

* معادله خطی مرتبه n، $L(y)=f(x)$ مفروض است

۱) اگر y_1 جواب $L(y)=0$ و y_p جواب $L(y)=f(x)$ باشد آنگاه y_1+y_p جواب $L(y)=f(x)$ می‌باشد

۲) اگر y_1 و y_2 دو جواب $L(y)=f(x)$ باشد آنگاه y_1-y_2 جواب $L(y)=0$ است

۵۴ / ۲ج ۳۹۹ اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل معادله $y''+\frac{2}{x}y'+e^x y=0$ باشند که $W(1)=2$ رونسکین را در $x=5$ بیابید

$$W(x)=W(1)\,e^{-\int_1^x \frac{2}{x}dx}=2e^{-2\ln x\big|_1^x}=2e^{-2\ln x}=2e^{\ln x^{-2}}$$

$$W(x)=\frac{2}{x^2}=\frac{2}{25}=0/08$$

معادله دیفرانسیل خطی و ضرایب ثابت (همگن)

$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_0y=0$ و $a_k\in R$

جواب این معادله $y=e^{rx}$ می‌باشد که r با حل معادله مشخصه زیر حاصل می‌گردد

$r^n+a_{n-1}r^{n-1}+\dots+a_0=0$

توجه کنید که در عمل با جایگذاری r^k به جای $y^{(k)}$ معادله مشخصه حاصل می‌گردد.

با توجه به وضع ریشه‌های این معادله داریم

حالت اول: $r=r_1\in IR$ که تکرار آن k باشد جوابهای مستقل خطی عبارتند از

$$\underbrace{e^{r_1x},\ xe^{r_1x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{r_1x}}_{k}$$

حالت دوم: $r=\alpha\pm i\beta$ که تکرار آن k باشد:　$i=\sqrt{-1}$

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ و ... و $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x$ و ... و $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

تعداد $2k$ جواب مستقل خطی بدست می‌آید

تذکر: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (اویلر)

تذکر: عملگر D را با روابط زیر تعریف می‌کنیم

$$D=\frac{d}{dx},\quad D^2=\frac{d^2}{dx^2},\quad \dots,\quad D^k=\frac{d^k}{dx^k}$$

معادله * عبارت است از:

$$D^n y+a_{n-1}D^{n-1}y+\dots+a_0 y=0$$

$$\underbrace{(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots+a_0)}_{\text{معادله مشخصه}}y=0$$

بنابراین با $r \to D$ معادله مشخصه بدست می‌آید.

۵۴
۴۲
۱۷۰ جواب کلی $y'''-y'=0$

معادله مشخصه: $r^3-r=0 \to r(r^2-1)=0 \to r=0,1,-1$

پایه جواب $\{e^{0x}, e^{x}, e^{-x}\}$

جواب عمومی $y=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x}$

یا $y=c_1+a_2\sinh x+a_3\cosh x$

نکته: اگر λ و $-\lambda$ $(\lambda\neq 0)$ جواب معادله مشخصه باشند پایه جواب عبارت است از:

$\{e^{\lambda x}, e^{-\lambda x}\}$ یا $\{\cosh(\lambda x), \sinh(\lambda x)\}$

۵۵ $\frac{۶۴}{۱۰۷}$ جواب عمومی $y^{(3)}-3y''+3y'-y=0$

معادله مشخصه: $r^3-3r^2+3r-1=0 \to (r-1)^3=0 \to r=1,1,1$

$y=c_1e^{x}+c_2xe+c_3x^2e^{x}$

۵۶ $\frac{۲۷}{۱۷۱}$ جواب عمومی $y''+4y'+5y=0$

معادله مشخصه: $r^2+4r+5=0$ $\quad r=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm 2i}{2}$

$\to r=-2\pm i \quad \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=1\end{cases}$

$y=c_1e^{-2x}\sin x+c_2e^{-2x}\cos x$

۵۷ $\frac{۲۰}{۱۶۶}$ جواب عمومی $y^{(4)}+2y''+y=0$

$r^4+2r^2+1=0 \to (r^2+1)^2=0 \quad r^2+1=0 \to r^2=-1 \to r=\pm\sqrt{-1}$

$r=\mp i$ ریشه ها: $r=\pm i$ و $\pm i$ $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$

$y=c_1\sin x+c_2\cos x+c_3x\sin x+c_4x\cos x$

۵۸ $\frac{۲۹}{۱۷۱}$ جواب عمومی $(D+2)^2(D^2+2D+5)y=0$

$D\to r \quad (r+2)^2(r^2+2r+5)=0 \to r=-2,-2,-1\pm i \quad \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases}$

$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+c_3e^{-x}\sin 2x+c_4e^{-x}\cos 2x$

۵۹ مثال: جواب معادله $y''-4y'+4y=0$ را با شرایط اولیه $y(0)=0$ و $y'(0)=2$ بدست آورید.

ابتدا جواب عمومی را بدست می آوریم:

$r^2-4r+4=0 \to (r-2)^2=0 \to r=2,2 \quad y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

حال شرایط اولیه را اعمال می کنیم

$\begin{cases}0=y(0)=c_1\\ 2=y'(0)=2c_1+c_2\end{cases} \to c_1=0,\ c_2=2$

جواب خاص (خصوصی) $y=2xe^{2x}$

۹۱
۳۳/۱۷۲ به ازای چه مقدار α پاسخ معادله زیر وقتی $t \to +\infty$ به صفر میل می‌کند؟

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=0 \\ y(0)=\alpha \ , \ y'(0)=2 \end{cases}$$

جواب عمومی عبارت است از:

$$r^2-r-2=0 \to (r+1)(r-2)=0 \to r=-1 \ , \ 2$$

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}$$

توجه کنید که به ازای هر c_1 وقتی $t \to +\infty$ داریم $c_1e^{-t} \to 0$ اما $e^{2t} \to +\infty$

پس شرط لازم و کافی برای آنکه $y \to 0$ آن است که $c_2=0$ پس $y=c_1e^{-t}$

اعمال شرط
$$\begin{cases} \alpha=y(0)=c_1 \\ 2=y'(0)=-c_1 \end{cases} \to \cancel{c_1}^{-2}=\alpha \to \alpha=-2$$

۹۱
۳۱/۱۷۲ y_1 و y_2 دو جواب $y''-2y'+y=R(x)$ هستند به طوری که $y_1(0)=y_2(0)$ و $y_1'(0)=y_2'(0)+1$ کدام گزینه درست است

از نکات جلسه قبل $\varphi(x)=y_1-y_2$ معادله همگن متناظر یعنی $y''-2y'+y=0$ می‌باشد

شرایط $\to \varphi(0)=0$ و $\varphi'(0)=1$

معادله مشخصه: $r^2-2r+1=0 \to r=1,1$

$$\varphi(x)=y=c_1e^x+c_2xe^x$$

اعمال شرط
$$\begin{cases} 0=\varphi(0)=c_1 \\ 1=\varphi'(0)=c_1+c_2 \end{cases} \to c_1=0 \ \text{و} \ c_2=1$$

$$y_1-y_2=\varphi(x)=xe^x$$

۶۲۸ / ۲ج۱۲۴ معادله دیفرانسیلی را بیابید که e^x و e^{2x} پایه جواب آن باشند

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ ضرایب ثابت

معادله مشخصه

$e^x, e^{2x} \to r=1, 2 \to (r-1)(r-2)=0 \to r^2-3r+2=0$

معادله دیفرانسیل $\to y''-3y'+2y=0$

۶۳۵ / ۱۷۳ معادله دیفرانسیلی را بیابید که e^{2x} و xe^{2x} و ۱ (e^{0x}) جواب‌های مستقل آن باشند

ریشه‌ها: $r=0,0,2,2 \to r^2(r-2)^2=0 \to r^4-4r^3+4r^2=0$

$\to y^{(4)}-4y'''+4y''=0$

۶۳۶ / ۱۷۳ معادله دیفرانسیل $y=e^{-x}(a\cos x+b\sin x)$ را بیابید:

پایه $\{e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x\}$ معادله مشخصه

$r=\alpha\pm i\beta \to r=-1\pm i \to r+1=\pm i \xrightarrow{\text{توان ۲}} r^2+2r+1=-1$

معادله دیفرانسیل $\to r^2+2r+2=0 \to y''+2y'+2y=0$

معادلات خطی (ضرایب ثابت) ناهمگن

در معادله خطی $L(y)=f(x)$ چنانچه تابعی جواب باشد آن را جواب خصوصی نامیده و با y_p نمایش می‌دهیم

در معادله ضرایب ثابت با هریک از روشهای زیر می‌توان جواب خصوصی را محاسبه نمود

۱- روش ضرایب نامعین (حدسی)

۲- روش عملگر معکوس

۳- روش تغییر پارامتر (روش لاگرانژ)

۱- روش ضرایب نامعین (حدس)

این روش فقط برای یافتن جواب خصوصی معادلات ضرایب ثابت استفاده می‌شود که تابع طرف دوم نمایی، چند جمله‌ای، سینوس، کسینوس یا ضرب و جمع آنها باشد. (تابع طرف دوم باید جواب یک معادله ضرایب ثابت همگن باشد)

در معادله $L(y) = f(x)$ برای جواب خصوصی دو حالت داریم:

حالت اول: $f(x) = A_m(x)\, e^{ax}$

($A_m(x)$ چند جمله‌ای درجه m است) جواب خصوصی عبارت است از

$$y_p = x^s B_m(x)\, e^{ax}$$

s: مرتبه تکرار a در معادله مشخصه همگن

$B_m(x)$: چند جمله‌ای از درجه m با ضرایب نامعین

مثال ۴۵: جواب خصوصی معادله زیر در روش ضرایب نامعین را بنویسید (ضرایب را محاسبه نکنید)

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x} + e^{-x}$$

مشخصه: $r^2 - 6r + 9 = 0 \rightarrow r = 3, 3$

$$y_p = x^2(ax^2 + bx + c)\, e^{3x} + \cancel{x^{0}}\, d\, e^{-x}$$

۴۶۴ / ۳۰۹ ج۲

جواب خصوصی معادله زیر را بیابید

$$y'' - 2y' + y = x\cosh x = \frac{x}{2} e^{x} + \frac{x}{2} e^{-x}$$

همه گزینه‌ها دارای ضریب نامعین بودند ← روش حدس

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \rightarrow (r-1)^2 = 0 \rightarrow r = 1, 1$$

$$y_p = x^2(ax + b)\, e^{x} + \cancel{x^{0}}\,(cx + d)\, e^{-x}$$

۶۷ ۷۵ / ۲ج ۳۱۹

جواب خصوصی $y''-y'=2x$ را بیابید

$y''-y'=2xe^{0x}$

۱) $-x(x+2)$ ۲) $x(x+2)$

۳) $x(x-2)$ ۴) $x(2x+1)$

ابتدا حدس جواب را در روش ضرایب نامعین می‌نویسیم

مشخصه: $r^2-r=0 \rightarrow r=0,1$

$y_p=x^1(ax+b)e^{0x} \rightarrow y_p=x(ax+b)=ax^2+bx$

با جایگذاری در معادله ضرایب را محاسبه می‌کنیم

$y_p'=2ax+b$ و $y_p''=2a$

$\xrightarrow{\text{در معادله}} 2a-(2ax+b)=2x \rightarrow \begin{cases} -2a=2 \\ 2a-b=0 \end{cases} \rightarrow a=-1, b=-2$

$\rightarrow y_p=x(ax+b)=-x(x+2)$

$$f(x)=\begin{cases} e^{\alpha x}A_m(x)\sin\beta x \\ e^{\alpha x}A_m(x)\cos\beta x \end{cases}$$

حالت دوم

حدس جواب خصوصی عبارت است از:

$y_p=x^s e^{\alpha x}(B_m(x)\sin\beta x+C_m(x)\cos\beta x)$

چندجمله‌ای درجه m با ضرایب نامعین

$s=$ مرتبه تکرار $r=\alpha\pm i\beta$ در مشخصه معادله

مثال ۶: حدس جواب خصوصی معادله زیر را بنویسید (ضرایب را محاسبه نکنید)

$y''+2y'+5y=\underset{-1\mp 2i}{e^{-x}\sin 2x}+\underset{\pm 2i}{\cos 2x}$ $\quad r^2+2r+5=0 \rightarrow r=-1\pm i$

$y_p=x^1e^{-x}(a_1\sin 2x+a_2\cos 2x)+\cancel{x}(a_3\sin 2x+a_4\cos 2x)$

۶۹|۸۶
۲ج.۳۲، شکل جواب خصوصی معادله زیر را بیابید

$$y'' + 4y = x \cdot \sin 2x$$

همگن نیست ضریب نامعین بود ← روش ضرایب نامعین

$$r^2 + 4 = 0 \to r^2 = -4 \to r = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$y_p = x^1\big((ax+b)\sin 2x + (cx+d)\cos 2x\big)$$

۲ـ روش تغییر پارامتر (لاگرانژ)

