تصمیم گیری چند معیاره
MCDM
Multi Criteria Decision Making

تصمیم گیری ← یک معیاره

تصمیم گیری ← چند معیاره (MCDM) ← MADM : تعداد گزینه‌ها محدود و قابل شمارش است _ Ranking : رتبه‌بندی کردن _ تنها تعامل با تصمیم گیرنده در روش MADM این است که هر معیار برایش چقدر اهمیت دارد. مثال: رتبه‌بندی رشته دانشگاهی _ رتبه‌بندی n تا پروژه

چند معیاره (MCDM) ← MODM : تعداد گزینه‌ها نامحدود (همان متغیر تصمیم در مدل ریاضی): *X‌ها را باید طوری بدست آورد که چند هدف را بالانس کند.
مثال: برنامه تولید یک شرکت را بنویسید به اینصورت که سود max شود و میزان دیرکرد در سفارش تحویل‌ها Min شود.

هزینه‌ها _ درآمدها = سود

افزایش سود : هدف ۱
کاهش هزینه‌ها : هدف ۲ } ⟵ این ۲ هدف در واقع یکی هستند ⟵ کاهش هزینه _ افزایش سود: ترکیب دو هدف

* سطح تعامل یعنی اینکه چقدر نظر فرد در فرآیند تصمیم گیری ما تأثیر دارد.

«تصمیم گیری» را می‌توان طریقه‌ی عمل و یا حرکت در مسیر خاصی تعریف کرد که با تامل و به صورت آگاهانه، از بین روش‌های مختلف برای نیل به یک هدف مطلوب، انتخاب شده است. بنابراین تصمیم گیری، مستلزم انتخاب راهی از میان راه‌هاست؛ یعنی اگر تنها یک راهکار وجود داشته باشد، دیگر تصمیم گیری معنا ندارد. هرچند تجزیه و تحلیل (که منجر به انتخاب راهی از میان راه‌ها می‌شود)، امری عقلایی است؛ ولی عوامل ناخودآگاه و همچنین جنبه‌های احساسی و عاطفی نیز در تصمیم گیری، نقش مهمی ایفا می‌کند.

به طور کلی، «تصمیم‌گیری» عبارتست از انتخاب یکی از راه‌حل‌های مختلف.

* معیارها مقیاس یکسانی ندارند مثلاً یکی برحسب پول و یکی مثل مصرف سوخت برحسب lit/km است.

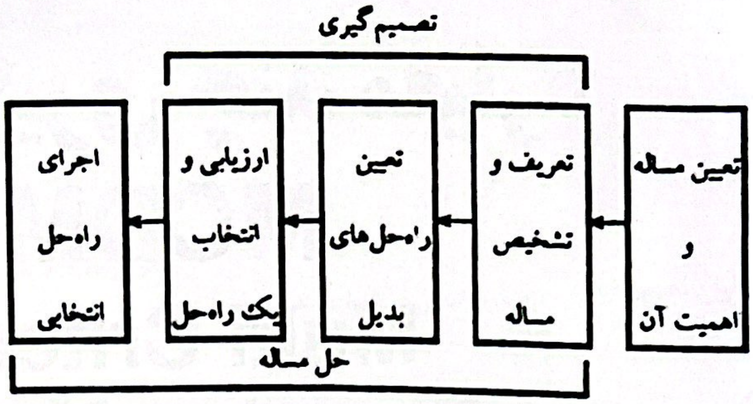
MADM :

	قیمت	هزینه قطعات یدکی	امنیت	ظاهر
پراید				
پژو 405				
سمند				

ظاهر ← معیارهای کیفی

شاخص / معیار $j=1,...,n$ ← تعداد شاخص‌ها

گزینه یا آلترناتیو
selection / Ranking
$A_i \; ; \; i=1,2,...,m$ ← تعداد گزینه‌ها



شکل ۱-۱. فرآیند تصمیم گیری

مشکلات :

۱- معیارهای مختلف دارای مقیاس های اندازه گیری مختلف هستند ← راه حل : بی بعد کردن

۲- بعضی از معیارها کیفی هستند ← راه حل : کمی سازی

۳- بعضی از معیارها مثبت و بعضی منفی هستند ← راه حل : در محاسبه امتیاز آلترناتیوها ماهیت + و - معیار لحاظ شود.

۴- وزن معیارها

* ماهیت + یا - بودن معیارها به این بستگی دارد که برای آن تصمیم گیرنده منفعت است یا خیر.

روش اول : بی مقیاس سازی نورم اقلیدسی : مزیت این روش نسبت به روش های دیگر این است که نسبت ها و فاصله ها را رعایت می کند یعنی اگر عددی دو برابر عدد دیگر باشد بعد از انجام نورم اقلیدسی بازهم آن فاصله عددی حفظ خواهد شد. عیب این روش این است که اثر + و - در نظر گرفته نمی شود.

اهمیت داده ها در تصمیم گیری

روش دوم : بی مقیاس سازی خطی : در این روش برای شاخص ها + یک روش، برای شاخص های منفی یک روش و اگر ترکیبی از شاخص ها + و - داشتیم از روش زیر استفاده می کنیم :

$$\frac{\min a_{ij}}{a_{ij}} \quad \text{یا} \quad \frac{\frac{1}{a_{ij}}}{\max \frac{1}{a_{ij}}}$$

اثر + و - در این روش در نظر گرفته می شود.

- اهمیت مقدار داده ها

- اهمیت کیفیت داده ها

روش سوم : بی مقیاس سازی فازی : در این روش همه را به شاخص + تبدیل می کنیم. در این روش نیز اثر + و - در نظر گرفته می شود و همچنین هر دو فرمول آن هرچقدر بیشتر باشند بهتر است.

- روش های جمع آوری داده ها

بر اساس میزان اطلاعات موجود

انواع تصمیم گیری
- **تصمیم گیری در شرایط اطمینان**
- **تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان**
  - در شرایط عدم اطمینان کامل
  - در شرایط ریسک
- **تصمیم گیری در شرایط تعارض**

۳

در شرایط اطمینان ← از نوع مدلهاي رياضي ←
- تجزیه و تحلیل هزینه
- برنامه ریزي خطي و مشتقات آن
- برنامه ریزي حمل و نقل و شبکه ها
- برنامه ریزي غیر خطي
- مواردي از برنامه ریزي دینامیك

در شرایط عدم اطمینان
- **در حالت عدم اطمینان کامل** ← از نوع مدلهاي ابتکاری ←
  - ماتریس تصمیم گیري
  - حداقل حداکثرها
  - حداکثر حداقل ها
  - حداکثر حداکثرها
- **در حالت ریسک**
  - از نوع مدلهاي احتمالي
    - بدون استفاده از نمونه گیري ← E.V
    - با استفاده از نمونه گیري ← قضیه بیز
    - با استفاده از منحني هاي آماري ← منحني توزیع
  - از نوع مدلهاي رياضي /کامپیوتری
    - تجزیه و تحلیل هزینه
    - مدلهاي شبیه سازي
    - برنامه ریزي دینامیك
  - از نوع مدلهاي ارزیابي ریسک
    - آنالیز درخت خطا
    - تجزیه و تحلیل نقاط خطا و اثرات ناشی از آن

کاربردهای تصمیم گیری چندمعیاره در زندگی شخصی و کاری:

❋اتومبیلي که یك فرد در نظر دارد خریداري کند ، به معیارهائي مانند قیمت ، مدل ، ایمني ، راحتي ، میزان مصرف سوخت ، قابلیت اطمینان و ... بستگي دارد.

❋درانتخاب همسر نیز معیارهاي زیادي مي‌تواند مورد بررسي و توجه قرارگیرد ، اینها مسائل شخصي بودند.

۴

کاربردهای تصمیم گیری چندمعیاره در زندگی شخصی و کاری:

❋در زمینه مسائل سازماني به عنوان مثال درانتخاب استراتژي یك سازمان معیارهایي از قبیل میزان درآمد سازمان طي یك دوره ، قیمت سهام سازمان ، سهم بازار ، تصویر سازمان در جامعه و ... مي‌توانند مهم باشند.

❋در زمینه مسائل عمومي یك جامعه ، به عنوان مثال برنامه توسعه منابع آبي مي‌تواند بر اساس معیارهائي مانند هزینه ، احتمال کمبود آب ، انرژي (میزان استفاده مجدد از آن) ، استفاده از جنگل و زمین ، کیفیت آب ، حفاظت از مواد غذایي و ... صورت گیرد ، یعني این موارد به عنوان معیارها مد نظر قرار گیرند.

کاربردهای تصمیم گیری چندمعیاره در زندگی شخصی و کاری:

✸در زمینه مسائل دولتي ، به عنوان مثال بخش حمل و نقل کشوري باید سیستم حمل و نقل را به گونه‌اي طراحي کند که زمان سفر ، تاخیرات ، هزینه هاي حمل و نقل ، تصادفات و... حداقل شود.

✸در صنایع نظامي انتخاب سیستم مناسب پرتاب يك موشك در نیروي هوائي بر حسب معیارهائي نظیر انتخاب سرعت ، دقت ، قابلیت اطمینان ، میزان آسیب پذیري و ... سنجیده مي شود.

روشهاي تصمیم‌گیري چند معیاره به دو دسته کلي تقسیم مي‌شوند:

- مدلهاي تصمیم‌گیري چند هدفه(MODM)
- مدلهاي تصمیم‌گیري چند شاخصه(MADM)

Multiple Objective Decision Making (MODM)
Multiple Attributive Decision Making (MADM)

تفاوت این مدلها در چیست؟

- در **MODM** معیارها و اولویت های آنها مشخص می باشد ولی در **MADM** چند آلترناتیو داریم و چند معیار خواهیم داشت.
- در **MODM** به دنبال طراحی جواب کارا هستیم ولی در **MADM** به دنبال انتخاب جواب برتر نسبت به سایر گزینه ها هستیم.

مقایسه MADM و MODM

MODM	MADM	موارد متفاوت
ضمني بيان شده‌اند(به طور ضعيف بيان شده‌اند)	صريح بيان شده‌اند	اهداف
به طور ضمني بيان شده‌اند	صريح بيان شده اند	شاخصها
كاملا مشخص	غيرمشخص در داخل معيارها گنجانده شده‌اند	محدوديتها
تعداد نامحدود و در نتيجه يك فرآيند معلوم مي‌شود	تعداد محدود و مشخص	گزينه‌ها
زياد	كم	تعامل با تصميم‌گيرنده

مدلهاي تصميم‌گيري چند شاخصه(MADM)

Multiple Attributive Decision Making

۷

در اين مدلها ، انتخاب يك گزينه از بين گزينه‌هاي موجود مد نظر است.

در يك تعريف كلي تصميم‌گيري چند شاخصه به تصميمات خاصي (از نوع ترجيحي) مانند ارزيابي ، اولويت‌گذاري و يا انتخاب از بين گزينه‌هاي موجود (كه گاه بايد بين چند شاخص متضاد انجام شود) اطلاق مي‌گردد.

انواع مختلفي از مسائل MADM وجود دارند كه تمامي آنها در خصوصيات زير مشتركند :

۱- گزینه ها

❋در این مسائل گزینه های مشخص باید مورد بررسي قرار گرفته و در مورد آنها اولویت‌گذاري ، انتخاب و یا رتبه بندي صورت گیرد.

❋تعداد گزینه‌هاي مورد نظر مي‌تواند محدود و یا خیلي زیاد باشند. براي مثال ، یك تولید کننده اتومبیل ممکن است فقط چند گزینه محدود براي انتخاب محل تولید اتومبیل داشته باشد ، ولي یك دانشگاه درجه یك انتخاب دانشجو خود را از بین هزاران متقاضي مي‌تواند انجام دهد.

❋گاهي بجاي گزینه مترادف‌هاي آن مانند انتخاب ، استراتژي ، اقدام ، کاندیدا و غیره بکار مي‌رود

۲- شاخص ها

❋هر مساله MADM چندین شاخص دارد که تصمیم‌گیرنده ، باید در مساله آنها را کاملاً مشخص کند و تعداد شاخصها بستگي به ماهیت مساله دارد.

❋براي مثال ، در یك مساله خرید اتومبیل اگر قرار به ارزیابي چند اتومبیل باشد شاخصهاي مختلف قیمت ، میزان سوخت مصرفي ، نحوه ضمانت و ساخت ممکن است مد نظر باشند .

❋در یك مساله جابابي براي طرح کارخانه 100 شاخص و یا بیشتر مي‌توانند مد نظر باشند.

❋واژه شاخص به صورت واژگان دیگري از قبیل اهداف یا معیارها قابل بیان است.

۳- واحدهای بی مقیاس

هر شاخص نسبت به شاخص دیگر داراي مقیاس اندازه‌گیري متفاوتي است. لذا جهت معنا دار شدن محاسبات و نتایج از طریق روشهاي علمي اقدام به بي‌مقیاس کردن داده‌ها مي‌شود به گونه‌اي که اهمیت نسبي داده‌ها حفظ گردد.

۴- وزن شاخص ها

تمامي روشهاي MADM مستلزم وجود اطلاعاتي هستند که بر اساس اهمیت نسبي هر شاخص بدست آمده باشند.

این اطلاعات معمولا داراي مقیاس ترتیبي یا اصلي هستند.

وزنهاي مربوط به شاخصها مي‌تواند مستقیما توسط تصمیم‌گیرنده و یا به وسیله روشهاي علمي موجود به معیارها تخصیص داده شود. این وزنها اهمیت نسبي هر شاخص را بیان مي‌کنند.

۵- ماتریس تصمیم گیری

جدول ۱ـ۱. ماتریس تصمیم‌گیری چند شاخصه

گزینه‌ها	شاخص‌ها				
	C_1	...	C_j	...	C_n
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

۱۱

می‌توان گفت A_i نشان‌دهنده‌ی گزینه i ام، c_j نشان‌دهنده‌ی شاخص j ام و a_{ij} نشان‌دهنده ارزش گزینه i ام، از نظر شاخص jام است.

مثال:

فرض کنید یک دانش آموخته‌ی دانشگاهی، می‌خواهد از بین ۴ شغل، با توجه به ۵ شاخص، یکی را انتخاب کند. «شاخص‌ها» عبارتند از: درآمد، وجهه‌ی اجتماعی، سختی کار، مسافت، و امنیت اجتماعی (درآمد، بر حسب ده هزار تومان و مسافت، بر حسب کیلومتر است). ارزش هر شغل از نظر هر شاخص، در جدول ۱ـ۲ آمده است. در ماتریس تصمیم (جدول ۱ـ۲)، دیده می‌شود که از پنج شاخص موجود(c_j)، دو شاخص (c_4 و c_1) کمّی بوده و بقیه‌ی آن‌ها، کیفی است.

A_i \ C_j	درآمد	وجهه‌ی اجتماعی	سختی	مسافت	امنیت
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	زیاد	نسبتاً زیاد	۱۰	زیاد
A_2	۱۲	متوسط	متوسط	۳	خیلی زیاد
A_3	۲۰	خیلی زیاد	زیاد	۳۰	متوسط
A_4	۳۰	کم	خیلی زیاد	۱	کم

نکته مهم:

به طور معمول، شاخص‌ها در مدل‌های *MADM* از مقیاس‌های گوناگون بوده و در بسیاری موارد در تعارض با یکدیگرند. در بیشتر مواقع، گزینه‌ای که بهینه باشد (بهترین هر شاخص را تامین کند)، وجود ندارد. افزون بر این، برخی شاخص‌ها جنبه‌ی مثبت (c_j^+) و برخی جنبه‌ی منفی (c_j^-) دارند. بنابراین «گزینه‌ی بهینه» در یک مدل *MADM*، یک گزینه‌ی ذهنی *A* خواهد بود که بهترین ارزش از هر شاخص را تامین کند. در بیشتر مواقع، دسترسی به *A* غیرممکن است؛ اما انتخاب مناسب‌ترین گزینه به طور نسبی امکان‌پذیر خواهد بود.

تبدیل شاخص‌های کیفی به کمّی

همان‌طور که گفتیم، می‌توان راهکارهای انتخابی را توسط دو نوع شاخص توصیف کرد:

۱ـ شاخص‌های کمّی (قیمت، درآمد، مسافت، و....)،

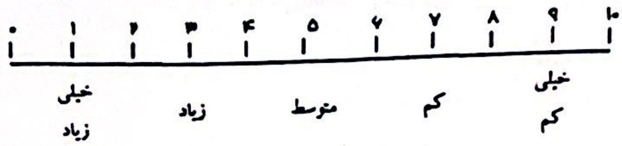
۲ـ شاخص‌های کیفی (وجهه‌ی اجتماعی، سختی، امنیت، زیبایی، و....).

می‌توان با روش‌های مختلفی، شاخص‌های کیفی را به شاخص‌های کمّی تبدیل کرد. یک روش عمومی در اندازه‌گیری یک شاخص کیفی با مقیاس فاصله‌ای، «مقیاس دوقطبی فاصله‌ای» است که به گونه‌ی زیر است:

تبدیل شاخص‌های کیفی به کمّی

این اندازه‌گیری، بر اساس یک مقیاس یازده نقطه‌ای است که صفر، کمترین ارزش و ۱۰، بیشترین ارزش را به خود اختصاص می‌دهد. این اندازه‌گیری، برای شاخص‌هایی با جنبه‌ی مثبت مانند درآمد است. هر چه درآمد بیشتر باشد، میزان مطلوبیت آن نیز افزایش می‌یابد. باید توجه داشت که ارزش‌هایی مثل ۲، ۴، ۶، و ۸ ارزش‌های واسطه بین دو ارزش دیگرند. برای نمونه به «نسبتاً زیاد» مقدار ۶ نسبت داده می‌شود.

این نوع اندازه‌گیری، برای شاخص‌هایی با جنبه‌ی منفی نیز به‌کار گرفته می‌شود، با این تفاوت که این مقیاس یازده نقطه‌ای، به گونه‌ی زیر تغیر شکل می‌دهد.



۱۲

تبدیل شاخص‌های کیفی به کمّی

این نوع اندازه‌گیری، با سه فرض زیر انجام می‌شود:

۱. فاصله‌ی بین دو ارزش متوالی (برای نمونه: فاصله بین خیلی کم و کم، یا فاصله بین زیاد و خیلی زیاد) یکسان است.

۲. فرض بر این است که امتیاز ۹، سه برابر، بیشتر از امتیاز ۳ است.

۳. ترکیب ارزش‌ها (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)،برای شاخص‌های مختلف، مجاز است؛ زیرا اختلاف بین هر دو ارزش، برای هر شاخص، یکسان است.

این سه فرض، مقیاس ترتیبی را به فاصله‌ای تبدیل می‌کند.

مثال:

A_i \ C_j	درآمد C_1	وجهه‌ی اجتماعی C_2	سختی C_3	مسافت C_4	امنیت C_5
A_1	۱۵	زیاد	نسبتاً زیاد	۱۰	زیاد
A_2	۱۲	متوسط	متوسط	۳	خیلی زیاد
A_3	۲۰	خیلی زیاد	زیاد	۳۰	متوسط
A_4	۳۰	کم	خیلی زیاد	۱	کم

گزینه‌ها \ شاخص‌ها	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	۷	۴	۱۰	۷
A_2	۱۲	۵	۵	۳	۹
A_3	۲۰	۹	۳	۳۰	۵
A_4	۳۰	۳	۱	۱	۳

بی‌مقیاس سازی

نکته‌ی دیگر در شاخص‌های یک ماتریس تصمیم‌گیری، وجود شاخص‌های مثبت و منفی با هم، در یک ماتریس است. شاخص‌های کمّی، دارای یک بُعد خاص است، مانند ریال، کیلوگرم، متر، و ... . برای مقایسه‌ی مقیاس‌ها، باید بی‌مقیاس سازی[1] را به‌کار برد که با آن، مقادیر شاخص‌های مختلف، بدون بُعد شده و جمع‌پذیر می‌شوند. راه‌های مختلفی برای بی‌مقیاس سازی وجود دارد که برخی از آن‌ها عبارتند از:

الف) بی‌مقیاس‌سازی نورم. در این نوع بی‌مقیاس سازی، هر عنصر ماتریس تصمیم‌گیری را بر مجذور مجموع مربعات عناصر هر ستون، تقسیم می‌کنیم؛ یعنی:

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2}}$$

که n_{ij} مقدار بی‌مقیاس شده‌ی گزینه i از نظر شاخص j است.

مثال (بی مقیاس سازی با استفاده از روش نورم اقلیدسی)

گزینه‌ها \ شاخص‌ها	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	۷	۴	۱۰	۷	۰/۳۶۷	۰/۵۴۷	۰/۵۶۰	۰/۳۱۵	۰/۵۴۷
A_2	۱۲	۵	۵	۳	۹	۰/۲۹۴	۰/۳۹۰	۰/۷۰۰	۰/۰۹۴	۰/۷۰۳
A_3	۲۰	۹	۳	۳۰	۵	۰/۴۹	۰/۷۰۳	۰/۴۲۰	۰/۹۴۴	۰/۳۹۰
A_4	۳۰	۳	۱	۱	۳	۰/۷۳۴	۰/۲۳۴	۰/۱۴۰	۰/۰۳۱	۰/۲۳۴
$\sqrt{\sum_{i=1}^{4} a_{ij}^2}$	۴۰/۸۵۳	۱۲/۸۰۶	۷/۱۴۹	۳۱/۷۸	۱۲/۸۰۶					

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{4} a_{i1}^2} = \sqrt{15^2 + 12^2 + 20^2 + 30^2} = 40/853$$

$$n_{11} = \frac{15}{40/853} = 0/367 \ , \quad n_{21} = \frac{12}{40/853} = 0/294$$

۱۴

بی‌مقیاس سازی

ب) بی‌مقیاس‌سازی خطی. اگر تمامی شاخص‌ها، جنبه‌ی مثبت داشته باشند، هر مقدار را به بزرگ‌ترین مقدار ستون jام ،تقسیم می‌کنیم. یعنی:

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{Max\ a_{ij}}$$

چنانچه تمامی شاخص‌ها، جنبه‌ی منفی داشته باشند، به‌گونه زیر عمل می‌کنیم:

$$n_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{Max\ a_{ij}}$$

* مطلوبیت به سمت + کردن گزینه‌هاست.

بی‌مقیاس سازی

نکته مهم در بی مقیاس سازی:

البته برخی از ماتریس‌ها، هم شاخص مثبت و هم شاخص منفی دارند (مانند مساله‌ی ارایه شده در مثال ۱ـ۱). در این گونه موارد می‌توان شاخص منفی را با معکوس کردن آن به جنبه‌ی مثبت تبدیل کرد؛ زیرا نمی‌توان به طور هم‌زمان، از دو فرمول پیش استفاده کرد/اصغرپور، ۱۳۷۶/. بدین ترتیب خواهیم داشت:

تبدیل به معیار + می‌شود

$$n_{ij} = \frac{\frac{1}{a_{ij}}}{\underset{i}{Max}\left(\frac{1}{a_{ij}}\right)} = \frac{\underset{i}{Min}\, a_{ij}}{a_{ij}} \longrightarrow$$

فقط برای منفی‌ها

مقدار بدست آمده از هر یک از فرمول‌های بالا، مقداری بین صفر و یک می‌شود. این مقیاس خطی است و کلیه‌ی نتایج را به یک نسبت خطی می‌کند. بنابراین، وضعیت شاخص‌ها و نتایج آن‌ها، یکسان باقی می‌ماند.

