به نام خدا

# استاتیک

پریسا سرتاجی

## فصل اول

# استاتیک ذره–نیروهای صفحه ای

# تعریف علم مکانیک

**تعریف علم مکانیک:** مکانیک شاخه ای از علم فیزیک است که در رابطه با سکون یا حرکت اجسام تحت اثر نیرو بحث می کند. علم مکانیک در بسیاری زمینه ها نظیر ارتعاشات، پایداری و مقاومت سازه ها و ساختمان ها، ماشین ها، راکت ها، هواپیماها، موتورهای احتراقی، جریان سیالات و ماشین های الکتریکی کاربرد دارد.

**تقسیم بندی علم مکانیک:** برحسب نوع مسائل مکانیک متشکل از استاتیک و دینامیک است.

۱– استاتیک؛ یا علم ایستایی عبارتست از علم تعادل اجسام تحت بار.

۲– دینامیک؛ علم حرکت اجسام که خود شامل سینماتیک و سینتیک است.

از نظر ماهیت اجسام مکانیک به دو بخش زیر تقسیم می شود:

۱– مکانیک اجسام تغییرشکل پذیر و تغییرشکل ناپذیر

۲– مکانیک سیالات

# قوانین نیوتن

**قوانین نیوتن**

**قانون اول نیوتن: اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره ای صفر باشد ذره درحال سکون است. (در این حالت اگر ذره دارای حرکت مستقیم الخط یکنواخت باشد با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد).**

**قانون دوم نیوتن: شتاب یک ذره متناسب با برآیند نیروهای وارد بر آن است (یا نیرو متناسب با حاصلضرب جرم در شتاب حرکت است).**

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

**قانون سوم نیوتن: نیروهای عمل و عکس العمل بین دو جسم درتماس از لحاظ مقدار با هم برابر و دریک امتداد و با جهت مخالف می باشد.**

# سیستم واحدها

**سیستم واحدها:**

**در سیستم های اندازه گیری کمیتهای اصلی عبارتند از: طول، جرم و زمان.**

**در سیستم بین المللی (جهانی) SI واحدهای کمیت های اصلی عبارتند از:**

**واحد طول متر (m)، واحد جرم کیلوگرم (kg) و واحد زمان ثانیه (s) می‌باشد.**

# کمیتهای فیزیکی

**کمیّت های فیریکی:**

**۱– کمیت های عددی(اسکالر) : فقط با مقدار مشخص می گردد مانند: دما، کار، انرژی، حجم و سطح ...**

**۲–کمیت های برداری : علاوه برمقدار توسط راستا ، جهت و نقطه اثر مشخص می‌گردد مانند: نیرو، سرعت، تغییر مکان، شتاب و گشتاور.**

**تعریف نیرو (Force) :**

**تاثیر یک جسم روی جسم دیگر نیرو نامیده می شود. نیرو عاملی است که باعث تغییرشکل یا تغییر حرکت یا سکون جسم می گردد. نیرو بردار است.**

# مشخصات نیرو

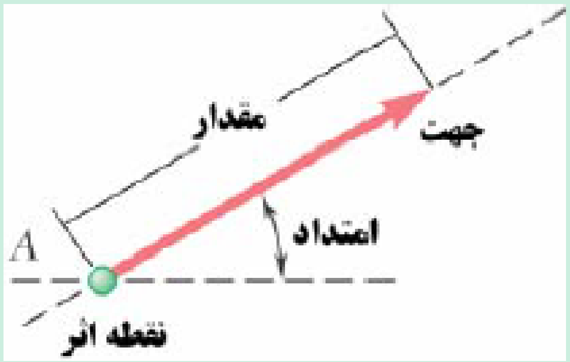
**مشخصات نیرو:**

**۱– راستای (امتداد)**

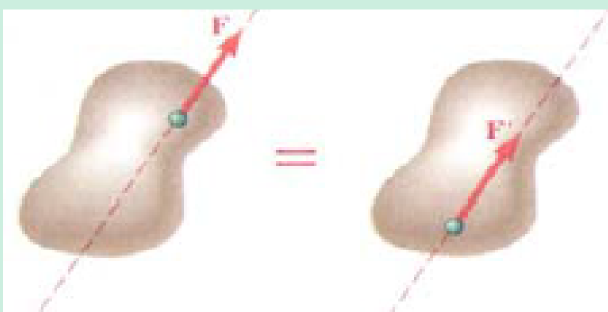
**۲– جهت**

**۳– بزرگی (قدر مطلق) (مقدار)**

**۴– نقطه اثر**




**اصل قابلیت انتقال نیرو: چون در استاتیک اجسام را صلب فرض می کنیم لذا نیرو را می توان روی امتدادش جابجا کرد.**

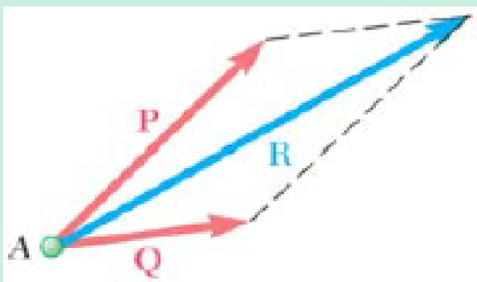



**بنابراین مشخصه نیرو فقط راستا، جهت و مقدار است.**

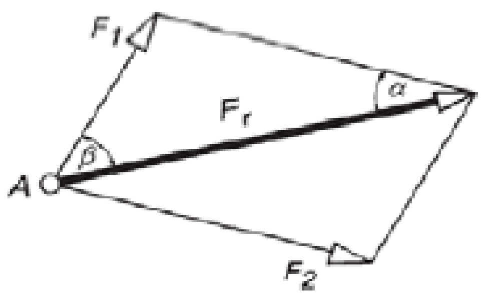
# قانون متوازی الاضلاع

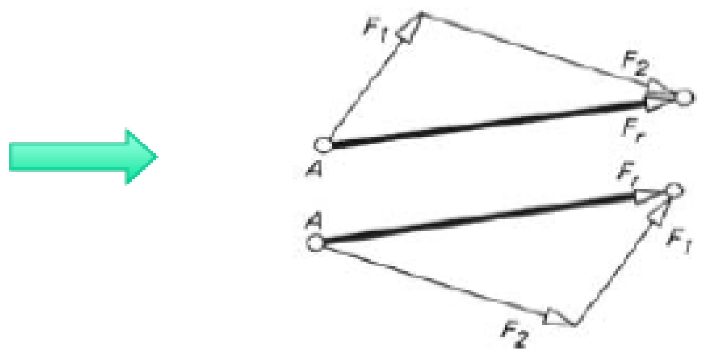
**اصل اول استاتیک (قانون متوازی الاضلاع):**

**به جای دو نیروی مؤثر در یک جسم صلب می توان یک نیرو معادل با آن دو نیرو قرار داد. این نیرو قطر متوازی الاضلاعی است که با آن دونیرو ساخته می شود و از محل تقاطع دو امتداد دو نیرو می گذرد.**