در معادله خطی $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

به فرض آنکه y_1 و y_2 دو جواب مستقل همگن متناظر باشند جواب خصوصی عبارت است از

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(x)}\,dx \quad , \quad c_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W(x)}\,dx$$

$$W(x) = W(y_1, y_2)$$

مثال: جواب خصوصی $y'' + y = \sec x$ را بیابید

همگن، $y'' + y = 0 \to r^2 + 1 = 0 \quad r = \pm i \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(x)}\,dx = -\int \frac{\cos x \cdot \sec x}{-1}\,dx = x$$

$$C_2(x)=\int \frac{y_1 f(x)}{W(x)}dx=\int \frac{\sin x\cdot \sec x}{-1}dx=-\int \operatorname{tg} x\,dx=\ln(\cos x)$$

$$y_p=x\sin x+(\cos x)\ln(\cos x))$$

۵۲/۱۸۸ اگر جواب همگن متناظر معادله زیر x و e^x باشد جواب خصوصی

$$(1-x)y''+xy'-y=2(x-1)^2e^{-x}$$

را بیابید

$$f(x)=\frac{2(x-1)^2e^{-x}}{1-x}=2(1-x)e^{-x}$$

$$W=\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}=(x-1)e^x$$

$$y_p=c_1(x)y_1+C_2(x)y_2$$

$$c_1(x)=-\int \frac{y_2 f(x)}{W(x)}dx=-\int \frac{e^x\cdot 2(1-x)e^{-x}}{(x-1)e^x}dx$$

$$=\int 2e^{-x}dx=-2e^{-x}$$

$$C_2(x)=\int \frac{y_1 f(x)}{W(x)}dx=\int \frac{x\cdot 2(1-x)e^{-x}}{(x-1)e^x}dx=\int \overset{u}{-2x}\,\underbrace{e^{-2x}dx}_{dv}$$

$$=xe^{-2x}-\int e^{-2x}dx=xe^{-2x}+\tfrac{1}{2}e^{-2x}$$

$$du=-2dx,\quad v=-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\qquad y_p=-2xe^{-x}+xe^{-x}+\tfrac{1}{2}e^{-x}$$

$$y_p=(-x+\tfrac{1}{2})e^{-x}$$

۳ـ روش عملگر معکوس

این روش برای یافتن جواب خصوصی معادله ضرایب ثابت قابل استفاده است

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f(x)$$

ابتدا معادله را به صورت عملگری می‌نویسیم:

$$\underbrace{(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_0)}_{P(D)\ \text{معادله مشخصه}}y=f(x)$$

$$\to P(D)y=f(x)$$

$$y_p=\frac{1}{P(D)}f(x)$$

تذکر: $\frac{1}{D}$ به مفهوم یکبار انتگرال گرفتن است یعنی $\frac{1}{D}f(x)=\int f(x)dx$

با توجه به $f(x)$ حالات زیر را داریم

حالت اول: $f(x)=e^{ax}$ و $P(a)\neq 0$

$$\frac{1}{P(D)}e^{ax}=\frac{1}{P(a)}e^{ax}$$

چنانچه $P(a)=0$ و a ریشه تکرار k در مشخصه معین باشد آنگاه:

$$\frac{1}{P(D)}e^{ax}=\frac{x^k}{P^{(k)}(a)}e^{ax} \qquad P^{(k)}(a)\neq 0$$

نکته: اگر a ریشه تکرار k باشد آنگاه k اولین مرتبه مشتق ناصفر $P(D)$ در a می‌باشد یعنی: $P(a)=0$ و $P'(a)=0$ و ... و $P^{(k-1)}(a)=0$ و $P^{(k)}(a)\neq 0$

نکته: فرض کنید $P(D)=(D-a)^k q(D)$ که $q(a)\neq 0$

الف: a ریشه تکرار k است

ب: $P^{(k)}(a)=k!\,q(a)$

$y''' - 2y'' + 3y' - 2y = 2e^{x}$ جواب خصوصی — ۶ / ۲ج-۳۹۹

$$y_p = \frac{1}{\underbrace{D^3 - 2D^2 + 3D - 2}_{P(D)}}\, 2e^{x} = \frac{x^1}{2}\, 2e^{x} \rightarrow y_p = xe^{x}$$

$P(1) = 0 \quad P'(D) = 3D^2 - 4D + 3 \rightarrow P'(1) = 2 \neq 0 \rightarrow k = 1$

$y'' - 2y' + y = 3e^{x}$ جواب خصوصی — ۷ / ۲ج۳۵۷

$$y_p = \frac{1}{\underbrace{D^2 - 2D + 1}_{P(D)}}(3e^{x}) = \frac{x^2}{2}(3e^{x}) = \frac{3}{2}x^2 e^{x}$$

روش اول

$P(1) = 0 \rightarrow P'(D) = 2D - 2 \rightarrow P'(1) = 0 \rightarrow P''(D) = 2 \rightarrow P''(D) = 2 \neq 0 \rightarrow k = 2$

روش دوم: $$y_p = \frac{1}{(D-1)^2}(3e^{x}) \underset{k=2}{=} \frac{x^2}{2!}(3e^{x}) = \frac{3}{2}x^2 e^{x}$$

مثال: جواب خصوصی $(D+1)^3(D-2)^2 y = e^{-x} + 4e^{2x}$

$$y_p = \frac{1}{(D+1)^3(D-2)^2}e^{-x} + \frac{1}{(D+1)^3(D-2)^2}4e^{2x}$$

$$= \frac{x^3}{3!(-1-2)^2}e^{-x} + \frac{x^2}{(2+1)^3\, 2!}4e^{2x}$$

حالت دوم: اگر $f(x) = \sin\beta x$ یا $f(x) = \cos\beta x$

روش اول: با توجه به رابطه $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$ برای محاسبه $y_p = \frac{1}{P(D)}f(x)$

ابتدا $Z_p = \frac{1}{P(D)}e^{i\beta x}$ را محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$y_p = \begin{cases} Re(Z_p) : f(x) = \cos\beta x \\ Im(Z_p) : f(x) = \sin\beta x \end{cases}$$

روش دوم: چنانچه $P(i\beta) \neq 0$ برای محاسبه $\frac{1}{P(D)} f(x)$ کافی است در توابع زوج - جای D قرار می‌دهیم $i\beta$ و حاصل را ساده کنیم ($e^{i\beta x}$ را جایگذاری نمی‌کنیم و Re و I_m محاسبه نمی‌شود)

مثال: جواب خصوصی را بیابید

۱) $y^{(4)} + 2y'' + 5y = \sin x$

$$y_p = \frac{1}{D^4+2D^2+5}\sin x = \frac{1}{i^4+2i^2+5}\sin x = \frac{1}{4}\sin x$$

۲) $y'' + 4y = 3\cos 2x$

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}3\cos 2x = Re(z_p) = \frac{3}{4}x\sin 2x$$

$$z_p = \underbrace{\frac{1}{D^2+4}}_{P(D)} 3e^{2ix} = \frac{x}{4i}3e^{2ix} = \frac{3x}{4i}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$= \frac{3x}{4}\left(-\cancel{\frac{1}{i}}\cos 2x + \sin 2x\right)$$

$P(2i) = (2i)^2 + 4 = -4+4 = 0$, $P'(D) = 2D \to P'(2i) = 4i \neq 0 \to k=1$

۳) $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$

$$y_p = \frac{1}{D^2-3D-4}2\sin x = \frac{1}{i^2-3D-4}2\sin x = \frac{1}{-5-3D}2\sin x$$

مزدوج مخرج

$$\frac{-5+3D}{25-9D^2}2\sin x = \frac{-5+3D}{34}(2\sin x)$$

$$= \frac{1}{17}(-5\sin x + 3\cos x)$$

۴) $y''' + 3y'' + y = \cos 2x$

$$y_p = \frac{1}{\underset{D^3 = D^2 \cdot D}{D^3+3D^2+1}} \cos 2x = \frac{1}{(2i)^2 D + 3(2i)^2 + 1} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{-11-4D}\cos 2x = \frac{-11+4D}{121-16D^2}\cos 2x = \frac{-11+4D}{185}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{185}(-11\cos 2x - 8\sin 2x)$$

حالت سوم: $f(x) = e^{ax} g(x)$

$$\frac{1}{P(D)} e^{ax} g(x) = e^{ax} \frac{1}{P(D+a)} g(x)$$

$$D \to D+a$$

مثال: جواب خصوصی را بیابید

۱) $y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x}$

$$y_p = \frac{1}{\underset{(D-3)^2}{D^2-6D+9}} x^2 e^{3x} = e^{3x}\frac{1}{D^2}x^2 = e^{3x}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{12}x^4 e^{3x}$$

۲) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 3x$

$$y_p = \frac{1}{D^2+2D+5} e^{-x}\sin 3x = e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2 + 2(D-1)+5}\sin 3x$$

$$y_p = e^{-x}\frac{1}{D^2+4}\sin 3x = e^{-x}\frac{1}{\underset{-9}{(3i)^2}+4}\sin 3x = -\frac{1}{5}e^{-x}\sin 3x$$

حالت چهارم: $f(x) = x\,g(x)$

$$\frac{1}{P(D)} x\,g(x) = x\frac{1}{P(D)}g(x) - \frac{P'(D)}{P^2(D)}g(x)$$

مثال: جواب خصوصی $y''+2y'+y = x\cos x$ را بیابید.

$$y_p = \frac{1}{D^2+2D+1}x\cos x = x\frac{1}{D^2+2D+1}\cos x - \frac{2D+2}{(D^2+2D+1)^2}\cos x \qquad 4D^2 = 4i^2 = -4$$

$$= \frac{x}{2}\sin x + \frac{1}{4}(2D+2)\cos x = \frac{x}{2}\sin x + \frac{1}{4}(-2\sin x + 2\cos x)$$

حالت پنجم　$F(x) = A_m(x)$ (درجه m)

برای محاسبه $\frac{1}{P(D)}A_m(x)$ ابتدا $P(D)$ را برحسب توانهای صعودی می‌نویسیم و سپس یک را بر $P(D)$ تقسیم می‌کنیم: خارج قسمت را تا رسیدن به D^m ادامه می‌دهیم و سپس بجای $\frac{1}{P(D)}$ خارج قسمت را می‌نویسیم

مثال: جواب خصوصی معادله زیر را با روش عملگر بیابید

$$y''+2y'+2y = 2x+5$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+2D+2}(2x+5) = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}D\right)(2x+5)$$

$$= x + \tfrac{5}{2} - 1 = x + \tfrac{3}{2}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2+2D+D^2 \\ \hline -1+D+\frac{D^2}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}D + \cdots \\ \hline -D-\frac{D^2}{2} & \end{array}$$

معادله خطی و غیرهمگن (جواب عمومی)

معادله خطی $L(y)=f(x)$ مفروض است برای یافتن جواب عمومی کافی است جواب عمومی همگن متناظر یعنی y_h را با جواب خصوصی یعنی y_p جمع کنیم

یعنی $y_{\text{عمومی}} = y_h + y_p$

$\frac{4}{\text{۲ج۱۹۵}}$ جواب عمومی $y''-4y'+3y=20\cos x$ (عمران ۸۶)

۱) $c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}+\cos x$ ۲) $c_1e^{x}+c_2e^{3x}+2\cos x$

۳) $c_1e^{x}+c_2e^{3x}+3\cos x$ ۴) $c_1e^{x}+c_2e^{3x}+\cos x-2\sin x$

کافی است فقط y_p را محاسبه کنیم

$$y_p=\frac{1}{D^2-4D+3}(20\cos x)=\frac{1}{-1^2-4D+3}(20\cos x)=\frac{1}{1-2D}(10\cos x)$$

$$=\frac{1+2D}{1-\underbrace{4D^2}_{4(-1)^2}}(10\cos x)=(1+2D)(2\cos x)=2\cos x-4\sin x \quad (3)$$

حال جواب عمومی همگن را می‌یابیم $r^2-4r+3=0 \to r=1,3$

$\to y_h=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$ جواب عمومی $y=y_h+y_p$ (۳)

$\frac{1}{\text{۲ج۲۵۷}}$ جواب عمومی $y'''-4y'=e^{-2x}$ (عمران ۸۷)

همگن $\to r^3-4r=0 \to r(r^2-4)=0 \to r=0, 2, -2$

$y_h=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}$

برای جواب خصوصی از عملگر داریم

$$y_p=\frac{1}{D^3-4D}e^{-2x}=\frac{x^1}{8}e^{-2x}$$

$k=1$ ، مشتق $=3D^2-4=8\neq 0$

جواب عمومی $y=y_h+y_p=\dots$

۵۱ / ۲ج۱۲۹ جواب عمومی $y''-2y'+y=xe^{x}$

همگن: $r^2-2r+1=0 \rightarrow (r-1)^2=0 \rightarrow r=1,1 \rightarrow y_h=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

جواب خصوصی را با روش عملگر محاسبه می‌کنیم

$$y_p=\frac{1}{(D-1)^2}xe^{x}=e^{x}\frac{1}{D^2}x=e^{x}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D}x\right)=\frac{x^3}{6}e^{x}$$

$$\rightarrow y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+\frac{x^3}{6}e^{x}$$

نکته: اگر در e^{ax} a تنها ریشه معادله باشد آنگاه از روش عملگر جهت بدست آوردن جواب خصوصی استفاده می‌کنیم

۶۰ / ۱۹۲ جواب عمومی $y''-4y'+4y=\frac{e^{2x}}{x}$

همگن: $r^2-4r+4=0 \rightarrow (r-2)^2=0 \rightarrow r=2,2$

$$y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

برای جواب خصوصی از روش عملگر داریم

$$y_p=\frac{1}{(D-2)^2}\left(\frac{e^{2x}}{x}\right)=e^{2x}\frac{1}{D^2}\left(\frac{1}{x}\right)=e^{2x}\cdot\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D}x^{-1}\right)$$

$$=e^{2x}\int \ln x\,dx=e^{2x}\left(x\ln x-\int dx\right)=e^{2x}(x\ln x-x)$$

$$=e^{2x}x\ln x-xe^{2x}$$ جواب عمومی: $y=y_h+y_p=\cdots$

نکته: جواب خصوصی منحصر به فرد نیست در واقع اجازه داریم y_p محاسبه شده را با قسمتی از y_h که به جای c_1 و c_2 عدد گذاری شده باشد جمع کنیم و آن را جواب خصوصی بنامیم مثلاً در سوال قبل:

$$y_p=xe^{2x}\ln x-xe^{2x}$$

$$y_p=xe^{2x}\ln x \qquad (c_1=0,\ c_2=1)$$

$$y_p=xe^{2x}\ln x-e^{2x} \qquad (c_1=-1,\ c_2=1)$$

۱۶/۱۹۷ ج۲

در معادله $\begin{cases} y''+4y=4\cos 2x \\ y(0)=1 \text{ و } y'(0)=0 \end{cases}$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ مقدار y را بیابید.