مثال (بی مقیاس سازی خطی)

گزینه‌ها \ شاخص‌ها	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	۷	۴	۱۰	۷
A_2	۱۲	۵	۵	۳	۹
A_3	۲۰	۹	۳	۳۰	۵
A_4	۳۰	۳	۱	۱	۳

$$n_{11} = \frac{۱۵}{۳۰} = ۰/۵۰۰ ,\quad n_{21} = \frac{۱۲}{۳۰} = ۰/۴۰۰$$

$$n_{31} = \frac{۲۰}{۳۰} = ۰/۶۶۷ ,\quad n_{41} = \frac{۳۰}{۳۰} = 1$$

مقادیر ستون چهارم هم که شاخص منفی است، به صورت زیر محاسبه شده است:

$$n_{14} = \frac{1}{۱۰} = ۰/۱۰۰ ,\quad n_{24} = \frac{1}{۳} = ۰/۳۳۳$$

$$n_{34} = \frac{1}{۳۰} = ۰/۰۳۳ ,\quad n_{44} = \frac{1}{1} = 1$$

A_i \ C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۰/۵۰۰	۰/۷۷۸	۰/۸	۰/۱۰۰	۰/۷۷۸
A_2	۰/۴۰۰	۰/۵۵۶	۱	۰/۳۳۳	۱
A_3	۰/۶۶۷	۱	۰/۶	۰/۰۳۳	۰/۵۵۶
A_4	۱	۰/۳۳۳	۰/۲	۱	۰/۳۳۳

نکته: گرچه شاخص چهارم (مسافت) منفی بود ولی چون روش بی‌مقیاس‌سازی آن نسبت به شاخص‌های مثبت متفاوت بود، اکنون به شاخص مثبتی (مانند نزدیکی) تبدیل شده است.

بی‌مقیاس سازی

ج) بی‌مقیاس‌سازی فازی. فرمول بی‌مقیاس سازی فازی برای شاخص‌های مثبت و منفی به گونه‌ی زیر است.

شاخص مثبت $$n_{ij}=\frac{a_{ij}-a_j^{Min}}{a_j^{Max}-a_j^{Min}}$$

شاخص منفی $$n_{ij}=\frac{a_j^{Max}-a_{ij}}{a_j^{Max}-a_j^{Min}}$$

گزینه‌ها \ شاخص‌ها	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	۷	۴	۱۰	۷
A_2	۱۲	۵	۵	۳	۹
A_3	۲۰	۹	۳	۳۰	۵
A_4	۳۰	۳	۱	۱	۳

۱۶

برای نمونه، برای شاخص اول (درآمد) که مثبت است:

$$n_{11}=\frac{۱۵-۱۲}{۳۰-۱۲}=۰/۱۶۷,\quad n_{21}=\frac{۱۲-۱۲}{۳۰-۱۲}=۰$$

$$n_{31}=\frac{۲۰-۱۲}{۳۰-۱۲}=۰/۴۴۴,\quad n_{41}=\frac{۳۰-۱۲}{۳۰-۱۲}=۱$$

تصمیم گیری چند معیاره

MCDM

Multi Criteria Decision Making

۱۷

وزن شاخص ها ← قضاوت ذهنی

← آنتروپی شانون

← مقایسات زوجی (بردار ویژه)

برای محاسبه پراکندگی در روش آنتروپی شانون نمی توان از واریانس و انحراف معیار استفاده کرد چون این دو، پراکندگی حول میانگین را به ما می دهد اما

دراین روش ما پراکندگی مطلق داده ها را نسبت به هم می خواهیم.

ارزیابی اوزان شاخص‌ها

الف) روش آنتروپی

ب) روش لینمپ[1]

ج) روش کمترین مجذورات موزون

د) روش بردار ویژه.

روش اول تعیین وزن معیارها:

روش آنتروپی شانون

روش آنتروپی

«آنتروپی[۱]» یک، مفهوم بسیار با اهمیت در علوم اجتماعی، فیزیک و تئوری اطلاعات است. وقتی که داده‌های یک ماتریس تصمیم‌گیری، به طور کامل مشخص شده باشد، می‌توان روش آنتروپی را برای ارزیابی وزن‌ها به‌کار برد. ایده‌ی این روش این است که هر چه پراکندگی در مقادیر یک شاخص بیشتر باشد، آن شاخص از اهمیت بیشتری برخوردار است.

گزینه‌ها	شاخص‌ها	
	قیمت (میلیون تومان)	ضمانت (ماه)
A	۱۰۱	۱۰
B	۱۰۰	۱۵
C	۱۰۲	۲۰

با توجه به داده‌ها کدام شاخص اهمیت بیشتری در خرید خواهد داشت؟

روش آنتروپی: هرقدر فراوانی تکرار یک پیام بیشتر باشد، محتوای اطلاعاتی آن کمتر است.

با داشتن اطلاعات، تعادل بین احتمال انتخاب راه‌ها برهم می‌خورد.

چند نکته: ★ از پراکندگی داده‌ها متوجه می‌شویم، کدام معیار اهمیت بیشتری دارد.

★ چون پراکندگی مطلق داده‌ها را می‌خواهیم، پس از انحراف معیار

که پراکندگی را حول میانگین حساب می‌کند، استفاده نمی‌کنیم.

مفهوم آنتروپی در تئوری اطلاعات

این حالت ها را در نظر بگیرید:

مثال ۱:

.Aسلام. از دیدارتان بسیار خوشحال شدم. متأسفم که دیر رسیدم. حال شما خوب است؟
.Bیکی از این پاسخ ها را می‌دهد:

۱- سلام. متشکرم　　۲- آتش سوزی شده. فرار کنیم!　　۳- ساعت چند است؟ فکر کنم ناهار تمام شد.

۴- ببخشید اسم شما را یادم رفته.　　۵- ببخشید بوداپست پایتخت کجاست؟ مجارستان یا لهستان　　۶- حالم خیلی بد است.

فرض معقولی است اگر بگوییم در یک مکالمه دوستانه احتمال مورد ۱، ٪۹۰ و احتمال موارد ۶-۲ هرکدام ٪۲ است. یعنی مسئله به لحاظ ریاضی مشابه مثال تاس ریختن با احتمال ٪۹۰ برای ۶ و ٪۲ برای دیگر ارقام است.

مثال ۲:

Aمی‌پرسد: دیروز می‌خواستم به شما سر بزنم اما شماره پلاک منزلتان را فراموش کرده بودم و ۶ شماره در کوچه شما بود و نتوانستم تصمیم بگیرم کدام زنگ را بزنم. ممکن است شماره پلاکتان را بگویید؟

Bیکی ازاین پاسخ‌ها را می‌دهد:

۱) پلاک ۱۰۱ است.　۲) ۱۰۲ است.　۳) ۱۰۳ است.　۴) ۱۰۴ است.　۵) ۱۰۵ است.　۶) ۱۰۶ است.

در حالت کلی معقول است فرض کنیم احتمال هریک از این موارد مساوی و معادل است. به عبارت دیگر مسأله به لحاظ ریاضی مشابه تاس سالم شش وجهی است. می دانیم که آنتروپی در مثال دو بیشتر از مثال یک است. این مطلب ناشی از این است که در مثال یک پاسخ مخاطب ما با احتمال ٪۹۰ قابل پیشگویی است و حاوی اطلاعات جدید زیادی نیست. در حالی در مثال دو به طور کلی هیچ تصوری از اینکه پاسخ مخاطب ما چه خواهد بود نداریم و جواب او حاوی اطلاعات جدید قابل توجهی است. بنابراین آنتروپی معیاری از <u>**دشواری حدس زدن جواب**</u> است.

این مطلب به وضوح بیان می کند که وقتی " نظم" خاصی بر فرایند ما حاکم می شود، (در اینجا این نظم معادل واضح بودن پاسخ به احوالپرسی است) آنتروپی پایین می آید. بیشترین آنتروپی زمانی حاصل می شود که احتمال هر Nحالت مساوی باشد یعنی فرایند کاملاً تصادفی صورت بگیرد. این مطلب قضیه ای از ترمودینامیک به خاطر می آورد که بیشترین آنتروپی ترمودینامیکی متعلق به حالتی است که همگن ترین توزیع احتمال را دارد.

* اطمینان در مثال ۱ بیشتر است و آنتروپی یا عدم اطمینان در مثال ۲ بیشتر است (تصادفی بودن بیشتر است) ⇐ هرچقدر آنتروپی بیشتر باشد آن شاخص بهتر است.

* هرچقدر شباهت‌ها بیشتر باشد یا به هم نزدیک‌تر باشند، آنتروپی بیشتر است.

آنتروپی در نظریه‌ی اطلاعات، معیار عدم اطمینان است که با توزیع احتمال مشخص P_i بیان می‌شود. اندازه‌گیری این عدم اطمینان (E_i)، توسط «شانون[1]» به گونه‌ی زیر بیان شده است:

$$E_i = S(p_1, p_2, \ldots, p_m) = -k\sum_{i=1}^{m} \left[p_i \times \ln p_i\right]$$

که k مقداری ثابت است و برای این که E_i بین صفر و یک باشد، اعمال می‌شود. E از توزیع احتمال p_i بر اساس مکانیزم آماری، محاسبه شده و مقدار آن در هنگام تساوی p_i ها با یکدیگر (یعنی $p_i = \frac{1}{m}$)، بیشترین مقدار خواهد بود که این گونه محاسبه می‌شود:

$$k\sum_{i=1}^{m} p_i \times \ln p_i = k\left\{\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\ln\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}\ln\frac{1}{m}\right\} = k\left\{\ln\frac{1}{m}\left(\frac{m}{m}\right)\right\} = k \times \ln\frac{1}{m}$$

k به عنوان مقدار ثابت، از فرمول زیر به دست می‌آید:

۲۵

$$k = \frac{1}{\ln(m)}$$

می‌توان برای به دست آوردن اوزان شاخص‌ها، گام‌های زیر را طی کرد:

گام ۱. محاسبه‌ی P_{ij}

$$P_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}$$

گام ۲. محاسبه‌ی مقدار E_j

$$E_j = -k\sum_{i=1}^{m}\left[p_{ij} \ln p_{ij}\right]$$

گام ۳. محاسبه‌ی مقدار عدم اطمینان d_j

$$d_j = 1 - E_j$$

گام ۴. محاسبه‌ی اوزان w_j

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}$$

دقت کنید که در روش آنتروپی، مثبت یا منفی بودن شاخص‌ها، تاثیری در روش محاسبه‌ی وزن‌ها نخواهد داشت.

نکته ای برای گام ۳:

الف) پراکندگی بیشتر به معنای وزن بیشتر معیار می باشد. در این حالت برای تعیین وزن معیار j ام، به ترتیب زیر عمل می نمائیم:

$$d_j = 1 - E_j \quad , \quad w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}$$

ب) پراکندگی کمتر، به معنای وزن بیشتر می باشد. در این حالت برای محاسبه وزن معیار j ام به صورت زیر

$$w_j = \frac{E_j}{\sum_{j=1}^{n} E_j}$$

$0 \leqslant E_j \leqslant 1$ ← آنتروپی

آنتروپی زمانی بیشترین مقدار ممکن را است را می گیرد که احتمال همهٔ انتخاب ها با هم برابر باشند.

$$E_j = -k \sum_{i=1}^{m} p_i \ln p_i$$

$$1 = -k \underbrace{\left(\frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} \ln \frac{1}{m} \right)}_{\ln \frac{1}{m}} \xrightarrow{\text{داریم}} \ln \frac{1}{m} = \cancel{\ln 1} - \ln m$$

گزینه m

$$1 = k (\ln m) \longrightarrow k = \frac{1}{\ln m}$$

۲۱

d_j : مقدار عدم اطمینان

$d_j = 1 - E_j$

آنتروپی

محاسبه وزن (w) :
$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}$$

نکته مهم:

اگر تصمیم گیرنده از پیش، وزن ذهنی (قضاوتی) مشخصی مانند λ_j را برای شاخص j در نظر گرفته باشد، در این هنگام وزن تعدیل شده (w'_j) که ترکیبی از وزن‌های قضاوتی و آنتروپی است، به گونه زیر محاسبه می‌شود (توجه: اگر اوزان ذهنی (قضاوتی) موجود نباشد، گام ۵ منتفی است).

گام ۵. محاسبه‌ی اوزان تعدیل شده (w'_j)

$$w'_j = \frac{\lambda_j w_j}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j}$$

مثال (روش آنتروپی)

A_i \ C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	زیاد	نسبتاً زیاد	۱۰	زیاد
A_2	۱۲	متوسط	متوسط	۳	خیلی زیاد
A_3	۲۰	خیلی زیاد	زیاد	۳۰	متوسط
A_4	۳۰	کم	خیلی زیاد	۱	کم

A_i \ C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۱۵	۷	۴	۱۰	۷
A_2	۱۲	۵	۵	۳	۹
A_3	۲۰	۹	۳	۳۰	۵
A_4	۳۰	۳	۱	۱	۳
Σ	۷۷	۲۴	۱۳	۴۴	۲۴

$$E_1=-\frac{1}{\ln 4}\sum_{i=1}^{4} p_i \ln p_i$$

۴ تا آلترناتیو (A_1 تا A_4)

$$E_1=-\frac{1}{\ln 4}\left[0.195\ln 0.195+0.156\ln 0.156+0.26\ln 0.26+0.389\ln 0.389\right]=0.956$$

گام اول. در این گام، با فرمول زیر، مقدار P_{ij} را برای همه‌ی شاخص‌ها و گزینه‌ها به‌دست می‌آوریم.

$$p_{ij}=\frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}} \Rightarrow p_{11}=\frac{15}{77}=0/195,\quad p_{21}=\frac{12}{77}=0/156$$

$$p_{31}=\frac{20}{77}=0/260\ ,\quad p_{41}=\frac{30}{77}=0/389$$

شاخص مهم‌تر $\Leftarrow$ آنتروپی ↓ وزن شاخص ↑

A_i \ C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۰/۱۹۵	۰/۲۹۲	۰/۳۰۸	۰/۲۲۷	۰/۲۹۲
A_2	۰/۱۵۶	۰/۲۰۸	۰/۳۸۵	۰/۰۶۸	۰/۳۷۵
A_3	۰/۲۶۰	۰/۳۷۵	۰/۲۳۱	۰/۶۸۲	۰/۲۰۸
A_4	۰/۳۸۹	۰/۱۲۵	۰/۰۷۷	۰/۰۲۳	۰/۱۲۵

• اگر سلیقه شخص فرد را نیز داشته باشیم باید سلیقه شخص فرد و وزن شاخص را درهم ضرب کنیم (جمع نمی‌کنیم) زیرا کلمه «و» بین ارزش از نظر شخص تصمیم گیرنده «و» وزن شاخص از نظر آنتروپی شانون نشان دهندهٔ ضرب است نه جمع.

۲۲

گام دوم. در این گام، با فرمول $E_j=-k\sum\left[p_{ij}\ln p_{ij}\right]$، مقدار اطمینان را به‌دست می‌آوریم.

A_i \ C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۰/۱۹۵	۰/۲۹۲	۰/۳۰۸	۰/۲۲۷	۰/۲۹۲
A_2	۰/۱۵۶	۰/۲۰۸	۰/۳۸۵	۰/۰۶۸	۰/۳۷۵
A_3	۰/۲۶۰	۰/۳۷۵	۰/۲۳۱	۰/۶۸۲	۰/۲۰۸
A_4	۰/۳۸۹	۰/۱۲۵	۰/۰۷۷	۰/۰۲۳	۰/۱۲۵

$$E_1=-0/721[0/195\ln(0/195)+0/156\ln(0/156)+0/260\ln(0/260)+0/389\ln(0/389)]=0/956$$

$$E_2=-0/721[0/292\ln(0/292)+0/208\ln(0/208)+0/375\ln(0/375)+0/125\ln(0/125)]=0/947$$

$$E_3=-0/721[0/308\ln(0/308)+0/385\ln(0/385)+0/231\ln(0/231)+0/077\ln(0/077)]=0/913$$

$$E_4=-0/721[0/227\ln(0/227)+0/068\ln(0/068)+0/682\ln(0/682)+0/023\ln(0/023)]=0/725$$

$$E_5=-0/721[0/292\ln(0/292)+0/375\ln(0/375)+0/208\ln(0/208)+0/125\ln(0/125)]=0/947$$

همان‌طور که گفتیم، K به این ترتیب به دست می‌آید: $k=\frac{1}{\ln(m)}=\frac{1}{\ln(4)}=0/721$

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
۰/۹۵۶	۰/۹۴۷	۰/۹۱۳	۰/۷۲۵	۰/۹۴۷

گام سوم:

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
۰/۹۵۶	۰/۹۴۷	۰/۹۱۳	۰/۶۲۵	۰/۹۴۷

$\rightarrow$

d_j	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	$\sum d_j$
$1-E_j$	۰/۰۴۴	۰/۰۵۳	۰/۰۸۷	۰/۳۷۵	۰/۰۵۳	۰/۶۱۲

گام چهارم:

$$w_j = \frac{d_j}{\sum d_j} \Rightarrow w_1 = \frac{۰/۰۴۴}{۰/۶۱۲} = ۰/۰۷۲ \quad w_2 = \frac{۰/۰۵۳}{۰/۶۱۲} = ۰/۰۸۷$$

$$w_3 = \frac{۰/۰۸۷}{۰/۶۱۲} = ۰/۱۴۲ \quad w_4 = \frac{۰/۳۷۵}{۰/۶۱۲} = ۰/۶۱۳ \quad w_5 = \frac{۰/۰۵۳}{۰/۶۱۲} = ۰/۰۸۷$$

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
۰/۰۷۲	۰/۰۸۷	۰/۱۴۲	۰/۶۱۳	۰/۰۸۷

توجه داشته باشید که $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ است. اگر تصمیم گیرنده هیچ اوزان قضاوتی (ذهنی) ارایه نکرده باشد همین اوزان را به عنوان اوزان شاخص‌ها در نظر می‌گیریم؛ اما اگر از سوی فرد تصمیم گیرنده اوزانی پیشنهاد شده باشد، به گام بعدی می‌رویم.

گام پنجم. در این قسمت، اوزان تعدیل شده را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید که تصمیم‌گیرنده به شاخص‌ها، وزن‌های ۰/۱ ، ۰/۲ ، ۰/۱۵ ، ۰/۳، و ۰/۲۵ را به ترتیب برای شاخص اول تا پنجم نسبت داده باشد. در این حالت، نخست $\sum \lambda_j w_j$ را به دست آوریم سپس اوزان تعدیل شده را محاسبه می‌کنیم (جدول ۱۲ـ۱).

جدول ۱۲ـ۱. نتایج گام پنجم

	۱	۲	۳	۴	۵	جمع
λ_j	۰/۱	۰/۲	۰/۱۵	۰/۳۰	۰/۲۵	۱
w_j	۰/۰۷۲	۰/۰۸۷	۰/۱۴۲	۰/۶۱۳	۰/۰۸۷	۱
$\lambda_j w_j$	۰/۰۰۷	۰/۰۱۷	۰/۰۲۱	۰/۱۸۴	۰/۰۲۲	۰/۲۵۱
w'_j	۰/۰۲۸	۰/۰۶۸	۰/۰۸۴	۰/۷۳۳	۰/۰۸۷	۱

برای نمونه، w'_1 و w'_2 این گونه محاسبه شده‌اند:

$$w'_1 = \frac{\lambda_1 w_1}{\sum \lambda_j w_j} = \frac{۰/۰۰۷}{۰/۲۵۱} = ۰/۰۲۸ \quad \text{و} \quad w'_2 = \frac{\lambda_2 w_2}{\sum \lambda_j w_j} = \frac{۰/۰۱۷}{۰/۲۵۱} = ۰/۰۶۸$$

مثال پایین صفحه:

$w_1 = 3w_2 \longleftarrow \frac{w_1}{w_2} = a_{12} = 3$ $\qquad \frac{w_2}{w_3} = 2 \longrightarrow w_2 = 2w_3$

$w_1 = 6w_3 \longleftarrow \frac{w_1}{w_3} = 6$ $\qquad w_1 + w_2 + w_3 = 1 \longrightarrow 3w_2 + w_2 + \frac{1}{2}w_2 = 1$

$\longrightarrow w_2 = \frac{1}{4.5} \,,\; w_1 = 3 \times \frac{1}{4.5}$

$,\; w_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4.5}$

روش دوم تعیین وزن معیارها:

روش مقایسات زوجی (بردار ویژه)

* قطر اصلی ۱ می‌شود و همچنین درایه‌های بالای قطر نسبت به پایین قطر اصلی معکوس یکدیگرند.
* در اکتر و پس شانون از ماتریس تصمیم گیری استفاده می‌شود و در روش مقایسات زوجی اصلاً از ماتریس تصمیم گیری استفاده نمی‌شود.
* اولین کار در ماتریس مقایسات زوجی سازگار یا ناسازگار بودن ماتریس است.