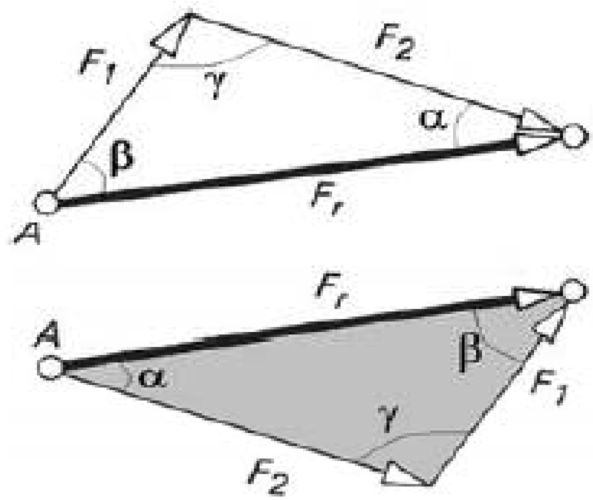



R **معادل (برایند)** P **و** Q **است.**



# قانون سینوسها و کسینوسها برای مثلث




$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_r}{\sin\gamma}$$

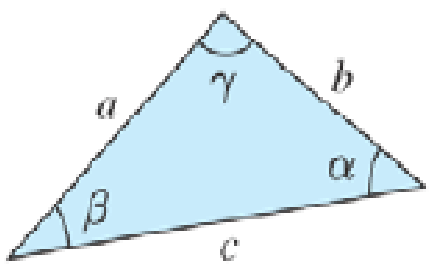
قانون سینوسها

$$F_r^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\gamma$$

قانون کسینوسها

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

# قانون سینوسها و کسینوسها برای مثلث

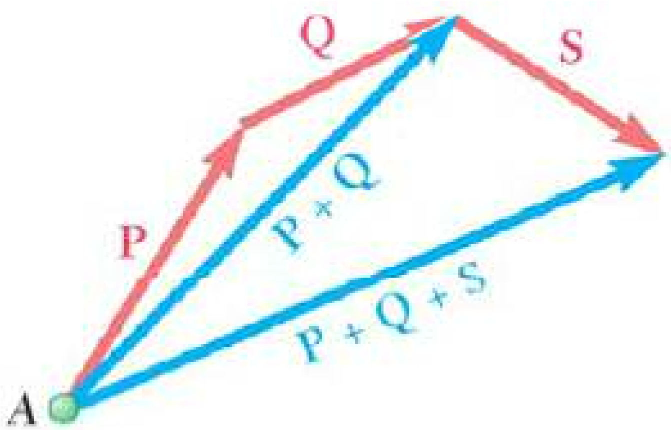



| | |
|---|---|
| Law of sines | $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ |
| Law of cosines | $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$<br>$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$<br>$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ |

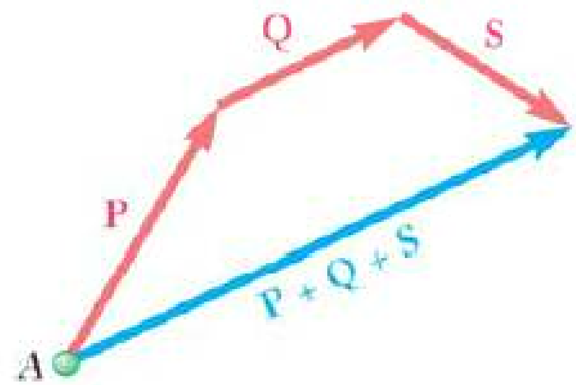
# قانون متوازی الاضلاع - چندضلعی نیروها

**چند ضلعی نیروها:**

**بر اساس قانون متوازی الاضلاع میتوان تک تک نیروها را به دنبال هم ترسیم کرده و برایند نیروها را (بارسم چند ضلعی نیروها ) بدست آورد.**

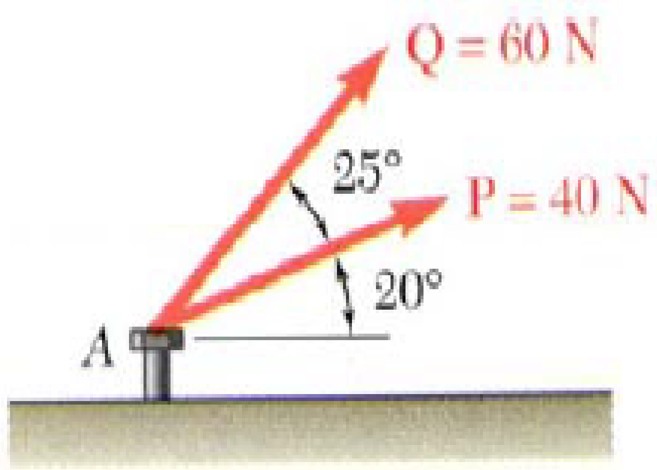



قانون متوازی الاضلاع




چند ضلعی نیروها

# مثال ۱- ترکیب یا برایند دو نیرو

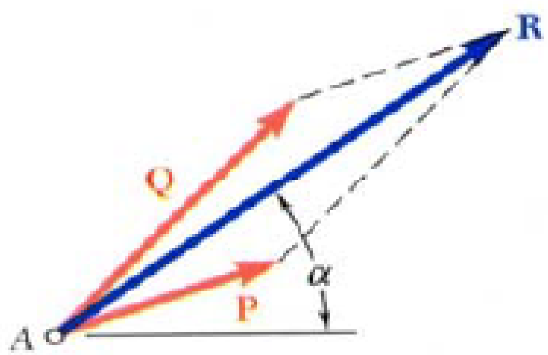



**مثال ۱ – دو نیروی ۴۰ و ۶۰ نیوتونی مطابق شکل به پیچ مقابل اعمل شده است. مطلوبست:**

**الف) تعیین برایند این دو نیرو**

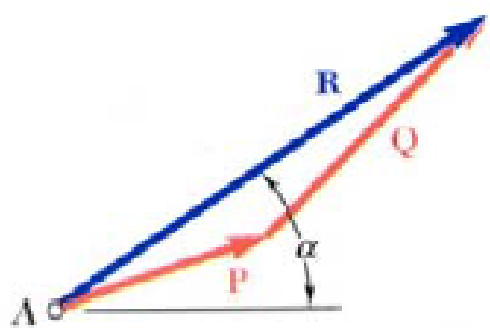
**ب) تعیین امتداد برایند**

## حل به روش ترسیمی (ترسیم متوازی الاضلاع و چندضلعی نیروها):




۱ – بعد از ترسیم متوازی الاضلاع، طول بردار برآیند و امتداد آن اندازه گیری می‌شود.

$\boxed{\mathbf{R} = 98\ \mathrm{N} \quad \alpha = 35°}$

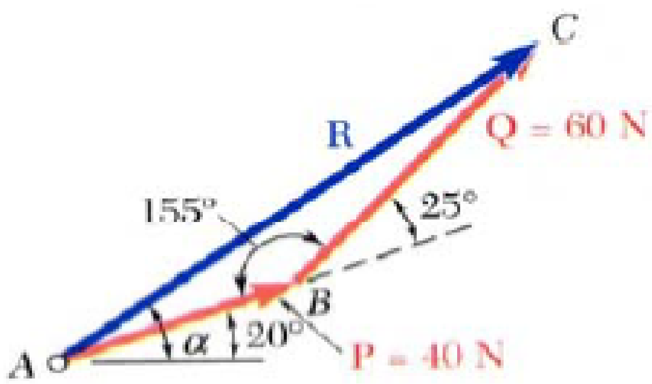



۲– بعد از ترسیم نیروها به دنبال هم، طول بردار برآیند و امتداد آن اندازه گیری می‌شود.

$\boxed{\mathbf{R} = 98\ \mathrm{N} \quad \alpha = 35°}$

# حل به روش مثلثاتی

**ترسیم مثلث نیروها و نوشتن قانون کسینوسها**




$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$

$$R^2 = (40\text{N})^2 + (60\text{N})^2 - 2(40\text{N})(60\text{N})\cos 155°$$

$$\boxed{R = 97.73\text{N}}$$

**سپس از قانون سینوسها داریم:**

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R}$$

$$\sin A = \sin B \frac{Q}{R}$$

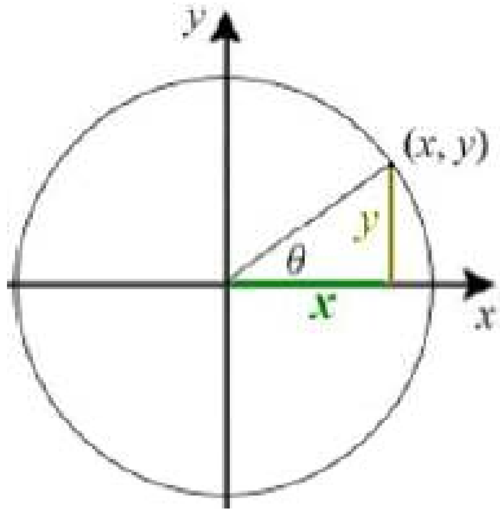
$$\sin A = \sin 155° \frac{60\text{N}}{97.73\text{N}} = 0.26$$

