Notations

	معلوم	مجهول
عدد/ پارامتر	$a=2$	$x=?$
بردار	$a_{3\times1}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$	$x_{3\times1}=?=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$
ماتریس	$A_{3\times2}=\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}$	$X_{3\times2}=?=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{bmatrix}$
مجموعه	$A, B, \dots$	

$p \Rightarrow q$: آنگاه	$\in$: عضو	$\lvert A\rvert$: دترمینان (ماتریس)
$p \Leftrightarrow q$: اگر و فقط اگر		
$A \leftarrow 2$: قرار دادن (انتساب)	$\subset$: زیرمجموعه	$\mathbb{N}$: اعداد طبیعی
$=$: تساوی	$\forall$: به ازای هر	$\mathbb{R}$: اعداد حقیقی
$\equiv$: معادل (هم ارز)	$\exists$: وجود دارد	$a \in \mathbb{R}^2$: a بردار 2×1 از اعداد حقیقی است
$\simeq$: تقریب	⁝ : بطوریکه	$A \in \mathbb{R}^{2\times3}$: A ماتریس 2×3 از اعداد حقیقی است
$\sim$: نقیض	A^T : ترانهاده	$\sum_{i=1}^{6} = 1+2+\dots+6$
$:=$: تعریف	A^{-1} : معکوس	$\prod_{i=1}^{5} = 1\times2\times\dots\times5$
	$A^{\dagger}$: ژگر	$a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}_{n\times1}$
	2^A : مجموعه توانی	
	$\lvert\vec{A}\rvert$ (مجموعه) : اندازه مجموعه	$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix} = A$

Year: Month: Day: Subject:

$$\left.\begin{array}{l} A\in\mathbb{R}^{m\times n} \\ B\in\mathbb{R}^{n\times k}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, C\in\mathbb{R}^{m\times k}:\ C=AB$$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

○ ماتریس مربعی ← تعداد قطر = تعداد ستون $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

○ ترانهاده ماتریس (Transpose): ترانهاده ماتریس $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$، ماتریس $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$

است که آن را با A^T نمایش می دهیم. $b_{ij}=a_{ji}$

مثال: $A=\begin{bmatrix}2&3&0\\1&2&5\end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\\0&5\end{bmatrix}$

← ویژگی های ترانهاده:

- $(A^T)^T=A$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- $cA^T=(cA)^T$

○ ماتریس متقارن (symertic): ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ را متقارن گویند هرگاه $\underline{A^T=A}$

مثال: $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&3&2\\0&2&4\end{bmatrix}$

○ ماتریس قطری (diagnal):

هرگاه $i\neq j \Rightarrow d_{ij}=0 \rightarrow D^T=D$ (متقارن)

$$D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(2,3,5)$$

○ ماتریس همانی: ماتریس قطری که $\underline{d_{ii}=1}$ و با $I_{n\times n}$ نمایش می دهند.

$p \Rightarrow q$

اگر p، آنگاه q

q شرط لازم (necessary) برای p.

p شرط کافی (sufficient) برای q.

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

○ جدول درستی (Truth Table)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

○ زوج مرتب: دوتایی $a,b \in \mathbb{R}$ را زوج مرتب گویند و با (a,b) نشان می‌دهند.

$(a,b) \neq (b,a)$ $\{a,b\} = \{b,a\}$

$(a,b) = (b,a) \Rightarrow a = b$

○ ضرب دکارتی دو مجموعه (Cartesian product).

مجموعه A و B مفروضند،

$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$

مثال:

$A = \{1,2\}$, $B = \{4,5\}$

$A \times B = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5)\}$

ویژگی‌ها:

○ $|A \times B| = |A| \times |B|$

○ $A \times B \neq B \times A$

• رابطه: به مجموعه G که یک زیرمجموعه از ضرب دکارتی $A\times B$ باشد، یک رابطه از A به B گویند. (Relation)

مثال: $A=\{1,2,3\}$ $B=\{4,5\}$

• تابع (function): یک رابطه مانند F از A به B را تابع گویند و آن را با نماد $F:A\to B$ نشان می‌دهند هرگاه:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in F\\(c,d)\in F\\a=c\end{array}\right\}\Rightarrow b=d$$

مثال: برای نمونه رابطه G تعریف شده در فوق تابع نیست زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}(2,5)\in F\\(2,4)\in F\\2=2\end{array}\right\}, 4\neq 5$$

اگر بجای $(2,4)$ ، $(3,4)$ عضو G بود، در اینصورت G تابع بود.

مثال: رابطه‌ای از B به A مثال بزنید که تابع باشد.

$F:B\to A$

$F=\{(4,1),(5,2)\}$ یا $F(4)=1$, $F(5)=2$

• تابع یک به یک (one to one Injective): تابع $F:A\to B$ را یک به یک گویند هرگاه:

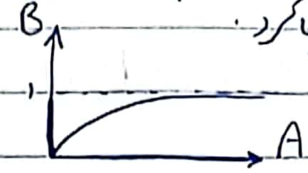
$$\left.\begin{array}{l}F(a)=b\\F(c)=d\\b=d\end{array}\right\}\Rightarrow a=c$$

مثال: تابع F تعریف شده در فوق یک به یک نیز هست، ولی تابع $F''=\{(1,5),(2,5),(3,4)\}$ یک به یک نیست.

$$\left.\begin{array}{l}F''(1)=5\\F''(2)=5\\5=5\end{array}\right\}\Rightarrow 1\neq 2$$

★ نکته: اگر بتوان از مجموعهٔ A به B تابع یک به یک تعریف کرد در اینصورت از مجموعهٔ B به A نیز تابع یک به یک وجود دارد به عبارتی گفته می‌شود معکوس یک تابع یک به یک خود تابعی یک به یک است.

• هم ارزی دو مجموعه: دو مجموعهٔ A و B را هم ارز گویند هرگاه تابعی یک به یک از A به B (یا از B به A) بتوان تعریف کرد.



مثال:

$A=\{a \mid a\in[0,\infty)\}$

$B=\{b \mid b\in[0,1)\}$

دو مجموعهٔ A و B هم ارزند زیرا تابع یک به یک $A\to B$ وجود دارد.

• مجموعهٔ نامتناهی (infinit set): مجموعهٔ A را نامتناهی گویند هرگاه با زیرمجموعه‌ای از خود مانند $B\subset A$ هم ارز باشد. مثال: A در مثال فوق

• مجموعهٔ متناهی (finite set): مجموعهٔ A متناهی است هرگاه نامتناهی نباشد.

• مجموعهٔ شمارا (countable set): مجموعهٔ A را شمارا گویند هرگاه با زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ هم ارز باشد. مثال: $A=\{-2,-1,0,1,2\}$

• مجموعهٔ ناشمارا (Uncountable Set): مجموعهٔ A را ناشمارا گویند هرگاه شمارا نباشد.

★ نکته:

• یک مجموعهٔ ناشمارا، نامتناهی است. ✓ $A=\{a \mid a\in[0,1]\}$ ، $B=\{b \mid b\in[0,\frac{1}{2}]\}$

• یک مجموعهٔ متناهی، شمارا است. ✓ $A=\{1,2\}$

• یک مجموعهٔ شمارا می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. $A_1=\{3\}$: متناهی ، $A_2=\{2a+1 \mid a\in\mathbb{N}\}$: نامتناهی

• یک مجموعهٔ نامتناهی می‌تواند شمارا یا ناشمارا باشد.

$B_1=\{2a+1 \mid a\in\mathbb{N}\}$: شمارا ، $B_2=\{b \mid b\in[0,1]\}$: ناشمارا

Year: ----- Month: ----- Day: ----- Subject: -----

• عملگر (operator) : تابعی است با نماد $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

مثال :

$+ \; f : 2,3 \to 5$

$\times \; g : 2,3 \to 6$

• میدان اعداد حقیقی (field) : مجموعه $\mathbb{R}$ با دو عملگر $+$ و $\times$ را میدان اعداد حقیقی گویند و آنرا با نماد $F(\mathbb{R},+,\times)$ نشان می دهند.

1) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\quad a+(b+c) = (a+b)+c$ $\quad$ شرکت پذیری

$a\times(b\times c) = (a\times b)\times c$

2) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\quad a+b = b+a$ $\quad$ جابجایی

$a\times b = b\times a$

3) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad a\times(b+c) = a\times b + a\times c$ $\quad$ توزیع پذیری

4) $\exists\, 0 \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$ $\quad 0+a = a$ $\quad$ عضو خنثی جمع

$\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ $\quad 1\times a = a$ $\quad$ عضو خنثی ضرب

★ نکته :

$b+a = 0$ $\qquad b\times a = 1$

قرینه a است $\qquad$ b معکوس است

• فضای برداری (vector space) : مجموعه V روی میدان اعداد حقیقی را

فضای برداری گویند هرگاه :

1) $\forall x,y \in V,\ x+y \in V$

$x+y = y+x$ $\qquad x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$

2) $\forall x,y,z \in V$ $\qquad (x+y)+z = x+(y+z)$

3) $\forall x \in V \quad \exists\, 0 \in V : x + 0 = x$

4) $\forall x \in V \quad \exists\, (-x) \in V : x + (-x) = 0$

5) $\forall x \in V,\ 1 \in \mathbb{R} \quad 1 \times x = x$

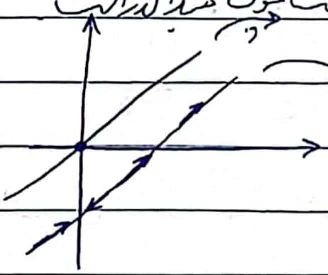
6) $\forall x \in V,\ a, b \in \mathbb{R} \quad (a \times b) \times x = a \times (b \times x)$

7) $\forall x, y \in V,\ a \in \mathbb{R} \quad a \times (x + y) = a \times x + a \times y$

8) $\forall x \in V,\ a, b \in \mathbb{R} \quad (a + b) \times x = a \times x + b \times x$

• هر زیرمجموعه از فضای برداری V که خود فضای برداری باشد را یک زیرفضای برداری گویند.