ابتدا جواب عمومی غیرهمگن را می‌یابیم

$r^2+4=0 \rightarrow r^2=-4 \rightarrow r=\pm 2i \quad \alpha=0 \text{ و } \beta=2$ همگن

$y_h=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$

جواب خصوصی را با عملگر می‌یابیم

$y_p=\frac{1}{D^2+4}(4\cos 2x)$

$Z_p=\frac{1}{D^2+4}(4e^{2ix})=\frac{x}{4i}4e^{2ix}=\frac{x}{i}(\cos 2x+i\sin 2x)=x(\frac{1}{i}\cos 2x+\sin 2x)$

$k=1$، مشتق $=2D=4i\neq 0$

$\rightarrow y_p=Re(Z_p)=x\sin 2x$

جواب عمومی $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+x\sin 2x$

حال شرط اولیه را اعمال می‌کنیم

$\begin{cases} 1=y(0)=c_2 \\ 0=y'(0)=2c_1 \end{cases} \rightarrow c_2=1,\ c_1=0$

$\rightarrow y=\cos 2x+x\sin 2x$ جواب خاص

$x=\pi/4 \rightarrow y(\pi/4)=\cos\pi/2+\pi/4\sin\pi/2=\pi/4$

۶۶/۱۹۵

بین ثابت‌های α و β چه رابطه‌ای برقرار باشد تا جواب $\begin{cases} y''-y=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t \\ y(0)=0 \text{ و } y'(0)=0 \end{cases}$، $\omega\neq 0$ پس از گذشت زمان طولانی ($t\rightarrow+\infty$) به سمت جواب تناوبی میل کند؟

ابتدا جواب عمومی را می‌یابیم

$r^2-1=0 \rightarrow r=\pm 1$ همگن

$y_h=c_1e^t+c_2e^{-t}$

$$y_p=\frac{1}{\underset{(i\omega)^2}{D^2}-1}\alpha\cos\omega t+\frac{1}{D^2-1}\beta\sin\omega t=-\frac{1}{\omega^2+1}\cos\omega t-\frac{\beta}{\omega^2+1}\sin\omega t$$

$$\rightarrow y_{\text{عمومی}}=c_1e^{t}+c_2e^{-t}-\frac{\alpha}{\omega^2+1}\cos\omega t-\frac{\beta}{\omega^2+1}\sin\omega t$$

چون $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ کراندار هستند ولی $c_1e^{t}+c_2e^{-t}$ وقتی $t\to+\infty$ ، $c_2e^{-t}\to 0$ و $e^{t}\to+\infty$ میل می‌کنند اما

پس الزاماً c_1 باید صفر شود ولذا: $y=c_2e^{-t}-\frac{\alpha}{\omega^2+1}\cos\omega t-\frac{\beta}{\omega^2+1}\sin\omega t$

حال شرط را اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases}0=y(0)=c_2-\frac{\alpha}{\omega^2+1}\\ 0=y'(0)=-c_2-\frac{\beta\omega}{\omega^2+1}\end{cases}$$

$$-\frac{\alpha+\beta\omega}{\omega^2+1}=0\qquad \alpha+\beta\omega=0$$

معادله کوشی اویلر

$$x^2y''+axy'+by=0\ ,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

هر معادله که به صورت ترکیب خطی $x^ky^{(k)}$ باشد کوشی اویلر نامیده می‌شود.

جواب این معادله x^r $(x>0)$ است

برای یافتن r باید معادله مشخصه را تشکیل دهیم. کافی است به جای $x^ky^{(k)}$ قرار دهیم $r(r-1)\dots(r-k+1)$ و توجه کنید که عبارت بالا ضریب مشتق kام x^r است

با توجه به وضع r دو حالت داریم:

الف: $r=r_1\in\mathbb{R}$ که k بار تکرار شود: $\underbrace{x^{r_1},x^{r_1}(\ln x),\dots,x^{r_1}(\ln x)^{k-1}}_{k}$

ب: $r=\alpha\pm i\beta$ و $\beta\neq 0$ دو جواب مستقل عبارتند از:

$$x^{\alpha}\sin(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)$$

تذکر ۱: چنانچه ریشه تکراری باشد، به ازای هر بار تکرار جواب را در $(\ln x)$ و $(\ln x)^2$ و ... ضرب می‌کنیم

تذکر ۲: چنانچه متناظر یک ریشه از معادله کوشی اویلر جواب ضرایب ثابت را بنویسیم و $x \to \ln x$ پاسخ کوشی اویلر بدست می‌آید

تذکر ۳: چنانچه در جوابها به جای x قرار دهیم $|x|$ جواب برای $x \neq 0$ معتبر است

$\frac{68}{2.1}$ جواب عمومی $x^2y''+xy'-4y=0$ را بدست آورید

کوشی اویلر $\xrightarrow{\text{مشخصه}} r(r-1)+r-4=0 \to r^2-4=0 \to r=2, -2$

$y=c_1x^2+c_2x^{-2}$

$\frac{69}{2.1}$: جواب عمومی معادله $x^2y''+5xy'+4y=0$ به ازای x های مثبت بدست آورید

مشخصه $\to r(r-1)+5r+4=0 \to r^2+4r+4=0$

$\to (r+2)^2=0 \to r=-2, -2 \qquad y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\ln x$

$\frac{74}{2.2}$: جواب عمومی همگن متناظر معادله روبرو را بیابید $x^2y''-3xy'+5y=3x^2$

$x^2y''-3xy'+5y=0$ مشخصه: $r(r-1)-3r+5=0 \quad r^2-4r+5=0$

$\to r=2\pm i \quad \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}$

$y=c_1x^2\sin(\ln x)+c_2x^2\cos(\ln x)$

$\frac{11}{2ج\,242}$: مطلوبست جواب عمومی $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$

$r(r-1)(r-2)-3r(r-1)+\underbrace{6r-6}_{6(r-1)}=0 \to (r-1)(\underbrace{r^2-2r-3r+6}_{r^2-5r+6})=0$

$\to r=1, 2, 3$

$y=c_1x^1+c_2x^2+c_3x^3$

$\frac{۷۶}{۲.۲}$ معادله دیفرانسیلی بیابید که $y = c_1x^2 + c_2x^2\ln x$ جواب عمومی باشد

$\{x^2 , x^2\ln x\}$ پایه جواب $\rightarrow r = ۲ , ۲$

$\rightarrow (r-۲)^2 = ۰ \quad r^2 - ۴r + ۴ = ۰ \quad \underbrace{(r^2 - r)}_{r(r-1)} - ۳r + ۴ = ۰$

$\rightarrow x^2y'' - ۳xy' + ۴y = ۰$

$\frac{۲۱}{۲ج ۴.۳}$ x و $\frac{1}{x}$ دو جواب مستقل خطی یک معادله مرتبه ۲ خطی می‌باشند که ضریب مشتق دوم در آن برابر یک است ضریب مشتق اول چقدر است

$\{x , x^{-1}\} \rightarrow r = ۱ , -۱$

$\rightarrow (r+۱)(r-۱) = ۰ \quad r^2 - ۱ = ۰ \rightarrow (r^2 - r) + r - ۱ = ۰$

$\rightarrow x^2y'' + xy' - y = ۰ \longrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = ۰$

ضریب مشتق اول $= \frac{1}{x}$

$\frac{۹۲}{۲ج ۳۸.}$ تحت چه شرایطی هر جواب دلخواه غیرصفر معادله $x^2y'' + \alpha xy' + y = ۰$ نوسانی و در بی‌نهایت ~~میرا~~ باشد؟

در ∞ به صفر میل نماید

$r(r-۱) + \alpha r + ۱ = ۰$ معادله مشخصه

$\rightarrow r^2 + (\alpha - ۱)r + ۱ = ۰ \longrightarrow r = r_1 , r_2$ r_1 و r_2 غیرحقیقی $\rightarrow$ نوسانی بودن

$\rightarrow \Delta < ۰ \quad \Delta = (\alpha-۱)^2 - ۴ < ۰ \rightarrow (\alpha - ۱)^2 < ۴ \rightarrow |\alpha - ۱| < ۲$

$\rightarrow -۱ < \alpha < ۳$ نوسانی بودن

در معادله درجه ۲ میرا بودن $\begin{cases} r_1 + r_2 < ۰ \\ r_1r_2 > ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -(\alpha - ۱) < ۰ \\ ۱ > ۰ \end{cases} \rightarrow \alpha > ۱$ میرا بودن در بی‌نهایت

نوسانی + میرا $\xrightarrow{\text{اشتراک}} ۱ < \alpha < ۳$

* نوسانی بودن یک تابع : این مفهوم است که تابع دائماً صعود و نزول است و در بین جوابها (کوشی اویلر، ضرایب ثابت) این اتفاق رخ می‌دهد که همه جوابها شامل سینوس و کسینوس باشند و لذا

شرط لازم و کافی برای آنکه در معادله ضرایب ثابت و کوشی اویلر همه جوابها نوسانی باشد آن است که همه ریشه‌ها غیرحقیقی باشند

* میرا بودن در بی‌نهایت یعنی به صفر میل کردن در معادله کوشی اویلر و ضرایب ثابت فقط وقتی رخ می‌دهد که قسمت حقیقی همه ریشه‌ها منفی باشد

در معادله درجه ۲ $\begin{cases} r_1+r_2<0 & -b/a<0 \\ r_1r_2>0 & c/a>0 \end{cases}$

نکته : هر معادله به شکل $(ax+b)^2y''+\alpha(ax+b)y'+\beta y=0$ ، $a\neq 0$ را می‌توان به کوشی اویلر تبدیل کرد: ابتدا a را فاکتور می‌گیریم

$$a^2\left(x+\frac{b}{a}\right)^2y''+a\alpha\left(x+\frac{b}{a}\right)y'+\beta y=0$$

که با تغییر متغیر مستقل $u=x+\frac{b}{a}$ به کوشی اویلر زیر تبدیل می‌شود

$$a^2u^2y''_u+a\alpha u y'_u+\beta y=0$$

$\frac{125}{211}$ مطلوبست جواب عمومی $(2x-1)^2y''+3(2x-1)y'-2y=0$

$4(x-1/2)^2y''+6(x-\frac{1}{2})y'-2y=0 \qquad u=x-1/2$

$u=x-1/2 \rightarrow 4u^2y''+6uy'-2y=0$ کوشی اویلر

$\xrightarrow{\text{مشخصه}} 4r(r-1)+6r-2=0 \rightarrow 4r^2+2r-2=0 \rightarrow r=-1, 1/2$

$\rightarrow y=c_1u^{-1}+c_2u^{1/2}=c_1(x-1/2)^{-1}+c_2(x-1/2)^{1/2}$

سوال : تعیین کنید معادله $x^2y'' + axy' + by = 0$ با تغییر متغیر $x = e^t$ به چه معادله ای تبدیل می شود؟

باید مشتقات نسبت به x را برحسب مشتق نسبت به t بنویسیم. (قاعده مشتق زنجیره ای)

$$x = e^t \to t = \ln x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} \xrightarrow{\text{در معادله}} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a\frac{dy}{dt} + by = 0$$

$$\to y''_t + (a-1)y'_t + by = 0 \quad \text{ضرایب ثابت}$$

کوشی اویلر : $r(r-1) + ar + b = 0$

ضرایب ثابت : $r^2 + (a-1)r + b = 0$

نکته : هر معادله کوشی اویلر در ۳ مرحله ضرایب ثابت می شود

۱) تغییر متغیر $x = e^t$ یا $t = \ln x$ را در نظر می گیریم

۲) معادله مشخصه کوشی اویلر را می نویسیم

۳) معادله ضرایب ثابتی می نویسیم (برحسب مستقل t) که معادله (۲) برای آن معادله مشخصه باشد

* از روش بالا برای یافتن جواب خصوصی کوشی اویلر غیر همگن استفاده می کنیم و میدانیم

$$y = \underbrace{y_h}_{\text{عمومی همگن}} + \underbrace{y_p}_{\text{خصوصی}} \quad : \text{جواب عمومی غیر همگن}$$

مثال: جواب خصوصی معادله زیر را بیابید

$$x^3y''' + xy' + 4y = x$$

باید معادله را به ضرایب ثابت تبدیل کنیم $x=e^t$ و $t=\ln x$

مشخصه کوشی اویلر: $r(r-1)(r-2)+r+4=0$

$$\to r^3-3r^2+3r+4=0 \to y'''-3y''+3y'+4y=e^t$$

$$\xrightarrow{\text{عملگر}} y=\frac{1}{D^3-3D^2+3D+4}e^t=\frac{1}{1-3+3+4}e^t=\frac{1}{5}e^t$$

$$\to y_p=\frac{1}{5}x$$

$\frac{88}{10}$ جواب عمومی $x^2y''+xy'+4y=\sin(\ln x)$

عمومی همگن: $r(r-1)+r+4=0 \to r^2+4=0$

$$\to r=\pm 2i < \begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=2\end{matrix} \qquad y_h=c_1\sin(2\ln x)+c_2\cos(2\ln x)$$