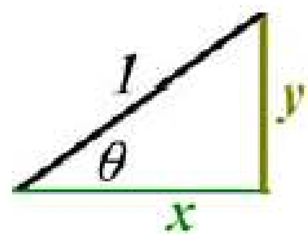
$$A = 15.04°$$

$$\alpha = 20° + A$$

$$\boxed{\alpha = 35.04°}$$

# دایره مثلثاتی-مثلث قائم الزاویه-مولفه های یک نیرو

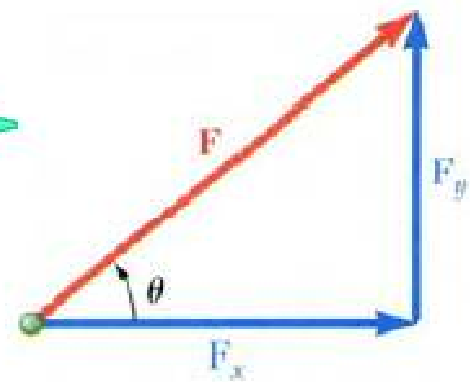



$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$




$$F_x = F \times \cos\theta$$

$$F_y = F \times \sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

**در مثلث قائم الزاویه:**

**وتر ضلعی است که روبروی زاویه قائم قرار دارد که بلندترین ضلع مثلث نیز می باشد.**

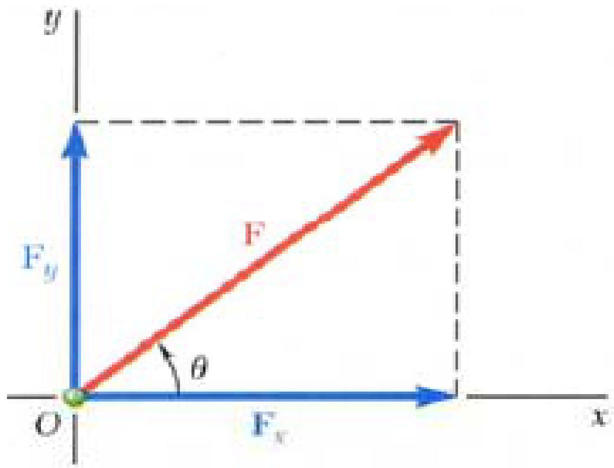
**نسبت ضلع مقابلِ زاویه ، به وتر را سینوس می‌گویند.**

**نسبت ضلع مجاورِ زاویه، به وتر را کسینوس می‌گویند.**

**نسبت ضلع مقابلِ زاویه به ضلع مجاورِ زاویه را تانژانت گویند.**

# مولفه های عمودی یک نیرو-بردار واحد

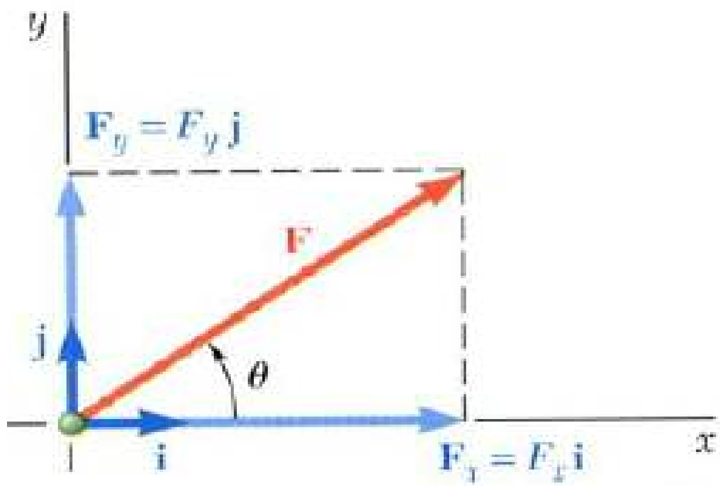
میتوان یک نیرو را به مولفه های عمودی تجزیه کرد. در ایـــن صورت متوازی الاضلاع نیروها یک مستطیل (دو مثلـــث قـــائم الزاویه) خواهد بود. اضلاع مثلث قائم الزاویه مولفه های نیـــرو در جهت $x$ و $y$ هستند که بصورت زیر تعیین می‌شوند:




$$F_x = F \times \cos\theta$$
$$F_y = F \times \sin\theta$$

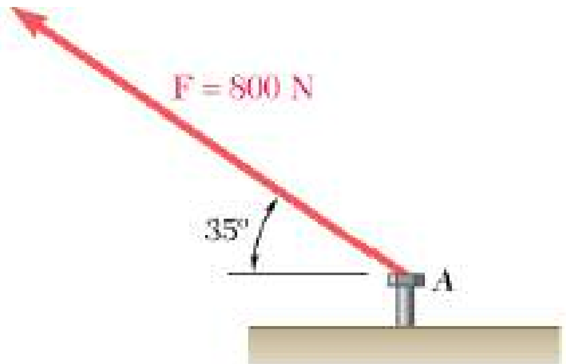
$F$ و $\theta$ معلوم اند

نیروی $F$ را میتوان بوسیله مولفه های قائم و به کمک بردارهای یکه بصورت زیر نشان داد.




$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

# مثال

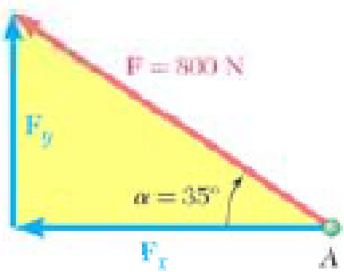



نیرویی برابر ۸۰۰ نیوتن مطابق شکل به پیچ A اثر می‌کند.

مطلوبست:

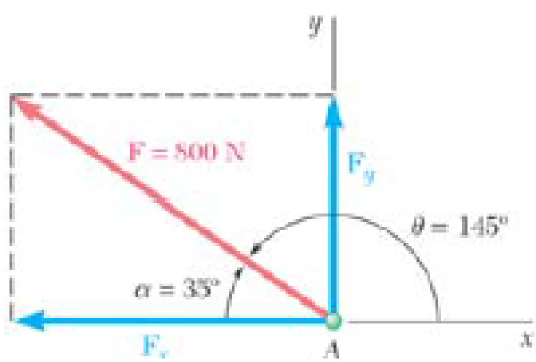
الف) تعیین مولفه های عمودی نیرو

ب) بیان برداری نیرو




**حل: الف**

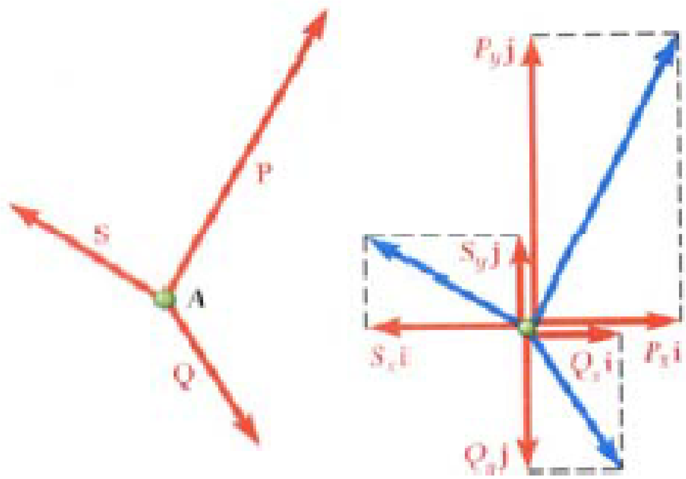
$$F_x = -F \times \cos \alpha = 800 \times \cos 35 = -655N$$
$$F_y = F \times \sin \alpha = 800 \times \sin 35 = 459N$$




**حل: ب**

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = -655\vec{i} + 459\vec{j}$$