مثلاً $\frac{a_{12}}{2}$ $\quad \frac{a_{2n}}{5}$ $\quad \frac{a_{1n}}{8}$ $\longleftarrow$ درصورتیکه این باید ۱۰ باشه وقتی نیست یعنی ناسازگاره

شرط سازگاری ماتریس مقایسات زوجی $\Rightarrow a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj} \;;\; \forall k$

ماتریس مقایسه زوجی

محاسبه وزن‌ها:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{cc} w_1 & 1 \\ w_2 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ w_n & n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{cc} w_1 & 1 \\ w_2 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ w_n & n \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \;,\; a_{ji} = \frac{w_j}{w_i} \;,\; a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj} \Rightarrow \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k} \times \frac{w_k}{w_j} \;,\; \forall k$$

* نسبت درجه اهمیت وزن شاخص‌ها باید با چیزی که تصمیم گیرنده گفته برابر باشد. $\frac{w_1}{w_2} = a_{12}$: باید

تشکیل ماتریس مقایسه زوجی

شرح	تعریف	درجه اهمیت
دو عنصر، اهمیت یکسانی داشته باشند.	اهمیت یکسان	۱
یک عنصر نسبت به عنصر دیگر، نسبتاً برتر باشد.	نسبتاً برتر	۳
یک عنصر نسبت به عنصر دیگر، زیاد برتر باشد.	برتری زیاد	۵
یک عنصر به عنصر دیگر، بسیار زیاد برتر باشد.	برتری بسیار زیاد	۷
یک عنصر به عنصر دیگر، فوق‌العاده زیاد برتر باشد.	برتری فوق‌العاده زیاد	۹
	ارزش‌های بینابین در قضاوت‌ها	۲،۴،۶،۸

هنگامی که عنصر i با j مقایسه می‌شود، یکی از اعداد بالا به آن اختصاص می‌یابد. در مقایسه‌ی عنصر j با i، مقدار معکوس آن عدد اختصاص می‌یابد $\left(x_{ji} = \dfrac{1}{x_{ij}}\right)$

۲۵

شرکتی می‌خواهد ماشینی بخرد که سازندگان آن سه کشور روسیه (R)، آلمان (G)، و انگلیس (E) هستند. شاخص‌های اولیه‌ی تصمیم‌گیری عبارتند از: ۱. ظرفیت، ۲. خدمات پس از فروش، ۳. قیمت، ۴. اندازه، ۵. قابلیت نگهداری و تعمیر، ۶. هزینه‌ی تعمیرات، ۷. دوام، و ۸ فرایند تولید. پس از مطالعه‌ی دقیق این شاخص‌ها و غربال‌سازی آن‌ها، چهار شاخص ظرفیت، خدمات پس از فروش، قیمت و فرایند تولید، به عنوان شاخص مهم انتخاب شدند.

$$\text{تعداد مقایسات زوجی} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

برای نمونه، تصمیم‌گیرنده ظرفیت را نسبت به خدمات (پس از فروش)، مقایسه کرده و به این نتیجه رسیده که شاخص ظرفیت دستگاه، برتری نسبتاً کمی، بر شاخص خدمات (پس از فروش) دارد (عدد ۲). همچنین شاخص ظرفیت دستگاه، بر قیمت دستگاه نسبتاً برتر است (عدد ۳) و ... .

- ماتریس سازگار: اگر رابطه‌ی $a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj}$; $\forall K$ برای تمام K ها برقرار باشد، ماتریس مقایسه زوجی را خواهیم داشت که تمام سطرها و ستون های آن نسبت به هم وابستگی خطی دارند، به این ماتریس سازگار گویند و از خاصیت های مهم آن این است که می توان مقادیر معین برای وزن ها تعیین نمود به گونه ای که نسبت آنها دقیقاً برابر اعداد داخل جدول گردد.

- مثال:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} w_1=0.6 & w_2=0.2 & w_3=0.1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} w_1=0.6 \; 1 \\ w_2=0.2 \; 2 \\ w_3=0.1 \; 3 \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

« $a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj}$ »

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "6"'] & 2 \arrow[r, "2"] & 3
\end{tikzcd}
$$

۲۶

برای نمونه، اگر معیار مورد نظر شیرینی باشد و بخواهیم شیرینی عسل، شکر و شیره‌ی ملاس را با هم مقایسه کنیم و شیرینی عسل، ۵ برابر شیرینی شکر، باشد و شیرینی شکر ۲ برابر شیرینی شیره‌ی ملاس باشد؛ آنگاه عسل ۱۰ بار از ملاس شیرین‌تر است. در این مثال، اگر گفته شود شیرینی عسل، ۴ برابر شیرینی شیره‌ی ملاس است قضاوت‌ها با هم سازگاری ندارند و نمی‌توان به نتایجی که از این مقایسات به دست خواهد آمد اعتماد کرد.

ناسازگاری ماتریس مقایسات زوجی:

← بسیاری از اوقات، در مسائل دنیای واقعی، ممکن است برای برخی عناصر ماتریس مقایسات زوجی، داشته باشیم: $a_{ij} \neq a_{ik} \times a_{kj}$. در این حالت، گویند که ماتریس ناسازگار است. و از ویژگی های چنین ماتریسی این است که مقادیر برای وزن ها ثابت گردد که نسبت آنها دقیقاً اعداد داخل ماتریس نباشد.

- مثال: ماتریس سازگار نیست و در جواب نسبت ها، خطا داریم.

$$
\begin{array}{ll|c}
 & & \begin{array}{ccc} 0.1235 & 0.6559 & 0.2206 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \\
w_1 = 0.1235 & 1 & \multirow{3}{*}{$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$} \\
w_2 = 0.6559 & 2 & \\
w_3 = 0.2206 & 3 &
\end{array}
$$

۲۷

روش های محاسبه وزن معیارها با کمترین میزان ناسازگاری

دسته اول: روش های دقیق محاسبه وزن معیارها

۱- روش پایه برای حداقل کردن خطا
۲- روش مقدار ویژه و بردار ویژه

دسته دوم: روش های هیورستیک محاسبه وزن معیارها

۱- روش مجموع سطری
۲- روش مجموع ستونی
۳- روش میانگین حسابی
۴- روش میانگین هندسی

۲۸

دسته اول:

روش های دقیق محاسبه وزن معیارها

*به توان ۲ می رسانیم تا اثر + و - هم دیگر را خنثی نکند.

روش اول:

روش پایه (درجه دو ساده) برای حداقل کردن خطا:

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \Rightarrow a_{ij} \cdot w_j - w_i = 0 \\ a_{ij} \neq \frac{w_i}{w_j} \Rightarrow a_{ij} w_j - w_i \neq 0 \quad \text{یا} \quad a_{ij} w_j \neq w_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot w_j - w_i)^2 \\ St: \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \quad ; \quad w_j > 0 \,, \; j = 1, \dots, n \end{cases}$$

ماتریس در بردار — عدد در بردار

فقط در صورتیکه: مقدار ویژه = بردار ویژه

روش دوم: مقدار ویژه و بردار ویژه

یادآوری از جبر خطی

$$AW = \lambda W$$

$$AW - \lambda W = 0$$

$$(A - \lambda I)W = 0$$

چون گفتیم جمع W ها باید ۱ باشد در نتیجه W ها خالی مخالف صفر است. $\rightarrow A - \lambda I = 0$

نمی‌توان یک ماتریس را از یک عدد کم کرد به همین دلیل آن عدد را در بردار I ضرب می‌کنیم.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 4 \times 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$ مقادیر ویژه

۲۹

☆ جمع λ ها برابر جمع مقادیر عناصر قطر اصلی ماتریس است.

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i =$ جمع مقادیر قطر اصلی ماتریس A

* هر بار یکی از λ ها را جایگذاری می‌کنیم.

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4w_1 + 4w_2 = 0 \\ 3w_1 - 3w_2 = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 6 \Rightarrow \begin{array}{l} w_1 = \\ w_2 = \end{array} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{array}{l} w_1 = \\ w_2 = \end{array} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$ (حل n معادله n مجهول که دشوار است!)

بردارهای ویژه

اگر $\lambda_{max} = n$ باشد چون جمع مقادیر اصلی $= \sum \lambda_i \; (n)$ $\Leftarrow$ بقیه λ ها صفر بوده‌اند.

if: $\lambda_{max} = n \rightarrow$ ماتریس سازگار

if $\lambda_{max} \neq n \rightarrow$ " ناسازگار

- اثبات می گردد که اگر مقدار ویژه یک ماتریس مقایسات زوجی برابر n (مرتبه ماتریس) باشد، بردار ویژه وابسته به آن، همان بردار وزن معیارها خواهد بود.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{cc} w_1 & 1 \\ w_2 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ w_n & n \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = n \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n \end{cases}$$

$$A \times W = n \times W$$

- ماتریس مقایسه زوجی سازگار، به گونه ای است که همواره بزرگترین مقدار ویژه آن، مساوی با n و مابقی مقادیر ویژه، مساوی با صفر می باشد.

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_n \\ 0, & 0, & \dots, & n \end{array} \qquad \lambda_{max} = n$$

- هنگامی که ماتریس مقایسات زوجی، به سمت ناسازگاری برود، بزرگترین مقدار ویژه آن یعنی λ_{max} از n بزرگتر شده و مابقی مقادیر ویژه حول و حوش صفر، مقدار خواهند گرفت.

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_n \\ \updownarrow 0, & \updownarrow 0, & \dots, & \lambda_{max} > n \end{array}$$

- اثبات می گردد که در یک ماتریس مقایسات زوجی ناسازگار، اگر بزرگترین مقدار ویژه را λ_{max} بنامیم، بردار ویژه ای که از این λ_{max} بدست خواهد آمد، بردار وزن معیارها با کمترین خطا خواهد بود. $A \times W = \lambda_{max} \times W$

مشکلات استفاده از راه حل های قبلی ← ۱: حال ندارم مقادیر ویژه و بردار ویژه را حساب کنم.
← ۲: حال ندارم چک کنم آیا ماتریس مقایسه زوجی سازگار هست یا نیست

راه حل: راه میانبر ← محاسبه بردار وزن به روش هیوریستیک (W) ← $AW = \lambda W$
$\Sigma\lambda \rightarrow \lambda_{max} - n$

دسته دوم:

روش های هیورستیک محاسبه وزن معیارها

۳۱

۱) روش مجموع سطری: در این روش، ابتدا مجموع عناصر هر سطر ماتریس، محاسبه شده تا یک بردار ستون حاصل گردد. سپس با تقسیم هر یک از عناصر این بردار بر مجموع آن ها، آن را نرمالیزه می کنیم. بردار حاصله، بردار وزن معیارها خواهد بود.

- مثال:

همه جمع می کنیم هرکدام تقسیم بر جمع آنها می کنیم.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} w_1\ 1 \\ w_2\ 2 \\ w_3\ 3 \\ w_4\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 + & 5 + & 6 + & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} = 19 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 19 \\ 11.2 \\ 5.42 \\ 1.56 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0.51 \\ 0.3 \\ 0.15 \\ 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

چون اعدادش ۰ و ۱ نیست و همچنین جمع آنها ۱ نیست
⇐ نمی توان آن را به عنوان بردار وزن شناخت.

۲) روش مجموع ستون: در این روش، ابتدا مجموع عناصر هر ستون محاسبه شده تا یک بردار سطری حاصل گردد. تک تک عناصر این بردار را معکوس نموده و آن را نرمالیزه می نماییم. بردار حاصل، بردار وزن معیارها خواهد بود.

- مثال:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array}
\left[\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{5} & 1 & 4 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right]$$

برتری همه معیارها نسبت به ۱ — برتری همه معیارها نسبت به معیار ۲

$$\begin{bmatrix} 1.51 & 6.43 & 11.25 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{1.51}} \begin{bmatrix} 0.66 & 0.16 & 0.09 & 0.06 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0.68 & 0.21 & 0.12 & 0.08 \end{bmatrix}$$

۳) روش میانگین حسابی: در این روش، ابتدا عناصر هر ستون بر مجموع عناصر آن ستون تقسیم می شوند تا ماتریس نرمالیزه حاصل گردد، سپس میانگین عناصر هر سطر محاسبه می گردد تا یک بردار ستون حاصل شود. عناصر این بردار، وزن معیارها خواهند بود. - مثال:

ابتدا نرمال کرده

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0.66 & 0.78 & 0.53 & 0.39 \\ 0.13 & 0.16 & 0.36 & 0.33 \\ 0.11 & 0.04 & 0.09 & 0.22 \\ 0.09 & 0.03 & 0.02 & 0.06 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.59 \\ 0.245 \\ 0.115 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

۴) روش میانگین هندسی: در این روش، میانگین هندسی عناصر هر سطر محاسبه شده تا یک بردار ستونی بدست آید. بردار حاصل نرمالیزه می‌گردد تا بردار وزن معیارها حاصل شود. مثال:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt[4]{1\times5\times6\times7} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{5}\times1\times4\times6} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\times1\times4} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\times1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3.807 \\ 1.48 \\ 0.639 \\ 0.278 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.24 \\ 0.1 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{13}}$

شرط جمع یک شدن را ندارد ← $\frac{w_i}{\sum w_i}$

_ اما کدام روش بهتر است؟ ★ از نظر آماری، روش میانگین هندسی از همه روش‌ها دقیق‌تر است.

★ از نظر کاربردی، روش میانگین حسابی از همه روش‌ها بهتر است.

محاسبه نرخ ناسازگاری

اختلاف بین $\frac{w_i}{w_j}$ و a_{ij} ، تا چه مقداری برای ما قابل قبول است؟

سازگار $(n\times n)$: $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$

$\lambda_1 = 0 ,\ \lambda_2 = 0 ,\ \ldots\ ,\ \lambda_n = n = \lambda_{max}$

ناسازگار $(n\times n)$: $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$

$\lambda_1 \gtrless 0 ,\ \lambda_2 \gtrless 0 ,\ \ldots\ ,\ \lambda_{max} > n$

اثبات می گردد که هر قدر ناسازگاری ماتریس بیشتر باشد ، اختلاف λ_{max} و n ($\lambda_{max} - n$) نیز بزرگتر خواهد شد ، یعنی هر چه اختلاف $\frac{w_i}{w_j}$ و a_{ij} بیشتر باشد.

۳۴

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{array} \\
\begin{array}{c} w_1\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\
\frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\
\vdots & & \ddots & \\
\frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n}
\end{bmatrix}_{n\times n}
\end{array}
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} w_1 + w_1 + \cdots + w_1 \\ w_2 + w_2 + \cdots + w_2 \\ \vdots \\ \\ \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} n w_1 \\ n w_2 \\ \vdots \\ n w_n \end{bmatrix}
= n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}
$$

$\sum \lambda_i =$ جمع مقادیر قطر اصلی n.

$Aw = nw$, $n \to \lambda$

$Aw = \lambda w$, $\lambda = n$

$A - \lambda I = 0 \Rightarrow$ اگر $n = \lambda_{max}$ ماتریس A سازگار است.

$$(\text{Inconsistency Index})\ II = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} \leftarrow \lambda_{max} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j = n$$

$$(\text{Inconsistency Ratio})\ IR = \frac{II}{IIR}$$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱ ...
IIR	۰	۰	۰٫۵۸	۰٫۹	۱٫۱۲	۱٫۲۴	۱٫۳۲	۱٫۴۱	۱٫۴۵	۱٫۴۵	۱٫۴۵

قابل قبول است : $IR < 0.1$

طریقه بدست آمدن جدول :

تولید تصادفی ماتریس های $n\times n$ و میانگین گرفتن از II ها

$\frac{II}{IIR} < 0.1 \longrightarrow$ قابل قبول

$\frac{II}{IIR} > 0.1 \longrightarrow$ غیر قابل قبول

خلاصه روش محاسبه نرخ ناسازگاری (روش آقای ساعتی):

برای تعیین نسبت سازگاری یک ماتریس مقایسه زوجی $n \times n$، به ترتیب زیر عمل می نماییم:

۱) تمام مقادیر ویژه ماتریس را محاسبه کرده، از میان آنها بزرگترین شان را λ_{max} می نامیم.

۲) مقدار II (شاخص ناسازگاری) را از رابطه $II = \frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$ محاسبه نمایید.

۳) با استفاده از جدول IIR، نسبت ناسازگاری را با کمک رابطه $IR = \frac{II}{IIR}$ بدست آورید.

۴) هرگاه که IR از ۰٫۱ کوچکتر باشد، ماتریس مقایسه زوجی را سازگار فرض می کنیم، درغیر این صورت باید روش محاسبه وزن معیارها را تغییر دهیم. (لذا مُثُل محاسبات در این روش همچنان وجود دارد.)

۳۵

روش میانبر

مثال: نسبت ناسازگاری ماتریس مقایسات زوجی A را بدست آورید (با روش پیشنهادی آقای ساعتی)

قدم یک) با استفاده از یکی از روشهای هیوریستیک، وزن معیارها را بدست آورید.

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1/2 & 1 & 6 \\ 1/8 & 1/6 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{\text{محاسبه } w} \begin{bmatrix} 0.593 \\ 0.341 \\ 0.066 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

با روش مجموع سطری

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 7.5 \\ 1.29 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{محاسبه } w} \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.37 \\ 0.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{19.79}$$

قدم دو) به کمک رابطه‌ی $A.W=\lambda_{max}.W$ مقادیر λ_{max} را تخمین می‌زنیم. اگر ماتریس کاملاً سازگار بود، آنگاه $\lambda_{max}=n$ بدست می‌آمد اما چون ماتریس سازگار نیست و وزن‌ها دقیق نیستند لذا یک λ_{max} واحد نخواهیم داشت.

$$A.W=\lambda_{max}.W$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 6 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.593 \\ 0.341 \\ 0.066 \end{pmatrix} = \lambda_{max}\begin{pmatrix} 0.593 \\ 0.341 \\ 0.066 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.803 \\ 1.034 \\ 0.197 \end{pmatrix}$$

36

$$A.w=\lambda.w \longrightarrow \text{"} \underbrace{\times \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.37 \\ 0.06 \end{bmatrix}}_{\text{ضرب می‌کنیم}} = \lambda\begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.37 \\ 0.06 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1=\dfrac{1.803}{0.55} \\ \lambda_2=\dfrac{1.034}{0.37} \\ \lambda_3=\dfrac{0.197}{0.06} \end{array}\right\} \longrightarrow \lambda_{max}=3.019$$

زمانیکه λ_{max} بیشتر از n هست ناسازگاره

$$II=\frac{3.019-3}{3-1}=0.01$$

$$\underset{\text{ماتریس } 3\times3}{IIR=0.58} \longrightarrow \frac{II}{IIR}=\frac{0.01}{0.58}=0.017<0.1 \checkmark$$

باید: $\lambda_{max}=n$ $\longrightarrow$ دراینجا: $\lambda_{max}>n$

قدم سه) میانگین حسابی مقادیر λ_{max} را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} \lambda^1_{max}=\dfrac{1.803}{0.593}=3.04 \\ \lambda^2_{max}=\dfrac{1.034}{0.341}=3.032 \\ \lambda^3_{max}=\dfrac{0.197}{0.066}=2.985 \end{cases} \Longrightarrow \bar{\lambda}_{max}=\frac{3.04+3.032+2.985}{3}=3.019$$

قدم چهار) به کمک $\bar{\lambda}_{max}$ مقادیر II و IR را محاسبه می‌کنیم.

$$II=\frac{\bar{\lambda}_{max}-n}{n-1}=\frac{3.019-3}{3-1}=0.01,\quad IR=\frac{II}{IIR}=\frac{0.01}{0.58}=0.017<0.1$$

ماتریس سازگار است.

نکته مهم:

بنا به تجربه‌ی نگارنده، روش آنتروپی به شاخص‌ها وزن‌های دور از انتظاری می‌دهد. روش *AHP* (که جلوتر گفته می‌شود) وزن‌های معقول‌تری برای شاخص‌ها نسبت به آنتروپی ارایه می‌کند؛ زیرا اساس کارش نظرات تصمیم‌گیرنده (و نه ماتریس تصمیم‌گیری) است.

۳۷

مدل‌های MADM به دو بخش کلی تقسیم می‌شوند:

۱- مدل‌های جبرانی (Compensatory Method)

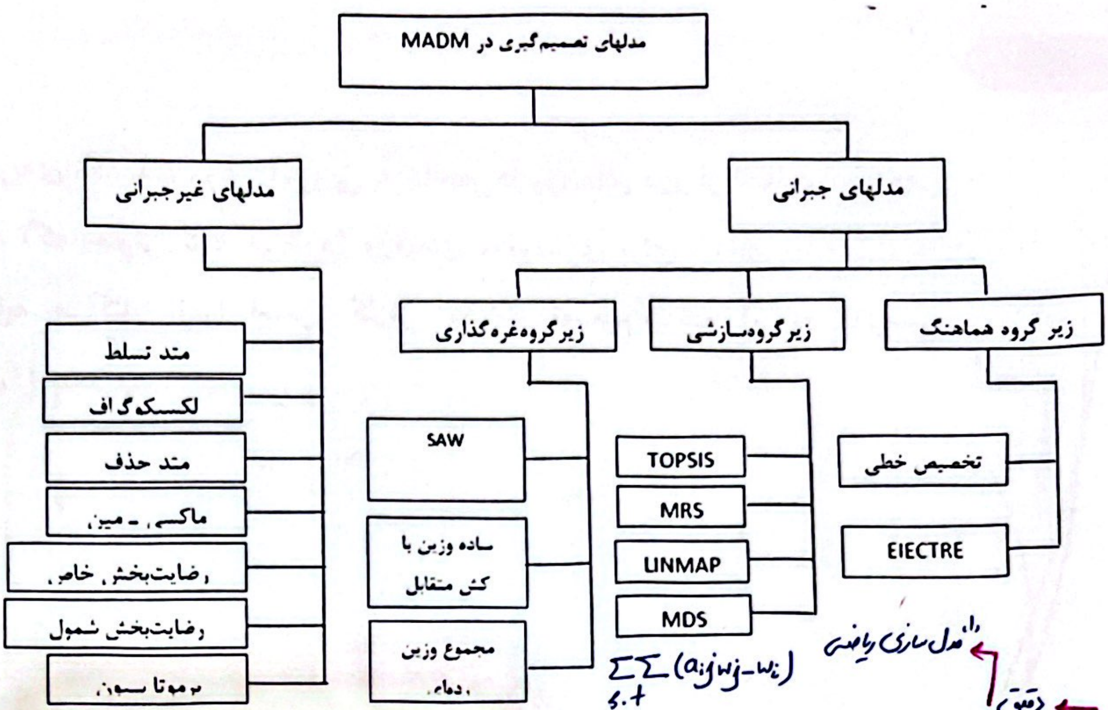
۲- مدل‌های غیرجبرانی (Noncompensatory Method)

۱- مدل‌های جبرانی:

آن بخش از مدل‌های MADM هستند که تغییر در یک شاخص توسط تغییر (در جهت مخالف) در شاخص دیگر جبران می‌شود. از جمله روش‌های جبرانی می‌توان به EIECTRE, Topsis, SAW تخصیص خطی، AHP اشاره کرد.

۲- مدل‌های غیرجبرانی:

آن بخش از مدلهای MADM هستند که تغییر در یک شاخص توسط شاخص دیگر جبران نمی‌شود. به عبارت دیگر در این مدلها داد و ستدی بین شاخص‌ها صورت نمی‌گیرد. شامل روش‌هایی مانند: روش تسلط، لکسیکو گراف، حذف، ماکسی مین، ماکسی ماکس، رضایت‌بخش خاص و رضایت بخش شمول.



$\sum\sum (a_{ij} w_j - w_i)$
s.t
$\sum w_j = 1$
$w_j \geq 0$

روش
- دقیق
  - ۱) مدل‌سازی ریاضی
  - ۲) مقدار ویژه و بردار ویژه → $\lambda_{max} = n$ و بقیه $\lambda = 0$
- ابتکاری

$$
A = \begin{array}{cc|c}
 & & \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\
\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & & \\ 1/3 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

if: $a_{12} = 3$
if: $a_{23} = 2$
$\Rightarrow a_{13} = 6$

$a_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j} \longrightarrow a_{ij} w_j - w_i = 0$

اوزان معیارها
- قضاوت ذهنی
- آنتروپی شانون
- مقایسات زوجی

$Aw = \lambda w \longrightarrow Aw - \lambda w = 0$

بردار ویژه (w)، مقدار ویژه (λ)

$(A - \lambda I) w = 0$

$|A - \lambda I| = 0 \longrightarrow$ مقادیر ویژه λ $\longrightarrow$ بردارهای ویژه متناظر با هر مقدار ویژه

$\sum \lambda =$ جمع اعداد قطر اصلی ماتریس A $= n$
- $\longrightarrow \lambda_{max} = n$
- $\longrightarrow$ مابقی λها $= 0$ $\longrightarrow$ بردار ویژه بدست آمده برای ماتریس A، بهترین بردار وزن ممکن است.