مثال:



یک زیرفضای برداری هست چون مبدأگذراست

یک زیرفضای برداری نیست چون ویژگی ۳ و ۴ را ندارد.

نکته: به منظور بررسی فضای برداری بودن یک مجموعه، چک کردن ۸ خاصیت فوق بعضاً وقت‌گیر است و کافی است مجموعه مورد نظر نسبت به جمع و ضرب بسته باشد یعنی:

$$\begin{cases} \forall x, y \in V & x + y \in V \\ \forall a \in \mathbb{R},\ x \in V & a \times x \in V \end{cases}$$

○ ترکیب خطی (linear Combination) : فضای برداری $\mathbb{R}^n$ مفروض است. بردار $a \in \mathbb{R}^n$ را ترکیب خطی از بردارهای $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ گویند هرگاه:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} : a = \alpha_1 b^{(1)} + \alpha_2 b^{(2)} + \dots + \alpha_m b^{(m)}$$

مثال:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(اینجا اصطلاحاً می‌گیم بردار $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ترکیب خطی از بردارهای $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ است)

* نکته: هر بردار دلخواه عضو $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از e_i ها نوشت

$$\mathbb{R}^n \ni e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{درایه } i \text{ ام}$$

مثال:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + 5\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} - 1\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3}$$

○ استقلال خطی: فضای برداری $\mathbb{R}^n$ مفروض است بردارهای $a^{(1)}, \dots, a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ را مستقل از هم گویند هرگاه:

$$\alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2 a^{(2)} + \dots + \alpha_m a^{(m)} = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

مثال:

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 5\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 0$$

* نکته: در فضای برداری $\mathbb{R}^n$، $e_1, e_2, \dots, e_n$ مستقل از هم هستند.

* نکته: اگر m بردار $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)}$ مستقل خطی باشند، به این معنی است که هیچ یک از این بردارها را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی بقیه بردارها نوشت.

برهان خلف: $a^{(i)} = \alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2 a^{(2)} + \dots + \alpha_{i-1} a^{(i-1)} + \alpha_{i+1} a^{(i+1)} + \dots + \alpha_m a^{(m)} = 0$

$\longrightarrow$ حداقل یکی از ضرایب غیر صفر باقی می‌ماند $\Rightarrow$ با فرض $\times$ $\Rightarrow$ حکم درست است

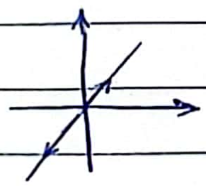
مثال: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ مستقل از هم نیستند چون می‌توانیم:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

* نکته: در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ حداکثر n بردار مستقل از هم وجود دارد.

○ بُعد: به حداکثر بردارهای مستقل از هم در یک فضای برداری بعد آن فضا گویند. (Dimension)

مثال: بعد $\mathbb{R}^n$ برابر n است.



خط گذرنده از مبدأ مختصات در فضای $\mathbb{R}^2$ دارای بعد 1 است.

○ پایه: اگر بعد فضای برداری V برابر n باشد، به هر n بردار مستقل از هم در آن فضا پایه گویند. (Base)

* نکته: پایه برای فضای برداری منحصر به فرد نیست ولی برای فضای برداری $\mathbb{R}^n$، e_iها معروف‌ترین پایه‌ها برای فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. البته می‌توان هر پایه دیگری را تعریف کرد.

* نکته: هر بردار در فضای برداری V را می‌توان با ترکیب خطی از پایه‌های آن فضا بدست آورد.

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$$

e_i ها معروف‌ترین پایه برای $\mathbb{R}^n$ هستند ولی می‌توان هر پایه‌ی کوتاه دیگری را تعریف کرد.

$$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

○ ترکیب آفینی (affine combination): فضای برداری V مفروض است

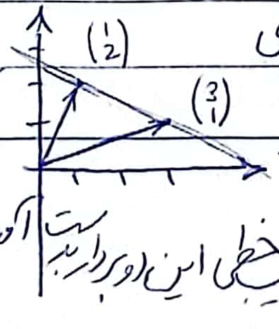
بردار $a\in V$ را ترکیب آفینی $a^{(1)},a^{(2)},\dots,a^{(n)}\in V$ گویند هرگاه:

$$\begin{cases}\exists\, \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m : a = \alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2 a^{(2)} + \dots + \alpha_m a^{(m)}\\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\end{cases}$$

مثال: همه ترکیب‌های آفینی دو بردار $a^{(2)}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$، $a^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ را بدست آورید.

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \underbrace{(1-\alpha_1)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\alpha_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix}1-3\\2-1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1+\alpha_2=1$$



بردار $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ مستقل از هم در فضای $\mathbb{R}^2$ هستند پس یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ می‌باشند.

پس هر بردار دیگری در $\mathbb{R}^2$ را می‌توان با ترکیب خطی این دو بردار بدست آورد.

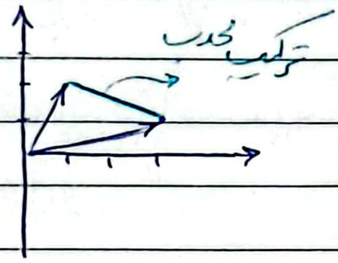
همه ترکیب‌های آفینی $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ خط گذرنده از دو نقطه $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ است.

* نکته: ترکیب آفین n نقطه متمایز در فضای $\mathbb{R}^n$ ابرصفحه‌ای است با بعد $(n-1)$ که از این n نقطه عبور می‌کند.

○ ترکیب محدب (Convex Combination): فضای برداری V مفروض است، $a \in V$ را ترکیب محدب $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)} \in V$ گویند هرگاه وجود داشته باشد:

$$\begin{cases} \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m : a = \alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2 a^{(2)} + \dots + \alpha_m a^{(m)} \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \qquad 0 < \alpha_i < 1 \end{cases}$$

مثال: ترکیب محدب دو بردار $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ؟

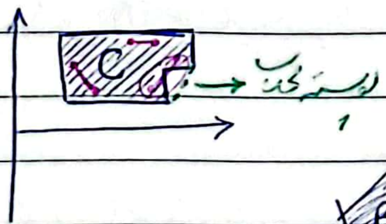


مثل مثال قبل:

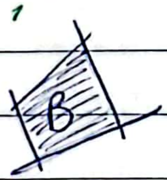
$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix}1-3\\2-1\end{pmatrix}$$

$$0 < \alpha_1 < 1$$

○ مجموعه محدب: (Convex Set): مجموعه ~~...~~ $C \subseteq V$ را محدب گویند هرگاه هر ترکیب محدب دو عضو متمایز C عضو C باشد.



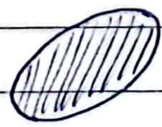
مثال: مجموعه C یک مجموعه محدب نیست.



اما مجموعه B مجموعه محدب است.

* هر (چندوجهی) یک مجموعه محدب است.

polytope / polyhedra



* D محدب است. (ellipsoid)

Year: ----- Month: ----- Day: ----- Subject: ------------

○ تابع متر: تابع $m: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را متر گوییم هرگاه:

1) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad m(x,y) \geq 0$

2) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad m(x,y) = 0 \iff x = y$

3) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad m(x,y) = m(y,x)$

4) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n \quad m(x,y) \leq m(x,z) + m(z,y)$

مثال: تابع $m(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$ یک متر است.

تابع $m(x,y) = |x_1-y_1| + \dots + |x_n-y_n|$ یک متر است زیرا می‌توان ۴ شرط تابع متر را برای آن نشان داد.

★ نکته: می‌توان نشان داد تابع

$$m(x,y) = \left(|x_1-y_1|^p + \dots + |x_n-y_n|^p\right)^{1/p}$$

برای $p \in \mathbb{N}$ یک متر است ← معروف‌ترین

$p=2$

$p=1$

⊛ تمرین امتیازی: برنامه‌ای بنویسید تا نمودار $m(x,y)=1$ نکته فوق را برای pهای مختلف در یک plot رسم کند (در فضای $\mathbb{R}^2$)

$p=1$

$p=2$

$p=3$

$\vdots$

$p \to \infty$

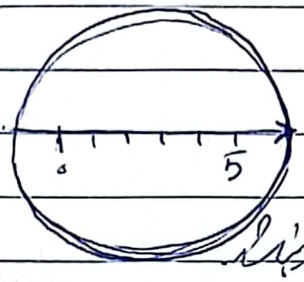
Shahab NOTEBOOK

○ گوی (Ball) : گوی به مرکز x و شعاع ε.

$$B_\varepsilon(x) = \{y : m(x,y) \le \varepsilon\}$$

مثال : $\mathbb{R}^2 : (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 \le \varepsilon^2$

○ مجموعه کراندار (Bounded Set) : مجموعه S را کراندار گویند هرگاه بتوان آن را با گوی به شعاع دلخواه محدود کرد.