# ترکیب (برآیند) نیروها، با استفاده از مولفه های آنها




**برایند ۳ نیروی P و Q و S را تعیین کنید (تعیین نیروی R).**

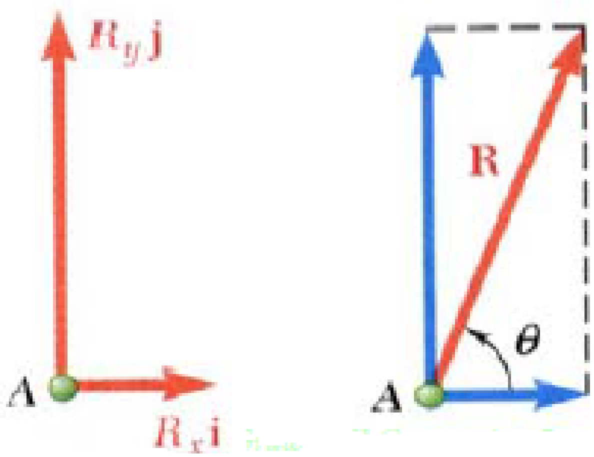
**چون نیرو بردار است، جمع (ترکیب) آنها بصورت برداری زیر انجام می‌شود:**

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$

**اگر بجای هر نیرو، مولفه های قائم آن را قرار دهیم، داریم:**

$$R_x\vec{i} + R_y\vec{j} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + S_x\vec{i} + S_y\vec{j}$$
$$= (P_x + Q_x + S_x)\vec{i} + (P_y + Q_y + S_y)\vec{j}$$

**نتیجه می شود که مولفه های برایند، با جمع مولفه های نیروها برابر است. یعنی:**




$$R_x = P_x + Q_x + S_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y$$

$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y$$

**سپس برای پیدا کردن برایند نیروها و جهت آن داریم:**

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

# تعیین برآیند دو یا چند نیرو

**بنابراین برای تعیین برایند دو یا چند نیرو میتوان به دو روش زیر عمل کرد:**

**۱– روش برداری (ترسیم بردار نیرو ها به دنبال هم)**

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$

**۲– روش اسکالر (استفاده از مولفه های قائم)**

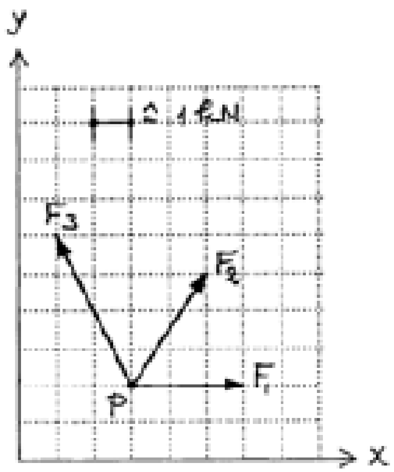
$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

# مثال

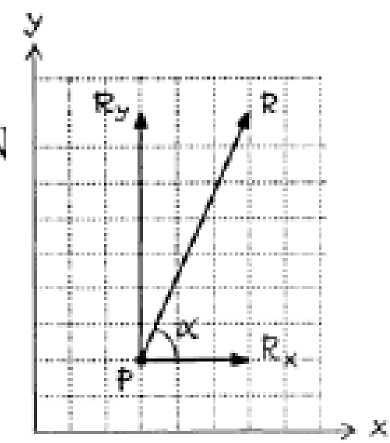
**مثال – سه نیرو مطابق شکل به نقطه P اثر می‌کند. مطلوبست:**

**الف) تعیین برایند این سه نیرو به روش مجموع مولفه های قائم (اسکالر).**

**ب) تعیین برایند این سه نیرو به روش ترسیمی (برداری).**




**حل: الف**




$$R_x = F_{x;1} + F_{x;2} + F_{x;3} = (3\text{ kN}) + (2\text{ kN}) + (-2\text{ kN}) = 3\text{ kN}$$

$$R_y = F_{y;1} + F_{y;2} + F_{y;3} = (0\text{ kN}) + (3\text{ kN}) + (4\text{ kN}) = 7\text{ kN}.$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(3\text{ kN})^2 + (7\text{ kN})^2} = \sqrt{58}\text{ kN}.$$

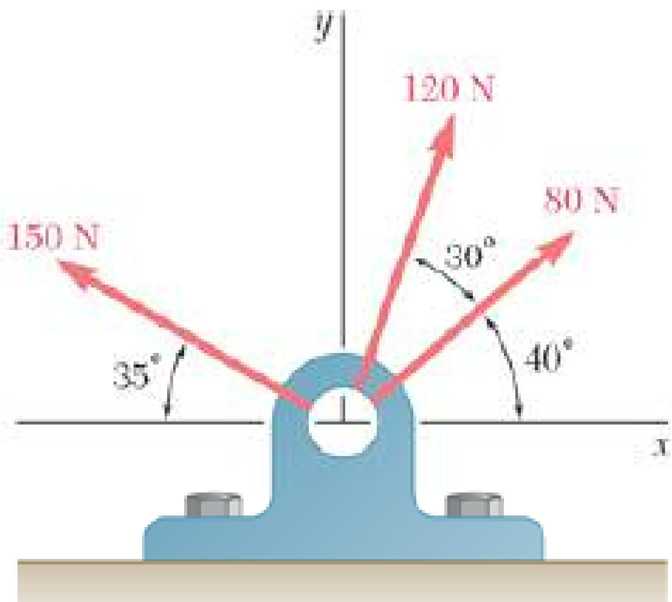
$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{7\text{ kN}}{3\text{ kN}} = 2.33 \Rightarrow \alpha = 66.8^\circ$$

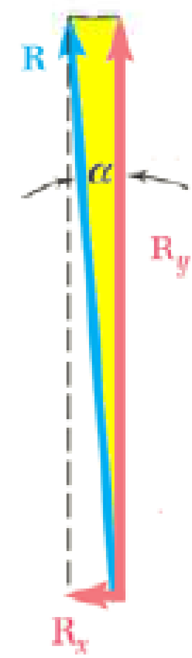
# مثال

مثال – سه نیرو مطابق شکل به یاتاقان اثر می‌کند. مطلوبست:

الف) تعیین برایند این سه نیرو .

ب) تعیین امتداد برایند.




**حل: الف**

$$R_x = \sum F_x = 80\cos 40 + 120\cos 70 - 150\cos 35 = -20.55 \quad N$$

$$R_y = \sum F_y = 80\sin 40 + 120\sin 70 + 150\sin 35 = 250.22 \quad N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-20.55)^2 + 250.22^2} = 251 \quad N$$

**حل: ب**

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{20.55}{250.22} = 4.7^\circ$$

# تعادل یک نقطه مادی (تعادل ذره)

**طبق قانون اول نیوتن، برایند نیروهای وارد بر یک ذره در حال تعادل صفر است. لذا داریم:**

**چه موقع برایند نیروها صفر است؟**

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Rightarrow \ 1- \ \text{ترسیم چند ضلعی بسته نیروها} \\ \Rightarrow \ 2- \begin{cases} R_x = 0 \ \Rightarrow \ \sum F_x = 0 \\ R_y = 0 \ \Rightarrow \ \sum F_y = 0 \end{cases} \ \text{استفاده از معادلات تعادل} \end{cases}$$

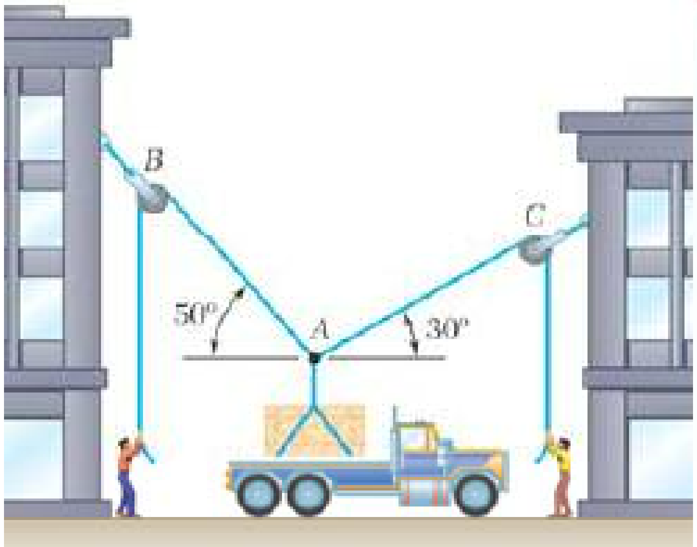
**بنابراین برای حل مسائل به روش تعادل ذره، باید یک نقطه مادی را در نظر بگیریم و ابتدا نمودار آزاد نقطه را ترسیم نموده به یکی از دو روش فوق عمل کنیم. یعنی:**

**۱– نیروهای وارد بر نقطه مادی را بدنبال یکدیگر ترسیم کرده و چند ضلعی بسته‌ای را ترسیم کنیم.**

**۲– معادلات تعادل را برای نیروهای وارد بر نقطه مادی بنویسیم.**

# مثال

مثال– بار ۷۳۶ نیوتنی نشان داده شده، توسط دو کابل AC و AB نگه داشته شده است. مطلوبست تعیین نیروی کششـــی در هریک از این دو کابل.