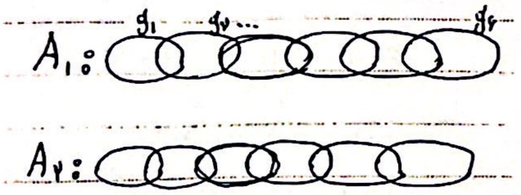
مدل های تصمیم گیری

MADM

در این مدل‌ها هدف انتخاب یک گزینه از بین گزینه‌های موجود است.

مدل‌های MADM به دو بخش کلی تقسیم می‌شوند:

1. مدل‌های جبرانی (Compensatory Method)
2. مدل‌های غیرجبرانی (Noncompensatory Method)

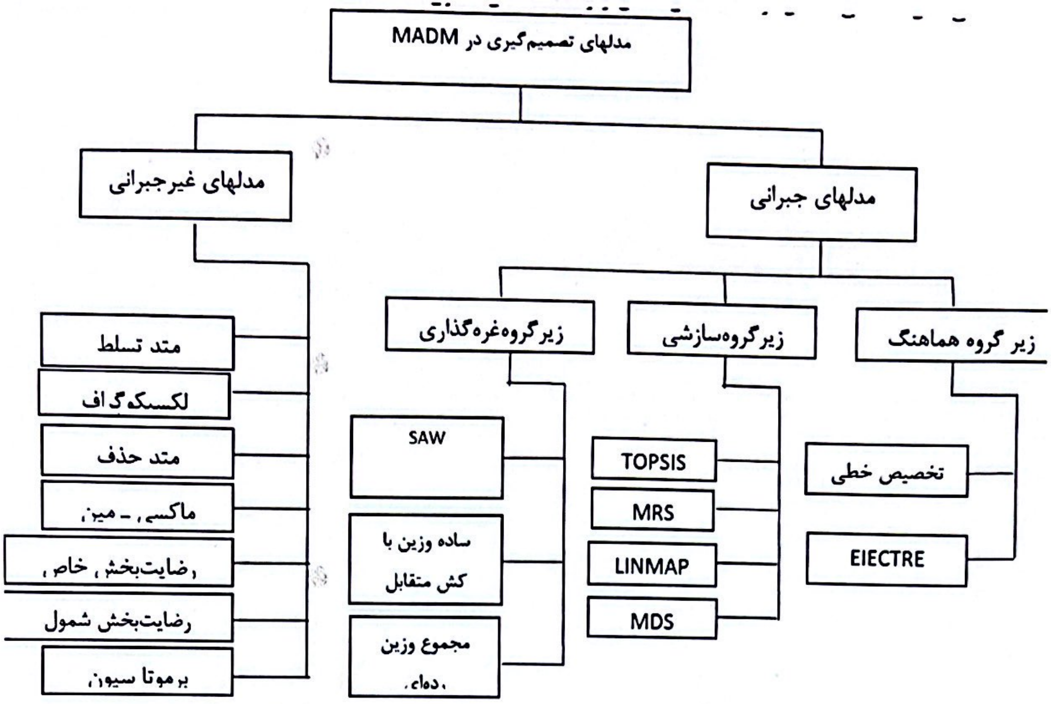


۱- مدل‌های جبرانی:

آن بخش از مدل‌های MADM هستند که تغییر در یک شاخص توسط تغییر (در جهت مخالف) در شاخص دیگر جبران می‌شود. از جمله روش‌های جبرانی می‌توان به EIECTRE, Topsis, SAW تخصیص خطی، AHP اشاره کرد.

۲- مدل‌های غیرجبرانی:

آن بخش از مدلهای MADM هستند که تغییر در یک شاخص توسط شاخص دیگر جبران نمی‌شود. به عبارت دیگر در این مدل‌ها داد و ستدی بین شاخص‌ها صورت نمی‌گیرد. شامل روش‌هایی مانند: روش تسلط، لکسیکو گراف، حذف، ماکسی مین، ماکسی ماکس، رضایت‌بخش خاص و رضایت بخش شمول.



شکل (۲) (مدل‌های MADM با توجه به طبقه‌بندی جبرانی و غیرجبرانی)

مدل های غیر جبرانی

{Ranking ✓
{Selection

روش permutation (جایگشت) ← روش جایگشت برای رتبه‌بندی آلترناتیوها استفاده می‌شود.

در این روش تعداد حالات رتبه‌بندی گزینه‌ها مشخص می‌شود و هر رتبه‌بندی مورد آزمایش قرار می‌گیرد و نهایتا مناسب‌ترین آنها برای رتبه‌بندی انتخاب می‌گردد. مراحل این روش عبارتند از:

1. **تعیین تعداد حالات رتبه‌بندی !n (n تعداد گزینه‌ها)**
2. **بررسی هر یک از حالات توسط ماتریس مقایسه زوجی و محاسبه R (درایه ij‌ام در این ماتریس‌ها برابر مجموع اوزان شاخص‌هایی است که به ازای آنها گزینه iام بهتر یا مساوی گزینه jام باشد.)**

(مجموع درایه‌های پایین قطر اصلی) − (مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی) = R

انتخاب بهترین حالت رتبه‌بندی براساس بیشترین مقدار R.

Permutation محاسبه: جمع مقادیر پایین مثلث − جمع مقادیر بالا مثلث

مثال:

$$W = [0/2 \quad 0/5 \quad 0/3]$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \overset{+}{C}_1 & \overset{+}{C}_2 & \overset{-}{C}_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A1 \\ A2 \\ A3 \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 22 & 12 \\ 5 & 4 & 8 \\ 11 & 35 & 14 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} - & 0/7 & 0/3 \\ 0/3 & - & 0/3 \\ 0/7 & 0/7 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

0/2+0/5

$$R1 = -0/4$$

$\boxed{1 > 2 > 3}$ ←

$1 > 3 > 2$

$2 > 3 > 1$

$3 > 2 > 1$

$3 > 1 > 2$

$2 > 1 > 3$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ۳ & ۲ & ۱ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۳ \\ ۲ \\ ۱ \end{array} & \begin{bmatrix} - & ۰٫۷ & ۰٫۷ \\ ۰٫۳ & - & ۰٫۳ \\ ۰٫۳ & ۰٫۷ & - \end{bmatrix} \end{array}$$

R = ۰٫۶

تعداد حالات مورد بررسی ۶ = !۳ = !m

۱-۲-۳
۲-۱-۳
۲-۳-۱
۱-۳-۲
۳-۲-۱
۳-۱-۲

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ۱ & ۲ & ۳ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array} & \begin{bmatrix} \square & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

۱ > ۲ > ۳

□ میزان برتری ۱ نسبت به ۲

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ۲ & ۱ & ۳ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{array} & \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ۲ & ۳ & ۱ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۲ \\ ۳ \\ ۱ \end{array} & \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} - & 0/7 & 0/3 \\ 0/3 & - & 0/3 \\ 0/7 & 0/7 & - \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} - & 0/3 & 0/7 \\ 0/7 & - & 0/7 \\ 0/3 & 0/3 & - \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} - & 0/3 & 0/3 \\ 0/7 & - & 0/7 \\ 0/7 & 0/3 & - \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} - & 0/7 & 0/7 \\ 0/3 & - & 0/3 \\ 0/3 & 0/7 & - \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} - & 0/7 & 0/7 \\ 0/3 & - & 0/7 \\ 0/3 & 0/3 & - \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} - & 0/3 & 0/3 \\ 0/7 & - & 0/3 \\ 0/7 & 0/7 & - \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll} R1=-0/4 & R4=0/4 \\ R2=0/4 & R5=1/2 \\ R3=-0/4 & R6=-1/2 \end{array}
$$

$$
Max\{R1,.....,R6\}=1/2 \rightarrow A3>A1>A2
$$

روش تسلط:

گزینه Ai را بر گزینه Aj مسلط گوییم هرگاه حداقل در یک شاخص بهتر و در بقیه شاخص‌ها برابر گزینه Aj باشد.

مثال: ماتریس تصمیم‌گیری زیر را در نظر بگیرید:

گزینه A۱ بر A۲ مسلط است یا A۲ تحت تسلط A۱ است.

گزینه A۳ بر A۲ مسلط است یا A۲ تحت تسلط A۳ است.

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} + & + & - \end{array} \\ \begin{array}{c} A1 \\ A2 \\ A3 \end{array} & \begin{bmatrix} 100 & 50 & 30 \\ 80 & 25 & 30 \\ 110 & 25 & 28 \end{bmatrix} \end{array}
$$

روش تسلط یک روش فیلترینگ اولیه محسوب می‌شود.

روش حذف:

در این روش ابتدا توسط تصمیم گیرنده یک سطح رضایتمندی در هر شاخص تعیین می‌شود. سپس یک شاخص مشخص در نظر گرفته می‌شود و هر گزینه‌ای که سطح حداقل رضایتمندی در آن شاخص را تأمین نکند حذف خواهد شد و سپس شاخص دیگری را در نظر گرفته و این فرآیند ادامه می‌یابد تا نهایتا یک گزینه انتخاب گردد.

مثال: سطح رضایتمندی DM [۱۰۰ ۴۵ ۳۰]

$$\begin{array}{c} \\ A1 \\ A2 \\ A3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underset{+}{C1} & \underset{+}{C2} & \underset{-}{C3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 50 & 30 \\ 80 & 25 & 30 \\ 110 & 25 & 28 \end{bmatrix} \end{array}$$

اگر A۲ حتی در دو معیار بعدی مقدار بالاتری داشت باز هم نمی توانست بد بودنش در معیار C۱ را جبران کند.

در مورد شاخص اول گزینه A۲ حذف می‌شود در مورد شاخص دوم گزینه A۳ حذف می‌شود و فقط گزینه A۱ باقی می‌ماند که در شاخص سوم نیز سطح حداقل رضایتمندی را تأمین می‌کند.

روش لکسیکوگراف

در این روش ابتدا شاخص‌ها توسط تصمیم گیرنده رتبه‌بندی می‌شود(براساس درجه اهمیت)سپس از نظر شاخص با درجه اهمیت بالاتر گزینه ها مقایسه می‌شوند و بهترین آنها انتخاب می‌گردد و در صورتی که با این مقایسه یک گزینه تفکیک نشد گزینه‌های باقی مانده از نظر شاخص با درجه اهمیت دوم مقایسه می‌شوند و گزینه برتر انتخاب می‌گردد و این فرایند تا انتخاب یک گزینه ادامه می‌یابد.

روش رضایت بخش شمول: (conjunctive)

در این روش ابتدا یک سطح حداقل رضایتمندی توسط تصمیم گیرنده مشخص می‌شود سپس گزینه‌ها از نظر هر شاخص با سطح رضایتمندی مقایسه می‌شوند و گزینه بهینه گزینه‌ای است که در **همه شاخص‌ها** سطح حداقل را تأمین نماید.

مثال ساختن سد را در نظر بگیرید:

استاندارد تعیین شده از طرف DM به شرح ذیل است:

$$b = \{\underset{x_1}{۳/۱}\ ,\ \underset{x_2}{\text{زیاد}}\ ,\ \underset{x_3}{\text{کم}}\ ,\ \underset{x_4}{۲۴۰۰۰}\ ,\ \underset{x_5}{\text{خیلی زیاد}}\}$$

$D =$

	x_1 هزینه (-)	x_2 استحکام (+)	x_3 وجهه مالی (+)	x_4 ظرفیت (+)	x_5 سختی کار (-)
A_1	۳	متوسط	خیلی زیاد	۲۴۰۰۰	خیلی زیاد
A_2	۲/۱	زیاد	متوسط	۲۵۰۰۰	زیاد
A_3	۵/۱	خیلی زیاد	کم	۳۲۰۰۰	کم

تحلیل:

- A1 جون شرط اول راندارد حذف می شود.
- A3 حذف می شود.
- A2 مورد پذیرش قرار می گیرد.

نکته: در این تکنیک تصمیم گیری هیچ نیازی به کمی کردن شاخص های کیفی و scale less نداریم.

* استاندارد تعیین شده در معیارهای منفی، حداکثر است و در معیارهای مثبت، حداقل است.

* در روش شمول همهٔ آلترناتیوها باید استانداردها را رعایت کنند.

- مثال: فرض کنید یک کالج، اعضای هیئت علمی خود را براساس چهار ویژگی زیر انتخاب می‌کند: ۱) توانایی‌های آکادمیک ۲) توانایی های فکری ۳) روابط اجتماعی ۴) شخصیت. کاندیداها برحسب این عوامل امتیازدهی می‌شوند. کالج مایل است تنها $\frac{۱}{۵}$ کاندیداها پذیرش شده و ۸۰٪ آنها رد شوند. با فرض اینکه حد پذیرش برای تمام معیارها یکسان تعریف شود. مقدار این حد، چقدر باید باشد؟

P_c: احتمال اینکه یک کاندیدای انتخاب شده، بالاتر از حد پذیرش قرار گیرد. $\qquad P_c = (1 - \pi)^{\frac{1}{n}}$

π: نسبتی از گزینه‌ها که باید کنار گذاشته شوند. $\qquad n$: تعداد معیار $\qquad$ یا $\pi = 1 - P_c^n$

$P_c = (1 - ۰/۸)^{\frac{1}{۴}} = ۰/۶۷ \rightarrow$ ۱ - ۰/۶۷ = ۰/۳۳

$$\begin{array}{c|cccc|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ A_1 & \underbrace{0 < \ < 1}_{P_c} & \underbrace{0 < \ < 1}_{P_c} & \underbrace{0 < \ < 1}_{P_c} & \underbrace{0 < \ < 1}_{P_c} \\ A_2 & & & & \\ A_3 & & & & \\ A_4 & & & & \\ A_5 & & & & \end{array}$$

احتمال رد یک گزینه $\pi = 1 - P_c^n \rightarrow P_c = \sqrt[n]{1 - \pi} = \sqrt[4]{1 - ۰/۸}$

حد پذیرش ← ۰/۸

روش رضایت بخش خاص:

در این روش نیز ابتدا یک سطح حداقل رضایتمندی در هر شاخص توسط تصمیم گیرنده مشخص می‌گردد. سپس گزینه‌ها از نظر هر شاخص با این سطح مقایسه می‌شوند و گزینه برتر گزینه‌ای است که حداقل در یکی از شاخص‌ها سطح حداقل را ارضا کند در واقع انتخاب در این روش بر مبنای خاص بودن است و تنها گزینه رد می‌شود که در هیچ یک از شاخص‌ها سطح حداقل را تأمین ننماید.

سطح حداقل رضایتمندی

$$\begin{array}{ccc} C1 & C2 & C3 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 100 & 45 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} A1 \\ A2 \\ A3 \end{array} \begin{bmatrix} 100 & 50 & 30 \\ 80 & 25 & 30 \\ 110 & 25 & 28 \end{bmatrix}$$

در مثال قبل: A۱ به ازای C۱ و C۲ و C۳ سطح حداقل را تأمین می‌کند.

A۲ به ازای C۳ سطح حداقل را تأمین می‌کند.

A۳ به ازای C۱ سطح حداقل را تأمین می‌کند.

پس هر سه گزینه A۱ و A۲ و A۳ با این روش قابل قبول هستند.

* درصورتی یک گزینه رد خواهد شد که استانداردها رو توی هیچکدام از موارد رعایت نکرده باشد.

روش ماکس ـ مین:

این روش معمولا در زمانی به کار گرفته می‌شود که با یک تصمیم گیرنده محتاط روبه‌رو باشیم در این روش ابتدا باید ماتریس تصمیم‌گیری را با روش بی‌مقیاس سازی خطی بی‌مقیاس شود تا اثر مثبت و منفی شاخص‌ها از بین رود. بی‌مقیاس سازی خطی

در این روش، عملکرد یک گزینه، به ضعیف‌ترین معیار آن بستگی داشته و در مقایسه گزینه‌ها با یکدیگر گزینه‌ای که دارای قوی‌ترین معیار ضعیف باشد، برتر خواهد بود.

* اگر همشون + باشند ماکس مین و اگر همشون ـ باشند مینی ماکس (باید همهٔ معیارها + یا ـ باشند)

* ماکس مین ← محتاط ← انتخاب بهترین بدترین‌ها

* ماکس ماکس ← ریسک پذیر ← انتخاب بهترین بهترین‌ها

Scanned with CamScanner

قدم اول: معیارهای کلامی را در ماتریس تصمیم گیری به معیارهای عددی تبدیل نمایید

قدم دوم: با استفاده از روش تبدیل مقیاس خطی، ماتریس را نرمالیزه نمایید.

سود: $r_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^{max}}$ و هزینه: $r_{ij} = \frac{a_j^{min}}{a_{ij}}$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	
A_1	۰/۸	۰/۵۶	۰/۹۵	۰/۸۲	۰/۷۱	۱	۰/۵۶
A_2	۱	۱	۰/۸۶	۰/۶۹	۰/۴۳	۰/۵۶	۰/۴۳
A_3	۰/۷۲	۰/۷۴	۱	۱	۱	۰/۷۸	۰/۷۲
A_4	۰/۸۸	۰/۶۷	۰/۹۵	۰/۹	۰/۷۱	۰/۵۶	۰/۵۶

قدم سوم: کمترین عدد در هر سطر ماتریس نرمالیزه شده را در مقابل آن سطر نوشته و سپس بزرگترین مقدار را از میان آنها انتخاب می نماییم. گزینه مربوطه بهترین گزینه خواهد بود.

روش ماکسی ـ ماکس:

این روش معمولا در زمانی به کار می‌رود که با یک تصمیم گیرنده ریسک پذیر روبه‌رو باشیم در این روش نیز مانند روش ماکس مین ابتدا باید ماتریس تصمیم‌گیری از طریق نرمال سازی خطی بی‌مقیاس شود سپس در هر سطر بیشترین مقدار را انتخاب کرده و از میان مقدار انتخاب شده نیز ماکزیمم مقدار را انتخاب می‌کنیم و گزینه مربوط به آن مقدار گزینه بهینه خواهد بود.

$$N=\begin{bmatrix} 0/909 & 1* & 0/933 \\ 0/727 & 0/5 & 0/933 \\ *1 & 0/5 & 1* \end{bmatrix} \rightarrow$$ گزینه A۱ و یا A۳

مدل های جبرانی

همهٔ معیارها رو باهم درنظر میگیریم

تعیین وزن شاخص‌ها
آنتروپی شانون
مقایسات زوجی

مدل های جبرانی

۱- SAW

روش وزن دهی تجمعی ساده Simple additive weighting method (saw)

مدل مجموع ساده‌ی وزنی، یعنی SAW[1]، یکی از ساده‌ترین روش‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه است. با محاسبه‌ی اوزان شاخص‌ها، می‌توان به سادگی این روش را به‌کار برد.

۱. کمّی کردن ماتریس تصمیم‌گیری
۲. بی‌مقیاس‌سازی خطی مقادیر ماتریس تصمیم‌گیری
۳. ضرب ماتریس بی‌مقیاس شده در اوزان شاخص‌ها
۴. انتخاب بهترین گزینه (A^*) با معیار زیر:

$$A^* = \left\{A_i \,|\, \max_i \sum_{j=1}^{n} W_j X_{ij} / \sum_{j=1}^{n} W_j\right\}$$

X_{ij} خروجی آلترناتیو i ام و صفت j ام با یک مقیاس کمی قابل

یک سری وزن های اهمیت توسط تصمیم گیرنده برای آلترناتیو ها فرض می شود. $W = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$.

مثال:

فرض کنید فردی می‌خواهد از بین سه نوع سیستم کامپیوتری، با روش SAW یک نوع را انتخاب کند. هر نوع سیستم، با پنج شاخص که عبارتند از: هزینه، عمر مفید، کیفیت خدمات پس از فروش، کیفیت سخت‌افزار، و کیفیت نرم‌افزار ارزیابی می‌شود.

A_i \ C_j	C_1^-	C_2^+	C_3^+	C_4^+	C_5^+
A_1	۳۰	۲۰	متوسط	خیلی‌زیاد	کم
A_2	۱۰	۳۰	زیاد	متوسط	زیاد
A_3	۲۰	۵۰	خیلی‌زیاد	کم	خیلی‌زیاد

حل مثال:

گام ۱. همان‌طور که مشخص است شاخص‌های C_2، C_4، و C_5 کیفی‌اند. اولین کار این است که مانند روش‌های گفته شده در بخش‌های پیش، شاخص کیفی را به «کمّی» تبدیل کنیم. برای این کار، می‌توان مقیاس فاصله‌ای دوقطبی را به کار برد.

ماتریس تصمیم کمّی شده

A_i \ C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۳۰	۲۰	۵	۹	۳
A_2	۱۰	۳۰	۷	۵	۷
A_3	۲۰	۵۰	۹	۳	۹

گام ۲. اکنون باید این ماتریس تصمیم کمّی، بی‌مقیاس شود. نوع بی‌مقیاس سازی این روش تصمیم‌گیری چند شاخصه، «بی‌مقیاس سازی خطی» است

ماتریس بی‌مقیاس شده

A_i \ C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۰/۳۳۳	۰/۴	۰/۵۵۶	۱	۰/۳۳۳
A_2	۱	۰/۶	۰/۷۷۸	۰/۵۵۶	۰/۷۷۸
A_3	۰/۵	۱	۱	۰/۳۳۳	۱

گام ۲: اکنون باید «اوزان شاخص‌ها» را محاسبه کنیم. در این‌جا، روش آنتروپی شانون را به‌کار می‌بریم که در مبحث قبل شرح داده شد. اگر این روش برای محاسبه‌ی اوزان شاخص‌های این مساله به‌کار گرفته شود، این اوزان عبارت خواهد بود از:

W [۰/۲۳۹ , ۰/۱۸۹ , ۰/۰۷۶ , ۰/۲۶۳ , ۰/۲۳۴]

گام ۳. در این گام، ماتریس بی‌مقیاس شده را در اوزان شاخص‌ها ضرب می‌کنیم. حاصل، به صورت یک ماتریس ستونی می‌شود. این فرآیند در زیر انجام شده است.