مثال : $[0,5)$ مجموعه کراندار است.

○ مجموعه بی‌کران (unbounded) : مجموعه‌ای که کراندار نباشد.

○ نرم (norm) : تابع $n(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را نرم گویند هرگاه :

یه بردار می‌گیره — یه عدد می‌ده

1) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad n(x) \ge 0$

2) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad n(x+y) \le n(x) + n(y)$

3) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad n(\alpha x) = |\alpha|\, n(x)$

4) $n(x) = 0 \iff x = 0$

مثال : $|a| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ تعریف شود می‌توان نشان داد هر ۴ شرط فوق برقرار است.

★ نکته : نرم $n(x)$ را با نماد $\|x\|$ نمایش می‌دهند.

$$\|x\| = \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$ (نرم اقلیدسی با پایه 2)

چون اندیس ننوشتیم منظورمان 2 هست

$$\|x\|_p := \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ (نرم اقلیدسی)

* نکته: نشان دهید که اگر تابع $n(x)$ خواص ۴ گانه‌ی نرم را در فضای برداری V داشته باشد تابع متر برای آن فضا وجود دارد.

$$m(x,y) := n(x-y)$$

$$\|x-y\| = n(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$

روش: باید بری از اون ۴ شرط نرم به ۴ شرط متر برسی که بتونی نشون بدی تابع متر وجود داره.

* ⇐ فاصله‌ی دو بردار اندازه‌ی تفاضل آن دو بردار است.

* ⇐ اندازه‌ی یک بردار فاصله‌ی آن تا مبدأ مختصات است.

مثال: $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\|a\|_1 = ? = |2| + |5| + |-1| = 8$$

$$\|a\|_2 = ? = \sqrt{30} = 5.4$$

$$\|a\|_3 = ? = 5.11$$

$$\|a_4\| = ? = 5.03$$

$$\|a\|_\infty = \max_i \{|x_i|\} = 5$$

اثبات:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |x_{i^*}| \left(\left(\frac{|x_1|}{|x_{i^*}|}\right)^p + \dots + 1 + \dots + \left(\frac{|x_n|}{|x_{i^*}|}\right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_{i^*}| = \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\}$$

دو تا بردار میگیره — یه عدد حقیقی میده

ضرب داخلی (Inner product): $I(x,y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را تابع ضرب داخلی گوییم هرگاه:

1) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n \quad I(x+y,z) = I(x,z) + I(y,z)$

2) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R} \quad I(cx,y) = c\,I(x,y)$

3) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad I(x,y) = I(y,x)$

4) $\forall x \neq 0 \iff I(x,y) \neq 0$

$\forall x = 0 \iff I(x,y) = 0$

مثال: $\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 2\times0 + 5\times1 + (-1)2 = 3$

★ نکته: ① $I(x,y) = \langle x,y \rangle$ ② $\langle x,y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y$

چون ۲ شرط برقراره: مثلاً ۲ $\leftarrow \langle cx,y \rangle = (cx)^T y = cx^T y = c\langle x,y \rangle$

مثلاً ۴ $\leftarrow x^T x = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$

★ نکته: اگر تابع ضرب داخلی $I(x,y)$ در فضای V تعریف شده باشد، می‌توان برای آن فضا نرم تعریف کرد:

$$n(x) := \sqrt{\langle x,x \rangle}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x^T x}$$

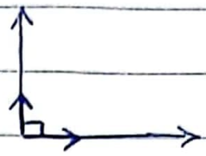
★ نکته: $\boxed{\|x\|_2^2 = x^T x}$

قضیه: اگر k بردار غیر صفر $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ دو به دو بر هم عمود باشند، این k بردار مستقل خطی هستند.

نکته: $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$

$\mathbb{R}^2$

$$\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \perp \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \iff 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$



اثبات قضیه: فرض: $v^{i} \perp v^{j} \quad i \neq j \in \{1, \dots, k\}$

حکم: $\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

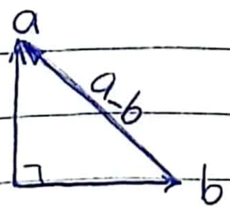
$$\langle v^{(1)}, \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_k v^{(k)} \rangle = \langle v_1, 0 \rangle = 0$$

$$\alpha_1 \langle v^{(1)}, v^{(1)} \rangle + \alpha_2 \cancelto{0}{\langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle} + \dots + \alpha_k \cancelto{0}{\langle v^{(1)}, v^{(k)} \rangle} = 0$$

$$\alpha_1 \underbrace{\langle v^{(1)}, v^{(1)} \rangle}_{} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$$

$v^{(1)}$ غیر صفره پس ضرب داخلی در خودش هم غیر صفر است.

یه اثبات برای اینکه ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم صفره:



طبق فیثاغورس:

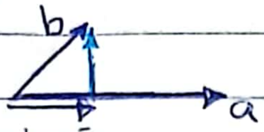
$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = \|a - b\|^2$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2$$

$$0 = -2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)$$

$$\boxed{0 = \langle a, b \rangle}$$

۰ تصویر یک بردار روی بردار (projection) :



تصویر b بر روی a $\; p = xa$

$$b - p \perp a \rightarrow \langle b-p, a\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle b - xa, a\rangle = 0$$

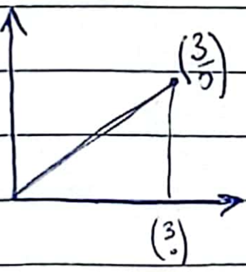
$$\Rightarrow \langle b, a\rangle - x\langle a, a\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\langle b,a\rangle}{\langle a,a\rangle} = \frac{b^T a}{a^T a}$$

$$p = xa = \frac{b^T a}{a^T a}\, a$$

مثال: تصویر بردار $b = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ را روی $a = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ بدست آورید.

$$p = \frac{\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \frac{6}{4}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \quad ①$$



نکته:

اینجوری عدد ترانهاده‌اش با خودش برابره

$$p = a\frac{(b^T a)^T}{a^T a} = \frac{a_{n\times 1}\, a^T_{1\times n}\, b_{n\times 1}}{a^T a}$$

$$= \frac{a a^T}{a^T a} b$$

ماتریس تصویر (P_a)

$$\frac{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}[2 \;\; 0]}{4} = \frac{\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}{4} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = P_a \quad ②$$

$$P_a b = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \qquad P_a\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\0\end{pmatrix}$$

Year: ...... Month: ...... Day: ...... Subject: ....

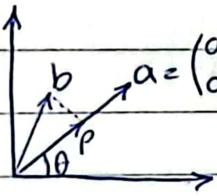
مثال: تصویر بردار b دلخواه را روی $a=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ بدست آورید.

$$P = P_a b$$

$$P_a = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}[1\ 1\ 1]}{[1\ 1\ 1]\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}}{3} = \begin{bmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

تمرین: ماتریس تصویر روی بردار a را برحسب θ بدست آورید.



$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\sin\theta\\a\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$P_a = \frac{aa^T}{a^Ta} = \frac{\begin{pmatrix}a\cos\theta\\a\sin\theta\end{pmatrix}[a\cos\theta\ \ a\sin\theta]}{[a\cos\theta\ \ a\sin\theta]\begin{pmatrix}a\cos\theta\\a\sin\theta\end{pmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix}\cancel{a^2}\cos^2\theta & \cancel{a^2}\sin\theta\cos\theta\\ \cancel{a^2}\sin\theta\cos\theta & \cancel{a^2}\sin^2\theta\end{bmatrix}}{\cancel{a^2}}$$

نکته: اگر P_a یک ماتریس تصویر باشد

1) $P_a^T = P_a$

$$\left(\frac{aa^T}{a^Ta}\right)^T = \frac{(aa^T)^T}{a^Ta} = \frac{aa^T}{a^Ta}$$

$$\rightarrow = \frac{(a^T)^T a^T}{a^Ta} = \frac{aa^T}{a^Ta}$$

2) $(P_a)^2 = P_a$

$$\left(\frac{aa^T}{a^Ta}\right)\left(\frac{aa^T}{a^Ta}\right) = \frac{aa^Taa^T}{(a^Ta)^2} = \frac{(a^Ta)(aa^T)}{(a^Ta)^2} = P_a$$

و برعکس ...

Shahab NOTEBOOK

• تصویر یک بردار روی یک فضای خطی برداری :

فرض کنید $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \dots, a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ پایه‌های فضای برداری باشند

تصویر بردار دلخواه b روی این فضا برابر است با $P = Pb$

ماتریس تصویر بردار دلخواه روی این فضا

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T$$

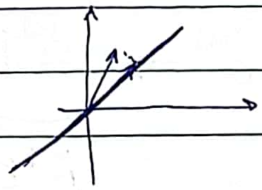
که در آن A برابر است با :

$$A = [a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}]$$

* نکته : A^TA , AA^T همواره ماتریس‌های مربعی و متقارن‌اند.
و معکوس پذیر ...