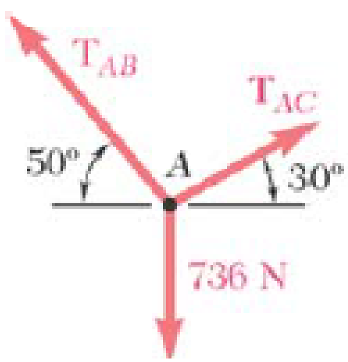

حل) در حل مسائل به روش تعادل به یکی از دو صورت زیر عمل می شود.

(روش اول) ترسیم چند ضلعی بسته نیروها :

۱– ترسیم نمودار آزاد

۲– ترسیم چند ضلعی بسته نیروها

۳– تعیین نیروهای مجهول به کمک قوانین SIN و COS




(روش دوم) استفاده از معادلات تعادل :

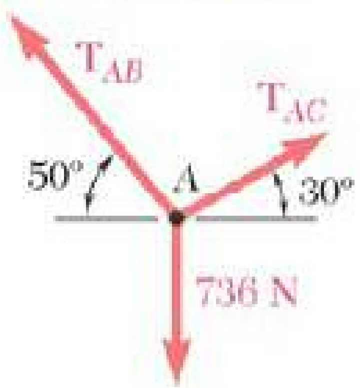
۱– ترسیم نمودار آزاد

۲– نوشتن معادلات تعادل

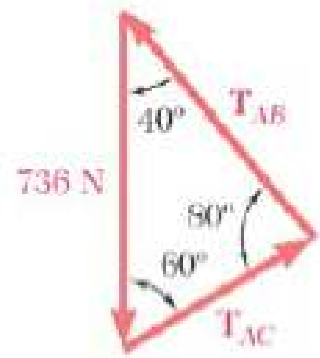
۳– تعیین نیروهای مجهول به کمک حل این معادلات

## ادامه حل:

نمودار آزاد نقطه A :




چند ضلعی بسته نیروها:




روابط مثلثاتی:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736\ \text{N}}{\sin 80^\circ}$$

$$T_{AB} = 647\ \text{N} \qquad T_{AC} = 480\ \text{N}$$

نوشتن معادلات تعادل:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{cases} -T_{AB}\cos 50 + T_{AC}\cos 30 = 0 \\ T_{AB}\sin 50 + T_{AC}\sin 30 - 736 = 0 \end{cases}$$

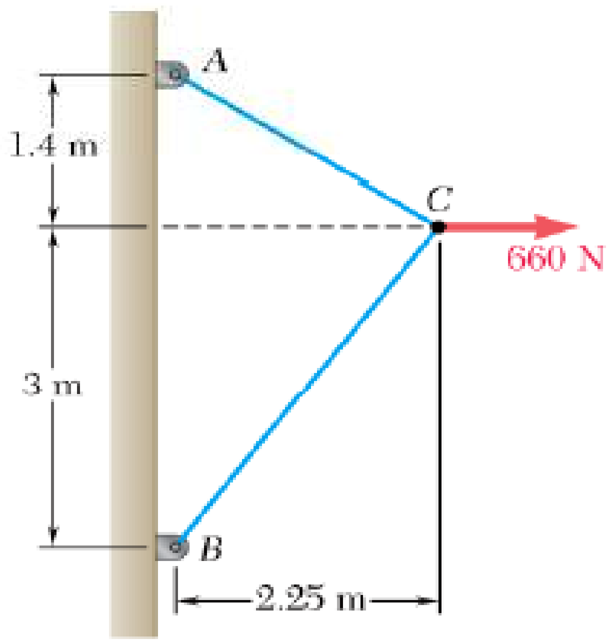
حل معادلات تعادل:

$$\begin{cases} T_{AB} = 1.347\,T_{AC} \\ (1.347\,T_{AC})\sin 50 + T_{AC}\sin 30 = 736 \end{cases} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{cases} T_{AB} = 647\ N \\ T_{AC} = 480\ N \end{cases}$$

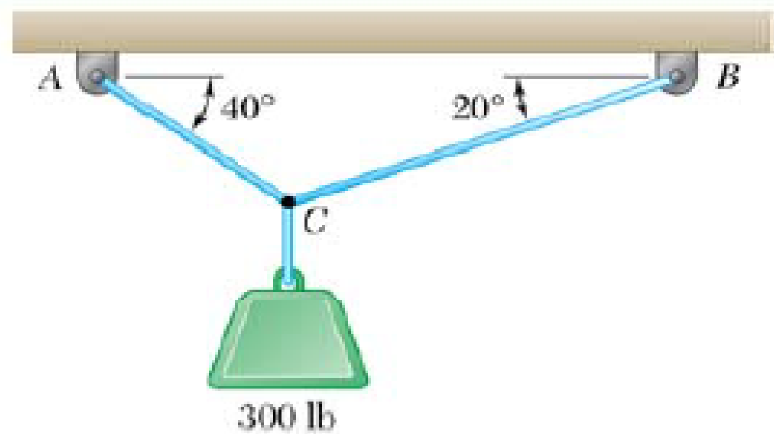
## تمرین:

**۱و۲– در شکل های داده شده، نیروی کشش در کابلهای AC وBC را بدست آورید.**

**(از روش تعادل – هم با ترسیم چند ضلعی نیروها و هم با نوشتن معادلات تعادل)**



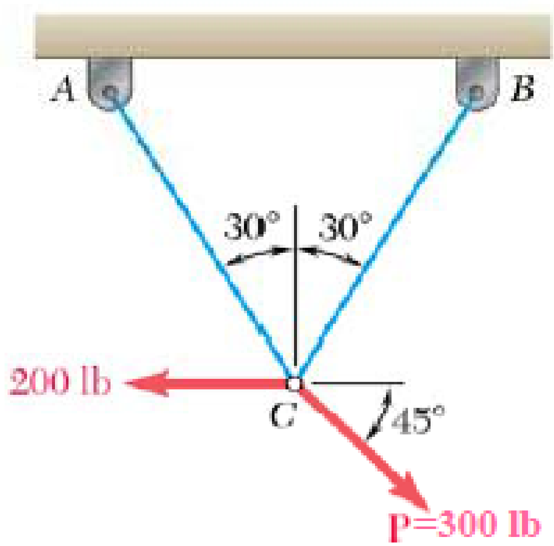

(Ans) : T AC = 530 N, T BC = 350 N.