برای یافتن y_p معادله را به ضرایب ثابت تبدیل می‌کنیم

$x=e^t$ یا $t=\ln x$ $y''+4y=\sin t \to y_p=\frac{1}{D^2+4}\sin t$

$$=\frac{1}{i^2+4}\sin t=\frac{1}{3}\sin t \to y_p=\frac{1}{3}\sin(\ln x)$$

جواب عمومی: $y=y_h+y_p=\ldots$

روش کاهش مرتبه

اگر در معادله خطی و مرتبه n، $L(y)=F(x)$ تابع y_1 به عنوان جواب همگن متناظر مشخص باشد یعنی $L(y_1)=0$ قرار دهید $y=y_1 z$ تا به معادله خطی مرتبه n برحسب تابع z برسیم که ضریب z در آن صفر می‌باشد. سپس قرار می‌دهیم $u=z'$ تا به معادله خطی از مرتبه $(n-1)$ برحسب تابع u برسیم

$\frac{۹۰}{۲۱۴}$ $y_1=e^x$ جواب $xy''-(x+2)y'+2y=0$ می‌باشد جواب دیگر این معادله با حل کدام معادله بدست می‌آید؟

$$x\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x}y)+(x-2)\frac{d}{dx}(e^{-x}y)=0$$

هرگاه در معادله یکی از جواب‌ها را دادند و معادله قابل حل نبود باید از کاهش مرحله استفاده کنیم

$y=y_1z \rightarrow y=e^xz$

مشتق $\rightarrow y'=e^x(z+z')$

مشتق دوم $\rightarrow y''=e^x(z+2z'+z'')$

در معادله $\rightarrow xe^x(z''+2z'+z)-e^x(x+2)(z+z')+2e^xz=0$

$\rightarrow xz''+(x-2)z'=0 \xrightarrow[z=e^{-x}y]{y=e^xz} x(e^{-x}y)''+(x-2)(e^{-x}y)'=0$

نکته: اگر در معادله مرتبه ۲ و همگن $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ جواب y_1 داده شده جواب دوم (y_2) عبارت است از:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}$$

باید ضریب y'' یک باشد.

$\frac{۲۴}{۲۱۲}$ اگر $y_1=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ برای $x>0$ جواب معادله $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$ باشد جواب عمومی را بیابید

ابتدا باید جواب دوم را بیابیم

$P(x)=\frac{1}{x}$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}=\frac{x^{-1}}{\frac{\sin^2x}{x}}=\frac{1}{\sin^2x}=\csc^2x$$

$$\xrightarrow{\int}\frac{y_2}{y_1}=\int\csc^2x\,dx=-\cot x=-\frac{\cos x}{\sin x}\xrightarrow[y_1]{\text{ضرب در}}y_2=-\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \qquad \text{عمومی } y = c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

۸۴ / ۲ج، ۳۶۷

اگر $y_1 = x$ جواب $x^2 y'' - x(x+2) y' + (x+2) y = 0$ باشد، جواب عمومی را بیابید؟

$$P(x) = \frac{-x(x+2)}{x^2} = -\frac{x+2}{x} = -(1 + 2/x)$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} = \frac{e^{\int (1+2/x)dx}}{x^2} = \frac{e^{x+2\ln x}}{x^2} = e^x$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = e^x \xrightarrow{\int} \frac{y_2}{y_1} = \int e^x dx = e^x \rightarrow y_2 = x e^x$$

$$\text{عمومی } y = c_1 x + c_2 x e^x$$

فصل چهارم

حل معادله به کمک سری

تعریف: نقطه x_0 را برای معادله $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ نقطه عادی می‌نامیم هرگاه $P(x)$ و $q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند (پیوسته و مشتق‌پذیر تا هر مرتبه باشند)

قضیه: اگر x_0 برای معادله $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ عادی باشد جواب معادله به شکل سری توانی حول x_0 یعنی $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ موجود است

نکته: اگر شعاع همگرایی سری تیلور P و q حول x_0 به ترتیب R_p و R_q باشند و R شعاع همگرایی جواب باشد آنگاه $R \geq \underbrace{\min(R_p, R_q)}$

حداقل (کران پایین) شعاع همگرایی

نکته: در توابع کسری برای یافتن شعاع همگرایی سری تیلور حول x_0، کلیه ریشه‌های مخرج (حقیقی و غیرحقیقی) را بدست آورده و فاصله x_0 تا آنها را می‌یابیم کمترین فاصله بدست آمده با شعاع همگرایی سری تیلور مساوی است

۱۶ — ۲ج.۳۵۸

شعاع همگرایی بسط تابع $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ حول $z=\frac{3}{2}$ را بیابید

ریشه مخرج: $z=1,3$

فاصله ریشه‌ها تا $\frac{3}{2}$ = $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ $\longrightarrow$ شعاع همگرایی = $\frac{1}{2}$

۲۵ — ۲ج.۳۱۴

کران پایین شعاع همگرایی پاسخ معادله زیر حول $-\frac{1}{2}$ را بیابید.

$(1+x^2)y''+4x^2y=0 \qquad P(x)=0 \quad , \quad q(x)=\frac{4x^2}{1+x^2}$

$R_p=+\infty$ حداقل (کران پایین) $=\min(R_p, R_q)=\frac{\sqrt{5}}{2}$

R_q محاسبه: ریشه مخرج $x^2+1=0 \to x=\pm i$ فاصله از $-\frac{1}{2}$ $=\left|\pm i-(-\frac{1}{2})\right|$

$=\left|\frac{1}{2}\pm i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+i^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2} \to R_q=\frac{\sqrt{5}}{2}$

۴/۳۲۹ اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب معادله $y''-xy'=0$ باشد آنگاه:

رابطه بازگشتی $a_{n+2}=\dfrac{na_n}{(n+1)(n+2)}$

همواره برای یافتن (رابطه بازگشتی) جواب باید y را در معادله جایگذاری کنیم

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n=0$$

$$\xrightarrow[\text{توان}]{\text{یکی کردن}} \sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n=0$$

ضریب x^n : $(n+1)(n+2)a_{n+2}-na_n=0 \quad n\geq 0$

$$\longrightarrow a_{n+2}=\frac{na_n}{(n+1)(n+2)}$$

۲۵/۳۵۸ ضریب x^3 در سری مک لورن پاسخ معادله زیر؟

$$y''+(\sin x)y'+e^x y=0 \qquad y(0)=1 \ , \ y'(0)=1$$

$x=0$ حول $\longrightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 　　ضریب $x^3=a_3$

$$\text{معادله}\xrightarrow{\text{مشتق}} y'''+(\cos x)y'+\sin x\, y''+e^x y+e^x y'=0$$

$$\xrightarrow{x=0} y'''(0)+y'(0)+0+y(0)+y'(0)=0 \rightarrow y'''(0)=-3 \rightarrow a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=-\frac{1}{2}$$

نکته: اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ آنگاه $a_n=\dfrac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$ خصوصاً:

$$a_0=y(x_0) \ , \ a_1=y'(x_0)$$

حل معادله حول نقاط غیرعادی

تعریف: برای معادله $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ نقطه x_0 را غیرعادی (تکین، ایزوله، منفرد) می‌نامیم هرگاه P یا q در x_0 غیرتحلیلی باشند و چنانچه $(x-x_0)P(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند x_0 را غیرعادی منظم و در غیر اینصورت غیرعادی نامنظم می‌نامیم.

تذکر: اگر x_0 نقطه غیرعادی باشد و هر دو حد زیر موجود باشند آنگاه x_0 غیرعادی منظم است و در غیر اینصورت نامنظم می‌باشد.

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x) \quad , \quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)$$

۷۲ ج۲، ۴.۸ — نوع نقاط تکین معادله زیر را تعیین کنید

$$x^2(x-2)^3y''-x(x-2)y'+y=0$$

$$P(x)=-\frac{x(x-2)}{x^2(x-2)^3}=-\frac{1}{x(x-2)^2} \qquad q(x)=\frac{1}{x^2(x-2)^3}$$

$\to x=0$ و 2 تکین

$x=0$: $\begin{cases}\lim_{x\to 0} xP(x)=-\frac{1}{4}\\ \lim_{x\to 0} x^2q(x)=-\frac{1}{8}\end{cases} \longrightarrow$ $x=0$ تکین منظم

$x=2$: $\begin{cases}\lim_{x\to 2}(x-2)P(x)=\infty\\ \lim_{x\to 2}(x-2)^2q(x)=\infty\end{cases} \longrightarrow$ $x=2$ تکین نامنظم

قضیه: اگر x_0 برای معادله $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ نقطه تکین منظم باشد آنگاه

$$p_0=\lim(x-x_0)P(x) \quad , \quad q_0=\lim(x-x_0)^2q(x)$$

$\longrightarrow r(r-1)+p_0r+q_0=0$ (معادله مشخصه، شاخص، اندیسی)

$\longrightarrow r=r_1, r_2$

ریشه‌های آن

حالت اول: $r_1 \neq r_2$ و $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ دو جواب مستقل عبارتند از:

$$y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$y_2 = (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

سری توانی تعمیم یافته (سری فروبنیوس)

حالت دوم: $r_1 = r_2$ دو جواب مستقل

$$y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \leftarrow \text{سری فروبنیوس}$$

$$y_2 = y_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$ جواب لگاریتمی

حالت سوم: $r_1 \neq r_2$ و $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ دو جواب مستقل عبارتند از:

$$y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$y_2 = \alpha y_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

$\frac{۵۲}{۲ج ۴۴۵}$ ریشه‌های معادله شاخص، معادله زیر حول $x=0$ را بیابید.

$$4x^2 y'' + (2x^4 - 5x)y' + (3x^2+2)y = 0$$

$p(x) = \frac{2x^4 - 5x}{4x^2}$ و $q(x) = \frac{3x^2+2}{4x^2}$ $\quad p_0 = \lim x\,p(x) = -\frac{5}{4}$

$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \longrightarrow r(r-1) - \frac{5}{4}r + \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow r^2 - \frac{9}{4}r + \frac{1}{2} = 0$

$\longrightarrow r = 2 , \frac{1}{4}$

۹ / ۲ج-۳۱

اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ جواب معادله زیر باشد r را بیابید

$$(x^2-x)y''-xy'+y=0$$

در واقع r ریشه معادله مشخصه حول $x=0$ می باشد

$$p(x)=-\frac{x}{x^2-x}=+\frac{1}{1-x} \qquad q(x)=\frac{1}{x^2-x}$$

$$p_0=\lim_{x\to 0} x\,p(x)=0 \qquad q_0=\lim_{x\to 0} x^2 q(x)=0$$

$$\to r(r-1)+0r+0=0 \to r(r-1)=0 \to r=0,1$$

۳۲ / ۳۳۷

جواب ها مستقل معادله زیر: $3x(2+3x)y''-4y'+4y=0$

$$y_1=x^{5/3}\sum a_n x^n \ , \ y_2=\sum b_n x^n$$

حول $x=0$

$$p(x)=-\frac{4}{3x(2+3x)} \to p_0=\lim_{x\to 0} x\,p(x)=-2/3$$

$$q(x)=\frac{4}{3x(2+3x)} \to q_0=\lim_{x\to 0} x^2 q(x)=0$$

$$\to r(r-1)-2/3\,r+0=0 \to r(r-5/3)=0$$

$$\to r=0\ ,\ 5/3 \xrightarrow{\text{حالت اول}} y=x^r\sum a_n x^n$$

۲۷ / ۳۰۹

دو جواب مستقل معادله زیر را بیابید

$$x^2y''+3xy'+(1+x)y=0$$ حول $x=0$

$$p(x)=3/x \to p_0=3 \qquad q(x)=\frac{1+x}{x^2} \to q_0=1$$

$$\to r(r-1)+3r+1=0 \to r^2+2r+1=0$$

$$\to r=-1\ ,\ -1$$ حالت دوم $y_1=x^{-1}\sum a_n x^n$

$$y_2=y_1\ln x+x^{-1}\sum b_n x^n$$

۳۰/۳۱. جواب معادله $x^2y''-xy'+(1-x)y=0$ به فرم سری فروبنیوس عبارت است

۱) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$

۲) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$

۳) $x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$

۴) $x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

حول $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=-\frac{1}{x}\to P_0=-1\\ q(x)=\frac{1-x}{x^2}\to q_0=1\end{array}\right\}\to r(r-1)-r+1=0$$

$$\to r^2-2r+1=0\to r=1,1\to y=x^1\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}\to y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)a_nx^{n-1}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sum_{n=0}n(n+1)a_nx^{n+1}$$

$$-\sum_{n=0}(n+1)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}a_nx^{n+2}=0 \quad n\to n-1$$

$$-\sum_{n=1}a_{n-1}x^{n+1}$$

ضریب x^{n+1} $\to \underbrace{(n(n+1)-(n+1)+1)}_{n^2}a_n-a_{n-1}=0\to a_n=\frac{1}{n^2}a_{n-1}$, $n\geq 1$

رابطه بازگشتی

برای حل رابطه بازگشتی $n=1,2,\ldots$ جایگذاری و a_n را حدس می‌زنیم

$$n=1\to a_1=\frac{1}{1^2}a_0 \qquad n=2\to a_2=\frac{1}{2^2}a_1=\frac{1}{(1\times 2)^2}a_0$$

$$\to a_n=\frac{1}{(n!)^2}a_0 \quad n\geq 0 \quad \text{و} \quad y=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