* نکته : اگر $a^{(1)} \in V$ تنها پایه فضای برداری V باشد.

$$P = \overset{\text{بردار}}{a}\,(\underbrace{a^Ta}_{\text{عدد}})^{-1}a^T = \frac{aa^T}{a^Ta}$$



* نکته : اگر $b \in V$ باشد، تصویر b روی V برابر خودش است.

if $b \in V \Rightarrow$ می‌دانیم b را می‌توان با ترکیب خطی پایه‌های V نوشت

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} : b = x_1a^{(1)} + x_2a^{(2)} + \dots + x_na^{(n)}$$

معادلند

$$b = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a^{(n)} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = Ax$$ *

Year: ---- Month: ---- Day: ---- Subject: ----

مثال ،

$$2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$$

$$p=Pb=A(A^TA)^{-1}A^T\underline{\underline{b}}=A\underbrace{(A^TA)^{-1}(A^TA)}_{I}x=Ax=b$$

پس تصویرش خودش شد.

☆ نکته ، اگر بردارهای b بر عمود بر فضای برداری V باشد ،

$$p=Pb=A(A^TA)^{-1}\underbrace{A^Tb}_{0}=0$$

اگر b بر V عمود باشد ، بر همه بردارهای عضو V من جمله پایه های V عمود است .

$$b\perp a^{(1)}\Rightarrow \langle b,a^{(1)}\rangle=a^{(1)T}b=0$$

$$b\perp a^{(2)}\Rightarrow a^{(2)T}b=0$$

$$\vdots$$

$$b\perp a^{(n)}\Rightarrow \underbrace{a^{(n)T}b=0}_{A^Tb=0}$$

☆ نکته : اگر P ماتریس تصویر باشد آنگاه .

1) $P^T=P$ متقارن

تمرین

$$P^T=\left(A(A^TA)^{-1}A^T\right)^T=\left((A^T)^T\left((A^TA)^{-1}\right)^T\overbrace{A^T}^{A}\right)$$

2)

مثال $\frac{1}{}$: تصویر بردار $b=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ را روی R^2 بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Shahab NOTEBOOK

$$P=A(A^TA)^{-1}A^T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad p=Pb=b$$

Year: ----- Month: ----- Day: ------ Subject: ----------

مثال ۲: نشان دهید $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ یک ماتریس تصویر است.

$P^T=P \quad , \quad P^2=P \Rightarrow$ P یک ماتریس تصویر است

مثال ۳: اگر $a^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $a^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ دو پایه برای فضای V باشند،

الف) ماتریس تصویر روی V را بدست آورید.

ب) تصویر بردار $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ را روی V حساب کنید.

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \longrightarrow \underset{2\times2}{P}\underset{3\times1}{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}}$

$P=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

* لازمه ضرب کنیم

* نکته: برای یافتن تصویر بردار $b\in\mathbb{R}^k$ روی زیرفضای برای $V\subseteq\mathbb{R}^L$ که $\underline{K>L}$ بایستی پایه‌های زیرفضا را هم بعد با b کرد.

$$P=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\underset{3\times3}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}}$$

$\Rightarrow \underset{3\times3}{P}\underset{3\times1}{A}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$

مثال ۴: تصویر $b=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ را روی $\mathbb{R}^3$ بدست آورید.

$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

* نکته: برای یافتن تصویر بردار $\underline{b\in\mathbb{R}^k}$ روی فضای $\underline{V\subseteq\mathbb{R}^L}$ $(K<L)$ بایستی $\underline{b}$ را هم بعد $\underline{V}$ کرد.

$p=\underset{3\times3}{P}\underset{2\times1}{b}$ * $\longrightarrow p=\underset{3\times3}{P}\underset{3\times1}{\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$

زیرفضای ستونی ، فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ باشد

(Range space)

$$\mathcal{R}_{A_{m\times n}} := \{ y \in \mathbb{R}^m ; \exists x \in \mathbb{R}^n \; \underset{m\times n}{A} \underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{y} \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

* نکته: $\mathcal{R}_A$ یک زیرفضای برداری است زیرا:

$$v \in \mathcal{R}_A \Rightarrow \exists x : Ax = v$$

$$w \in \mathcal{R}_A \Rightarrow \exists x' : Ax' = w$$

$$A\underbrace{(x+x')}_{x''} = v+w \Rightarrow v+w \in \mathcal{R}_A$$

نسبت به جمع بسته است

$$c \in \mathbb{R} \qquad cAx = cv$$

$$A\underbrace{(cx)}_{\tilde{x}} = cv$$

$$A\tilde{x} = cv \Longrightarrow cv \in \mathcal{R}_A$$

نسبت به ضرب بسته است

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ ، زیرفضای ستونی؟

$$\mathcal{R}_A = \{ y \in \mathbb{R}^3 , \exists x \in \mathbb{R}^2 , Ax = y \}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{R}_A$ ترکیب خطی همه ستون های A

Year: ----- Month: ----- Day: ----- Subject: -----

◦ زیرفضای پوچی: فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ باشد،

(Null space)

$$\mathcal{N}_A := \{ x \in \mathbb{R}^n : \underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{0} \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathcal{N}_A \Rightarrow Ax = 0 \\ x' \in \mathcal{N}_A \Rightarrow Ax' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(x+x') = 0$$

$$x + x' \in \mathcal{N}_A$$

نسبت به جمع بسته است

$$Ax = 0$$

$$A(cx) = c0 = 0 \Rightarrow cx \in \mathcal{N}_A$$

نسبت به ضرب بسته است

مثال:

$$Ax = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{چون مستقلند}} x_1 = x_2 = 0$$

* نکته، اگر ستون های A مستقل خطی باشند،

$$\mathcal{N}_A = \{0\}$$

و برعکس...

تمرین، نشان دهید:

$$1)\ \mathcal{N}_{A^TA} = \mathcal{N}_{AA^T} = \mathcal{N}_A$$

$$2)\ \mathcal{N}_A \perp \mathcal{R}_{A^T}$$

Year: 51 Month: Day: Subject:

A ماتریس مربعی با ستون های مستقل خطی

x منحصر به فرد وجود دارد.

جواب نامحدود / یکتا / هیچ ← حالت کلی

• حل دستگاه معادلات $\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{b}$

فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

معادله

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

دستگاه m معادله و n مجهول

فرم برداری

$$a^{(1)}x_1 + a^{(2)}x_2 + \dots + a^{(n)}x_n = b$$

* b ترکیب خطی ستون های A ← دنبال ضرایب $x_1, x_2, \dots, x_n$ هستیم.

$\|Ax-b\| \to 0$: دنبال x هستیم

$$\Rightarrow x = \arg\min \|Ax-b\|$$

• روش حذفی گوس :

* قدم ①، ۲ برابر معادله‌ی اول از معادله‌ی دوم کم شود.

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۴ & -۶ & ۰ \\ -۲ & ۷ & ۲ \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} ۵ \\ -۲ \\ ۹ \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ۲x_1 + x_۲ + x_۳ = ۵ \\ ۴x_1 - ۶x_۲ = -۲ \\ -۲x_1 + ۷x_۲ + ۲x_۳ = ۹ \end{cases}$$

یادآوری: عملیات زیر روی یک دستگاه معادلات، جواب دستگاه را تغییر نمی‌دهند:

۱) به طرفین معادله عددی مخالف صفر ضرب کنیم.

۲) k برابر معادله را از معادله‌ی دیگر کم یا اضافه کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Subject:

• به دنبال x_1 و x_2 و x_3 هستیم به صورتی که بتوان $\underline{b}$ را برحسب ترکیب خطی $\underline{x}$ و $\underline{A}$ نوشت.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -8x_2 - 2x_3 = -12 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases} \leftarrow ①$$

← قدم ② : -1 برابر معادله اول از معادله سوم کم شود.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -8x_2 - 2x_3 = -12 \\ 8x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

← قدم ③ : -1 برابر معادله دوم از معادله سوم کم می‌شود.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \xrightarrow{} x_1 = 1 \\ -8x_2 - 2x_3 = -12 \xrightarrow{} x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

جایگذاری

جایگذاری

• ماتریس صورت سوال قدم به قدم به ماتریس بالا مثلثی تبدیل شد.

$$\xrightarrow{①} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{②} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{③} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• اگر فرض مستقل خطی بودن ستون‌های $\underline{A}$ برقرار باشد، روش حذفی گوس دستگاه معادلات را حل خواهد کرد.

• ماتریس مقدماتی:

ماتریسی که l برابر معادله j ام از معادله i ام کم می‌کند.