A_i \ C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۰/۳۳۳	۰/۴	۰/۵۵۶	۱	۰/۳۳۳
A_2	۱	۰/۶	۰/۷۷۸	۰/۵۵۶	۰/۷۷۸
A_3	۰/۵	۱	۱	۰/۳۳۳	۱

× [۰/۲۳۹ ; ۰/۱۸۹ ; ۰/۰۷۶ ; ۰/۲۶۳ ; ۰/۲۳۴] = [۰/۵۳۸ ; ۰/۷۴۰ ; ۰/۷۰۶]

جمع سطری (وزن معیار × امتیاز هر معیار)

امتیاز گزینه A_1: ۰٫۳۳۳ × ۰٫۲۳۹ + ۰٫۴ × ۰٫۱۸۹ + ... + ۰٫۳۳۳ × ۰٫۲۳۴ = ۰٫۵۳۸

گام ۴. بهترین گزینه، بزرگ‌ترین مقدار را دارا است.

$$\begin{Bmatrix} ۰/۵۳۸ \\ ۰/۷۴۰^{*} \\ ۰/۷۰۶ \end{Bmatrix} \longrightarrow \qquad A^{*} = A_{۲}$$

بنابراین، اولویت‌بندی گزینه‌ها طبق مدل *SAW*، این گونه است:

$$A_{۲} > A_{۳} > A_{۱}$$

یعنی $A_۲$ بر $A_۳$ برتری دارد و $A_۳$ نیز بر $A_۱$

مدل های جبرانی

۲- TOPSIS

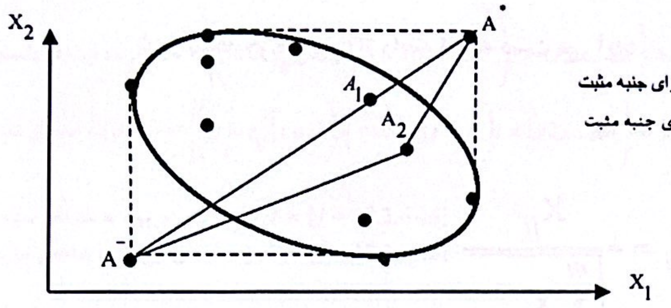
Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution

* گزینه ایده‌آل: گزینه‌ای که در معیارهای مثبت بیشترین امتیاز و در معیارهای منفی کمترین امتیاز را داشته باشد.

* ایده‌آل منفی یا ضد ایده‌آل: در معیارهای مثبت بدترین امتیاز و در معیارهای منفی بیشترین امتیاز را دارد.

❖روش TOPSIS در سال ۱۹۸۱ توسط هوانگ و یون ارایه گردید.

❖ TOPSIS بر این مفهوم استوار است که گزینه انتخابی باید کمترین فاصله را با راه حل ایده آل مثبت و بیشترین فاصله را با راه حل ایده آل منفی داشته باشد.



X_1: شاخص دارای جنبه مثبت

X_2: شاخص دارای جنبه مثبت

❖در این روش m گزینه به وسیله n شاخص مورد ارزیابی قرار میگیرند و هر مساله را می توان به عنوان یک سیستم هندسی شامل m نقطه در یک فضای n بعدی در نظر گرفت.

این روش دارای ۶ گام است:

گام صفر: به دست آوردن ماتریس تصمیم

❖در این روش ماتریس تصمیمی ارزیابی میشود که شامل m گزینه و n شاخص است.

$$D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & & x_j & & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

A_i : گزینه i ام

X_{ij} : مقدار عددی بدست آمده از گزینه i ام با شاخص j ام

❖در این ماتریس شاخصی که دارا ی مطلوبیت مثبت است،شاخص سود و شاخصی که دارای مطلوبیت منفی ست ،شاخصه هزینه می باشد.

گام اول: نرمالایز کردن ماتریس تصمیم

❖در این گام مقیاسهای موجود در ماتریس تصمیم را بدون مقیاس می کنیم.به این ترتیب که هر کدام از مقادیر بر اندازه بردار مربوط به همان شاخص تقسیم می شود.

❖در نتیجه هر درایه r_{ij} از رابطه زیر به دست می آید:

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{2}}}$$

گام دوم: وزن دهی به ماتریس نرمالایز شده:

❖ماتریس تصمیم در واقع پارامتری است و لازم است کمی شود ،به این منظور تصمیم گیرنده برای هر شاخص وزنی را معین میکند.

❖ مجموعه وزنها(w) در ماتریس نرمالایز شده(R) ضرب میشود.

$$W = \left(w_1, w_2, \ldots, w_j, \ldots, w_n\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

❖با توجه به اینکه ماتریس W_{n*1} قابل ضرب در ماتریس تصمیم نرمالایز شده(n*n) نیست، قبل از ضرب باید ماتریس وزن را به یک ماتریس قطری W_{n*n} تبدیل نمود.(وزنها روی قطر اصلی)

گام سوم: تعیین راه حل ایده آل و راه حل ایده آل منفی:

❖دو گزینه مجازی A^* و A^- را به صورتهای زیر تعریف می کنیم:

$$\text{گزینه ایده ال مثبت } A^* = \left\{\left(\max_i v_{ij} \mid j \in J\right), \left(\min_i v_{ij} \mid j \in J'\right) \mid i = 1, 2, \ldots, m\right\} = \left\{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_j^*, \cdots, v_n^*\right\}$$

$$\text{گزینه ایده ال منفی } A^- = \left\{\left(\min_i v_{ij} \mid j \in J\right), \left(\max_i v_{ij} \mid j \in J'\right) \mid i = 1, 2, \ldots, m\right\} = \left\{v_1^-, v_2^-, \cdots, v_j^-, \cdots, v_n^-\right\}$$

$J = \{j = 1,2,3,\cdots,n\} \mapsto$ j های مربوط به شاخص سود

$J' = \{j = 1,2,3,\cdots,n\} \mapsto$ j های مربوط به شاخص هزینه

❖دو گزینه مجازی ایجاد شده در واقع بدترین و بهترین راه حل هستند.

گام چهارم: به دست آوردن اندازه فاصله ها

❖فاصله بین هر گزینه n بعدی را از روش اقلیدسی می سنجیم.یعنی فاصله گزینه i را از گزینه های ایده آل مثبت و منفی می یابیم .

$$S_{i*} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^*)^2} \qquad i = 1,2,3,\cdots,m$$

$$S_{i-} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^-)^2} \qquad i = 1,2,3,\cdots,m$$

گام پنجم : محاسبه نزدیکی نسبی به راه حل ایده آل

❖این معیار از طریق فرمول زیر به دست می آید:

$$C_{i*} = \frac{S_{i-}}{S_{i*} + S_{i-}} \qquad 0 \prec C_{i*} \prec 1$$

ملاحظه می شود که اگر $A_i = A^*$ آنگاه $C_{i*} = 1$ و اگر $A_i = A^-$ آنگاه $C_{i*} = 0$

❖مشخص است که هر چه فاصله گزینه A_i از راه حل ایده آل کمتر باشد نزدیکی نسبی به ۱ نزدیکتر خواهد بود.

گام ششم: رتبه بندی گزینه ها

❖نهایتا گزینه ها را بر اساس ترتیب نزولی رتبه بندی می کنیم .

❖ مثال عددی (مسئله انتخاب هواپیمای جنگنده)

$$D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1500 & 20000 & 5.5 & 5 & 9 \\ 2.5 & 2700 & 18000 & 6.5 & 3 & 5 \\ 1.8 & 2000 & 21000 & 4.5 & 7 & 7 \\ 2.2 & 1800 & 20000 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

❖ همه شاخص ها مربوط به سود هستند بجز شاخص X_4.

1) نرمالایز کردن ماتریس تصمیم:

$$R = \begin{bmatrix} 0.4671 & 0.3662 & 0.5056 & 0.5063 & 0.4811 & 0.6708 \\ 0.5839 & 0.6591 & 0.4550 & 0.5983 & 0.2887 & 0.3727 \\ 0.4204 & 0.4882 & 0.5308 & 0.4143 & 0.6736 & 0.5217 \\ 0.5139 & 0.4392 & 0.5056 & 0.4603 & 0.4811 & 0.3727 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰٫۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰٫۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۳ \end{bmatrix}$$

2) وزن دادن به ماتریس تصمیم:

$$W = (w_1، w_2، w_3، w_4، w_5، w_6) = (0.2، 0.1، 0.1، 0.1، 0.2، 0.3)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.0934 & 0.0366 & 0.0506 & 0.0506 & 0.0962 & 0.2012 \\ 0.1168 & 0.0659 & 0.0455 & 0.0598 & 0.0577 & 0.1118 \\ 0.0841 & 0.0488 & 0.0531 & 0.0414 & 01347 & 0.1565 \\ 0.1028 & 0.0439 & 0.0506 & 0.0460 & 0.0962 & 0.1118 \end{bmatrix}$$

$\checkmark A^{*}$	۰٫۱۱۶۸	۰٫۰۶۵۹	۰٫۰۵۳۱	۰٫۰۴۱۴	۰٫۱۳۴۷	۰٫۲۰۱۲
$\checkmark A^{-}$	۰٫۰۸۴۱	۰٫۰۳۶۶	۰٫۰۴۵۵	۰٫۰۵۹۸	۰٫۰۵۷۷	۰٫۱۱۱۸

برای هر سطر به صورت جداگانه S_i^+ و S_i^- و ... را بدست آورده پس از رابطه زیر C_i را محاسبه کرده که C_i هرچقدر بزرگتر باشد بهتر است.

$$C_i = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^+}$$

بابت فاصله اقلیدسی: $S_1^+ = \sqrt{(۰٫۱۱۶۸ - ۰٫۰۹۳۴)^۲ + (۰٫۰۶۵۹ - ۰٫۰۳۶۶)^۲ + \dots}$

$$S_1^- = \sqrt{(۰٫۰۹۳۴ - ۰٫۰۸۴۱)^۲ + (۰٫۰۳۶۶ - ۰٫۰۳۶۶)^۲ + \dots}$$

3) **تعیین راه حل ایده ال و ایده ال منفی:**

$$A^{*} = \left(\max_i v_{i1} \text{ و } \max_i v_{i2} \text{ و } \max_i v_{i3} \text{ و } \min_i v_{i4} \text{ و } \max_i v_{i5} \text{ و } \max_i v_{i6}\right)$$
$$= (0.1168 \text{ و } 0.0659 \text{ و } 0.0531 \text{ و } 0.0414 \text{ و } 0.1347 \text{ و } 0.2012)$$

$$A^{-} = \left(\min_i v_{i1} \text{ و } \min_i v_{i2} \text{ و } \min_i v_{i3} \text{ و } \max_i v_{i4} \text{ و } \min_i v_{i5} \text{ و } \min_i v_{i6}\right)$$
$$= (0.0841 \text{ و } 0.0366 \text{ و } 0.0455 \text{ و } 0.0598 \text{ و } 0.0577 \text{ و } 0.1118)$$

4) **محاسبه اندازه فاصله:**

فاصله گزینه i ام از ایده ال مثبت $\quad S_{i*} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^{*})^2} \qquad i = 1,2,3,4$

$S_{1*} = 0.0545$
$S_{2*} = 0.1197$
$S_{3*} = 0.0580$
$S_{4*} = 0.1009$

فاصله گزینه i ام از ایده ال منفی $\quad S_{i-} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^{-})^2} \qquad i = 1,2,3,4$

$S_{1-} = 0.0983$
$S_{2-} = 0.0439$
$S_{3-} = 0.0920$
$S_{4-} = 0.0458$

5) محاسبه نزدیکی نسبی به راه حل ایده ال:

$$C_{1*} = \frac{S_{1-}}{S_{1*} + S_{1-}} = 0.643$$

$$C_{2*} = 0.268$$

$$C_{3*} = 0.613$$

$$C_{4*} = 0.312$$

6) رتبه بندی گزینه ها:

❖ براساس ترتیب نزولی C_{i*} رتبه بندی گزینه ها به صورت زیر می شود:

A_1 و A_3 و A_4 و A_2

Scanned with CamScanner

❖موفقیت چشمگیر روش PROMETHEE در زمینه های مختلف همانند بانکداری، مناطق صنعتی، برنامه ریزی نیروی کاری، منابع آب، سرمایه گذاری ها، پزشکی، شیمی ،مراقبت های پزشکی، تروریسم، تحقیق در عملیات، مدیریت پویا و . . .اساساً به دلیل خاصیت ریاضی و سهولت استفاده از آن می باشد.

❖این روش ها به گروه روش های رتبه بندی تعلق دارند.

اطلاعات لازم برای مدل سازی ارجحیت ها توسط Promethee :

مسئله چند معیاری زیر را در نظر می گیریم:

$$Max\{g_1(a_i), g_2(a_i),\cdots, g_j(a_i),\cdots, g_n(a_i) \mid a_i \in A\}$$

که در آن :

A مجموعه ای متناهی از گزینه ها $A=\{a_i \mid i=1,2,...,m\}$

و g مجموعه ای از معیارهای ارزیابی $g=\{g_j \mid j=1,2,...,n\}$

می باشند.

اطلاعات لازم برای مدل سازی ارجحیت ها در این روش شامل موارد زیر است:

۱- جدول ارزیابی گزینه ها

۲- اطلاعات بین معیارها (در صد وزنی)

۳- اطلاعات هر معیار(تابع ارجحیت)

۱- جدول ارزیابی گزینه ها در یک مسئله تصمیم گیری با معیارهای چندگانه

a	$g_1(\cdot)$	$g_2(\cdot)$	$\cdots$	$g_j(\cdot)$	$\cdots$	$g_k(\cdot)$
a_1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$	$\cdots$	$g_j(a_1)$	$\cdots$	$g_k(a_1)$
a_2	$g_1(a_2)$	$g_2(a_2)$	$\cdots$	$g_j(a_2)$	$\cdots$	$g_k(a_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_i	$g_1(a_i)$	$g_2(a_i)$	$\cdots$	$g_j(a_i)$	$\cdots$	$g_k(a_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	$g_1(a_n)$	$g_2(a_n)$	$\cdots$	$g_j(a_n)$	$\cdots$	$g_k(a_n)$

• رابطه برتری در مسئله چند معیاری به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} \forall j : g_j(a) \geq g_j(b) \\ \exists k : g_k(a) > g_k(b) \end{cases} \iff aPb,$$

$$\forall j : g_j(a) = g_j(b) \iff aIb,$$

$$\begin{cases} \exists s : g_s(a) > g_s(b) \\ \exists r : g_r(a) < g_r(b) \end{cases} \iff aRb,$$

• که P و I و R به ترتیب نشان دهنده ارجحیت، بی تفاوتی و غیر قابل مقایسه بودن می باشند.

۲-اطلاعات بین معیارها

• وزن مربوط به هر معیار در جدول زیر مشاهده می شود:

$g_1(\cdot)$	$g_2(\cdot)$	$\dots$	$g_j(\cdot)$	$\dots$	$g_k(\cdot)$
w_1	w_2	$\dots$	w_j	$\dots$	w_k

• هیچ مانعی وجود ندارد که وزن ها را به صورت نرمال در نظر بگیریم، به طوریکه :

$$\sum_{j=1}^{k} w_j = 1.$$

3- اطلاعات هر معیار :

• ساختار ارجحیت این روش بر اساس مقایسات زوجی است.

• در این حالت تفاوت میان دو گزینه تحت معیاری مشخص مد نظر است. برای انحرافات کوچک، تصمیم گیرنده یک ارجحیت کوچک به بهترین گزینه تخصیص می دهد و اگر این انحراف خیلی کوچک باشد ممکن است ارجحیتی به آن تخصیص ندهد. هرچه میزان انحراف بیشتر باشد میزان ارجحیت بیشتر خواهد بود.

• می توان این ارجحیت ها را به صورت اعداد حقیقی و در بازه ۰ و ۱ در نظر گرفت.

3- اطلاعات هر معیار: (ادامه)

• در واقع تصمیم گیرنده برای هر معیار تابعی به صورت زیر در ذهن خود دارد:

$$a,b \in A \;\forall \qquad P_J(a\,,b)=F_j[(d_j(a,\,b)]\;)$$

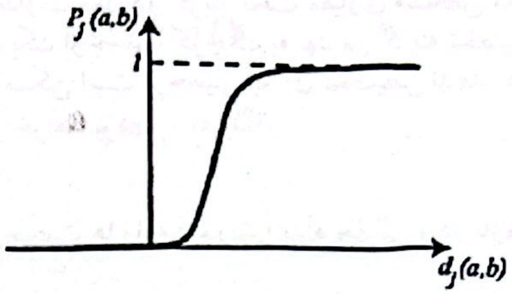
$$d_j(a,b)=g_j(a)\;-\;g_j(b)$$

در نتیجه داریم:

$$0\leq P_J(a,b)\leq 1$$

3- اطلاعات هر معیار: (ادامه)

- برای معیارهایی که باید بیشینه شوند تابع ارجحیت a به b با توجه به اختلاف آن ها تحت معیار $g_i(.)$ به صورت شکل زیر خواهد بود.



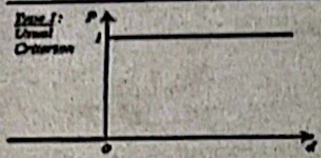
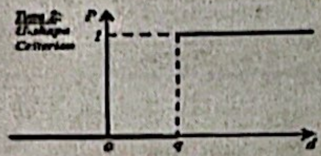
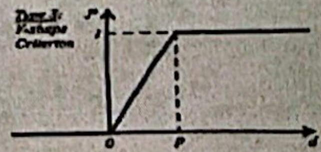
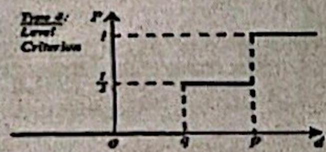
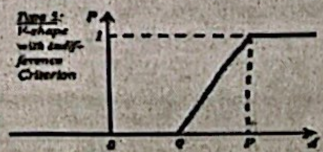
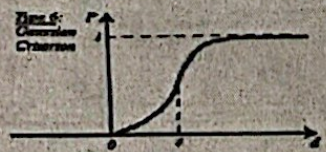
3- اطلاعات هر معیار: (ادامه)

- هم چنین داریم:
- $P_J(a,b) > 0 \rightarrow P_J(b\ ,a) = 0$
- در واقع وقتی انحرافات منفی هستند ارجحیت ها برابر صفر در نظر گرفته می شوند.

- برای معیارهایی که باید کمینه شوند تابع ارجحیت باید معکوس شود و یا به صورت زیر ارائه گردد:
- $a,b \in A\forall \quad P_J(a,b)=F_j[(-\ d_j(a,\ b)]$

- زوج $\{P_J(a,b)$ و $g_i(.)\}$ معیار عمومی و یا تابع ارجحیت مربوط به معیار $g_i(.)$ نامیده می شود. چنین تابع ارجحیتی باید برای هر معیار تعریف شود.

شش نوع تابع
ارجحیت
استاندارد روش
promethee

Generalised criterion	Definition	Parameters to fix
Type 1: Usual Criterion 	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 1 & d > 0 \end{cases}$	–
Type 2: U-shape Criterion 	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ 1 & d > q \end{cases}$	q
Type 3: V-shape Criterion 	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ \frac{d}{p} & 0 \leq d \leq p \\ 1 & d > p \end{cases}$	p
Type 4: Level Criterion 	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ \frac{1}{2} & q < d \leq p \\ 1 & d > p \end{cases}$	p, q
Type 5: V-shape with indifference Criterion 	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq q \\ \frac{d-q}{p-q} & q < d \leq p \\ 1 & d > p \end{cases}$	p, q
Type 6: Gaussian Criterion 	$P(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d^2}{2s^2}} & d > 0 \end{cases}$	s

- در هر حالت صفر،یک و یا دو پارامتر باید تعریف شوند :
- q : آستانه بی تفاوتی(بزرگترین انحرافی که توسط تصمیم گیرنده نادیده گرفته می شود)

- P : آستانه ارجحیت زیاد(کوچکترین انحرافی که برای ارجحیت کامل کفایت می کند)
- S :ارزش میانه بین q و p.

- در بعضی از نرم افزارها فقط امکان استفاده از این شش تابع عمومی به عنوان توابع ارجحیت وجود دارد. این توابع برای بیشتر مسائل دنیای واقعی کفایت می کند اما مانعی هم برای در نظر گرفتن توابع ارجحیت دیگری وجود ندارد.

- حال با داشتن جدول ارزیابی، وزن معیارها و توابع ارجحیت معیارها اطلاعات لازم برای اجرای این روش فراهم شده است.

- در رتبه بندی روش های promethee I, II ابتدا شاخص های ارجحیت تجمعی و جریان های برتری را تعریف می کنیم.

شاخص های ارجحیت تجمعی:

تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} \pi(a,b) = \sum_{j=1}^{k} P_j(a,b)w_j, \\ \pi(b,a) = \sum_{j=1}^{k} P_j(b,a)w_j. \end{cases}$$

که $\pi(a,b)$ نشان می دهد a تحت همه معیارها چقدر از b ارجح تر است.

$\pi(a,b)$ معمولاً مقدار مثبتی می باشد.هم چنین داریم:

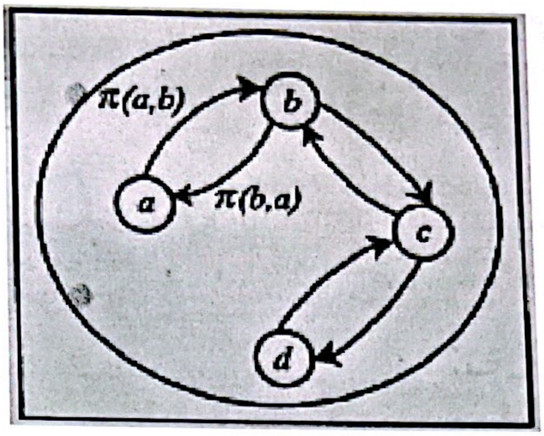
$\pi(a,a)=0.$

$0<\pi(a,b)<1$

$0<\pi(b,a)<1$

$0<\pi(a,b) + \pi(b,a)<1$

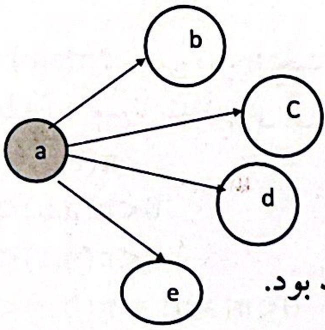
به محض این که $\pi(a,b)$ و $\pi(b,a)$ برای هرجفت از گزینه های A محاسبه شود، یک گراف کامل برتری مقدارگذاری شده، شامل دو کمان بین هر دو گره به دست می آید.



جریان های برتری:

- هر گزینه مانند a با (n-1) گزینه دیگر در مجموعه A مواجه است. دو جریان برتری را تعریف می کنیم:

۱- جریان مثبت برتری: بیان می کند یک گزینه مانند a چه قدر از گزینه های دیگر برتر است.

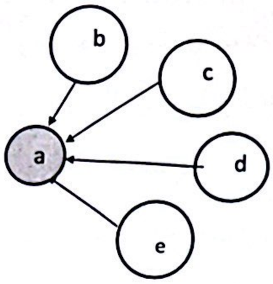


$$\phi^+(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{x \in A}\pi(a,x),$$

هرچه این مقدار بیشتر باشد این گزینه برتر خواهد بود.