$a_0=1$ → گزینه ۱

معادله بسل

تعریف: اگر $p \geq 0$ معادله بسل مرتبه p عبارت است از:

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

۱) نقطه $x=0$ برای معادله بسل نقطه تکین منظم است و $r_1=p$ و $r_2=-p$ ریشه‌های معادله مشخصه آن هستند

۲) جواب متناظر ریشه بزرگتر یعنی $r_1=p$ فروبنیوسی است و لذا $y=x^p\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ خواهد بود و رابطه بازگشتی a_n عبارت است از:

$$a_n=-\frac{1}{n(n+2p)}\,a_{n-2}\,, \quad n\geq 2$$

و با محاسبه جواب بسل عبارت است

$$J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

تابع بسل مرتبه p نوع اول

۳) جواب عمومی معادله بسل عبارت است از:

الف: اگر $p\neq 0,1,2,\dots$

$$y=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x)$$

ب: اگر $p=0,1,2,\dots$

$$y=c_1J_p(x)+c_2Y_p(x)$$

تابع بسل مرتبه p نوع دوم (لگاریتمی)

۴) مشتق و انتگرال توابع بسل

الف) $\frac{d}{dx}\left(x^{p} J_p(x)\right) = x^{p} J_{p-1}(x)$

ب) $\frac{d}{dx}\left(x^{-p} J_p(x)\right) = -x^{-p} J_{p+1}(x)$

ج) $\int x^{p} J_{p-1}(x)\,dx = x^{p} J_p(x) + c$

د) $\int x^{-p} J_{p+1}(x)\,dx = -x^{-p} J_p(x) + c$

۴۲ / ۳۲.

$$\int x^4 J_1(x)\,dx = ?$$

$$\int x^4 J_1\,dx = \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{(x^2 J_1\,dx)}_{dv} = x^2(x^2 J_2) - 2\int x^3 J_2\,dx$$

$$= x^4 J_2 - 2x^3 J_3 + c$$

$du = 2x\,dx$ ، $v = \int x^2 J_1\,dx \xrightarrow{p=2} x^2 J_2$

۵) معادلات قابل تبدیل به بسل

برخی معادلات با تغییر متغیر به معادله بسل تبدیل می‌شود و لذا با توجه به (۳) جواب عمومی آن بدست می‌آید

مثال: بررسی کنید معادله $y'' + (e^{x} - m^2)y = 0$ ، $m \geq 0$ با تغییر متغیر $z = 2e^{\frac{x}{2}}$ به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود؟ ابتدا باید y' و y'' را برحسب مشتق نسبت به z بنویسیم که این کار با قاعده مشتق زنجیره‌ای انجام می‌شود

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^{x/2}\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x}{2}}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\frac{dy}{dz} + e^{x/2}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{1}{2}e^{x/2}\frac{dy}{dz} + e^{x}\frac{d^2y}{dz^2} \xrightarrow{\text{در معادله}} e^{x}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2}e^{x/2}\frac{dy}{dz} + (e^{x} - m^2)y \ldots$$

$$\xrightarrow[e^x = z^2/4]{e^{x/2} = z/2} \frac{1}{4} z^2 y'' + \frac{1}{4} z y' + \left(\frac{z^2}{4} - m^2\right) y = 0$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب در } 4]{} z^2 y'' + z y' + (z^2 - 4m^2) y = 0$$

توجه کنید که معادله بالا بسل مرتبه $P = 2m$ برحسب تغییر متغیر z است

	مرتبه بسل	تغییر متغیر	معادله دیفرانسیل
1)	P	$z = \lambda x$	$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - P^2) y = 0$
2)	P	$z = x^2$	$x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - P^2) y = 0$
3)	P	$z = \sqrt{x}$	$4x^2 y'' + 4x y' + (x - P^2) y = 0$
4)	$2m$	$z = 2e^{x/2}$	$y'' + (e^x - m^2) y = 0$

$\frac{99}{2\text{ج}2.8}$ جواب عمومی معادله زیر را بیابید $x^2 y'' + x y' + (4x^2 - 1) y = 0$

(1) $z = 2x \longrightarrow$ به بسل مرتبه $P = 1$ تبدیل می‌شود

$$\longrightarrow y = c_1 J_1(\cancel{z}_{2x}) + c_2 Y_1(\cancel{z}_{2x})$$

$\frac{45}{323}$ $9x^2 y'' + 9x y' + 4(9x^4 - 1) y = 0$ کدام گزینه جواب است

$x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - 1/9) y = 0$ (2) $z = x^2 \longrightarrow$ بسل مرتبه $P = 1/3$ تبدیل می‌شود

$$\longrightarrow J_{1/3}(z) = J_{1/3}(x^2)$$

$\frac{3}{2\text{ج}2.15}$ جواب عمومی معادله زیر را بیابید $4x^2 y'' + 4x y' + (x - \nu^2) y = 0$

(3) : $z = \sqrt{x} \longrightarrow$ بسل مرتبه $P = \nu$ تبدیل می‌شود

$$y = c_1 J_\nu(\cancel{z}_{\sqrt{x}}) + c_2 Y_\nu(\cancel{z}_{\sqrt{x}})$$

$\frac{۴۷}{۳۴۳}$ کدام یک از توابع زیر جواب $y'' + (e^{x} - \frac{9}{4})y = 0$

$(\frac{3}{2})^2$

$(4) \to z = 2e^{x/2} \to p = 2m = 3$ بسل مرتبه ۳ تبدیل می‌شود

$\to J_3(z) = J_3(2e^{x/2})$

معادله لژاندر

تعریف: فرض کنید $\lambda \geq 0$ ، معادله زیر لژاندر می‌گوئیم

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - \lambda(\lambda+1)y = 0$$

۱) این معادله همواره حول $x=0$ حل می‌شود که نقطه عادی است و جواب آن به صورت سری توانی $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ می‌باشد

۲) رابطه بازگشتی عبارت است از $a_{k+2} = \frac{(k-\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)} a_k$

۳) اگر $\lambda \in \mathbb{N}$ و $\lambda = 0$ آنگاه یکی از جواب‌های معادله به صورت چندجمله‌ای است و چنانچه آن را طوری در نظر بگیریم که به ازای $x=1$ مقدار آن یک شود به آن چندجمله‌ای لژاندر می‌گوئیم و با نماد $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم.

۴) $P_n(1) = 1$ و $P_n(-1) = (-1)^n$

۵) $P_n(x)$ برای n زوج تابعی زوج و برای n فرد تابعی فرد است

۶) ثابت می‌شود

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & ; m = n \end{cases}$$

۷) فرمول رودریگز

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$P_0(x)=1$ و $P_1(x)=x$ و $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$

$\frac{۱۰}{۲ج۱۹۶}$

$$\int_{-1}^{1}(x^3+ax+b)P_2(x)\,dx = ?$$

استدلال $= \int_{-1}^{1}\underbrace{\cancel{x^3 P_2(x)}}_{\text{فرد}}dx + a\int_{-1}^{1}\underbrace{\cancel{xP_2(x)}}_{\text{فرد}}dx + b\int_{-1}^{1}P_2(x)\,dx$

$$= b\int_{-1}^{1}P_0(x)P_2(x)\,dx = 0$$

صفر (زیرا $m=2$ و $n=0$)

نتیجه: $\int_{-1}^{1}P_n(x)\,dx = 0$ و $n \neq 0$

مثال: $\int_{-1}^{1}(P_3(x)+P_6(x))^2dx$ از تعامد صفر می‌شود

$$= \int_{-1}^{1}\underbrace{P_3^2(x)}_{m=n=3}dx + \int_{-1}^{1}\underbrace{P_6^2(x)}_{m=n=6}dx + 2\underbrace{\int_{-1}^{1}P_3(x)P_6(x)\,dx}_{\text{صفر}}$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{2}{13} = ?$$

فصل پنجم (تبدیل لاپلاس)

تعریف: فرض کنید $f(t)$ برای $t \geq 0$ تعریف شده باشد، تبدیل لاپلاس $f(t)$ عبارت است از: $F(s) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$

و چنانچه $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه $f(t) = L^{-1}(F(s))$ لاپلاس معکوس

مثال: تبدیل لاپلاس $f(t) = 1$ را بیابید

$$L(1) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} \overset{s>0}{=} -\frac{1}{s}(\underbrace{e^{-\infty}}_{\text{صفر}} - e^{0}) = \frac{1}{s}$$

$$\longrightarrow L(1) = \frac{1}{s}$$

تبدیل لاپلاس معروف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$f(t)$	e^{at}	t^n	t^p	$\sin at$	$\cos at$	$\sinh at$	$\cosh at$
$F(s) = L(s)$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
	$s>a$	$s>0$	$s>0$	$s>0$	$s>0$	$s>\lvert a\rvert$	$s>\lvert a\rvert$

تابع گاما: $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^p\, dt$ شرط همگرایی $p > -1$

۱) $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ رابطه بازگشتی

۲) $\Gamma(n+1) = n!$ و $n \in \mathbb{N}$

۳) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

مثال: $L\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = L\left(t^{-1/2}\right) \underset{p=-1/2}{\overset{(3)}{=}} \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

$$L^{-1}\left(\frac{s+2}{s^4}\right) = L^{-1}\left(\frac{s}{s^4} + \frac{2}{s^4}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{6}t^3 \qquad L(t^2) = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3} \qquad L(t^3) = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

$$L^{-1}\left(\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right)$$ ۱۳/۳۷٤

$(s-3)(s+1)$

$$F(s)=\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}=\frac{4}{s-3}+\frac{-1}{s+1}$$

$$A=\lim_{s\to 3}(s-3)F(s)=4 \qquad B=\lim_{s\to -1}(s+1)F(s)=-1$$

$$L^{-1}(F(s))=L^{-1}\left(\frac{4}{s-3}-\frac{1}{s+1}\right)=4e^{3t}-e^{t}$$

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$ لاپلاس معکوس ۶/۲ج،۲۵۸

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$A=\lim_{s\to 1}(s-1)F(s)=\tfrac{1}{2} \qquad \lim_{s\to\infty} s\times F(s)=s\times\cdots \rightarrow 0=\cancel{A}+B \;\; \tfrac{1}{2}$$

$$B=-\tfrac{1}{2} \qquad s=0 \xrightarrow{\text{در عبارت}} -1=-\tfrac{1}{2}+C \rightarrow C=-\tfrac{1}{2}$$

$$L^{-1}(F(s))=\tfrac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s+1}{s^2+1}\right)=\frac{1}{2}(e^{t}-\cos t-\sin t)$$

$$\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}$$

نکته: دوطرف را در s ضرب کرده و $s\to\infty$ (مراجعه شود به ریاضی عمومی)

مثال:
$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}\right)=\tfrac{1}{8}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+9}\right)$$
$$=\tfrac{1}{8}\left(\sin t-\tfrac{1}{3}\sin 3t\right)$$

مثال: مطلوبست $\int_0^{+\infty} e^{-4t}\sin t\,dt$

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}\sin t\,dt=L(\sin t)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\text{جواب}=F(4)=\frac{1}{4^2+1}=\frac{1}{17}$$

مطلوبست $\int_0^{+\infty} e^{-3t}\sin^2 2t\,dt$ $\frac{۱۷}{۳۷۵}$

$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin^2 2t\,dt=L(\sin^2 2t)$ $\quad \frac{1-\cos 4t}{2}$

$=\frac{1}{2}L(1-\cos 4t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+16}\right)=\frac{8}{s(s^2+16)}$

$\xrightarrow{s=3}$ جواب $=F(3)=\frac{8}{3(9+16)}=\frac{8}{75}$

$f(w)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos wt}{a^2+t^2}\,dt \quad (a,w>0)$ $\frac{ج.۰-۵}{۳۷۲}$

$L(f(t))=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt$ تبدیل لاپلاس $f(w)$ را بدست می‌آوریم

$L(f(w))=\int_0^{+\infty}e^{-sw}f(w)\,dw=\int_0^{+\infty}e^{-sw}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\cos tw}{t^2+a^2}\,dt\right)dw$

$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-sw}\cos wt}{t^2+a^2}=\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+a^2}\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-sw}\cos wt\,dw}_{\frac{s}{s^2+t^2}}\,dt$

$=s\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+a^2}\,\frac{1}{t^2+s^2}\,dt=s\int_0^{+\infty}\frac{1}{s^2-a^2}\left(\frac{1}{t^2+a^2}-\frac{1}{t^2+s^2}\right)$

$=\frac{s}{s^2-a^2}\left(\frac{1}{a}tg^{-1}\frac{t}{a}-\frac{1}{s}tg^{-1}\frac{t}{s}\right)\Big]_0^{+\infty}$

$=\frac{s}{(s-a)(s+a)}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{s}\right)=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{s+a}$

$L(f(w))=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{s+a}\longrightarrow f(w)=\frac{\pi}{2a}L^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right)=\frac{\pi}{2a}e^{-aw}$

قاعده اول انتقال ؛ فرض کنید $L(f(t))=F(s)$

1) $L(e^{at}f(t))=F(s-a)=L(f(t))\big|_{s\to s-a}$

$L^{-1}(F(s-a))=e^{at}f(t)=e^{at}L^{-1}(F(s))\big|_{s\to s+a}$

$L(x^3e^{4x})=L(x^3)\big|_{s\to s-4}=\left(\frac{6}{s^4}=\frac{3!}{s^4}\right)\Big|_{s\to s-4}$ $\frac{۸}{ج۲.۴۳۰}$