ماتریس هم‌بعد $\underline{A}$ که اعداد روی قطر اصلی آن برابر ① و بقیه درایه‌های آن صفر باشد. این ماتریس درایه a_{ij} ، $\underline{L_{ij} = -l}$

ماتریس A را صفر خواهد کرد. (ماتریس پایین مثلثی است)

Shahab NOTEBOOK

مثال:

$$L_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

① $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

② $$L_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L_{31}(L_{21}A)$$

③ $$L_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} = L_{32}(L_{31}(L_{21}A))$$

$$\underbrace{L_{32}L_{31}L_{21}}_{L}A = U \implies LA = U \rightarrow A = L^{-1}U$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ ← قطر اصلی برابر ۱، بقیه درایه‌ها طبق قانون $L_{ij} = -l_{ij}$

▪ b هم در هر مرحله تغییر می‌کند یعنی:

در مرحله اول b جدید برابر است با : $L_{21}b$

مرحله دوم : $L_{31}(L_{21}b)$

مرحله سوم : $L_{32}(L_{31}(L_{21}b))$

مثال: دستگاه معادلات زیر را به روش حذفی گوس حل کنید

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Year: ----- Month: ----- Day: ------ Subject: ----------

(P) جابجایی سطر ۱,۲

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 0 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_{31}} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 0 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 0 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_{32}} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 0 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 0 + 0 - \frac{1}{2}x_3 = 7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = -20 \\ x_3 = -14 \end{cases}$$

$Ax=b$

$PA = LDU'$

$|P||A| = |L||D||U'|$

$\downarrow$

$(-1)|A| = |D|$

$$L_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{L_{32}L_{31}}_{L}PA = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = U \longrightarrow PA = L^{-1}U = L^{-1}DU' \quad *$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U'}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - (-R_1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - (-\frac{2}{7}R_3)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{7} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - \frac{1}{7}R_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - \frac{1}{4}R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{56} \\ \frac{3}{28} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Shahab NOTEBOOK

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ٤ & ٦ & ۰ \\ -۲ & ۷ & ۲ \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

عملیات مقدماتی سطری

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} \end{bmatrix}$$

○ معکوس ماتریس: برای ماتریس مربعی A با ستون های مستقل از هم، ماتریس مربعی (Inverse) هم بعد مانند X وجود دارد که $AX = XA = I$ به ماتریس X معکوس ماتریس A گویند و با نماد $X = A^{-1}$ نمایش می دهند.

■ نکته: یکی از روش های بدست آوردن معکوس ماتریس روش گاوس-جردن است که مراحل آن بصورت زیر می باشد:

$$\xrightarrow{A^{-1}} AX = I$$
$$X = A^{-1}$$

مثال: (صفحه قبل)

■ تمرین: دستگاه معادلات زیر مفروض است.

مطلوب است جواب دستگاه:

$$\begin{cases} x_1 - ۲x_2 - ۵x_3 = ۱۲ \\ ۲x_1 + ۴x_2 + ۱۲x_3 = -۱۷ \\ x_1 - ۴x_2 - ۱۲x_3 = ۲۲ \end{cases}$$

الف) به روش حذفی گوس

ب) به روش معکوس ماتریس $x = A^{-1}b$

دترمینان ماتریس A (determinant): برای ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ دترمینان تابعی است

$$\det(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \times a_{ij} \times \det(M_{ij})$$

M_{ij}: ماتریس مربعی $(n-1)\times(n-1)$ که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به دست آمده

* $\det(a) = a \quad , \quad (a \in \mathbb{R})$ یک عدد باشد

* $\det(A) = |A|$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{نسبت به سطر اول}]{i=1} \det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} |a_{22}| + (-1)^{1+2} a_{12} |a_{21}|$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به سطر دوم}]{i=2} \det(A) =$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{نسبت به سطر دوم}]{i=2} \det(A) = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

تمرین: برای محاسبه دترمینان ماتریس $n\times n$ چند بار دترمینان باید محاسبه کنیم؟

$n\times n$

$n \quad (n-1)\times(n-1)$

$n-1 \quad (n-2)\times(n-2)$

Year: ----- Month: ----- Day: ------ Subject: ----------

مثال: دترمینان ماتریس زیر را به روش مستقیم بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \quad |A| = \cancel{(-1)^{2+1} \times 0 \times |\;|} + (-1)^{2+2} \times 4 \times 5 + (-1)^{2+3} \times 6 \times 4 = -4$$

○ خواص دترمینان:

۱) دترمینان وابستگی خطی نسبت به یک سطر دارد

$$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}$$

۲) $|tA| = t^n |A|$

۳) $|A| = |A^T|$

۴) هر تعویض دو سطر (یا ستون) دترمینان تغییر علامت می دهد.

۵) دترمینان ماتریسی که ۲ سطر (یا ستون) برابر دارد، صفر است.

۶) دترمینان ماتریس بالا/پایین مثلثی = حاصلضرب قطر اصلی
→ دترمینان ماتریس قطری = حاصلضرب اعداد روی قطر اصلی

اثبات:

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ \vdots & d_2 & \vdots \\ 0 & \cdot & d_3 \end{vmatrix} = \Pi_i d_i$$ (بسط و فرمول روی سطری با بیشترین صفر)

۷) $|AB| = |A||B|$

۸) عملیات مقدماتی سطری دترمینان را عوض نمی کند.

$$|E_{ij}A| \overset{۷}{=} |E_{ij}||A| = |A|$$

1

Shahab NOTEBOOK

۹) دترمینان ماتریسی که سطر یا ستون صفر دارد ، صفر است.

۱۰) ماتریسی که دارای ستون‌ها یا سطرهای مستقل از هم باشد $\Leftrightarrow$ دترمینان آن صفر است

۱۱) اگر معکوس ماتریس مربعی A وجود داشته باشد $\Leftrightarrow$ دترمینان A غیر صفر است

مثال : $|A|$ را به کمک خواص دترمینان تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$E_{31} E_{32} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -4$$

ه محاسبه معکوس ماتریس با استفاده از دترمینان :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} |M_{ij}|}_{a'_{ij}}$$

$$A \times \underbrace{\frac{A_{cof}^{T}}{|A|}}_{A^{-1}} = I$$

$$A_{cof} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A A_{cof}^{T} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}_{n \times n} = |A| I$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$

مثال:

$$A_{cof} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow A_{cof}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{A_{cof}^T}{|A|} = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{-a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A_{cof}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{cof} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A_{cof}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o حل دستگاه به روش کرامر:

$$x = A^{-1} b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{A_{cof}^T}{|A|} b \rightarrow x_i = \frac{(A_{cof}^T)^i b}{|A|} = \frac{|B_i|}{|A|}$$

همان ماتریس A که ستون i ام آن با b جایگزین شده است.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = |A|}{|A|} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = 0$$

Year: ----- Month: ----- Day: ----- Subject: -----

○ مقدار ویژه ماتریس : λ را مقدار ویژه ماتریس مربعی A گویند اگر

eigen value

$\exists x \neq 0 : A_{n\times n} x_{n\times 1} = \lambda x_{n\times 1}$

لازم نیست ماتریس وارون پذیر باشد

مثال : ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض است. مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورید.

$\exists x : Ax = \lambda x$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

دو معادله و سه مجهول $\begin{cases} 2x_1 = \lambda x_1 \\ 3x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$

$x_1 = 1$

$x_2 = 0$

$\boxed{\lambda = 2}$ یک مقدار ویژه A است

زیرا $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ وجود دارد که

$Ax = \lambda x$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$\boxed{\lambda = 3}$ یک مقدار ویژه ماتریس A است

$Ax = 3x \quad \exists \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

نکته : یک ماتریس مربعی $n\times n$ ، n مقدار ویژه دارد. (حقیقی / موهومی)

نکته : " " " " " ، $(A^t = A)$ متقارن " " " حقیقی دارد.

روش های محاسبه مقادیر ویژه : λ مقدار ویژه

$\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x$

$Ax - \lambda I x = 0$

$\underbrace{(A - \lambda I)} x = 0 \Rightarrow |A - \lambda I| = 0$: معادله مشخصه ماتریس A

این یا خودش باید صفر باشد یا دترمینانش

درجه n

$$\left| \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \right| = ۰ \rightarrow \begin{vmatrix} ۲-\lambda & ۰ \\ ۰ & ۳-\lambda \end{vmatrix} = ۰ \rightarrow (۲-\lambda)(۳-\lambda) = ۰$$

$$\Rightarrow \lambda = ۲, ۳$$

نکته: برای ماتریس قطری $D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه، اعداد روی قطر اصلی اند.

نکته: عناصر روی قطر اصلی هر ماتریس بالا/پایین مثلثی مقادیر ویژه آن است.

نکته: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$$

$$\underbrace{tr(A)}_{\text{مجموع اعداد روی قطر اصلی}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$

روش ۱

$|A - \lambda I| = ۰$

$\Rightarrow -(۱-\lambda)(۲+\lambda) - ۲۵ = ۰$

$\Rightarrow \lambda = \ldots$

روش ۲: (نکته قبل)

$\begin{cases} -۲۷ = \lambda_1 \lambda_2 \\ -۱ = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \ldots$

نکته: اگر λ مقدار ویژه ماتریس A باشد $\underline{\lambda^k}$ مقدار ویژه ماتریس $\underline{A^k}$ است
(در صورت تعریف شده بودن) $\underline{k \in \mathbb{Z}}$

$k = ۲ \quad A^۲ \quad \lambda^۲(A)$

$k = -۱ \quad A^{-1} \quad \dfrac{۱}{\lambda(A)}$

نکته: هر ماتریس در معادله مشخصه خود صدق می‌کند.

$-\lambda^۲ - \lambda + ۲۷ = ۰$

$\rightarrow -A \times A - A + ۲۷I = ۰ \Rightarrow -A - I + ۲۷A^{-1} = ۰ \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{A + I}{۲۷}$

بردار ویژه ماتریس A : اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس (مربعی) A باشد

eigen vector

$\exists x \neq 0 \quad Ax = \lambda x$ x را بردار ویژه متناظر با λ برای A گویند

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2 \longrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 \longrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی A باشد دراینصورت طبق تعریف

$x:$ $\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x$ ⊛

$c \in \mathbb{R} / \{0\}$ $A(cx) = \lambda (cx) \Longrightarrow$ (cx) یک بردار ویژه متناظر λ

نسبت به ضرب

$y:$ $Ay = \lambda y$ ⊛⊛

⊛ ⊛⊛ $\Rightarrow A(x+y) = \lambda (x+y) \Longrightarrow$ (x+y) یک بردار ویژه λ است

نسبت به جمع

قضیه: اگر ماتریس A متقارن باشد و λ_1 و λ_2 دو مقدار ویژه متمایز باشند

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $(A^T = A)$

دراینصورت هر دو بردار ویژه متناظر با λ_1 و λ_2 برهم عمودند.