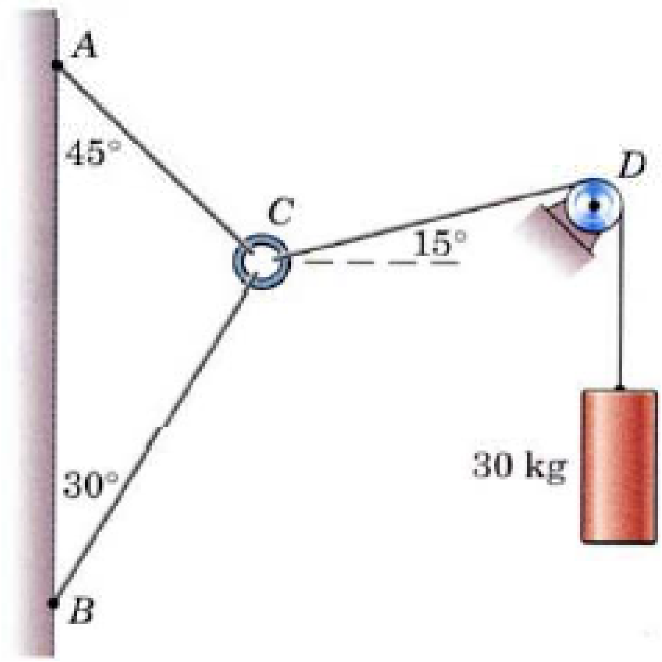

(Ans) : T AC = 326 lb, T BC = 265 lb.

## تمرین:

۳و۴– کشش در کابلهای AC وBC را بدست آورید. (هم با ترسیم چند ضلعی نیروها و هم با نوشتن معادلات تعادل)




(Ans) : T AC = 134.6 lb , T BC = 110.4 lb.

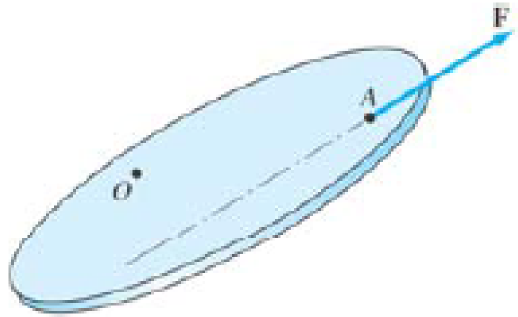


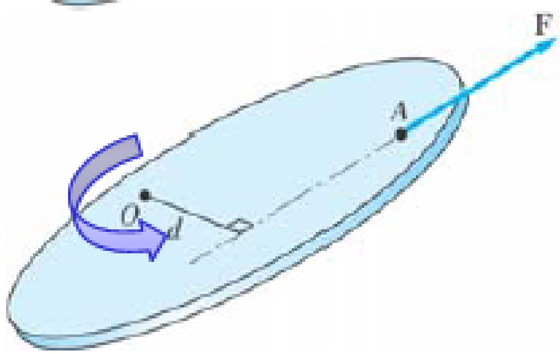

(Ans) : T AC = 215 N , T BC = 264 N

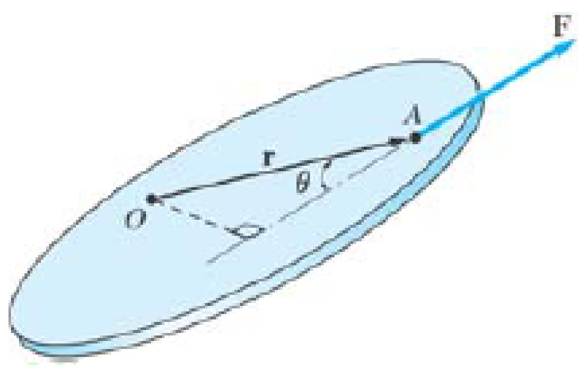
## فصل دوم

# گشتاور یک نیرو

# گشتاور یک نیرو در صفحه




**گشتاور نیروی F را حول نقطه O بدست آورید .**

حل:

با توجه به تعریف گشتاور (نیرو ضربدر فاصله عمودی)

داریم : $M_O = F\,d$

با توجه به شکل (مثلث قائم الزاویه) داریم :

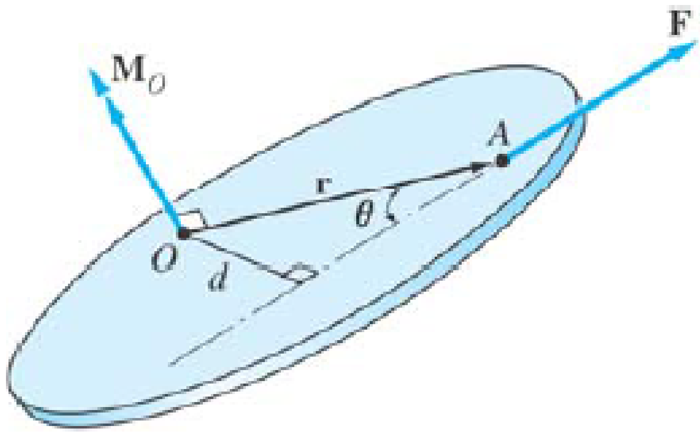
$$M_O = F\,d = F\,r\sin\theta$$

بنابراین از طریق ضرب برداری می‌توان گشتاور را اینچنین بدست آورد:

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}}$$

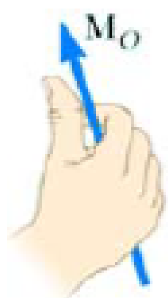
مقدار (اندازه) گشتاور: $\left|\vec{M}_O\right| = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right| = r\,F\sin\theta$

# گشتاور یک نیرو در صفحه




گشتاوری که از طریق ضرب برداری بدست مـــی‌آیـد یک بردار خواهد بود. بنابراین می‌توان با اســـتفاده از مولفه‌های این بردار:  مقدار ، امتداد و جهت گشـــتاور (یعنی مقدار گشتاور و جهت چرخش آن) را براحتـــی تعیین نمود.

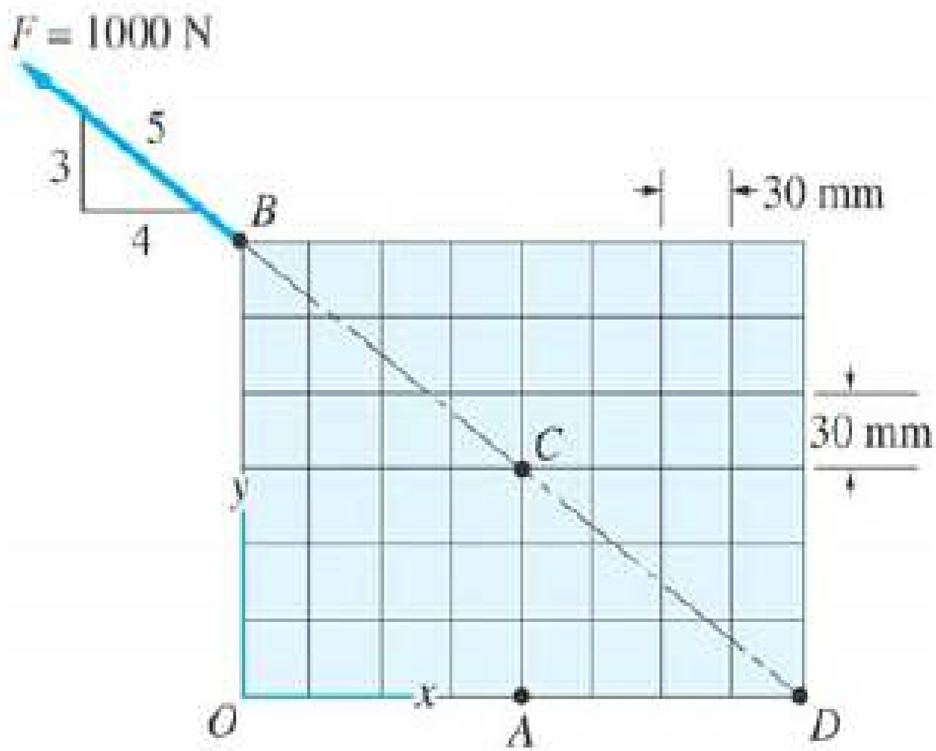
$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}} \qquad \vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$




اگر انگشت شصت دست راســـت را در جهـت بـــردار گشتاور  قرار دهـــیم، چهـــار انگشـــت دیگـــر (دســـت راست) جهت چرخش را نشان خواهد داد.