جواب $=\frac{6}{(s-4)^4}$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-5)^3}\right) = e^{5t}\, L^{-1}\underbrace{\frac{1}{s^3}}_{\frac12 t^2} = \frac12 t^2 e^{5t}$$ ۲۰/۳۷۵

$$L(t^2) = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s-1}{(s+2)^{3/2}}\right) = e^{-2t} L^{-1}\frac{s-3}{s^{3/2}} = e^{-2t} L^{-1}\left(\underbrace{\frac{1}{s^{1/2}}}_{P=-1/2} - \underbrace{\frac{3}{s^{3/2}}}_{P=1/2}\right)$$ ۲۴/۴۵۰

$s \to s-2$

$$= e^{-2t}\left(\frac{t^{-1/2}}{\underbrace{\Gamma(1/2)}_{\sqrt{\pi}}} - \frac{3t^{1/2}}{\underbrace{\Gamma(3/2)}_{\frac12\sqrt{\pi}}}\right) \qquad \Gamma(3/2) = \Gamma(1/2+1) = \frac12\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$L^{-1}\frac{s+4}{s^2+4s+8} = L^{-1}\frac{s+4}{(s+2)^2+4} = e^{-2t}L^{-1}\frac{s+2}{s^2+4}$$ ۸۳/۲ج.۳۶۷

$$= e^{-2t}L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}\right) = e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)$$

تابع $F(s) = \dfrac{2}{s^3+2s^2+2s}$ تبدیل لاپلاس چه تابعی است ۱۰/۲ج.۳۵۸

$$F(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

$$A = \lim_{s\to 0} sF(s) = 1$$

دو طرف در s ضرب شوند $s\to\infty$ $\to 0 = A + B \to B = -1$

$$s=-1 \xrightarrow{\text{در عبارت}} -2 = -A + (-B+C) \to C = -2$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{\underbrace{s^2+2s+2}_{(s+1)^2+1}}\right) = 1 - e^{-t}L^{-1}\frac{s+1}{s^2+1} \qquad \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

$s \to s-1$

$$= 1 - e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

تبدیل لاپلاس از مشتق یک تابع

۱) $L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0^+)$

۲) $L(f''(t)) = s^2 L(f) - sf(0^+) - f'(0^+)$

۳) $L(f^{(n)}(t)) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

تبدیل لاپلاس پاسخ معادله زیر: $\frac{۲۳}{۲ج۴۳۱}$

$y'' + 4y = 2\sin 3t$ و $y(0) = y'(0) = 0$

$\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{تبدیل لاپلاس}} L(y'') + 4L(y) = 2L(\sin 3t)$

$\longrightarrow (s^2 L(y) - s\times 0 - 0) + 4L(y) = \frac{6}{s^2+9}$

$\longrightarrow (s^2+4)L(y) = \frac{6}{s^2+9} \longrightarrow L(y) = \frac{6}{(s^2+4)(s^2+9)}$

مثال: جواب معادله زیر را بیابید

$y'' + 4y' + 4y = te^{-2t}$

$y(0) = 0$ و $y'(0) = 6$

$\xrightarrow{\text{لاپلاس}} (s^2 L(y) - 0 - 6) + 4(sL(y) - 0) + 4L(y) = L(t)|_{s \to s+2}$

$\longrightarrow (s^2+4s+4)L(y) = 6 + \frac{1}{(s+2)^2} \longrightarrow L(y) = \frac{6}{(s+2)^2}_{s\to s-2} + \frac{1}{(s+2)^4}_{s\to s-2}$

$\xrightarrow{L^{-1}} y = 6e^{-2t} \cancel{L^{-1}\frac{1}{s^2}} + e^{-2t} \cancel{L^{-1}\frac{1}{s^4}}$ (t, $\frac{1}{6}t^3$)

$= e^{-2t}(6t + \frac{1}{6}t^3)$

$\frac{۲۳}{۳۷۸}$ $\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n(x)) = -x^{-n}J_{n+1}(x)$ و تبدیل لاپلاس $J_0(t)$ $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ می باشد، تبدیل لاپلاس $J_1(x)$ را بیابید

$n=0 \longrightarrow \frac{d}{dx}(x^0 J_0) = -x^0 J_1 \longrightarrow J_0'(x) = -J_1(x)$

$\longrightarrow J_1(x) = -J_0'(x) \qquad L(J_1) = L(-J_0') = -L(J_0') = -(sL(J_0) - J_0(0))$

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\to J_0(0)=1$$

$$L(J_1)=-\left(s\underbrace{L(J_0)}_{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}}-\underbrace{J_0(0)}_{1}\right)=-\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}+1$$

$n=0$ و $n\in\mathbb{N}$: $L^{-1}\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$ مطلوبست　$\frac{۱۲}{۲ج۴۰}$

۱) $e^t\frac{d^n}{dt^n}(e^t t^n)$　　۲) $e^t\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$

۳) $\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$　　۴) $\frac{e^{-t}}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$

روش اول : $n=0$　$L^{-1}\frac{(s-1)^0}{s^1}=L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1 \longrightarrow$ ۲ یا ۳

توجه کنید که $L(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$ پس باید $n!$ حذف گردد و لذا در گزینه صحیح باید $n!$ در مخرج موجود باشد پس (۳) درست است

روش دوم : $\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\longrightarrow\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}\longrightarrow\frac{1}{(s+1)^{n+1}}$

$$f(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^{n+1}}\right)=e^{-t}L^{-1}\frac{1}{s^{n+1}}=\frac{1}{n!}t^ne^{-t}$$

$$L(f^{(n)})=s^nL(f)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

چون $t=0$ ریشه با تکرار n برای f است پس $f(0)=0,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(0)=0$

$$\to L(f^{(n)}(t))=s^nL(f)=\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}$$

$$L^{-1}\left(\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right)=e^tL^{-1}\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t})$$

قضایای تبدیل لاپلاس:

فرض کنید $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه:

۱) $\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0$

۲) $\lim_{s \to +\infty} sF(s) = f(0)$ مقدار ابتدایی

۳) $\lim_{s \to +\infty} s^2F(s) - sf(0) = f'(0)$

۴) $\lim_{s \to 0^+} sF(s) = f(+\infty)$ مقدار نهایی

$\frac{۹}{۳۷۹}$ اگر $L(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ مطلوبست $f(0), f'(0), \lim_{t \to +\infty} f(t)$

$$(۲) \longrightarrow f(0) = \lim_{s \to +\infty} sF(s) = \lim_{s \to +\infty} \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = 1$$

$$(۳) \longrightarrow f'(0) = \lim_{s \to +\infty} (s^2F(s) - sf(0)) = \lim_{s \to +\infty} \left(\frac{s^2}{\sqrt{s^2+1}} - s\right)$$

$$= \lim_{s \to +\infty} \frac{s(s-\sqrt{s^2+1})}{\sqrt{s^2+1}} = \lim_{s \to +\infty} (s - \sqrt{s^2+1}) = \lim_{s \to +\infty} \frac{\cancel{s^2} - (\cancel{s^2}+1)}{s+\sqrt{s^2+1}} = 0$$

$$(۴) \longrightarrow f(+\infty) = \lim sF(s) = \lim_{s \to 0^+} \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = 0$$

تبدیل لاپلاس از انتگرال یک تابع

فرض کنید $L(f(x)) = F(s)$ آنگاه:

۱) $L\left(\int_0^t f(u)\,du\right) = \frac{1}{s}L(f) = \frac{1}{s}F(s)$

$\int_0^t \longleftrightarrow 1/s$

۲) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right) = \int_0^t L^{-1}(F(s))\,dt$

مثال: $L\left(\int_0^t \sinh 2u\,du\right) = \frac{1}{s}L(\sinh 2u)$

$= \frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s^2-4} = \frac{2}{s(s^2-4)}$

$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \int_0^t L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)dt = -\cos t\Big|_0^t = -\cos t + 1$ $\frac{۴۴}{۳۹۱}$

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt$ تبدیل لاپلاس f را بیابید $\frac{۳۶}{۲ج۳۶۱}$

$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}e^{-x}$

$L(f') = \frac{1}{\sqrt{\pi}}L\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}L\left(\cancel{\frac{1}{x^{1/2}}}^{\,x^{-1/2}}\right)\Bigg|_{s\to s+1}$

$\frac{(3)}{p=-1/2}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\overset{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)}}{s^{1/2}}\Bigg|_{s\to s+1} = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \to \frac{1}{\sqrt{s+1}} = L(f') = sL(f) - \underbrace{f(0)}_{\text{صفر}}$

$\to L(f) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\sqrt{s+1}} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$

مشتق از تبدیل لاپلاس

فرض کنید $F(s)=L(f(t))$ آنگاه:

۱) $L(t f(t)) = -F'(s) = -\frac{d}{ds} L(f(t))$

$(*)\ t \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}$

۲) $L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$

*۳) $L^{-1}(F(s)) = -\frac{1}{t} L^{-1}(F'(s))$ کاربرد در محاسبه L^{-1} از آرک تانژانت و کتانژانت و لگاریتم

$L(t\sin bt) = -\frac{d}{ds}\left(\underbrace{\sin bt}_{\frac{b}{s^2+b^2}}\right) = -\frac{-2bs}{(s^2+b^2)^2} = \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$ $\frac{۳۰}{۳۸۶}$

$\int_0^{+\infty} t e^{-2t}\cos t\, dt$ $\frac{۳۱}{۲۶۱\ ج۲}$

$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t\cos t\, dt = L(t\cos t) = -\frac{d}{ds}L(\cos t) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

$\xrightarrow{s=2}$ جواب $= F(2) = \frac{4-1}{(4+1)^2} = \frac{3}{25}$

$L^{-1}\left(\operatorname{Arccot}\frac{s}{\omega}\right)$ $\omega>0$ $\frac{۳۶}{۳۸۷}$

$F'(s) = \frac{-\frac{1}{\omega}}{1+(\frac{s}{\omega})^2} = -\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

جواب $= -\frac{1}{t}L^{-1}(F') = -\frac{1}{t}L^{-1}\left(-\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{t}\sin\omega t$

$L^{-1}\left(\underbrace{\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)}_{F(s)}\right)$ $F(s) = \ln\frac{s^2+\omega^2}{s^2} = \ln(s^2+\omega^2) - 2\ln s$ $\frac{۳۷}{۳۸۷}$

$\longrightarrow F'(s) = \frac{2s}{s^2+\omega^2} - 2\ln s$

جواب $= -\frac{1}{t}L^{-1}(F') = -\frac{1}{t}L^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+\omega^2} - \frac{2}{s}\right) = -\frac{2\cos\omega t - 2}{t}$

$\frac{۳۰}{۲ج۴.۳}$ مطلوبست

$L^{-1}(\underbrace{\sqrt{s+1}-\sqrt{s}}_{F(s)})$ $\quad F'(s)=\frac{1}{2\sqrt{s+1}}-\frac{1}{2\sqrt{s}}$

$p=-1/2$

$L^{-1}(F)=-\frac{1}{t}L^{-1}(F')=-\frac{1}{2t}\left(L^{-1}\frac{1}{\sqrt{s+1}}-L^{-1}\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$

$=-\frac{1}{2t}\left(e^{-t}L^{-1}\frac{1}{\sqrt{s}}-\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}\right)=-\frac{1}{2t}\left(\frac{t^{-1/2}e^{-t}}{\sqrt{\pi}}-\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\right)$

$\frac{۳۶}{۲ج۱۹}$ مطلوبست لاپلاس معکوس

$F(s)=s\,tg^{-1}\frac{1}{s}-1$

$f(t)=L^{-1}(\underbrace{tg^{-1}\frac{1}{s}}_{G(s)})$ $\quad G'(s)=\frac{-1/s^2}{1+(\frac{1}{s})^2}=-\frac{1}{s^2+1}$

$\rightarrow f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}(G')=-\frac{1}{t}L^{-1}\left(-\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{1}{t}\sin t$

$\rightarrow f(t)=\frac{\sin t}{t}$ و $f(0^+)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$

$\rightarrow s\,tg^{-1}\frac{1}{s}-1=sL(f)-f(0^+)=L(f'(t))$

$\rightarrow L^{-1}\left(s\,tg^{-1}\frac{1}{s}-1\right)=f'(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}$

$\frac{۱}{۲ج۳.۹}$ تبدیل لاپلاس پاسخ معادله زیر را $Y(s)=Y$ می‌نامیم Y در کدام گزینه صدق می‌کند $y(0)=0$ و $y'(0)=1$

$(1-t^2)y''-2ty'+2y=0$

$L(y)=Y(s)=Y$ $\quad$ جواب ـ د $\quad s^2Y''-2sY'+(s^2+2)Y=1$

با اعمال لاپلاس بر دو طرف داریم $*\,L(y'')-L(t^2y'')-2L(ty')+2L(y)=0$

$L(y'')=s^2Y-s\times 0-1=s^2Y-1$ $\quad L(ty')=-\frac{d}{ds}L(y')=-\frac{d}{ds}(sY-0)$

$=-(Y+sY')$ $\quad L(t^2y'')=+\frac{d^2}{ds^2}L(y'')=(s^2Y-1)''=(2sY+s^2Y')'$

$=2Y+4sY'+s^2Y''\xrightarrow{(*)}(s^2Y-1)+(-s^2Y''-4sY'-2Y)+(2Y+2sY')+2Y=0$

تذکر: چنانچه در یک معادله دیفرانسیل خطی که در آن ضرایب y و y' و ... چند جمله‌ای بر حسب t هستند تبدیل لاپلاس را اعمال کنیم، در فضای لاپلاس به یک معادله دیفرانسیل می‌رسیم که مرتبه آن معادله برابر است با بیشترین درجه چند جمله‌ای.