$\exists x \neq 0$ $\boxed{Ax = \lambda_1 x}$

$\overset{?}{\Longrightarrow} x \perp y$

$\exists y \neq 0$ $\boxed{Ay = \lambda_2 y}$ $\langle x, y \rangle = x^T y = 0$

$\times y^T$ $y^T A x = \lambda_1 y^T x$

$\times x^T$ $x^T A y = \lambda_2 x^T y \xrightarrow{T} y^T A^T x = \lambda_2 y^T x$ ($A^T = A$)

$\Rightarrow \lambda_1 y^T x = \lambda_2 y^T x \rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) y^T x = 0 \Longrightarrow \boxed{y^T x = 0}$

Year: ----- Month: ----- Day: ----- Subject: -----

مثال: در ماتریس قطری:

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بردار ویژه}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots}_{e_i \text{ ها دو به دو عمودند}}$$

نکته: اگر x بردار ویژه باشد، cx هم یک بردار ویژه است.

$$C = \frac{1}{\|x\|} \rightarrow \frac{x}{\|x\|}$$ یک بردار ویژه است

$$Ax = \lambda x$$

$$A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \lambda \frac{x}{\|x\|}$$

بردار ویژهٔ یکه

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

مثال:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{5^2+7^2}} \\ \frac{7}{\sqrt{5^2+7^2}} \end{pmatrix}$$

تعریف ماتریس متعامد:

ماتریسی با ستون های دو به دو بر هم عمود که اندازهٔ هر ستون یک باشد.

مثال: $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

* برای ماتریس متعامد Q داریم: $\boxed{Q^{-1} = Q^T}$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

$$q_1^T q_1 = \|q_1\|^2$$

مثال :: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آنها را برای ماتریس A بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda)-1\big)-(1-\lambda)=0$$ معادله مشخصه

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=3\end{cases}$$

$\lambda=0$, $Ax=\lambda x=(0)x=0$

$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\ -x_1+2x_2-x_3=0\\ -x_2+x_3=0\end{cases} \rightarrow x_1=x_2=x_3 \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

$\lambda=1$, $Ax=\lambda x=(1)x=x$

$$\begin{cases}x_1-x_2=x_1\\ -x_1+2x_2-x_3=x_2\\ -x_2+x_3=x_3\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=0\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

$\lambda=3$: $Ax=3x$

$$\begin{cases}x_1-x_2=3x_1\\ -x_1+2x_2-x_3=3x_2\\ -x_2+x_3=3x_3\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_1=\frac{-x_2}{2}\\ x_1+x_2=-x_2\\ x_3=\frac{-x_2}{2}\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{-2}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{-2}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{-2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix}$$

$A = U \Lambda U^T$ تجزیه طیفی

$AU = U\Lambda$

$A \ell_n = \ell_n \lambda$

* نکته: این تجزیه برای هر ماتریس مربعی متقارن برقرار است.

○ قضیه طیف (تجزیه طیفی): هر ماتریس متقارن $\underline{A}$ را می‌توان بصورت   spectral theory

$A = U \Lambda U^T$

تجزیه کرد که در آن Λ ماتریس قطری با درایه های روی قطر اصلی برابر با مقادیر ویژه $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ و U ماتریس متعامد $(U^{-1} = U^T)$

که ستون های آن برابر بردارهای ویژه یکه متناظر با مقادیر ویژه است.

$$U = \begin{bmatrix} (\;) & (\;) & \cdots & (\;) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ستون $\underline{i}$ ام متناظر با $\underline{\lambda_i}$

$$A^2 = A \times A \overset{A^T = A}{=\!=} U\Lambda \underbrace{U^T U}_{I} \Lambda U^T = U \Lambda \Lambda U^T$$

$$= U \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \ddots \; \lambda_n^2 \end{bmatrix} U^T$$

$$A = U \Lambda U^T$$

$$A^{-1} = (U^T)^{-1} \Lambda^{-1} U^{-1} = U \Lambda^{-1} U^T = U \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\lambda_n \end{bmatrix} U^T$$

* ماتریس $A = LDU$ (به کمک روش حذفی گوس)

با آن $A = U \Lambda U^T$ تجزیه کردیم (تجزیه طیفی)

* تمرین امتیازی!

۱- نشان دهید که با چه شرطی دو تجزیه فوق با هم برابرند؟

۲- برنامه‌ای بنویسید ماتریس متقارن دلخواه گرفته تجزیه طیفی انجام دهد.

درایه‌های محوری

$$A x = b$$

$$\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

قدم اول

$$\xrightarrow{E_{21} A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21} b} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{اگر}} \neq 5$$

قدم دوم

$$\xrightarrow{E_{31}(E_{21} A)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(E_{21} b)} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{اما}} \neq 6$$

Year: ----- Month: ----- Day: -----   Subject: -----

قدم سوم

$$E_{32}(E_{31}E_{21}A) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{32}(E_{31}E_{21}b) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{اگر}} \neq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_3 + x_4 = 3 \\ 0 \neq 0 \xrightarrow{\text{اگر}} \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

متغیرهای محوری ← $x_1 = -2 - 3x_2 - x_4$
برحسب متغیرهای آزاد از روی معادله بدست آمده

$x_2 = \quad x_2$

$x_3 = 1 \quad -\frac{1}{3}x_4$

$x_4 = \quad x_4$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{جواب خصوصی}} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} x_4}_{\text{تمام جواب‌ها}}$$

نکات: ۱) اگر $b_3 \neq 5$ در اینصورت دستگاه جواب ندارد

۲) اگر $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad Ax = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} x_4}_{\text{فضای پوچی } A}$$

بعد فضای پوچی: ②

$4 - 2 = 2$ تعداد متغیرها (ستون‌ها) − تعداد درایه‌های محوری

۳) تعداد سطرهای برابر صفر = تعداد درایه‌های محوری − تعداد سطرها

$3 - 2 = 1$

Shahab NOTEBOOK

CamScanner

Year: ----- Month: ----- Day: ----- Subject: -----

۴) تعداد درایه های محوری = حداکثر تعداد ستون ها (سطرهای) مستقل از هم است.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ مفروض است.

الف) به ازای چه مقادیری از $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ دستگاه $Ax = b$ دارای جواب است؟ و جواب آن را محاسبه کنید.

$b_3 + b_2 - b_1 = 0$

$b_3 + b_2 = b_1$

ب) فضای پوچ ماتریس A را بدست آورید.

$$\xrightarrow{R_2+2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & b_2+2b_1 \\ 3 & 5 & 0 & b_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & b_2+2b_1 \\ 0 & -1 & -3 & b_3-3b_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & b_2+2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3+b_2-b_1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1 \\ x_2 + 3x_3 = b_2 + 2b_1 \\ x_2 = b_2 + 2b_1 - 3x_3 \end{cases}$$

$x_1 + 2(b_2 + 2b_1 - 3x_3) + x_3 = b_1$

$x_1 = -3b_1 - 2b_2 + 5x_3$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -3b_1 - 2b_2 + 5x_3 \\ x_2 &= b_2 + 2b_1 - 3x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \underbrace{\begin{pmatrix} -3b_1 - 2b_2 \\ b_2 + 2b_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{جواب خصوصی}} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{فضای پوچ}}$$

Shahab NOTEBOOK

جواب خصوصی ۰ شود

$b_1 = b_2 + b_3$

جواب کلی: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{فضای پوچ}}$

Year: Month: Day: Subject:

(سطر) حداکثر تعداد ستون ← $\boxed{\text{درایه های محوری} = 2}$

مستقل از هم

||

رتبه ماتریس

اگر جواب داشته باشد ← $3 - 2 = ①$ = بعد فضای پوچی

بی‌نهایت جواب دارد — متغیرها — درایه های محوری

ممکن است جواب نداشته باشد ← $3 - 2 = 1$ = تعداد سطر صفر

تعداد سطرها

○ رتبه ماتریس: برای هر ماتریس دلخواه $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ عددی بنام رتبه بشکل زیر تعریف

Rank

می شود و با $r(A)$ یا $\text{Rank}(A)$ نمایش می دهیم.

$\boxed{r(A) = \text{رتبه ستونی} = \text{رتبه سطری}}$ ← قضیه بنیادی جبر خطی

حداکثر تعداد ستونهای مستقل از هم $\leq n$

حداکثر تعداد سطرهای مستقل از هم $\leq m$

$$r(A) \leq \min\{m, n\}$$

بعد فضای پوچی = تعداد ستون — تعداد درایه های محوری = رتبه ماتریس

تعداد سطرهای صفر = تعداد سطرها —

بعد فضای ستونی =

نکته: برای ماتریس مربعی $\mathbb{R}^{n \times n}$ $r(A) = n$ باشد ماتریس رتبه کامل می گویند

← معکوس دارد، دترمینان غیرصفر است، مقدار ویژه صفر ندارد و $Ax = b$

جواب یکتای $x = A^{-1}b$ دارد.