# مثال

گشتاور نیروی فضای F را حول نقطه A بدست آورید .



# حل:

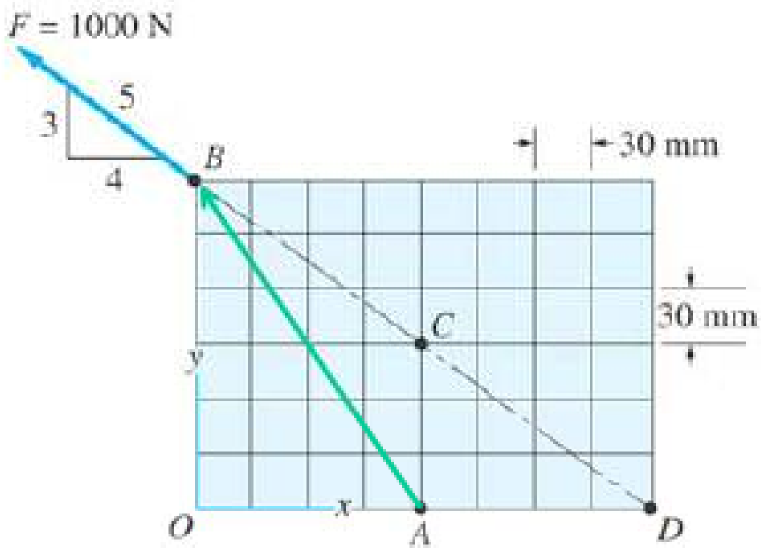
گشتاور نیروی فضای F را حول نقطه A بدست آورید .

حل:

1) تعیین بردار نیروی F.

2) تعیین بردار مکانی r .

3) ضرب خارجی r در F.




$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = -F\cos\theta\ \vec{i} + F\sin\theta\ \vec{j}$$

$$\vec{F} = -800\vec{i} + 600\vec{j}$$

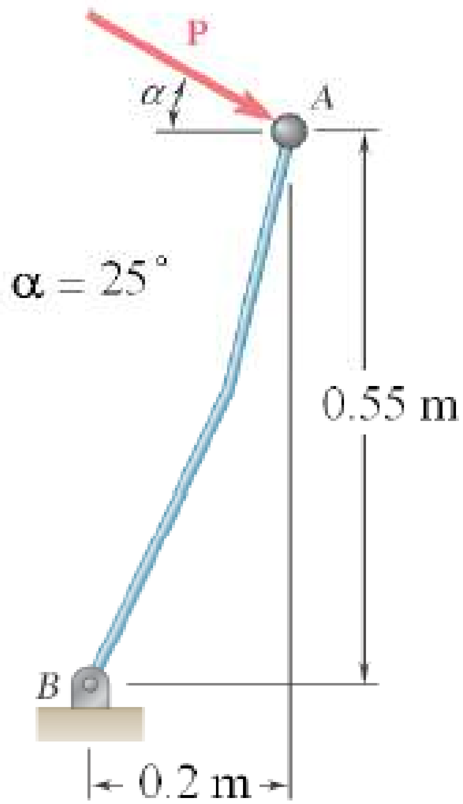
$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} = -120\vec{i} + 180\vec{j}$$

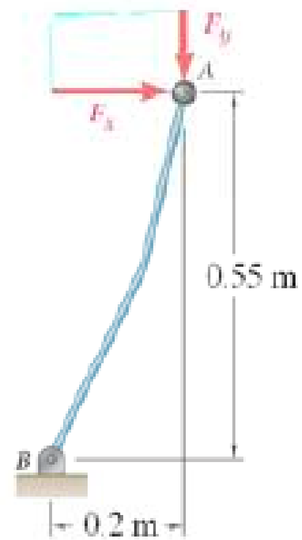
$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -120 & 180 & 0 \\ -800 & 600 & 0 \end{vmatrix} = (-120\times 600 + 180\times 800)\vec{k} = 72000\vec{k}$$

# مثال

نیروی P=8N به نقطه A وارد می‌شود. گشتاور این نیرو را حول نقطه B بدست آورید.



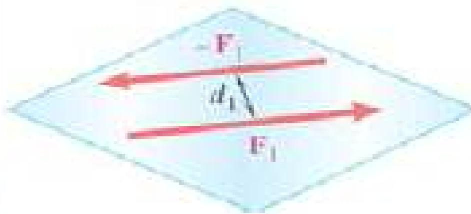

$$M_B = -F_x \times 0.55 - F_y \times 0.2$$

$$M_B = -8\cos 25^\circ \times 0.55 - 8\sin 25^\circ \times 0.2 = -4.664 \quad \text{N.m}$$

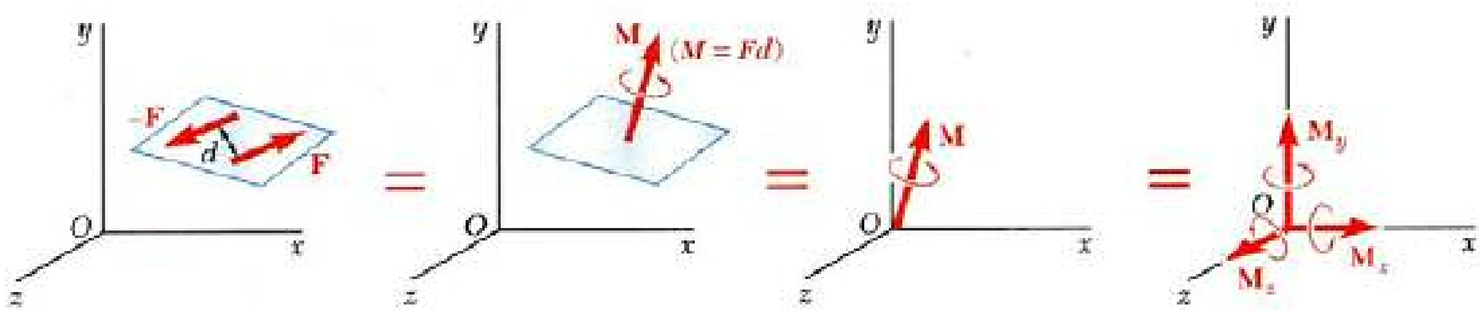
# گشتاور زوج نیرو

تعریف زوج نیرو (کوپل):

دو نیرو با امتداد مساوی و قدر مطلق مساوی و مختلف الجهت را زوج نیرو می‌نامند.

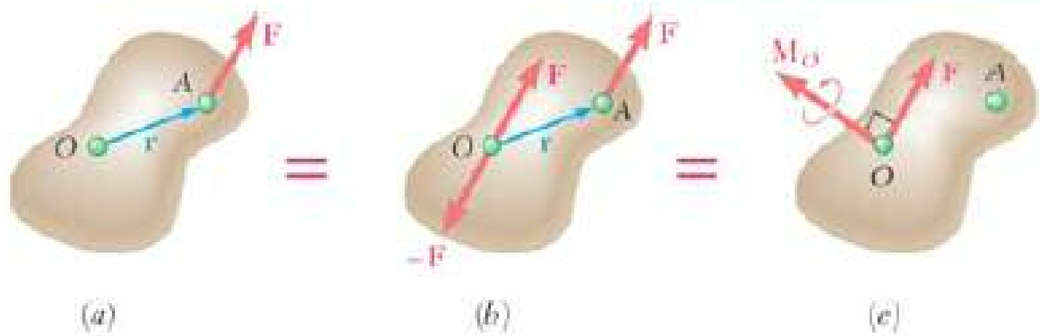


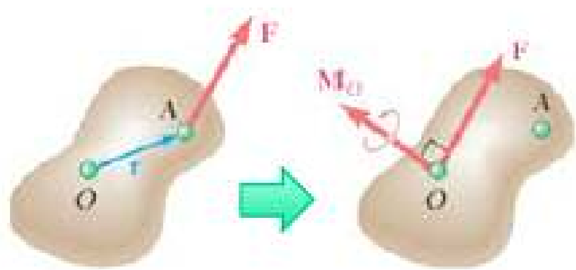

$$\boxed{M_{\text{Couple}} = F \times d}$$



# انتقال نیرو به موازات خود (سیستم کوپل نیروی معادل)

نیروی F را که به نقطه A اثر کرده است (به موازات خود) به نقطه O انتقال دهید.