$\frac{۱۳}{۳۸۴}$ تبدیل لاپلاس پاسخ معادله زیر را بیابید

$$t^2y'' + ty' + t^2y = 0 \quad y(0) \text{ و } y'(0) =$$

تقسیم بر t

$$\to ty'' + y' + ty = 0 \quad y(0) = 1 \text{ و } y'(0) = 0 \qquad L(y) = Y$$

$$\xrightarrow[\text{لاپلاس}]{\text{اعمال}} -\frac{d}{ds}L(\underbrace{y''}_{s^2Y - s - 0}) + L(y') - \frac{d}{ds}L(y) = 0$$

$$\to -(2sY + s^2Y' - 1) + (sY - 1) - Y' = 0$$

$$\to -(s^2+1)Y' - sY = 0 \quad \text{خطی مرتبه اول} \quad \to Y' + \frac{s}{s^2+1}Y = 0$$

$$\mu(s) = e^{\int \frac{s}{s^2+1}ds} = e^{\frac{1}{2}\ln(s^2+1)} \to \mu(s) = \sqrt{s^2+1}$$

$$\to Y = \frac{c}{\mu(s)} \to Y = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$y(0) = \lim_{s\to+\infty} sY = \lim \frac{cs}{\sqrt{s^2+1}} = c \to c = 1 \to Y = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

تذکر: معادله داده شده در این مثال معادله بسل $p=0$ است و می‌دانیم $J_0(t)$ و $Y_0(t)$ پاسخ آن می‌باشند

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \to J_0(0) = 1 \text{ و } J_0'(0) = 0 \quad \text{شرایط اولیه}$$

$$\leftarrow \quad L(J_0(t)) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \to L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right) = J_0(t)$$

۱۰ / ۲ج۴

تبدیل لاپلاس پاسخ را بیابید $ty''+(1-t)y'+ny=0$

$y(0)=a$ و $y'(0)=b$ $L(y)=Y$

$$-\frac{d}{ds}(s^2Y-as-b)+(sY-a)+\frac{d}{ds}(sY-a)+nY=0$$

$$\to(-2sY-s^2Y'+a)+sY-a+Y+sY'+nY=0$$

$$\to -(s-1)sY'+(-s+n+1)Y=0$$ خطی مرتبه اول

$$\to Y'+\frac{s-n-1}{s(s-1)}Y=0 \qquad \frac{s-n-1}{s(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1} \qquad A=n+1 , B=-n$$

$$\mu(s)=e^{\int\left(\frac{n+1}{s}-\frac{n}{s-1}\right)ds}=e^{\ln\frac{s^{n+1}}{(s-1)^n}}=e^{(n+1)\ln s-n\ln(s-1)}$$

$$\to\mu(s)=\frac{s^{n+1}}{(s-1)^n}\to Y=\frac{c}{\mu(s)}\to Y=c\cdot\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

حال c را محاسبه می‌کنیم

$$y(0)=\lim_{s\to+\infty} sY=\lim_{s\to+\infty}\frac{c(s-1)^n}{s^n}=c$$

$$\to c=a$$

$$Y=a\cdot\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

استدلال از تبدیل لاپلاس

$$L(f(t))=F(s)$$

۱) $L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^{+\infty}L(f)\,ds$

$\frac{1}{t}\longleftrightarrow\int_s^{+\infty}$

۲) $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt=\int_0^{+\infty}L(f)\,ds$

$$L\left(\frac{\sin at}{t}\right) = \int_s^{+\infty} \underbrace{L(\sin at)}_{\frac{a}{s^2+a^2}}\,ds = tg^{-1}\frac{s}{a}\Big|_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\frac{s}{a} = \cot^{-1}\frac{s}{a} = tg^{-1}\frac{a}{s}$$ $\frac{۴۶}{۳۹۲}$

1) $tg^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

2) $tg^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}, \quad x>0$

	۸	۹
$f(t)$	$J_0(t)$	$\frac{\sin at}{t}$
$F(s)=L(s)$	1 $s>0$	$tg^{-1}\frac{a}{s}$ $s>0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \qquad a,b>0$$ $\frac{۵۰}{۳۹۴}$

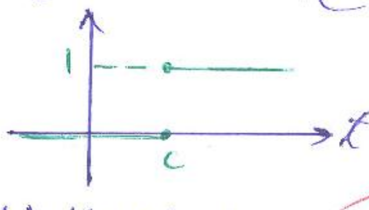
$$= \int_0^{+\infty} L(e^{-ax}-e^{-bx})\,ds = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds$$

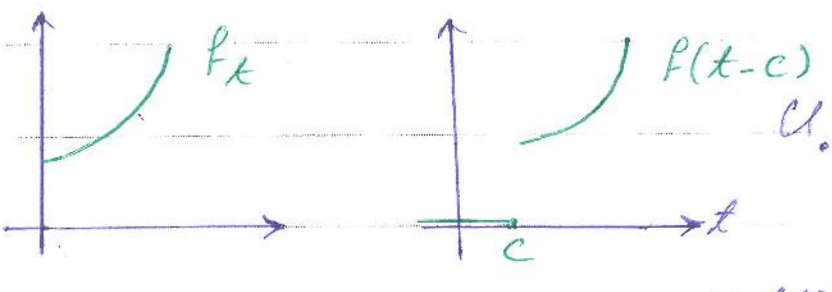
$$= \underbrace{(\ln(s+a)-\ln(s+b))}_{\ln\frac{s+a}{s+b}}\Big|_0^{+\infty} = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln\frac{a}{b} = \ln\frac{b}{a}$$

قاعده دوم انتقال

$$H(t-c) = u_c(t) = \begin{cases} 0 & t<c \\ 1 & t>c \end{cases} \qquad (c>0)$$

تابع پله واحد (هویساید)





تذکر: $u_0(t)=H(t)=1$

$$u_c(t)f(t-c) = \begin{cases} 0 & t<c \\ f(t-c) & t>c \end{cases}$$

۱) $L(u_c(t)f(t-c)) = e^{-cs}L(f(t))$

*۲) $L(u_c(t)f(t)) = e^{-cs}\underbrace{L(f(t+c))}_{t\to t+c}$

۳) $L(u_c(t)) = \dfrac{e^{-cs}}{s}$

*۴) $L^{-1}(e^{-cs}F(s)) = u_c(t)\,L^{-1}(F(s))\Big|_{t\to t-c}$

مثال : مطلوبست :

$$L(u_{\frac{\pi}{2}}(t)\overbrace{\sin t}^{f(t)}) = e^{-\frac{\pi}{2}s}L(\overbrace{\sin(t+\pi/2)}^{\cos t})\qquad c=\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{s}{s^2+1}e^{-\pi/2\, s}$$

مثال : تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ t-1 & 2<t<5\\ t & t>5\end{cases}$$

t صعود می‌کند

$$f(t) = \underset{\text{اول}}{1} + ((t-1)-1)u_2(t) + (t-(t-1))u_5(t)$$

(اول، دوم، دوم، سوم)

$$f(t) = 1 + (t-2)u_2(t) + u_5(t)$$

$$\to L(f) = \frac{1}{s} + e^{-2s}L((t+2)-2) + e^{-5s}\cdot\frac{1}{s} \to$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-5s}}{s}$$

تبدیل لاپلاس بیابید $\dfrac{5}{\text{۲ج،۴۳۲}}$

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<\pi/6\\ \sin x & x\geqslant \pi/6\end{cases}$$

$$f(x)=0+(\sin x-0)u_{\pi/4}(x)=u_{\pi/4}(x)\sin x$$

$$\rightarrow L(f)=e^{-\pi/4 s}L(\sin(x+\pi/4))=e^{-\pi/4 s}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+1/2\cos x$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\rightarrow L(f)=e^{-\pi/4 s}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$\frac{1}{\text{۲ج ۶۹}}$ تبدیل لاپلاس پاسخ معادله زیر را بیابید

$$y''+4y=\begin{cases}1 & 0\leq t<\pi\\ & f(t)\\ 0 & t\geq\pi\end{cases}\qquad y(0)=0 \text{ و } y'(0)=1$$

$$f(t)=1+(0-1)u_\pi(t)=1-u_\pi(t)$$

از دوطرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$(s^2L(y)-s\times 0-1)+4L(y)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\rightarrow(s^2+4)L(y)=1+\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\rightarrow L(y)=\frac{1}{s^2+4}+\frac{1}{s(s^2+4)}-\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$$

$\frac{\text{۳ک}}{\text{۲ج ۴۴۳}}$

$$L^{-1}\left(\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}\right)=t-u_2(t)L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)\Big|_{t\to t-2}$$

$$=t-u_2(t)(t-2)\qquad\begin{cases}t & 0<t<2\\ 2 & t>2\end{cases}$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}\right)=u_\pi(t)\,L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)\Big|_{t\to t-\pi}$$ $\frac{۶۳}{۴.۳}$

$$=u_\pi(t)\left(1-\cos(t-\pi)\right)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)=\int_0^t \underbrace{L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)}_{\sin t}dt=-\cos t\Big|_0^t=1-\cos t$$

تابع ضربه (دلتا دیراک)

$$t_0>0 \qquad \delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\neq t_0\\ \text{نامعین} & t=t_0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$$

۱) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,g(t)\,dt=g(t_0)$

*۲) $L\left(\delta(t-t_0)f(t)\right)=e^{-st_0}f(t_0)$

۳) $L\left(\delta(t-t_0)\right)=e^{-st_0}$

$$L\left(\delta(t-1)\underbrace{\cos t}_{f(t)}\right)=e^{-st_0}f(t_0)=e^{-s}\cos 1 \qquad t_0=1$$ $\frac{۶۶}{۴.۵}$

$\frac{۶۸}{۴.۵}$ جواب معادله زیر را با شرایط اولیه $y'(0)=1$ و $y(0)=0$: $y''+y=\delta(t-\pi)\cos t$

برای یافتن جواب معادله دیفرانسیل که طرف دوم آن تابع چندضابطه ای یا ضربه باشد از تبدیل لاپلاس استفاده می شود. بر معادله تبدیل لاپلاس را اعمال می کنیم

$$(s^2L(y)-0-1)+L(y)=e^{-\pi s}\underbrace{\cos\pi}_{-1}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} y = \sin t - u_\pi(t)\, \underbrace{L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)}_{\sin t}\Big|_{t\to t-\pi}$$

$$\to y = \sin t - u_\pi(t)\sin(t-\pi) = \sin t + u_\pi(t)\sin t$$

تبدیل لاپلاس تغییر مقیاس

فرض کنید $L(f(t)) = F(s)$ و $k \neq 0$ آنگاه:

$$1)\ L(f(kt)) = \frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right) = \frac{1}{k}L(f(t))\Big|_{s\to s/k}$$

$$2)\ L^{-1}(F(ks)) = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{1}{k}L^{-1}(F(s))\Big|_{t\to t/k}$$

مثال: اگر $a \neq 0$ مطلوبست

$$L(J_0(at)) = \frac{1}{a}L(J_0(t))\Big|_{s\to \frac{1}{a}s} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\Big|_{s\to \frac{s}{a}}$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{(s/a)^2+1}} \overset{a>0}{=} \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} \qquad a<0 \to \text{جواب} = -\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

$\frac{18}{395}$ اگر $L(f(t)) = F(s)$ لاپلاس معکوس $F(as+b)$ ، $b, a \neq 0$

$$G(s) = F(s+b) \qquad L^{-1}(G(s)) = L^{-1}(F(s+b)) = e^{-bt}L^{-1}(F(s))$$

$$L^{-1}(G(s)) = e^{-bt}f(t) \qquad L^{-1}(F(as+b)) = \frac{1}{a}L^{-1}(G(s))\Big|_{t\to t/a}$$

$$= \frac{1}{a}e^{-\frac{bt}{a}}f(t/a)$$

تبدیل لاپلاس تابع متناوب

تعریف: تابع $f(t)$ را متناوب با دوره تناوب $T>0$ می‌نامیم هرگاه:

$$f(t+T)=f(t)$$

قضیه: اگر $f(t)$ متناوب با دوره تناوب T باشد آنگاه:

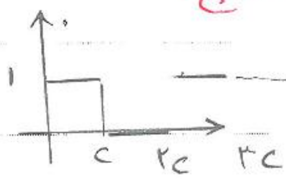
$$L(f(t))=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$$

برای محاسبه انتگرال بالا، تبدیل لاپلاس تابعی را بیابید که در $[0,T]$ برابر $f(t)$ و در خارج آن بازه صفر باشد (با استفاده از تابع پله محاسبه لاپلاس انجام می‌شود.)

۴۰ / ۲ج۲۰ — اگر $c>0$ تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید؟

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0\leq t<c\\ 0 & c\leq t<2c\end{cases}\quad \text{و}\quad f(t+2c)=f(t)$$

تابع متناوب با دوره تناوب $T=2c$.



$$\begin{cases}1 & 0\leq t<c\\ 0 & c\leq t<2c\\ 0 & t>2c\end{cases}$$

$$\text{تابع}=1+(0-1)u_c(t)+(0-0)u_{2c}(t)=1-u_c(t)$$

$$\rightarrow \text{صورت کسر}=L(1-u_c(t))=\frac{1}{s}-\frac{e^{-cs}}{s}=\frac{1}{s}(1-e^{-cs})$$

$$L(f(t))=\frac{\frac{1}{s}(1-e^{-cs})}{1-e^{-2cs}}=\frac{1}{s(1+e^{-cs})}$$

۴۱ / ۴۵۷ — برای $a>0$ تبدیل لاپلاس $f(t)=at-[at]$ را بیابید.