Shahab NOTEBOOK

نکته: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

رتبهٔ کامل سطری $r(A) = m$

رتبهٔ کامل ستونی $r(A) = n$

رتبهٔ کامل $r(A) = m = n$

○ خواص رتبهٔ ماتریس:

1) $r(A) = 0 \iff A = 0$

رتبهٔ ماتریس غیرصفر حداقل ۱ است.

2) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

3) $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $r(B) = n \rightarrow r(AB) = r(A)$

4) $C \in \mathbb{R}^{L\times m}$, $r(C) = m \rightarrow r(CA) = r(A)$

برای یک ماتریس اگر یک ماتریس رتبه کامل ستونی از سمت راست ضرب شود

و یا یک ماتریس رتبه کامل سطری از سمت چپ ضرب شود، رتبه ماتریس تغییر نمی‌کند

5) $r(A_{m\times n}) = r \quad \exists X_{m\times m}, Y_{n\times n} : XAY = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$

6) $r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$

Year: ----- Month: ----- Day: ----- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $Ax = b$ Subject: ۵. حل دستگاه معادلات

1) $\text{Rank}(A) = n < m$: یا جواب ندارد و یا جواب یکتا دارد،

* علت: سطر اضافه داریم با هم ... که باعث میشه جواب نداشته باشیم

همه ستونها مستقل از هم اند. ← رتبه کامل ستونی

$N_A = \{\}$

اگر جواب داشته باشد: ←

$$A\hat{x} = b$$

$$\xrightarrow{A^T} \underbrace{A^T A}_{n \times n} \hat{x} = \underset{n \times m}{A^T} \underset{m \times 1}{b}$$

رتبه کامل ⇐ وارون داره

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

اگر جواب نداشته باشد: ← *

$$x = \arg\min \|Ax - b\| \underset{(\text{قضیه})}{=} \hat{x}$$

فضای پوچ ؟؟ $N_A \neq \{\}$ **

2) $\text{Rank}(A) = m < n$ رتبه کامل سطری : بیشمار جواب دارد

⇐ سطر صفر ایجاد نمی‌شود

⇐ حتما جواب دارد. ** ← بیشمار جواب داریم

$$x = A^T \underset{m \times m}{(AA^T)^{-1}} b$$

3) $\text{Rank}(A) < \min\{m, n\}$ یا جواب ندارد و یا بیشمار جواب دارد،

نه رتبه کامل سطری و نه رتبه کامل ستونی ← هم سطر اضافی داریم ⇐ سطر صفر

هم ستون اضافی ⇐ $N_A \neq \{\}$

$\boxed{x = ?}$

← یا جواب ندارد و یا بیشمار جواب دارد.

4) $\text{Rank}(A) = m = n$

A معکوس پذیر

$$x = A^{-1} b$$

Shahab NOTEBOOK

مثال:

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ 4x + 5y = 12 \\ 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - \frac{4}{3}R_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

رتبه کامل ستونی $\Rightarrow$ یا جواب نداره
یا یکتا جواب داره

$$\xrightarrow{R_3 - \frac{4}{5}R_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ \underbrace{4 - \frac{16}{5}}_{\frac{4}{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$ جواب نداره

$\Rightarrow$ نزدیکترین جواب: $x = (A^T A)^{-1} A^T b$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 41 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 66 \\ 76 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{425} \begin{bmatrix} 41 & -20 \\ -20 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{425} \begin{bmatrix} 123 & 64 & -80 \\ -60 & 45 & 100 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1156}{425} \\ \frac{116}{125} \end{pmatrix}$$

$$\min \|Ax-b\| = \sqrt{(Ax-b)^T(Ax-b)} \equiv \min_{x} (Ax-b)^T(Ax-b)$$

$$= (x^TA^T - b^T)(Ax-b)$$

$$= x^TA^TAx - \underbrace{x^TA^Tb}_{\text{عدده پس با ترانهاده‌ش برابره}} - b^TAx + b^Tb$$

$$= x^TA^TAx - ۲x^TA^Tb + b^Tb$$

$\underline{x}$ ای که $f(x)$ رو min می‌کنه،

$g(f(x))$ رو هم $\underline{min}$ می‌کنه (به شرطی که $g(x)$ صعودی باشه.)

جایگذاری $\longrightarrow \min_{x,y} (۳x-۶)^۲ + (۴x+۵y-۱۲)^۲ + (۴y-۴)^۲$

برای اینکه min شه $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = ۰ \longrightarrow ۶(۳x-۶) + ۸(۴x+۵y-۱۲) = ۰ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = ۰ \longrightarrow ۱۰(۴x+۵y-۱۲) + ۸(۴y-۴) = ۰ \end{cases}$$

ساده کنیم $\longrightarrow$

$$\begin{cases} ۲۵x + ۲۰y = ۶۶ \\ ۲۰x + ۴۱y = ۷۶ \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

این علامت‌ها همون $\underline{A^TA}$ است

اینم همون $\underline{A^Tb}$

مثال: معادله درجه ۲ ای را بیابید که از نقاط زیر عبور کند.

x	-۳	-۱	۰	۲	۴
y	۴۶	۱۱	۳	۴	۲۶

$$y = ax^۲ + bx + c$$

$$\begin{cases} ۴۶ = ۹a - ۳b + c \\ ۱۱ = a - b + c \\ ۳ = c \\ ۴ = ۴a + ۲b + c \\ ۲۶ = ۱۶a + ۴b + c \end{cases}$$

شبه معکوس : Psoudo inverse
برای هر ماتریس دلخواه $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ، ماتریس منحصر‌ به‌فرد مانند B وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند :

1) $BAB = B$

2) $ABA = A$

3) $(AB)^T = AB$

4) $(BA)^T = BA$

برای این ماتریس B شبه معکوس A گویند و با نماد A^+ نشان می‌دهند. (دیگر)

حالت خاص : ←
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ مرتبه کامل $\rightarrow r(A) = n$
$\rightarrow |A| \neq 0$
$\rightarrow$ A^{-1} دارد

$B = A^{-1}$:

1) $\underbrace{A^{-1}A}_{I}A^{-1} = A^{-1}$

2) $AA^{-1}A = A$

3) $(AA^{-1})^T = I^T = I = AA^{-1}$

4) $(A^{-1}A)^T = I = A^{-1}A$

$\rightarrow \boxed{B = A^+ = A^{-1}}$

■ نکات : ۱ـ ماتریس شبه معکوس وجود دارد و منحصر بفرد است.

۲ـ هر ماتریسی که در شرایط فوق صدق کند شبه معکوس A است.

۳ـ برای حالتی که ماتریس مربعی معکوس پذیر باشد می توان نشان داد A^{-1} در شرایط فوق صدق کرده پس شبه معکوس است.

۴ـ اگر ماتریس A شبه قطری باشد،

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_m & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \rightarrow A^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & & & \\ & \frac{1}{d_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{d_m} & \\ & & & & 0 \ddots 0 \end{bmatrix}$$

$n-m$ تا صفر روی قطر اصلی

(در شرایط ۴ گانه صدق می کند)

$A \in R^{m\times n}$

$Ax = b$

$$\boxed{x = \text{Argmin} \|Ax-b\| = A^{+}b + y \quad (y \in N_A)}$$

1) $Rank(A) = m = n \rightarrow x = A^{-1}b$

$x = A^{+}b$

ماتریس مربعی معکوس پذیر

$A^{+} = A^{-1}$

(جواب یکتا)

2) $Rank(A) = m < n \rightarrow x = A^{T}(AA^{T})^{-1}b + N_A$

ماتریس رتبه کامل سطری

$x = A^{+}b + N_A$

$A^{+} = A^{T}(AA^{T})^{-1}$

(بی‌شمار جواب)

۳) $Rank(A) = n < m \longrightarrow x = (A^TA)^{-1}A^Tb$

رتبه کامل ستونی

$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$

$x = A^+b$

(یا بی‌جواب یا جواب یکتا)

۴) $Rank(A) < \min\{m,n\} \longrightarrow x = A^+b + N_A$

$A^+ = ?$

(یا بی‌جواب یا بی‌شمار جواب)

○ مراحل بدست آوردن A^+ در حالت کلی:

مقادیر تکین (شبیه مقادیر ویژه)

$\downarrow$

بردارهای تکین (شبیه بردارهای ویژه)

$\downarrow$

تجزیه تکین (کافی است ۲ تا تجزیه طیفی انجام شود)

$\downarrow$

A^+

○ مقدار تکین: $\underbrace{\sigma > 0}_{\text{زیگما}}$ یک مقدار تکین گویند هرگاه:

$\exists \underset{\mathbb{R}^{n\times1}}{v}, \underset{\mathbb{R}^{m\times1}}{u} \neq 0 : \underset{m\times n}{A}\underset{n\times1}{v} = \underset{\text{عدد}}{\sigma}\underset{m\times1}{u}$

مثال:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\sigma = 1$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\sigma = 2$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

° خواص شبه معکوس :

1) $(A^+)^T = (A^T)^+$ 4) $(A^TA)^+ = A^+(A^T)^+$

2) $(A^+)^+ = A$ 5) $(AA^T)^+ = (A^T)^+A^+$

3) $(kA)^+ = \frac{1}{k}A^+$ 6) $(AB)^+ = B^+A^+$

° تجزیه تکین : ماتریس دلخواه $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ مفروض است بطوری که $Rank(A)=r$

$$\exists\, U\in\mathbb{R}^{m\times m},\ V\in\mathbb{R}^{n\times n}\ (U^TU=V^TV=I)\ ;\ A=U\Sigma V^T \quad (\text{SVD})$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

ترتیب چیدمان σ_i ها در Σ به نحوی است که $Au^{(i)} = \sigma_i v^{(i)}$.