۲- جریان منفی برتری در گزینه a: بیان می کند که گزینه های دیگر چه قدر بر گزینه a برتر می باشند.

هرچه این مقدار کمتر باشد این گزینه بهتر خواهد بود.



$$\phi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(x, a)$$

رتبه بندی جزئی promethee I:

- رتبه بندی جزئی promethee I از جریان های برتری مثبت و منفی به دست می آیند. این جریان ها معمولاً رتبه بندی مشابهی را ارائه نمی کنند. در واقع prometheeI فصل مشترک آنهاست.

$$\begin{cases} aP^I b & \text{iff} & \begin{cases} \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) < \phi^-(b), \text{ or} \\ \phi^+(a) = \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) < \phi^-(b), \text{ or} \\ \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) = \phi^-(b); \end{cases} \\ aI^I b & \text{iff} & \phi^+(a) = \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) = \phi^-(b); \\ aR^I b & \text{iff} & \begin{cases} \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) > \phi^-(b), \text{ or} \\ \phi^+(a) < \phi^+(b) \text{ and } \phi^-(a) < \phi^-(b); \end{cases} \end{cases}$$

- که p و I و R به ترتیب نشان دهنده ارجحیت، بی تفاوتی و غیر قابل مقایسه بودن است.
- رابطه $a\ p^{I}\ b$ نشان می دهد برتری a ناشی از ضعف b است.
- وقتی که $a\ I^{I}\ b$ ، جریان های مثبت و منفی با هم برابرند.
- وقتی $a\ R^{I}\ b$ قدرت بیشتر یک گزینه ناشی ازضعف گزینه دیگر است. در چنین حالتی اطلاعاتی که توسط دو جریان به وجود می آیند سازگار نیستند.

روش promethee I در رتبه بندی محتاط است چرا که در این حالت تصمیم نمی گیرد کدام گزینه بهتر است و انتخاب گزینه برتر بر عهده تصمیم گیرنده است.

رتبه بندی کامل در promethee II:

- معمولاً تصمیم گیرنده نیاز به رتبه بندی کامل دارد.
- در این روش جریان خالص برتری به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\emptyset(a) = \emptyset^{+}(a) - \emptyset^{-}(a)$$

- هر چه جریان خالص گزینه ای بهتر باشد آن گزینه بهتر است. بنابراین :

$$\begin{cases} aP^{II}b & \text{iff} \quad \phi(a) > \phi(b), \\ aI^{II}b & \text{iff} \quad \phi(a) = \phi(b). \end{cases}$$

		w1	w2	w3	w4	w5
		0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
		cost	target	dur	eff	manp
۱	news	60	900	22	51	8
۲	herald	30	520	31	13	1
۳	panels	40	650	20	58	2
۴	mailing	92	750	60	36	3
۵	cmm	52	780	58	90	1
۶	ncb	80	920	4	75	6
	q	10		10		
	p	30	100			
	s				50	
	shape	5	3	2	6	1

$p_j(a,b) = F(d_j(a,b))$

$p_1(1,۲) = ۰$ — $p_1(۱,۳) = ۰$ — $p_1(۱,۴) = 1$

$d_1(1,۲) = -(۶۰ - ۳۰) = -۳۰ \longrightarrow p_1(۱,۲) = ۰$

معیار منفی

$p_1(۲,۱)$
$p_1(۲,۳)$
$p_1(۲,۴)$
$p_1(۲,۵)$
و ...

	min	max	max	max	Min
	cost	target	duration	eff	Manp
d(1,2)	30	380	-9	38	7
d(1,3)	20	250	2	-7	6
d(1,4)	-32	150	-38	15	5
d(1,5)	8	120	-36	-39	7
d(1,6)	-20	-20	18	-24	2

برای مثال:

$p_1(1,2) = 0$, $p_2(1,2) = 1$,
$p_3(1,2) = 0$, $p_4(1,2) = 1 - e^{-(-d^2/2s^2)} = 1 - e^{-(-38^2/2*50^2)} = 0.25$, $p_5(1,2) = 0$, $\pi(1,2) = 0.2(1 + 0.25) = 0.25$

- در promethee II همه گزینه ها قابل مقایسه هستند و گزینه ی غیر قابل مقایسه ای باقی نمی ماند.
- از خواص این روش می توان موارد زیر را بر شمرد:

$$-1 \le \emptyset(a) \le 1 \qquad\qquad \sum_{a \epsilon A} \emptyset(a) = 0$$

- وقتی $\emptyset(a) > 0$ به این معنی است که گزینه های زیادی وجود دارند که تحت همه معیارها مغلوب گزینه a هستند و وقتی که $\emptyset(a) < 0$ به این معنی است که گزینه های زیادی وجود دارند که تحت همه معیارها بر a غلبه دارند.

مثال:تبلیغات یک شرکت سازنده دوچرخه:

Table 2

Criteria min/max	C1 cost min	C2 target max	C3 durat. max	C4 effic. max	C5 manp. min
News	60	900	22	51	8
Herald	30	520	31	13	1
Panels	40	650	20	58	2
Mailing	92	750	60	36	3
CMM	52	780	58	90	1
NCB	80	920	4	75	6

وزن معیارها برابر می باشد. توابع ارجحیت ۵ معیار به ترتیب عبارتند از:
۵ و۳(۷ شکل)و۲ (u شکل) و ۶(گوسی) و ۱(linear)

هم چنین داریم:

$$p_1(1,3)=0\ ,p_2(1,3)=1,$$
$$p_3(1,3)=0\ ,\ p_4(1,3)=0\ ,p_5(1,3)=0,\ \pi(1,3)=0.2(1)=0.2$$

$$p_1(1,4)=1\ ,p_2(1,4)=1,\ p_3(1,4)=0\ ,\ p_4(1,4)=1-e^{-\left(\frac{d^2}{2s^2}\right)}=0.44\ ,p_5(1,4)=0,\ \pi(1,4)=0.4$$

$$p_1(1,5)=0\ ,p_2(1,5)=1,$$
$$p_3(1,5)=0\ ,\ p_4(1,5)=0\ ,p_5(1,5)=0,\ \pi(1,5)=0.2(1)=0.2$$

$$p_1(1,6)=\frac{20-10}{20}=0.5\ ,p_2(1,6)=0,\ p_3(1,6)=1\ ,\ p_4(1,6)=0\ ,p_5(1,6)=0,\ \pi(1,6)=0.3$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\varphi^{+}(1)=1/5(\sum_{i=1}^{6}\pi(1.i)=0.21$$

و سپس جریان منفی برتری برای گزینه اول محاسبه می شود. که عبارت است از:

$$\varphi^{-}(1)=1/5(\sum_{i=1}^{6}\pi(i,1)=0.36$$

به همین ترتیب برای هر گزینه جریان مثبت و منفی برتری محاسبه می شود.
حال با توجه به روش promethee I داریم:

رتبه بندی جزئی:

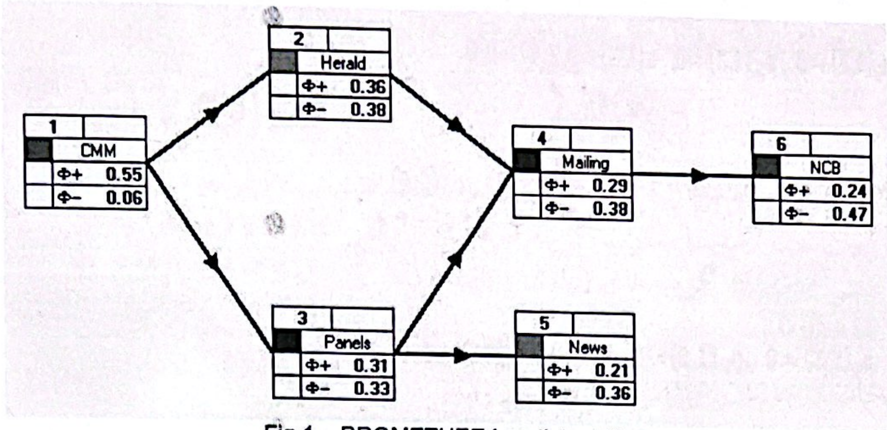
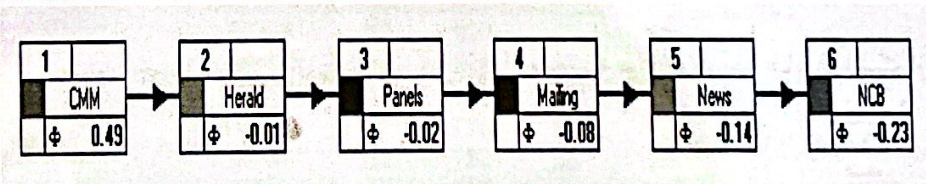


Fig.1 – PROMETHEE I partial ranking

سپس با محاسبه جریان خالص برتری داریم:

رتبه بندی کامل:



MODM
(Multi_ objective)

چندهدفه

شکل ریاضی مدل‌های چندهدفه

$$
\begin{array}{ll}
Max(Min) & f_1(x_j) \\
Max(Min) & f_2(x_j) \\
\vdots & \vdots \\
Max(Min) & f_k(x_j) \\
St:
\end{array}
$$

(محدودیت‌های عملیاتی) $\quad g_i(x_j) \le b_i \quad , \quad i = 1,2,\dots,m$

(محدودیت‌های نامنفی) $\quad x_j \ge 0 \quad , \quad j = 1,2,\dots,n$

که x_j متغیر تصمیم j ، n تعداد متغیرهای تصمیم، $g_i(x_j)$ محدودیت iام، m تعداد محدودیت‌ها، و b_i مقداری نامنفی و ثابت است.

جواب بهینه: جوابی است که همزمان تمامی اهداف را بهینه کند. به این جواب گاهی جواب برتر نیز گفته می‌شود. در صورتی که جواب بهینه برای مساله وجود نداشته باشد، مفاهیم بعدی مطرح می‌شود.

جواب نامغلوب: جواب نامغلوب جوابی است که نمی‌توان هیچ تابع هدفی را بهبود بخشید بدون آن‌که هم‌زمان باعث دور شدن حداقل یکی از اهداف دیگر شود.

جواب برگزیده: جواب برگزیده جواب نامغلوبی است که توسط تصمیم‌گیرنده (با توجه به برخی از اهداف اضافی) به عنوان جواب نهایی انتخاب می‌شود.

جواب رضایت‌بخش: جواب رضایت‌بخش، جوابی است که سطوح موردنظر اهداف را برای تصمیم‌گیرنده محقق می‌سازد. جواب رضایت‌بخش لزوماً جواب نامغلوبی نیست. این جواب برای تصمیم‌گیرندگانی که دانش و توانایی‌شان محدود است مطرح می‌شود.

مثال:

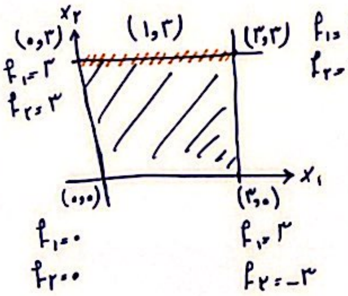
دو مساله‌ی چند هدفه‌ی زیر را ، که دارای محدودیت‌های یکسانی هستند، در نظر بگیرید.

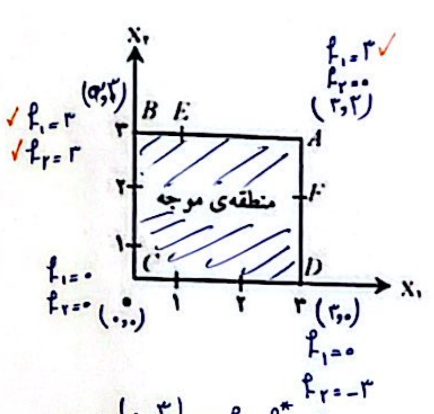
$$\begin{aligned} Max \quad & f_1 = x_2 \\ Max \quad & f_2 = -x_1 + x_2 \\ st: & \\ & x_1 \le 3 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} Max \quad & f_1 = x_1 + x_2 \\ Max \quad & f_2 = -x_1 + x_2 \\ st: & \\ & x_1 \le 3 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(الف)





جواب بهینه $(0,3) \longrightarrow f_1 = f_1^* = 3$

$\longrightarrow f_2 = f_2^* = 3$

نامغلوب $\begin{cases} (3,3) \longrightarrow \boxed{f_1 = 6},\ f_2 = 0 \\ (0,3) \longrightarrow f_1 = 3,\ \boxed{f_2 = 3} \end{cases}$ $\longrightarrow$ نظر تصمیم گیرنده مهم است.

$$\begin{aligned} Max \quad & f_1 = x_2 \\ Max \quad & f_2 = -x_1 + x_2 \\ st: & \\ & x_1 \le 3 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(ب)

با توجه به منطقه‌ی موجه، مساله‌ی «ب» دارای یک جواب بهینه است. جواب بهینه‌ی آن در نقطه‌ی B قرار دارد که $x_1=0$ و $x_2=3$ که در آن $f_1=3$ و $f_2=3$ است.

گوشه‌های موجه	مختصات	$f_1=x_2$	$f_2=-x_1+x_2$
A	(۳,۳)	۳	۰
B	(۰,۳)	۳ $\rightarrow Max$	۳ $\rightarrow Max$
C	(۰,۰)	۰	۰
D	(۳,۰)	۰	۳-

$$\begin{aligned} Max \quad & f_1 = x_1 + x_2 \\ Max \quad & f_2 = -x_1 + x_2 \\ st: & \\ & x_1 \le 3 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(الف)

اکنون مساله‌ی «الف» را در نظر بگیرید. جواب بهینه برای این مساله وجود ندارد. نقطه‌ی A هدف اول را بهینه می‌سازد و نقطه‌ی B هدف دوم را. بنابراین جوابی وجود ندارد که همزمان دو تابع را بهینه سازد.

گوشه‌های موجه	مختصات	$f_1=x_1+x_2$	$f_2=-x_1+x_2$
A	(۳,۳)	۶ $\rightarrow Max$	۰
B	(۰,۳)	۳	۳ $\rightarrow Max$
C	(۰,۰)	۰	۰
D	(۳,۰)	۳	۳-

بنابراین در مساله‌ی «الف» مفهوم جواب‌های«نامغلوب» مطرح می‌شود. دو نقطه‌ی A و B از جمله‌ی جواب‌های نامغلوبند، زیرا هر کدام یکی از توابع هدف را بهینه می‌سازد

(تمامی جواب‌ها به ازای $x_2=3$ و $0\leq x_1 \leq 3$ نامغلوب هستند). دو نقطه‌ی C و D جواب‌های نامغلوب نیستند، زیرا نقاط A و B لااقل از نظر یک هدف بر آن‌ها برتری دارند. ممکن است تصمیم گیرنده از بین جواب‌های نامغلوب، نقطه‌ی E را به عنوان جواب نهایی انتخاب کند، در این صورت به آن جواب برگزیده گفته می‌شود.

$$E(1,3) \rightarrow f_1=1+3=4 \text{ و } f_2=-1+3=2$$

اگر تصمیم گیرنده برای تابع هدف اول مقداری برابر ۵ و برای هدف دوم مقدار (۱-) را بپذیرد، در این صورت نقطه‌ی F

$$F(3,2) \rightarrow f_1=3+2=5 \text{ و } f_2=-3+2=-1$$

نقطه‌ای رضایت‌بخش تلقی می‌شود.

روش های حل مسائل MODM

در تصمیم‌گیری چندهدفه، روش‌های مختلفی برای حل این گونه مسایل وجود دارد که جواب هر روش با روش دیگر لزوماً یکسان نیست، زیرا مفروضات هر روش و همچنین میزان مشارکت تصمیم‌گیرنده در فرایند حل مساله متفاوت است. در ادامه پنج روش معروف و در عین حال نسبتاً ساده برای حل مسایل چندهدفه مطرح خواهد شد. این روش‌ها عبارتند از:

- روش تبدیل تابع هدف به محدودیت،
- روش وزن‌دهی به اهداف،
- روش اولویت مطلق،
- روش معیار جامع،
- روش برنامه‌ریزی آرمانی.

روش اول:

روش تبدیل تابع هدف به محدودیت

در این روش از بین توابع هدف مختلف، یکی انتخاب و سایر توابع هدف با در نظر گرفتن مقادیری، که تصمیم گیرنده یا مدل‌ساز تعیین می کند، به محدودیت تبدیل می‌شوند و مساله به یک مدل برنامه‌ریزی خطی یک هدفه تبدیل می‌شود و به طریقه‌ی معمول برنامه‌ریزی خطی (روش ترسیمی یا سیمپلکس) حل می‌شود.

مثال:

اگر تابع هدف اول (f_1) مُعرف سود بوده و تابع هدف دوم (f_2) میزان اشتغال را نشان دهد و تصمیم گیرنده تمایل داشته باشد میزان سودش حداقل ۱۸ واحد پولی باشد، با روش تبدیل تابع هدف به محدودیت، مساله را حل کنید.

$$
\begin{array}{l}
Max \quad f_1 = 3x_1 + 2x_2 \\
Max \quad f_2 = 10x_1 + 5x_2 \\
st: \\
\qquad x_1 + x_2 \le 10 \\
\qquad 2x_1 + 3x_2 \le 20 \\
\qquad x_1 \le 7 \\
\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{l}
Max \quad f_2 = 10x_1 + 5x_2 \\
st: \\
\qquad 3x_1 + 2x_2 \ge 18 \\
\qquad x_1 + x_2 \le 10 \\
\qquad 2x_1 + 3x_2 \le 20 \\
\qquad x_1 \le 7 \\
\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

اگر این مساله را حل کنیم جواب بهینه‌ی آن به‌گونه‌ی زیر خواهد بود:

$$x_1^* = 7 \quad , \quad x_2^* = 2 \quad , \quad f_2^* = 80$$

روش دوم:

روش وزن‌دهی به اهداف

weighting method

در روش «وزنی‌دهی به اهداف[1]»، تصمیم‌گیرنده به اهداف مختلف وزن (ضریب اهمیتی) اختصاص می‌دهد و سپس توابع هدف را در وزن‌های مربوطه ضرب و در نهایت تابع هدف واحدی به وجود می‌آورد. در وزن‌دهی به اهداف چند نکته مهم است:

۱ـ وزن هر هدف W_i مقداری بین صفر و یک و جمع وزن‌ها باید یک باشد(ΣW_i=۱).

۲ـ تمامی توابع هدف به صورت *Max* یا *Min* باشند.

۳ـ ضرایب متغیرهای تصمیم در هر تابع هدف با تابع هدف دیگر باید هم‌مقیاس باشند و بنابراین دارای یک رده و بزرگی باشند.

در مورد نکته اول، برای نمونه اگر دو هدف وجود داشته باشد به طوری که اولی ۳ برابر دومی مهم باشد وزن هر هدف به صورت زیر حساب می‌شود:

$$w_1 = \frac{۳}{۳+۱} = ۰/۷۵ \quad , \quad w_2 = \frac{۱}{۳+۱} = ۰/۷۵$$

در مورد نکته‌ی دوم، اگر یکی از توابع هدف به صورت *Min* و دیگری به صورت *Max* باشد، می‌توان هدف *Min* را با ضرب آن در یک علامت منفی به *Max* تبدیل کرد تا هر دو هدف *Max* باشند. $Min\, f \Rightarrow Max\,(-f)$

اما در مورد نکته‌ی سوم، اگر ضرایب دارای یک مقیاس اندازه‌گیری نباشند اساساً جمع‌پذیر نیستند. برای نمونه جمع مقادیر سود (بر حسب ریال) و مقادیر میزان اشتغال (بر حسب نفر) بی‌مفهوم است. در این حالت لازم است ضرایب هر تابع هدف را به‌هنجار کرد، یعنی هر یک از ضرایب یک تابع هدف را بر مجموع ضرایب آن تابع تقسیم کرد.

مثال:

شرکتی دو اسباب‌بازی تولید می‌کند و می‌خواهد در مورد میزان تولید آن دو (A و B) تصمیم بگیرد. اسباب‌بازی A نسبت به B دارای کیفیتی بهتر است. سود مورد انتظار هر واحد اسباب‌بازی A و B به ترتیب ۴۰۰۰ و ۳۰۰۰ تومان است. هر واحد اسباب‌بازی A سه برابر هر واحد B زمان می‌برد. اگر تمام اسباب‌بازی‌ها از نوع B تولید شود، شرکت می‌تواند ۵۰۰ تا از آن را تولید کند. با توجه به موجودی مواد اولیه، جمع تولید روزانه‌ی این دو اسباب‌بازی نمی‌تواند از ۴۰۰ واحد بیشتر باشد. فرض بر این است که هر چقدر اسباب‌بازی تولید شود به فروش می‌رسد. مدیر شرکت در پی دو هدف است:

۱) کسب حداکثر سود،

۲) حداکثر کردن تولید A.

ضمن تهیه‌ی مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه برای این مساله، با فرض این‌که هدف سود سه برابر هدف تولید A اهمیت داشته باشد، با روش وزن‌دهی به اهداف، مساله را حل کنید.

اگر x_1 و x_2 به ترتیب میزان تولید اسباب‌بازی A و B تعریف شود، مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه برای این مساله به گونه‌ی زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&Max \quad f_1 = 4000x_1 + 3000x_2 \\
&Max \quad f_2 = x_1 \\
&st: \\
&\qquad 3x_1 + x_2 \le 500 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 400 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

x_A, x_B میزان تولید اسباب بازی A و B

رضایت بخش:
تابع هدف اول ≥ 5
تابع هدف دوم ≥ -1

$\sum w_i = 1$

۰٫۲۵ ، ۰٫۷۵

$$f_1 = \frac{5000x_1 + 7000x_2}{12000} = \frac{5}{12}x_1 + \frac{7}{12}x_2$$

۷۰۰۰+۵۰۰۰

$$f_2 = \frac{10x_1 + 2x_2}{12} = \frac{10}{12}x_1 + \frac{2}{12}x_2$$

هر یک واحد محصول B ← $x_B \times t_B$

هر یک واحد محصول A ← $x_A = 3t_B$

زمان تولید اسباب بازی A = ۳ × زمان تولید اسباب بازی B

محدودیت زمان $500 \times t_B$

$$x_A \times 3\cancel{t_B} + x_B \times \cancel{t_B} \le 500\,\cancel{t_B}$$

$$\begin{aligned}
&Max \quad f_1 = 4000x_1 + 3000x_2 \\
&Max \quad f_2 = x_1 \\
&st: \\
&\qquad 3x_1 + x_2 \le 500 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 400 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

با توجه به این که هدف اول (سود) سه برابر هدف دوم (تولید A) اهمیت دارد، پس:

$$w_1 = \frac{3}{3+1} = 0/75 \quad , \quad w_2 = \frac{1}{3+1} = 0/25$$

نکته‌ی دیگر این‌که واحدهای هدف اول به تومان و واحدهای هدف دوم تعداد اسباب‌بازی است. این دو هدف جمع‌پذیر نیستند. برای این کار ضرایب متغیرهای تابع هدف اول را به‌هنجار می‌کنیم یعنی آن را بر ۷۰۰۰ تقسیم می‌کنیم (چون‌که جمع ضرایب متغیرهای تابع هدف دوم برابر یک است این کار برای تابع هدف دوم لازم نیست).

$$f_1 = 4000x_1 + 3000x_2 \rightarrow f_1 = \frac{4}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2$$

$$\begin{aligned}
Max \quad Z &= 0/75\left(\frac{4}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2\right) + 0/25(x_1) \\
&= 0/679x_1 + 0/321x_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Max \quad Z = 0/679x_1 + 0/321x_2 \\
&st: \\
&\qquad 3x_1 + x_2 \le 500 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 400 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

با حل این مدل، جواب نهایی به گونه‌ی زیر خواهد بود:

$x_1 = 50$ ، $x_2 = 350$ ، $Z = 146/3$

$f_1 = 4000(50) + 3000(350) = 1.250.000$

$f_2 = 50$

$$0/75 = \frac{3}{3+1} \leftarrow \quad max \quad f_1 = 4000\,x_A + 3000\,x_B$$

$$0/25 = \frac{1}{3+1} \leftarrow \quad max \quad f_2 = x_A$$

$$\rightarrow max = 0/75\left(\frac{4}{7}x_A + \frac{3}{7}x_B\right) + 0/25\,x_A$$

s.t

$$x_A \times 3\cancel{t_B} + x_B \times \cancel{t_B} \le 500\,\cancel{t_B}$$

$$x_A + x_B \le 400$$

روش سوم:

روش اولویت مطلق

absolute priorities method

گاهی تصمیم‌گیرنده تمایل ندارد که وزن هر هدف را مشخص کند و روش وزن‌دهی به اهداف را روشی ذهنی می‌پندارد. ولی مایل است اهداف را اولویت‌بندی کند. در این صورت روش اولویت مطلق[1] مطرح می‌شود.