میدانیم f متناوب با دوره تناوب $T=\frac{1}{a}$ می‌باشد

$$\begin{cases}f(t) & 0<t<1/a\\ 0 & t>1/a\end{cases}\rightarrow\begin{cases}at & 0<t<1/a\\ 0 & t>1/a\end{cases}$$

$$\rightarrow \text{تابع}=at+(0-at)u_{1/a}(t)=at-at\,u_{1/a}(t)$$

تبدیل لاپلاس $= \frac{a}{s^2} - e^{-\frac{1}{a}s} L\left(a\left(t+\frac{1}{a}\right)\right) = \frac{a}{s^2} - e^{-s/a}\left(\frac{a}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$

$\longrightarrow L(f) = \dfrac{\frac{1}{s^2}\left(a - ae^{-s/a} - se^{-s/a}\right)}{1-e^{-s/a}}$

انتگرال کانولوشن (پیچش، تلفیق)

تعریف: برای توابع $f(t)$ و $g(t)$ کانولوشن عبارت است از:

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du$$

ویژگیها:

1) $f*g = g*f$ (جابجایی)

2) $f*(g*h) = (f*g)*h$ (شرکت پذیری)

3) $L(f*g) = L(f)L(g)$ $\quad F(s)=L(f),\ G(s)=L(g)$

4) $L^{-1}(F(s)G(s)) = L^{-1}(F(s)) * L^{-1}(G(s))$

مثال: مطلوبست حاصل $\underbrace{\sin t}_{\alpha} * \underbrace{\sin t}_{\beta}$

$$\underset{f(t)}{\sin t} * \underset{g(t)}{\sin t} = \int_0^t \sin(t-u)\sin u\,du = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(t-2u) - \cos t)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin(t-2u) - u\cos t\right)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin t - t\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \qquad = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

$\frac{79}{409}$ مطلوبست حاصل کانولوشن روبرو. $f(t) = \underbrace{1*1*\cdots*1}_{n} = ?$

یک ایده مناسب برای محاسبه کانولوشن آن است که ابتدا با توجه به (۳) لاپلاس بگیریم و سپس با L^{-1} پاسخ را بدست آوریم

$$L(f) = L(1)L(1)\cdots L(1)$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\cdots\frac{1}{s} = \frac{1}{s^n} \quad\rightarrow f(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^n}\right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید $\frac{۵۳}{۲\text{ج } ۴۴۸}$

$$f(x)=e^{-x}\int_0^x e^{t}\cos^2 t\,dt=\int_0^x e^{t-x}\cos^2 t\,dt=e^{-x}*\cos^2 x$$

$f(x-t)\,;\,g(t)$

$$\rightarrow L(f(x))=L(e^{-x}).L(\cos^2 x)=\frac{1}{s+1}\cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)(s+1)}$$

$$h(t)=\int_0^t J_0(u)J_0(t-u)\,du=J_0(t)\times J_0(t)$$ مطلوبست $\frac{۷۰}{۴۰۹}$

$$\rightarrow L(h(t))=L(J_0(t))L(J_0(t))=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\rightarrow h(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\sin t$$

$$\int_0^x \overbrace{(x-t)^3}^{f(x-t)}\;\overbrace{t^4}^{g(t)}\,dt=h(x)$$ $\frac{۶۱}{۲\text{ج } ۴۴۶}$

$$h(x)=x^3*x^4\longrightarrow L(h(x))=L(x^3)L(x^4)=\frac{3!}{s^4}\cdot\frac{4!}{s^5}=\frac{3!\times 4!}{s^9}$$

$$\rightarrow h(x)=L^{-1}\left(\frac{6\times 24}{s^9}\right)=\frac{6\times 24}{8!}t^8$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)*L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$ $\frac{۷۴}{۴۱۰}$

$$=\sin t*\sin t\ \overset{\text{مثال}}{=\!=}\ \frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$$

جواب معادله $\begin{cases} y''+4y=f(t) \\ y(0)=3\ ,\ y'(0)=-1\end{cases}$ را بیابید $\frac{۳}{۲\text{ج } ۲۵۷}$

از معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$(s^2L(y)-3s+1)+4L(y)=\cancel{L(f)}\ F(s)\longrightarrow (s^2+4)L(y)=3s-1+F(s)$$

$$\rightarrow L(y)=\frac{3s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2+4}+\frac{F(s)}{s^2+4}\xrightarrow{L^{-1}} y=3\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$+L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)*L^{-1}(F(s))$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) * L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2}\sin 2t * f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-x) f(x)\,dx$$

$$\to y = 3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-x) f(x)\,dx$$

$\frac{77}{413}$ - تابع $f(t)$ که در معادله زیر صدق می‌کند را بیابید

معادله انتگرال $f(t) = t^2 + \underbrace{\int_0^t \sin(t-u) f(u)\,du}_{\sin t * f(t)}$

$$\to f(t) = t^2 + \sin t * f(t)$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس}} L(f) = \frac{2}{s^3} + \frac{L(f)}{s^2+1} \to \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) L(f) = \frac{2}{s^3}$$

$$\to \frac{s^2}{s^2+1} L(f) = \frac{2}{s^3} \to L(f) = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} f(t) = t^2 + \frac{2}{4!} t^4 = t^2 + \frac{1}{12} t^4$$

$\frac{79}{414}$ جواب را بیابید $y'(t) + \underbrace{\int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du}_{\cos t * y(t)} = \cos t$ ، $y(0) = 0$

$$\to y' + \cos t * y = \cos t \xrightarrow{L} (sL(y) - 0) + \frac{s}{s^2+1} L(y) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\to \underbrace{\left(s + \frac{s}{s^2+1}\right)}_{\frac{s(s^2+2)}{s^2+1}} L(y) = \frac{s}{s^2+1} \to L(y) = \frac{1}{s^2+2} \to y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\underbrace{2}_{(\sqrt{2})^2}}\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,t)$$

فصل ششم

دستگاه معادله دیفرانسیل

تابع مجهول : x و y

مستقل t

$$\begin{cases} x' + y'' = t \\ x'' + x - y' = \sin t \end{cases}$$

مرتبه ۲ ، دستگاه خطی ضرایب ثابت

روش های حل دستگاه

۱) روش حذفی اگر با اعمال جبری یا مشتق یا انتگرال بر روی معادلات دستگاه بتوانیم مجهولی را حذف کنیم برحسب مجهول دیگر به یک معادله دیفرانسیل می رسیم و آن را حل می کنیم

۲۰ / ۱۹۷ ج ۲

پاسخ y در دستگاه زیر را بیابید

$$\begin{cases} z' + y' = 0 \\ y'' + z + y = 0 \end{cases}$$

$z(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ و $y(0) = 0$

√۱) $-\frac{x^2}{2}$ ۲) $\frac{x^2}{2}$ ۳) $1-\frac{x^2}{2}$ ۴) $1+\frac{x^2}{2}$

$$\begin{cases} z' + y' = 0 \\ y''' + z' + y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y''' = 0 \xrightarrow{\int} y'' = a \xrightarrow{\int} y' = ax + bx + c$$

$$\xrightarrow{\int} y = a/_2 x^2 + bx + c \xrightarrow{y(0)=0} c = 0 \qquad \xrightarrow{y'(0)=0} b = 0$$

$$y''(0) + z(0) + y(0) = 0 \longrightarrow y''(0) = -1 \longrightarrow a = -1$$

$$\longrightarrow y = -1/_2 x^2$$

۲) روش عملگر معکوس : فقط برای حل دستگاه های ضرایب ثابت از این روش استفاده می شود و در آن دستگاه را با نماد عملگر $D = \frac{d}{dt}$ و $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ می نویسیم که آن را با روش کرامر حل می کنیم

۵ / ۸۷ تا ۴

جواب عمومی را بیابید

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Dx = 5x + 4y \\ Dy = x + 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (D-5)x - 4y = 0 \\ -x + (D-2)y = 0 \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ و همگن

$$\xrightarrow{\text{کرامر}} y = \dfrac{\begin{vmatrix} D-5 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-5 & -4 \\ -1 & D-2 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{D^2 - 7D + 6} \rightarrow (D^2 - 7D + 6)y = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مشخصه}} r^2 - 7r + 6 = 0 \rightarrow r = 1, 6 \rightarrow y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{6t}$$

حال x را محاسبه مجهول دوم از معادله‌ای که آن مجهول را مستقیماً محاسبه می‌کند، استفاده می‌کنیم

$$\text{معادله دوم} \rightarrow x = y' - 2y = (c_1 e^{t} + 6c_2 e^{6t}) - (2c_1 e^{t} + 2c_2 e^{6t})$$

$$\rightarrow x = -c_1 e^{t} + 4c_2 e^{6t}$$

نکته: تعداد کل اعداد ثابت در جواب عمومی دستگاه ضرایب ثابت برابر درجه دترمینان ضرایب در روش عملگر می‌باشد.

۲۹ / ۲ج ۴.۳

یک انتگرال خصوصی برای x در دستگاه زیر بیابید

جواب

$$\begin{cases} 2x'' + y'' + 5x + 3y = -8\sin 3t \\ x'' + y'' + 7x + 5y = 8\sin 3t \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{عملگر}} \begin{cases} (2D^2 + 5)x + (D^2 + 3)y = -8\sin 3t \\ (D^2 + 7)x + (D^2 + 5)y = 8\sin t \end{cases}$$

$$\text{کرامر} \rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} -8\sin 3t & D^2+3 \\ 8\sin 3t & D^2+5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2D^2+5 & D^2+3 \\ D^2+7 & D^2+5 \end{vmatrix}}$$

$$x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & D^2+3 \\ 1 & D^2+5 \end{vmatrix}(8\sin 3t)}{D^4 + 5D^2 + 4} = \dfrac{-2(D^2+4)(8\sin 3t)}{\underbrace{D^4 + 5D^2 + 4}_{(D^2+1)(\cancel{D^2+4})}} = -\dfrac{16\sin 3t}{D^2+1}$$

$$\to x_p(t) = \frac{1}{D^2+1}(-16\underbrace{\sin 3t}_{3t}) = \frac{1}{(3i)^2+1}(-16\sin 3t)$$

$$\to x_p(t) = 2\sin 3t$$

۳) روش تبدیل لاپلاس: چنانچه برای دستگاه خطی که شرایط اولیه آن در $t=0$ داده شده است، تبدیل لاپلاس را اعمال کنیم با حل دستگاه حاصل و محاسبه L^{-1} تا مجهول بدست می‌آید

مثال: y را در دستگاه زیر بیابید

$$\begin{cases} z' + y' = 0 \\ y'' + z + y = 0 \end{cases} \qquad z(0) = 1 \text{ و } y'(0) = 0 \text{ و } y(0) = 0$$

$L(y) = Y$, $L(z) = Z$

$$\xrightarrow[\text{لاپلاس}]{\text{اعمال تبدیل}} \begin{cases} (sZ - 1) + (sY - 0) = 0 \\ (s^2Y - s\times 0 - 0) + Z + Y = 0 \end{cases} \xrightarrow{-s\times} \begin{cases} sY + sZ = 1 \\ (s^2+1)Y + Z = 0 \end{cases}$$

$$sY + (-s^3 - s)Y = 1$$

$$\to Y = -\frac{1}{s^3} \xrightarrow{L^{-1}} y = -L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) = -\frac{1}{2}x^2$$

$\frac{26}{\text{ج۲.۴.۲}}$ $\phi_1(x)$ را از دستگاه زیر بدست آورید

$$\begin{cases} \phi_1(x) = e^{2x} + \int_0^x \phi_2(t)\,dt \\ \phi_2(x) = 1 - \int_0^x \underbrace{e^{2(x-t)}}_{f(x-t)}\ \underbrace{\phi_1(t)}_{g(t)}\,dt \end{cases}$$

$L(\phi_1) = L_1$

$L(\phi_2) = L_2$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس}} \begin{cases} L_1 = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{s} L_2 \\ L_2 = \dfrac{1}{s} - \dfrac{L_1}{s-2} \end{cases} \quad \xrightarrow{s\times} \begin{cases} L_1 - \frac{1}{s} L_2 = \dfrac{1}{s-2} \\ \dfrac{1}{s-2} L_1 + L_2 = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$\left(s + \frac{1}{s-2}\right) L_1 = \frac{s}{s-2} + \frac{1}{s} \longrightarrow \frac{s^2-2s+1}{s-2} L_1 = \frac{s^2+s-2}{s(s-2)}$$

$$\longrightarrow L_1 = \frac{(s-1)(s+2)}{s(s-1)^2} = \frac{s+2}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} = \frac{-2}{s} + \frac{3}{s-1}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \varphi_1(x) = -2 + 3e^{x}$$

نکته ۱: در دستگاه

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + g_1(t) \\ y' = a_2 x + b_2 y + g_2(x) \end{cases} \quad y(0) = y_0$$

تعریف می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{دستگاه} \longleftrightarrow \vec{X}' = A\vec{X} + \vec{g}(t) \qquad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow L(\vec{X}) = (sI - A)^{-1}(\vec{X}(0) + \vec{G}(s)) \qquad L(\vec{g}(t)) = \vec{G}(s)$$

جواب دستگاه زیر را بیابید   ۱۰ / ۲ج۳۹۰

$$X' = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}^{A} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad sI = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s-1 & 5 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+2s+2} \begin{pmatrix} s+3 & -5 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}$$

$$L(\vec{X}) = (sI - A)^{-1} X(0) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \begin{pmatrix} s+3 & -5 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2+1} \begin{pmatrix} s-2 \\ s \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = L^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{s-2}{(s+1)^2+1} \\ \dfrac{s}{(s+1)^2+1} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t - 3\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$