$u^{(i)}$: ستون iام ماتریس u

$v^{(i)}$: ستون iام ماتریس v

$$\underset{n\times n}{A^TA} = V\Sigma^T \underbrace{U^TU}_{I}\Sigma V^T = V\underbrace{\Sigma^T\Sigma}_{n\times n} V^T = V\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}_{n\times n} V^T$$

$$= V\begin{bmatrix} \lambda_1(A^TA) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r(A^TA) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix} V^T$$

(تجزیه طیفی A^TA)

V ماتریسی است که ستون هایش بردارهای ویژه A^TA است.

$$AA^T = U\Sigma \underbrace{V^TV}_{I}\Sigma^T U^T = U\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix} U^T$$

(تجزیه طیفی AA^T)

U ماتریسی است که ستون هایش بردارهای ویژه AA^T است.

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(AA^T)}$ $\quad 0 < \lambda(AA^T) = \lambda(A^TA)$

Year: ---- Month: ---- Day: ---- Subject: ----

$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$ ← تجزیه طیفی A^TA ، تجزیه تکین ، $v^{(i)}$

$u^{(i)}$ ← تجزیه طیفی AA^T

$\Bigg\}\ A = U\Sigma V^T$

$$A = U\Sigma V^T \Rightarrow A^T = V\underset{\Sigma}{\Sigma^T}U^T \Rightarrow A^TU = V\Sigma \Rightarrow A^Tu^{(i)} = \sigma_i v^{(i)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^{(i)} = \frac{A^Tu^{(i)}}{\sigma_i}}$$

به کمک تجزیه طیفی AA^T مقادیر تکین و $u^{(i)}$ ها حساب شده و با رابطه فوق $v^{(i)}$ ها را می یابیم.

قضیه : اگر $A = U\Sigma V^T$ تجزیه تکین باشد، آنگاه $V'_{n\times r}\ \Sigma'_{r\times r}\ U'^T_{m\times r}$

$$\underset{n\times m}{A^+} = V\Sigma^+U^T = \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i}v^{(i)}u^{(i)^T}$$

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & 0 \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & 0 & & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Year: ----- Month: ----- Day: ------ Subject: ------

الف

مثال: مقادیر تکین ماتریس A را بیابید.

AA^{T} مقادیر ویژه همیشه $\oplus$ است

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}\qquad |AA^{T}-\lambda I|=0$$

$$AA^{T}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&2\\1&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda&1&2\\1&1-\lambda&0\\2&0&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\underbrace{(3-\lambda)(1-\lambda)}_{(\lambda^{2}-4\lambda+3)}(2-\lambda)-(2-\lambda)-4(1-\lambda)=0$$

$$\underbrace{(\lambda^{2}-4\lambda+2)(2-\lambda)}-4+4\lambda=0$$

$$2\lambda^{2}-8\lambda+\cancel{4}-\lambda^{3}+4\lambda^{2}-2\lambda-\cancel{4}+4\lambda=0$$

$$-\lambda^{3}+6\lambda^{2}-6\lambda=0\rightarrow-\lambda(\lambda^{2}-6\lambda+6)=0\rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=3+\sqrt{3}\\ \lambda=3-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\lambda=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{2}=3\pm\sqrt{3}$$

$$\underbrace{\sigma_{1}=0}_{\text{اینو ما مقدار تکین نمی‌گیریم}},\quad \sigma_{2}=\sqrt{3+\sqrt{3}},\quad \sigma_{3}=\sqrt{3-\sqrt{3}}$$

رتبه ماتریس A = تعداد مقادیر تکین A = ۲

ب) A^{+} را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\rightarrow AA^{T}=\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\sqrt{2}&0\\1&2&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$|AA^{T}-\lambda I|=0\qquad =\begin{bmatrix}2&2&2\\2&6&2\\2&2&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&2&2\\2&6-\lambda&2\\2&2&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)\left[\overbrace{(6-\lambda)(2-\lambda)}^{\lambda^{2}-8\lambda+12}-4\right]-2\underbrace{(\cancel{4}-2\lambda-\cancel{4})}_{-4\lambda}+2\left[\overbrace{4-12}^{-8}+2\lambda\right]=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+8)-16+8\lambda=0$$

$$-\lambda^3+8\lambda^2\cancel{-8\lambda}+2\lambda^2-16\lambda\cancel{+16}\cancel{-16}\cancel{+8\lambda}=0$$

$$-\lambda^3+10\lambda^2-16\lambda=0 \longrightarrow -\lambda\underbrace{(\lambda^2-10\lambda+16)}_{(\lambda-2)(\lambda-8)}=0 \longrightarrow \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=2\\ \lambda=8\end{cases}$$

$$\lambda_1=0 \longrightarrow AA^T x=0$$

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+2x_3=0\\ 2x_1+6x_2+2x_3=0\\ 2x_1+2x_2+2x_3=0\end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=2 \quad \dots \longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{-1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=8 \quad \dots \longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{+1}{\sqrt6}\\ 2\sqrt6\\ \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{-1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt3} & 2\sqrt6\\ \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{-1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix} \longrightarrow U^T= \dots$$

$$V= \dots$$

$$A^{+}=\begin{bmatrix} & \dots & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{18} & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

این دوتا هم نقشی در ماتریس ندارن چون عملاً باید صفر ضرب بشن

○ ماتریس معین مثبت (نیمه) :

ماتریس متقارن $\underline{A}$ را معین مثبت (نیمه) گویند و با نماد : $A \succ 0$

نشان می‌دهند، اگر و فقط اگر

$$\forall \underset{n\times 1}{x} \neq 0 \qquad \underbrace{\underset{1\times n}{x^T}\ \underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x}}_{\text{عدد}} \geqslant 0$$

مثال : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$A \succ 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} (x_1 \ \ x_2) = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + 4x_2^2 > 0$$

← برای ماتریس $\underline{2\times 2}$: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\text{if} \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ |A| > 0 \end{cases} \Rightarrow A \succ 0$$

تمرین امتیازی: به ازای چه مقادیری از a, b, c, d, e, f ،

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$ معین مثبت است؟

نکته:

برای ماتریس متقارن دلخواه تشخیص (نیمه) معین مثبت بودن آن با استفاده از تعریف کار ساده‌ای نیست و نوعاً در عمل از شرایط کافی و لازم برای تشخیص استفاده می‌کنند.

$p \Leftrightarrow q$ شرط لازم و کافی

(اگر نیمه معین مثبت باشد) $p \Rightarrow q$ شرط لازم

$\sim q \rightarrow \sim q \leftarrow$ برای رد کردن

○ شرایط لازم و کافی:

۱) ماتریس متقارن $\underline{A}$ (نیمه) معین مثبت است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه آن (نامنفی) مثبت است.

اثبات عکس: $\lambda > 0 \Leftrightarrow Ax = \lambda x \Leftrightarrow x^T A x = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2 > 0 \rightarrow$

۲) ماتریس متقارن $\underline{A}$ (نیمه) معین مثبت است اگر و فقط اگر دترمینان همه ماتریس‌های (زیرماتریس‌های بالا سمت چپ آن) مثبت باشد

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1\times1} & & \\ & \boxed{2\times2} & \\ & & \boxed{3\times3} \; \cdots \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Year: ----- Month: ----- Day: -----   Subject: ----------

۳) A (نیمه) معین مثبت است اگر و فقط اگر تمامی درایه‌های محوری آن (نامنفی) مثبت باشد (تعویض سطر نباید اتفاق افتاده باشد)

○ شرایط لازم:

اگر ماتریس متقارن A (نیمه) معین مثبت باشد ⇐

۱) درایه‌های روی قطر اصلی آن (نامنفی) مثبت باشد

۲) در هر سطر آن بزرگترین عدد (از نظر قدر مطلق) روی قطر اصلی است

مثلا این (نیمه) ←

$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ & \vdots & \end{bmatrix}$ معین مثبت نیست

۳) A^k به ازای هر k دلخواه $\in \mathbb{Z}$ (در صورت تعریف پذیری) (نیمه) معین مثبت است.

۴) $\forall x : A + xx^T \succ 0$

$(\succeq 0)$

■ نکته:

1) $A, B \succ 0 \Rightarrow A+B \succeq 0$

2) A دلخواه به ازای هر ماتریس $\Rightarrow AA^T, A^TA \succeq 0$

3) A معکوس پذیر، $B \succ 0 \Rightarrow ABA^T \succ 0$

4) $A, B \succeq 0 \Rightarrow AB, BA$ الزاما نیمه معین مثبت نیستند.

۰ قضیه مکمل شور :

schur

$$M = \left[\begin{array}{c:c} A_{p\times p} & B_{p\times q} \\ \hdashline C_{q\times p} & D_{q\times q} \end{array}\right]$$

1) $M \succeq 0 \iff A \succeq 0,$

$D - B^T A^+ B \succeq 0,$

$(I - AA^+) B = 0$

2) $M \succeq 0 \iff D \succeq 0,$

$A - B D^+ B^T \succeq 0,$

$(I - DD^+) B^T = 0$