در این روش مساله را تنها با هدفی که اولویت اول (مهم‌تر) دارد، حل می‌کنیم و جواب بهینه را مشخص می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد تابع هدف اولویت اول را برابر جواب بهینه به دست آمده قرار داده و به عنوان یک محدودیت به مساله اضافه کرده و مساله را با در نظر گرفتن تابع هدف با اولویت دوم حل می‌کنیم. این رویه به همین صورت برای اولویت‌های بعدی تکرار می‌شود.

روش چهارم:

روش معیار جامع

Global criterion method

در این روش برخلاف روش‌های قبلی نیازی به اولویت‌بندی اهداف، وزن‌دهی، یا تبدیل اهداف به محدودیت نیست. روش معیار جامع[1]، بسته به مورد، مجموع توان اول، دوم، ... انحرافات نسبی اهداف از مقدار بهینه‌شان را حداقل می‌کند.

در این روش، تابع هدف که همواره در پی حداقل کردن آنیم به گونه‌ی زیر است:

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{f_i^{*}-f_i}{f_i^{*}}\right)^{P}$$

که در آن f_i^{*} مقدار بهینه‌ی تابع هدف i ام (بدون در نظر گرفتن اهداف دیگر) است.

پیشنهادهای مختلفی برای مقدار P وجود دارد. برخی P=۱ را مناسب می‌دانند (یعنی مجموع نسبی انحرافات حداقل شود) و برخی نیز P=۲ را مناسب‌تر می‌دانند (یعنی مجموع توان دوم انحرافات حداقل شود). هدف توان دوم رساندن اهمیت بیشتر دادن به انحرافات بزرگ‌تر است. **نکته:** دقت کنید که در روش معیار جامع باید همه اهداف *Max* باشند.

مثال:

درباره مثال ۳-۲ (اسباب‌بازی) را در نظر بگیرید که مدل چندهدفه‌ی آن در زیر آورده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad f_1 = 4000x_1 + 3000x_2 \\
&Max \quad f_2 = x_1 \\
&st: \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 500 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 400 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

با روش معیار جامع و به ازای $P=1$ و همچنین $P=2$ مساله را حل کنید.

$f_1 \longrightarrow f_1^* = 1,300,000$

$f_2 \longrightarrow f_2^* = 250$

$$\min \left(\frac{f_1^* - f_1}{f_1^*}\right)^2 + \left(\frac{f_2^* - f_2}{f_2^*}\right)^2$$

$p=1$

$p=2$

$p=3$

معمولاً توان ۲ بهتره

$$\min Z = \left(\frac{1,300,000 - [4000x_1 + 3000x_2]}{1,300,000}\right) + \left(\frac{250 - [x_1]}{250}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&s.t \\
&2x_1 + x_2 \le 500 \\
&x_1 + x_2 \le 400 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

ابتدا دو مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی یک هدفه‌ی زیر حل می‌شود:

مساله‌ی ۱

$$
\begin{aligned}
&Max \quad f_1 = 4000x_1 + 3000x_2 \\
&st: \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 500 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 400 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

جواب بهینه‌ی مساله‌ی ۱:

$x_1=100,\quad x_2=300,\quad f_1=1,300,000$

مساله‌ی ۲

$$
\begin{aligned}
&Max \quad f_2 = x_1 \\
&st: \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 500 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 400 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

جواب بهینه‌ی مساله‌ی ۲:

$x_1=250,\quad x_2=0,\quad f_2=250$

اکنون می‌توان تابع هدفی جهت حداقل کردن مجموع انحرافات نسبی تهیه و بر اساس آن و با توجه به محدودیت‌ها، مساله را حل کرد.

حالت اول: ($P=1$ مجموع انحرافات نسبی حداقل شود)

$$\begin{aligned} Min \quad Z &= \frac{1{,}300{,}000-(4000x_1+3000x_2)}{1{,}300{,}000}+\frac{250-x_1}{250} \\ &= 2-0/00708x_1-0/00231x_2 \\ st:& \\ & 2x_1+x_2 \le 500 \\ & x_1+x_2 \le 400 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$x_1=250$ ، $x_2=0$ ، $f_1=1{,}000{,}000$ ، $f_2=250$

حالت دوم: ($P=2$ مجموع توان دوم انحرافات نسبی حداقل شود)

$$\begin{aligned} Min \quad Z &= \left[\frac{1{,}300{,}000-(4000x_1+3000x_2)}{1{,}300{,}000}\right]^2+\left[\frac{250-x_1}{250}\right]^2 \\ st:& \\ & 2x_1+x_2 \le 500 \\ & x_1+x_2 \le 400 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$x_1=230/7$ ، $x_2=38/6$ ، $f_1=1{,}039{,}000$ ، $f_2=230/7$

روش پنجم:

برنامه‌ریزی آرمانی

بهترین و پراستفاده‌ترین روش

Goal Programming (GP)

تفاوت‌های بین GP و LP

شرح	LP	GP
اهداف	یک هدف اولیه ـ که باید حداکثر یا حداقل شود.	تمامی اهداف (آرمان‌ها) رتبه‌بندی می‌شوند.
محدودیت‌ها	انعطاف‌ناپذیر، هیچ گونه انحرافی مجاز نیست.	منعطف، انحراف‌ها پذیرفتنی بوده و محدودیت‌ها شل می‌شوند.
هدف	حداکثر (حداقل) کردن مقدار تابع هدف اولیه	حداقل کردن مجموع انحراف‌های نامطلوب (که بر حسب اهمیت‌شان وزن گرفته‌اند)
مقصود	بهینه‌سازی	رضایت‌بخشی
برنامه‌های رایانه‌ای	خیلی کارا، بسته‌های نرم‌افزاری مختلف	غیر کارا، محدودی بسته‌های نرم‌افزاری
کاربردها	زیاد و متنوع	در حال افزایش

Goal Programming ⟶ (Goal) آرمان یا

Linear programming ⟶ (hard) محدودیت‌های سخت

مفاهیم برنامه‌ریزی آرمانی

LP ⟶ متغیرهای تصمیم ⟶ تابع هدف ⟶ محدودیت‌های سخت

GP ⟶ متغیرهای تصمیم ⟶ تابع هدف ⟶ محدودیت‌های سخت ⟶ محدودیت‌های سیستم ⟶ آرمانی

شالوده‌ی GP بر اساس سه مفهوم است:

الف) انحراف‌ها

ب) اولویت‌بندی آرمان‌ها

ج) ابعاد آرمان‌ها

Goal 1: سود $\geq 10{,}000{,}000$

سود $= 11{,}000{,}000$ ⟶ انحراف بیشتر محقق d^+

سود $= 9{,}000{,}000$ ⟶ انحراف کمتر محقق d^-

سود $+ d^- - d^+ = 10{,}000{,}000$ ⟶ انحراف نامطلوب = انحراف کمتر محقق ⟸ d^-

سود ↓ $9{,}000{,}000$، d^- ↓ ?

$\min Z = P_3 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_1 d_3^- + P_1 d_3^+$ ⟶ P یک ضریب برای رعایت ترتیب اولویت‌هاست. می‌توان به جای P از وزن‌ها استفاده کرد.

$0.5 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.2$

اضافه کاری ≤ 1000

اضافه کاری $+ d^- - d^+ = 1000$

۹۰۰ ✓ ⟶ انحراف کمتر محقق

۱۱۰۰ ✓ ⟶ انحراف بیشتر محقق : انحراف نامطلوب ✓

سطح موجودی $+ (d^- - d^+) = 20$

۱۸ ✓ ⟶ انحراف کمتر محقق ⟶ نامطلوب

۲۲ ✓ ⟶ انحراف بیشتر محقق ⟶ نامطلوب

انحراف‌ها مقادیری هستند که آرمان‌ها از مقدار مورد نظر خود کمتر (یا بیشتر) محقق شده‌اند. فرض کنید سه آرمان به صورت زیرند:

مهم:
$\geq \longrightarrow d^-$
$\leq \longrightarrow d^+$
$= \longrightarrow d^-, d^+$

۱ـ کسب سودی معادل ۱۰ میلیون تومان در هرماه.

۲ـ اضافه کاری ماهانه از ۱۰۰۰ ساعت بیشتر نشود.

۳ـ سطح موجودی دقیقاً معادل ۲۰ واحد باشد.

آرمانی = ۱۰٬۰۰۰٬۰۰۰

$30000x_1 + 10000x_2$

(۲۰۰ و ۷۰۰) ⟶ ۱۳٬۰۰۰٬۰۰۰ > ۱۰٬۰۰۰٬۰۰۰
انحراف بیشتر محقق

(۲۰۰ و ۳۰۰) ⟶ ۹٬۰۰۰٬۰۰۰ < ۱۰٬۰۰۰٬۰۰۰
انحراف کمتر محقق (نامطلوب) ← در سود

انحراف‌های بیشتر محقق[1] میزانی را اندازه‌گیری می‌کنند که بیشتر از مقدار آرمان است. این انحراف را با متغیر d_i^+ نشان می‌دهیم.

انحراف‌های کمتر محقق[1] میزانی را اندازه‌گیری می‌کنند که کمتر از مقدار آرمان بوده‌است[2]. این انحراف‌ها را با d_i^- نشان می‌دهیم.

انحراف‌های مطلوب و نامطلوب. انحراف می‌تواند مطلوب یا نامطلوب باشد. برای نمونه در مثال سود، d^+ مطلوب و d^- نامطلوب است. در مثال اضافه‌کاری d^+ نامطلوب و d^- مطلوب است. در مورد سطح موجودی هر دو d^+ و d^- نامطلوب است زیرا ما را از آرمان دقیقاً ۲۰ واحد دور می‌کند. در همه‌ی موارد، روابط زیر را مشاهده می‌کنیم:

انحراف‌های نامطلوب	نوع محدودیت
d_i^-	$\geq$
d_i^+	$\leq$
d_i^+ و d_i^-	$=$

مهم

بر طبق تعریف‌مان، کمتر محقق زمانی نامطلوب است که با محدودیت $\geq$ مواجه باشیم. هم‌چنین بیشتر محقق هنگامی نامطلوب است که با محدودیت $\leq$ مواجه باشیم. در حالت‌های (=) هم بیشتر و هم کمتر محقق نامطلوب هستند.

ب) اولویت‌بندی آرمان‌ها

۱. **رتبه‌بندی ترتیبی.** در این روش آرمان‌ها بر حسب اهمیت‌شان فهرست می‌شوند، از P_1 (اول حرف *Priority*) برای نشان دادن شماره‌ی اولویت استفاده می‌کنیم، برای نمونه P_1 نشان می‌دهد که آرمان مورد نظر از بیشترین اهمیت برخوردار بوده و انحراف نامطلوب از آن در ابتدا باید حداقل شود. P_2 نشان می‌دهد آرمان مورد نظر از اولویت دوم برخوردار است، و به همین ترتیب.

۲. **رتبه‌بندی اصلی.** در این روش وزن مشخصی به هر یک از انحرافات داده می‌شود. این وزن‌ها اهمیت نسبی هر انحراف را نشان می‌دهند.

۳. **ترکیبی از این دو.** این روش زمانی‌که تابع هدف معرفی می‌شود، تشریح خواهد شد.

ج) ابعاد آرمان‌ها

هر تابع هدف مدل GP به دنبال آن است که مجموع انحراف‌های نامطلوب موزون را برحسب اهمیت‌شان حداقل کند. با این وجود اگر ابعاد (مقیاس) هر آرمانی با دیگری متفاوت باشد چنین حاصل جمعی ممکن است مورد توجه نباشد. برای نمونه اگر d_1 بیانگر انحراف از سود (برحسب ریال)، d_2 بیانگر انحراف از اضافه‌کاری (برحسب ساعت)، و d_3 نشانگر انحراف از میزان موجودی انبار (بر حسب واحد کالا) باشند، در این شرایط مناسب‌ترین روش، رتبه‌بندی ترتیبی است.

ساختار برنامه‌ریزی آرمانی

مدل GP متشکل از ۴ جز به قرار زیر است:

الف) متغیرهای تصمیم،

ب) محدودیت‌های سیستمی،

ج) محدودیت‌های آرمانی،

د) تابع هدف.

الف) متغیرهای تصمیم

متغیرهای تصمیم مدل GP همانند متغیرهای تصمیم مدل LP هستند. متغیرهای تصمیم، متغیرهایی هستند که تصمیم‌گیرنده درصدد تعیین مقدار آن‌هاست. برای نمونه در مساله‌ی ترکیب تولید، میزان تولید هر محصول یک متغیر تصمیم است. در مساله‌ی تبلیغات، تعداد آگهی در هر رسانه یک متغیر تصمیم تلقی می‌شود، و در مساله‌ی ترکیب فلزات میزان استفاده از هر فلز در ترکیب مورد نظر یک متغیر تصمیم است.

ب) محدودیت‌های سیستمی

محدودیت‌های سیستمی مدل GP همانند محدودیت‌های مدل LP هستند، یعنی امکان تخطی از چنین محدودیت‌هایی وجود ندارد و جواب مساله (مقدار متغیرهای تصمیم) باید در آن‌ها صدق کند. برای مثال اگر در مساله‌ی تبلیغات میزان بودجه جهت تبلیغ محدود به مبلغی مشخص است و امکان تبلیغ با صرف هزینه‌ای بیش از آن مبلغ به هیچ عنوان امکان‌پذیر نباشد، این محدودیت (بودجه)، محدودیتی سیستمی خواهد بود. در حل مساله، محدودیت‌های سیستمی قبل از هر نوع محدودیت آرمانی باید مورد توجه قرار گیرند.

ج) محدودیت‌های آرمانی

محدودیت‌های آرمانی سطوح مورد نظر از هر هدف را نشان می‌دهند.

کسب سودی معادل ۱۰ میلیون تومان مورد نظر است. متغیرهای تصمیم میزان تولید هر محصول A ، B ، و C است. هر واحد محصول A ، B ، و C به ترتیب ۰/۵، ۰/۲، و ۰/۱ میلیون تومان سود دارد. محدودیت آرمانی مربوطه را بنویسید.

⟸ $\boxed{0/5x_A + 0/2x_B + 0/1x_C \geq 10}$

ولی در برنامه‌ریزی آرمانی، که انحراف از ۱۰ میلیون تومان پذیرفتنی است، این گونه خواهد بود:

⟸ $\boxed{0/5x_A + 0/3x_B + 0/1x_C + d_1^- - d_1^+ = 10}$

علامت $\geq$ را برداشته و به جای آن $(d^- - d^+)$ + می‌نویسیم.
در سود d^+ مطلوب ماست.

$\min z = d^-$ $\to$ $= 0$ تلاش تا حد امکان به سمت

در مورد محدودیت آرمانی پیش ۳ حالت وجود دارد:

الف) مقدار سود $(0/5x_A + 0/2x_B + 0/1x_C)$ دقیقاً ۱۰ میلیون تومان باشد که در این صورت هر دو متغیر انحرافی صفر می‌شوند $(d_1^- = d_1^+ = 0)$.

ب) مقدار سود $(0/5x_A + 0/2x_B + 0/1x_C)$ کمتر از ۱۰ میلیون تومان باشد (کمتر محقق)، برای مثال ۸ میلیون تومان، که در این صورت متغیر انحرافی d_1^- مقدار مثبت و d_1^+ مقدار صفر خواهد گرفت $(d_1^- = 2, d_1^+ = 0)$. $8 + d_1^- - d_1^+ = 10 \to d_1^- - d_1^+ = 10 - 8 = 2$

ج) مقدار سود $(0/5x_A + 0/2x_B + 0/1x_C)$ بیشتر از ۱۰ میلیون تومان باشد (بیشتر محقق)، برای مثال ۱۲ میلیون تومان؛ که در این صورت متغیر انحرافی d_1^- مقدار صفر و d_1^+ مقدار مثبت خواهد گرفت. $12 + d_1^- - d_1^+ = 10 \to d_1^- - d_1^+ = -2$

د) تابع هدف

تابع هدف در مدل GP به گونه‌ای تهیه می‌شود که مجموع وزنی انحراف‌های نامطلوب را حداقل کند. بدین جهت، ساختار تابع هدف بستگی به سیستم وزن‌دهی به آرمان‌ها دارد که حالت‌های زیر برای آن قابل تصور است:

۱. مساله‌ای با یک آرمان. در این حالت تابع هدف می‌تواند به گونه‌ی زیر باشد:

$$Min\ Z = d_1^+$$

که d_1^+ انحراف نامطلوب است (اگر d_1^- انحراف نامطلوب باشد، تابع هدف $Z = d_1^-$ می‌شود، اگر هم d_1^- و هم d_1^+ نامطلوب باشد، $Z = d_1^- + d_1^+$ خواهد شد).

۲. چند آرمان، رتبه‌بندی ترتیبی. در این حالت تابع هدف به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Min\ Z = p_1 d_1^+ + p_2 d_2^- + p_3 d_3^- + \dots$$

که p_i معرف اولویت iام است (و p_1 مهم‌ترین اولویت را نشان می‌دهد)، برای مثال $p_1 d_1^+$ نشان می‌دهد که اولویت اول حداقل کردن d_1^+ است. $p_2 d_2^-$ نشان می‌دهد که اولویت دوم حداقل کردن d_2^- است.

چند حالت مختلف برای آرمانی که دو متغیر انحرافی نامطلوب دارد قابل تصور است:

نخست، وضعیتی همانند $p_1 d_1^- + p_2 d_1^+$ نشان می‌دهد که هر دو متغیر انحرافی آرمان اول نامطلوبند، ولی اولویت با d_1^- است. یعنی ابتدا باید d_1^- حداقل شود، سپس d_1^+.

دوم، وضعیتی همانند $p_1(d_1^- + d_1^+)$ نشان می‌دهد که هر دو متغیر انحرافی آرمان اول نامطلوبند، مجموع این دو باید حداقل شود. ولی هیچکدام از d_1^- و d_1^+ بر دیگری برتری ندارد.

۳. چند آرمان، استفاده از مقیاس اصلی. در این حالت وزن خاصی به هر متغیر انحرافی نامطلوب داده می‌شود، سپس با هم جمع می‌شوند. برای نمونه

$$Min\ Z = 15d_1^- + 10d_2^+ + 8d_3^- + 10d_3^+$$

این حالت زمانی به کار می‌رود که متغیرهای انحرافی دارای واحد اندازه‌گیری یکسانی باشند (برای نمونه همه‌ی انحراف‌ها بر حسب ریال باشند)، و گرنه جمع چند واحد ناهمگن (برای مثال ریال و سهم بازار) محلی از إعراب نخواهد داشت. نکته‌ی دیگر در این حالت، پیدا کردن وزن انحراف‌ها است که کار ساده‌ای نخواهد بود. (جواب مدل به شدت تحت تاثیر این وزن‌ها قرار خواهد گرفت).

۴ـ چند آرمان، استفاده از رتبه‌بندی ترتیبی و اصلی. این حالت ترکیبی از دو حالت پیش (حالت‌های ۲و۳) است. برای نمونه در تابع هدف:

$$Min\ Z = p_1d_1^+ + p_2d_2^+ + 3p_3d_3^- + 2p_3d_3^+ + p_4d_4^-$$

چهار آرمان هست که آرمان سوم به گونه‌ای است که هر دو متغیر انحرافی آن نامطلوبند. انحراف منفی از آرمان سوم (d_3^-)، $\frac{3}{2}=1/5$ برابر انحراف مثبت (d_3^+) اهمیت دارد. ضرایب برای متغیرهای انحرافی آرمان سوم از نوع اصلی و به طور کلی برای چهار نوع آرمان از نوع ترتیبی است (آرمان اول از اولویت بالاتر و آرمان چهارم از کمترین اولویت برخوردار است). می‌توانستیم تابع هدف فوق را به گونه‌ی زیر نیز نمایش دهیم:

$$Min\ Z = p_1d_1^+ + p_2d_2^+ + p_3(3d_3^- + 2d_3^+) + p_4d_4^-$$

$$Min\ Z = p_1d_1^+ + p_2d_2^- + p_3(5d_3^- + 2d_3^+ + 3d_4^+ + 4d_5^+)$$

د چند آرمان که دارای اهمیت یکسانند. اگر آرمان‌ها دارای اهمیت یکسان باشند، تابع هدف را می‌توان صرفاً با جمع‌زدن متغیرهای انحرافی نامطلوب تهیه کرد. برای مثال

$$Min\ Z = d_1^+ + d_2^- + d_3^+ + d_4^+$$

نوجه: یاد آوری می‌شود در صورتی می‌توان چنین جمع ساده‌ای را به کار برد که همه‌ی آرمان‌ها دارای واحد اندازه‌گیری یکسان (برای نمونه ریال) باشند.

مثال های مدلسازی برنامه ریزی آرمانی

۲۷

مساله‌ی ساخت تسهیلات ورزشی. شورای شهر به شهرداری این اجازه را داده است که با توجه به بودجه ۳ میلیارد تومانی، تسهیلات ورزشی شهر را توسعه دهد. چهار نوع مختلف تسهیلات توسط شهروندان درخواست شده است که بدین قرارند: زمین بسکتبال، زمین فوتبال، زمین تنیس، و استخر شنا. تقاضاهای مختلف از گروه‌های مختلف شهر ۶ عدد زمین بسکتبال، ۴ زمین فوتبال، ۱۰زمین تنیس، و ۱۲ استخر شنا بوده‌است. برخی از اطلاعات در مورد تسهیلات ورزشی در جدول ۳-۲ آورده شده است.

شهرداری ۴۵ هکتار زمین در اختیار دارد، و اولویت‌هایی را برای آرمان‌های زیر قایل شده‌است:

P_1: شهرداری مایل است تمامی بودجه صرف تسهیلات ورزشی شود.

P_2: شهرداری مایل است که با توسعه‌ی تسهیلات در هر هفته ۱۰,۰۰۰ نفر یا بیشتر از آنها استفاده کنند.

P_3: شهرداری می‌خواهد که حتی‌الامکان زمین لازم از ۴۵ هکتار زمین موجود بیشتر نشود.

P_4: اگر لازم شد زمین بیشتری به کار برده شود، مایل است زمین اضافی محدود به ۱۰ هکتار باشد.

P_5:شهرداری مایل است که تمامی تقاضاهای شهروندان را برآورده کند. ولی این اولویت باید متناسب با تعداد متوسط استفاده‌کنندگان از هر نوع تسهیلات وزن‌دهی شود.

تقاضا برای تسهیلات

x_1 = ۶ زمین بسکتبال

x_2 = ۴ 〃 فوتبال

x_3 = ۱۰ 〃 تنیس

x_4 = ۱۲ استخر شنا

جمع تسهیلات ⩾ ۱۴

کل بودجه ⩽ ۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

آرمان ۱ : ۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ = کل بودجه

〃 ۲ : تعداد استفاده کنندگان ⩾ ۱۰,۰۰۰

〃 ۳ : زمین لازم ⩽ ۴۵

〃 ۴ : ۱۰ ⩾ ۴۵ - زمین لازم (زمین اضافی)

〃 ۵ : زمین بسکتبال ⩾ ۶، 〃 فوتبال ⩾ ۴

جدول ۳-۲. اطلاعات تسهیلات ورزشی برای هر واحد

تسهیلات	هزینه (میلیون تومان)	مساحت (هکتار)	متوسط استفاده‌کنندگان (نفر در هفته)
زمین بسکتبال	۲۵۰	۳	۶۰۰
زمین فوتبال	۱۰۰	۱۰	۱۲۰۰
زمین تنیس	۵۰	۲	۵۰۰
استخر شنا	۲۰۰	۲	۱۰۰۰

و سرانجام این که شهرداری باید دست‌کم ۱۴ تسهیلات را احداث کند و از بودجه بیشتر نشود. این محدودیت‌ها تخطی‌پذیر نیست (محدودیت‌ها سیستمی است). مدل برنامه‌ریزی آرمانی را برای این مساله طراحی کید.

$$\min Z = d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_3^+ + d_4^+ + d_5^- + d_6^- + d_7^- + d_8^-$$

متغیرهای تصمیم

x_1: تعداد زمین بسکتبال

x_2: تعداد زمین فوتبال

x_3: تعدادزمین تنیس

x_4: تعداد استخر شنا

محدودیت‌های سیستمی

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 14$

2) $250x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 200x_4 \leq 3000$

محدودیت‌های آرمانی

$P_1)\ 250x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 200x_4 + d_1^- - d_1^+ = 3000$

(توجه کنید که d_1^+ به دلیل محدودیت سیستمی صفر خواهد شد و d_1^- نامطلوب است.)

$P_2)\ 600x_1 + 1200x_2 + 500x_3 + 1000x_4 + d_2^- - d_2^+ = 10{,}000$

(d_2^- نامطلوب است)

$P_3)\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 2x_4 + d_3^- - d_3^+ = 45$

(d_3^+ نامطلوب است)

محدودیت این آرمان را به یکی از شکل‌های زیر می‌توان نوشت:

$P_4)\ (3x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 45 + d_4^- - d_4^+ = 10$ یا $d_3^+ + d_4^- - d_4^+ = 10$

$P_5)$
$x_1 + d_5^- - d_5^+ = 6$ (d_5^- نامطلوب است)
$x_2 + d_6^- - d_6^+ = 4$ (d_6^- نامطلوب است)
$x_3 + d_7^- - d_7^+ = 10$ (d_7^- نامطلوب است)
$x_4 + d_8^- - d_8^+ = 12$ (d_8^- نامطلوب است)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 14$

$250x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 200x_4 \leq 3000$

تابع هدف در تابع هدف متغیرهای انحرافی نامطلوب آرمان ۵ بر حسب تعداد متوسط استفاده‌کنندگان از تسهیلات، ضریب (وزن) می‌گیرند:

$$Min\ Z = p_1 d_1^- + p_2 d_2^- + p_3 d_3^+ + p_4 d_4^+ + p_5(6d_5^- + 12d_6^- + 5d_7^- + 10d_8^-)$$

چنان‌چه مشخص است تابع هدف از پنج آرمان تشکیل شده‌است که از نوع رتبه‌بندی ترتیبی‌اند در آرمان پنجم از رتبه‌بندی اصلی (تعداد استفاده‌کنندگان که برحسب ۱۰۰ نفر

حل مسایل GP : روش ترسیمی

مسایلی را که دارای دو متغیر تصمیم باشند می‌توان با روش ترسیمی حل کرد.

مدل GP زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

$$Min\ Z = p_1 d_1^- + p_2 d_2^+ + p_3 d_3^+ + p_4 d_4^-$$

$St:$

(استفاده از ماشین‌آلات - بر حسب ساعت) $14x_1 + 10x_2 \geq 140$ ← $14x_1 + 10x_2 = 140$ ، ($x_1=10$ ، $x_2=14$)

(سود بر حسب میلیون ریال) $30x_1 + 70x_2 + d_1^- - d_1^+ = 420$ ← $30x_1 + 70x_2 = 420$ ، ($x_1=14$ ، $x_2=6$)

(حداکثر تقاضای محصول ۱ برحسب تن) $x_1 + d_2^- - d_2^+ = 12$ ← $x_1 = 12$

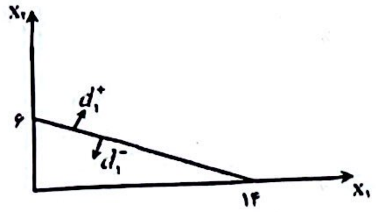
(بودجه بر حسب میلیون ریال) $300x_1 + 500x_2 + d_3^- - d_3^+ = 6000$ ← $300x_1 + 500x_2 = 6000$ ، ($x_1=20$ ، $x_2=12$)

(حداقل تقاضای محصول ۲ بر حسب تن) $x_2 + d_4^- - d_4^+ = 16$

$x_1, d_i^-, d_i^+ \geq 0$

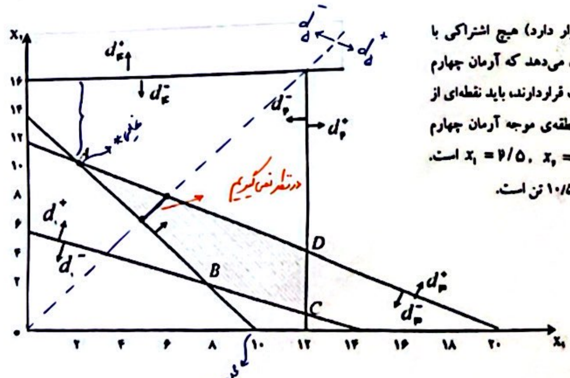
نقطه (۰،۰) را در معادلات تست می‌کنیم مثلاً: $30x_1 + 70x_2 = 420 \xrightarrow{(0,0)} 0 \neq 420 \longrightarrow 30x_1 + 70x_2 + d_1^- - d_1^+ = 420$

نحوه تعیین منطقه موجه محدودیت های آرمانی



شکل ۲-۲. محدودیت سود

$$30x_1 + 70x_2 + d_1^- - d_1^+ = 420$$



منطقه‌ی موجه مربوط به این آرمان (که در اولویت آخر قرار دارد) هیچ اشتراکی با منطقه‌ی موجه پیش (چهار ضلعی $ABCD$) ندارد. این امر نشان می‌دهد که آرمان چهارم به طور کامل محقق نمی‌شود. چون آرمان‌های پیشین در اولویت قراردارند، باید نقطه‌ای از $ABCD$ را انتخاب کنیم که کمترین فاصله (انحراف) را با منطقه‌ی موجه آرمان چهارم داشته باشد. این نقطه، نقطه‌ی A است که مختصات آن $x_2 = 10/5$ ، $x_1 = 2/5$ است. بنابراین میزان تولید محصول اول برابر ۲/۵ و محصول دوم برابر ۱۰/۵ تن است.

$$x_2 + d_4^- - d_4^+ = 16$$

$$10/5 + d_4^- - 0 = 16 \rightarrow d_4^- = 5/5$$

* اگر محدودیت دیگری اضافه می‌شد که d_5^+ و d_5^- داشت و باید $d_5^- = d_5^+$ در اینصورت چون پاسخ نهایی را تغییر می‌دهد و اولویت آن از d_4 کمتر است دیگر مورد بررسی قرار نخواهد گرفت.

$$x_1 - x_2 + d_5^- - d_5^+ = 0$$

$$\underbrace{(30 \times 2/5)}_{75} + \underbrace{(70 \times 10/5)}_{735} = 420$$

$$75 + 735 = 810 \Rightarrow d_1^- = 0 ,\ d_1^+ = 390$$

$$(300 \times 2/5) + (500 \times 10/5) = 6000$$

$$d_2^- = 9/5 ,\ d_2^+ = 0$$

$$d_3^- = d_3^+ = 0$$

$$10/5 \geq 16$$

$$d_4^- = 16 - 10/5 = 5/5$$

$$14x_1 + 10x_2 = 14(2/5) + 10(10/5) = 140$$

یعنی میزان به‌کارگیری ماشین‌آلات ۱۴۰ (ساعت) است.

$$30x_1 + 70x_2 + d_1^- - d_1^+ = 420$$
$$30(2/5) + 70(10/5) + 0 - d_1^+ = 420 \rightarrow d_1^+ = 390$$

یعنی سودمان ۳۹۰ (میلیون ریال) از میزان هدف (۴۲۰ میلیون ریال) بیشتر خواهد شد. سود به‌دست آمده ۸۱۰ میلیون ریال می‌شود.

$$x_1 + d_2^- + d_2^+ = 12$$
$$2/5 + d_2^- + 0 = 12 \rightarrow d_2^- = 9/5$$

حداکثر تقاضای محصول اول ۱۲تن است که ما ۲/۵ تن تولید می‌کنیم، یعنی ۹/۵ تن زیر سقف.

$$300x_1 + 500x_2 + d_3^- - d_3^+ = 6000$$
$$300(2/5) + 500(10/5) = 6000 \rightarrow d_3^-, d_3^+ = 0$$

یعنی میزان هزینه‌ای که جهت تولید صرف خواهد شد دقیقاً برابر با بودجه‌ی ۶,۰۰۰ (میلیون ریالی) بوده و انحراف از بودجه صفر است.

مثال: در مثال قبل، فرض کنید آرمان پنجمی به صورت زیر به مساله اضافه شود:

$$x_1 - x_2 + d_5^- - d_5^+ = 0$$ (میزان تولید یکسان دو محصول)

که d_5^-, d_5^+ هر دو نامطلوب باشند. مشخص نمایید اضافه شدن این آرمان چه تاثیری بر جواب بهینه خواهد گذاشت؟

حل

تابع هدف جدید به صورت زیر خواهد شد:

$$Min\ Z = p_1d_1^- + p_2d_2^+ + p_3d_3^+ + p_4d_4^- + p_5(d_5^- + d_5^+)$$

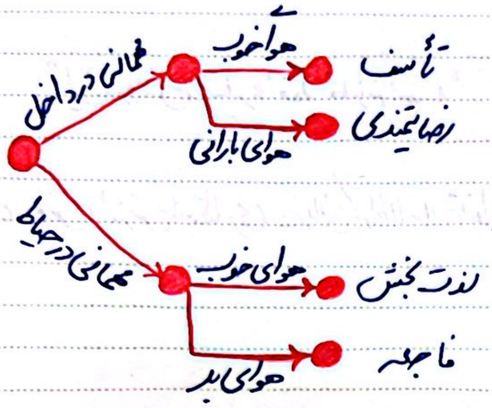
مشخص است به دلیل این‌که آرمان با اهمیت بیشتر(یعنی آرمان چهارم) به طور کامل برآورده نشده‌است، این آرمان (آرمان پنجم) بررسی نخواهدشد و جواب بهینه‌ی پیش $(x_1 = 2/5, x_2 = 10/5)$ تغییر نخواهد کرد. میزان انحراف از این آرمان پنجم:

$$x_1 - x_2 + d_5^- - d_5^+ = 0$$
$$2/5 - 10/5 + d_5^- - 0 = 0 \rightarrow d_5^- = 8$$

یعنی محصول دوم ۸ تن بیشتر از محصول اول تولید می‌شود.

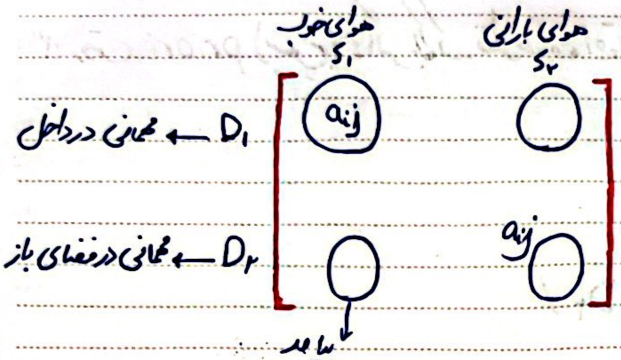
تصمیم‌گیری تحت ریسک :

«جدول عایدی»



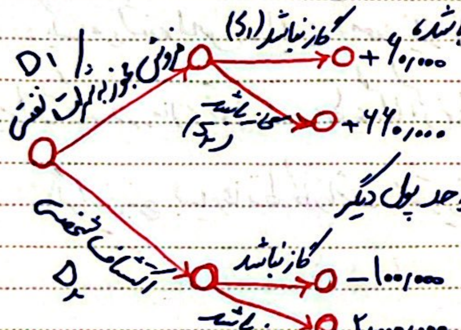
اقدام \ حالت طبیعت	S_1	S_2	...	S_m
D_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
D_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
⋮	⋮	⋮		⋮
D_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

عایدی حاصل از انجام D_i در حالت S_j ، a_{ij}



a_{ij} ← پیامد حاصل از انتخاب اقدام i درصورتی که در شرایط j قرار بگیریم.

* مثال : یک شرکت بزرگ نفتی به فردی که صاحب زمین بزرگی در یک ناحیه می‌باشد، پیشنهاد کرده است که در ازای دریافت ۶۰ هزار واحد پول، مجوز اکتشاف زمین برای گاز را به این شرکت بدهد. اگر در این زمین گاز یافت بشود، شرکت نفتی ۶۰۰ هزار واحد پول دیگر بابت استخراج گاز به صاحب زمین خواهد پرداخت ولی اگر گاز یافت نشود مبلغ ۶۰ هزار واحد پول اولیه پس گرفته نخواهد شد. صاحب زمین پیشنهاد شرکت نفتی را نشانه خوبی از وجود گاز در زمین خود می‌داند و به همین دلیل به فکر افتاده است که زمین را با سرمایه شخصی خود اکتشاف نماید. هزینه اکتشاف شخصی صد هزار واحد پول می‌باشد که علاوه در صورت یافت نشدن گاز در زمین، سوخت خواهد شد ولی در صورت وجود گاز در زمین، صاحب زمین سود خالص معادل ۲ میلیون واحد پول خواهد داشت. بهترین تصمیم برای این فرد چیست؟



* تا زمانیکه احتمال وقوع S_1 و S_2 را ندانیم، تعیین بهترین تصمیم میسر نیست.

مکارم تو به آفاق می‌برد شاعر — از او وظیفه و زاد سفر دریغ مدار

انواع روش ها برای تعیین بهترین اقدام:

۱) روش ماکسی مین Max(min):

$$\begin{array}{c} \\ D_1 \\ D_2 \end{array}\begin{array}{cc} S_1 & S_2 \\ \left[\begin{array}{cc} 60,000 & 660,000 \\ -100,000 & 2,000,000 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \rightarrow 60,000 \checkmark \\ \rightarrow -100,000 \end{array}$$

"این روش بسیار محافظه کارانه است"

۲) روش ارزش انتظاری: زمانی که اطلاعات نداریم، از تابع توزیع یکنواخت (که کمترین واریانس را دارد) استفاده می کنیم.

$$D_1 = 60,000 \times \frac{1}{2} + 660,000 \times \frac{1}{2} = 360,000$$

$$D_2 = -100,000 \times \frac{1}{2} + 2,000,000 \times \frac{1}{2} = 950,000 \rightarrow D_2 \checkmark$$

۳) روش priori (پیشین): اگر با کمک نظر خبره، احتمالات subjective را داشته باشیم.

$p(S_1) = 0.4$ و $p(S_2) = 0.6$

$$D_1 = 0.4 \times 60,000 + 0.6 \times 660,000 = 420,000$$

$$D_2 = 0.4 \times (-100,000) + 0.6 \times (2,000,000) = 1,160,000 \rightarrow D_2 \checkmark$$

مثال: یک فروشنده لباس، لباس های مورد نیاز خود را از ۹ ماه جلوتر به یک تولیدی لباس سفارش می دهد. بزرگترین دغدغه این فروشنده این است که در زمان تحویل لباس ها، آیا آن ها مطابق روز خواهد بود یا خیر.

الف) اگر این فرد بسیار محافظه کار باشد، بهترین تصمیم وی چه خواهد بود؟

حالات طبیعت / اقدام	S_1 کاملاً مد روز	S_2 قابل قبول	S_3 کاملاً از مد افتاده
سفارش ندادن: D_1	-50	0	80
سفارش کم: D_2	-10	30	35
سفارش متوسط: D_3	60	45	-30
سفارش زیاد: D_4	80	40	-45

سطری مقایسه می کنیم.

اگر از روش دوم مدیریت: $p(S_1) = p(S_2) = p(S_3) = 0.33$

$D_1 \rightarrow 30 \times 0.33$

$D_2 \rightarrow 55 \times 0.33$

$D_3 \rightarrow 75 \times 0.33$

$D_4 \rightarrow 75 \times 0.33$ ✓ یکی از این دوتا

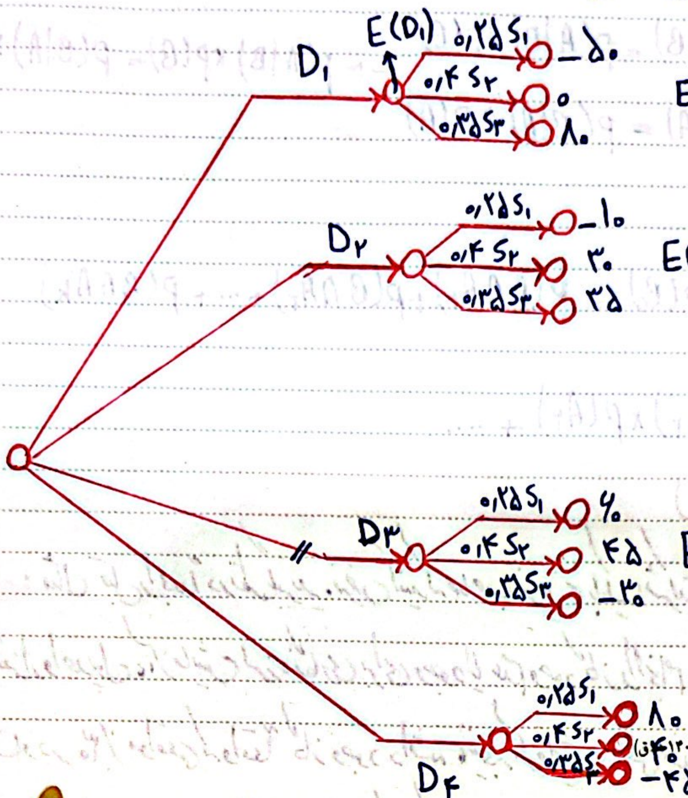
با استفاده از روش Max(min)

$D_1 : -50$ و $D_2 = -10$ و $D_3 = -30$ و $D_4 = -45 \Rightarrow D_2 \checkmark$

ای صبا نکهتی از کوی فلانی به من آر
زار و بیمار غمم راحت جانی به من آر

ب) اگر این فرد از تجارب سال های قبل خود به این نتیجه رسیده باشد که : $p(s_2)=0.4$ و $p(s_1)=0.25$ و $p(s_3)=0.35$.

با استفاده از روش priori بهترین تصمیم وی را تعیین نمائید.



$E(D_1)=0.25\times(-50)+0.4\times 0+0.35\times 80=15.5$

$E(D_2)=0.25(-10)+0.4(30)+(0.35)(35)=21.75$

$E(D_3)=0.25\times 60+0.4\times 45+0.35(-30)=22.5$ ✓

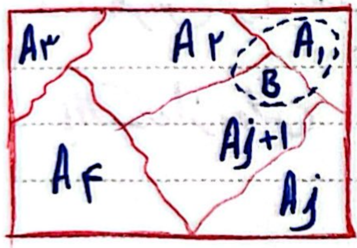
$E(D_4)=0.25\times 80+0.4\times 40+0.35(-45)=20.25$

پس از انجام آزمایش

رویکرد پسین (posteriori) : در این رویکرد، این امکان وجود دارد که ادعای خبره را مورد تست و آزمون قرار دهیم.

- در تصمیم گیری در شرایط priori ، احتمالات طبیعت به صورت داده ی ثابت و بدون تغییر در نظر گرفته می شوند اما اگر این امکان فراهم باشد که بتوان نسبت به درستی یا نادرستی این احتمالات و مقادیر آن ها، آزمایشی را ترتیب داد، مسئله را posteriori می نامند.

نتایج این آزمایش صد در صد کامل نیست و دارای خطا می باشد، به همین جهت از آزمون بیز برای تحلیل آن استفاده می گردد.



$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i)\times p(A_i)}{\sum_{j=1} p(B|A_j)\times p(A_j)}$$

اثبات:

$$\begin{cases} p(A\cap B) = p(A|B)\times p(B) \\ p(B\cap A) = p(B|A)\times p(A) \end{cases} \rightarrow p(A|B)\times p(B) = p(B|A)\times p(A)$$

$$\rightarrow p(A|B) = \frac{p(B|A)\times p(A)}{p(B)} \qquad p(B) = p(B\cap A_1) + p(B\cap A_2) + \cdots + p(B\cap A_k)$$

$$p(B) = p(B|A_1)\times p(A_1) + p(B|A_2)\times p(A_2) + \cdots$$

$$\Rightarrow p(B) = \sum_{j=1} p(B|A_j)\times p(A_j)$$