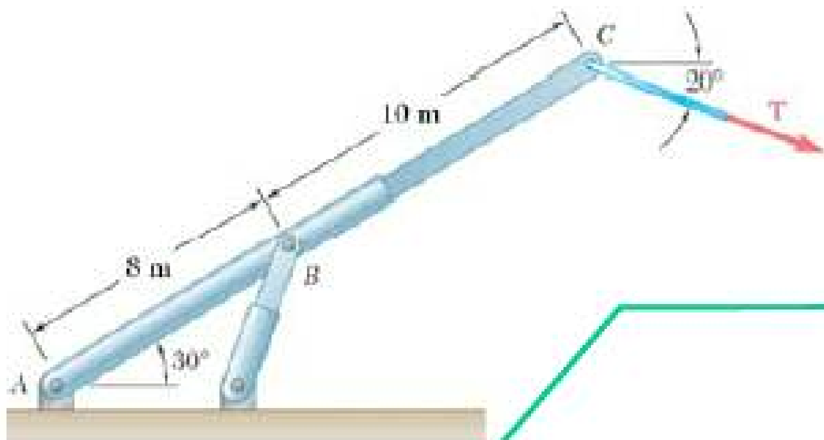

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

نتیجه:

با انتقال نیروی F به نقطه O ، گشتاور آن هم به نقطه O انتقال می‌یابد.

به نتیجه حاصله، سیستم کوپل نیروی در نقطه O نیز می‌گویند.

# مثال

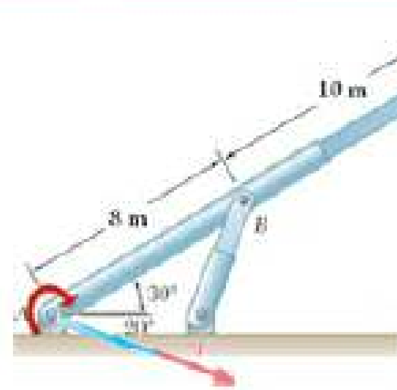


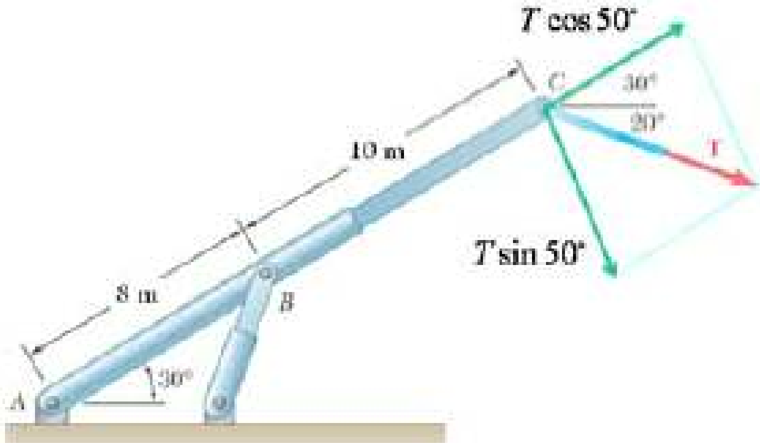

کشش در کابل T=560N است. مطلوبست:

الف) سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه A.

ب) سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه B.

حل:



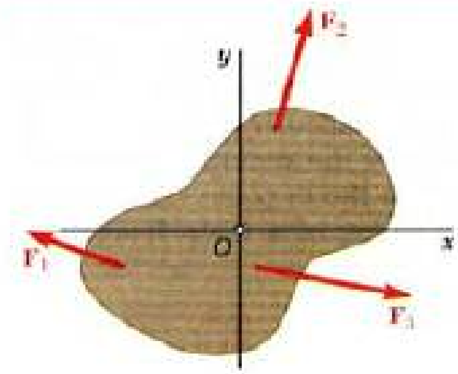




$$M_A = T\sin 50^\circ \times 18 = 7721.7\ \text{N.m}$$

# تبدیل سیستم نیروها به یک نیروی معادل

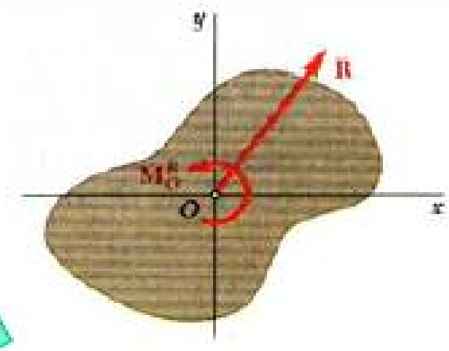
۱- ابتدا سیستم نیروهای غیر متقارب را به یک سیستم کوپل نیروی معادل (R و M) تبدیل می‌کنیم.

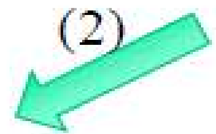
برای این منظور هریک از نیروها را به نقطه o منتقل می‌کنیم. با انتقال هر نیرو گشتاور آن نیز منتقل می‌شود. مجموع این گشتاورها M را می‌سازد. از برایند نیروها R بدست می‌آید.

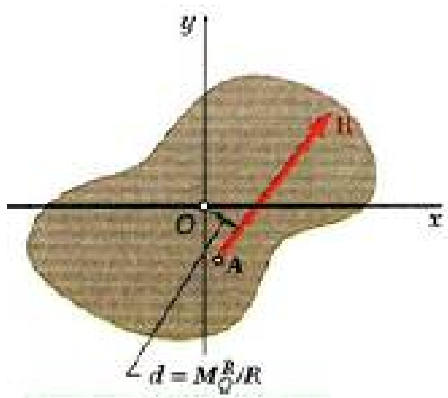




$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$
$$\vec{M}_O^R = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)$$



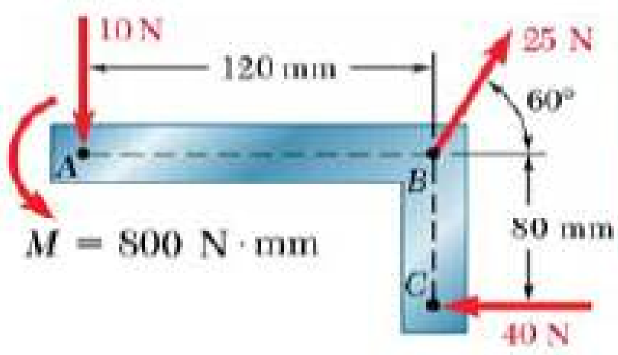



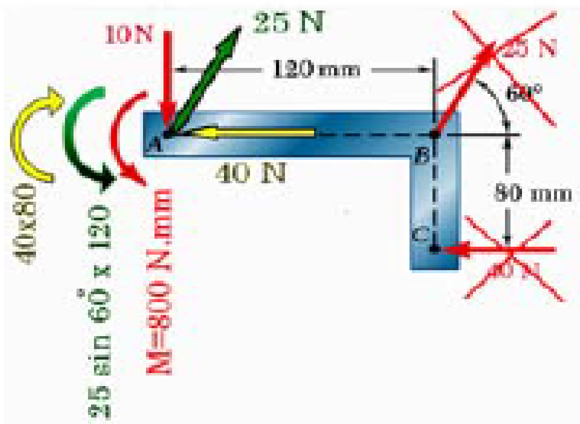

۲- با جابجایی نیروی R ، سیستم تک نیروی معادل بدست می‌آید.

# مثال

سه نیرو و یک گشتاور مطابق شکل به جسم اعمال شده است.
مطلوبست:
الف) سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه $A$
ب) سیستم تک نیروی معادل را در نقطه‌ای روی امتداد $AB$ تعیین کنید.



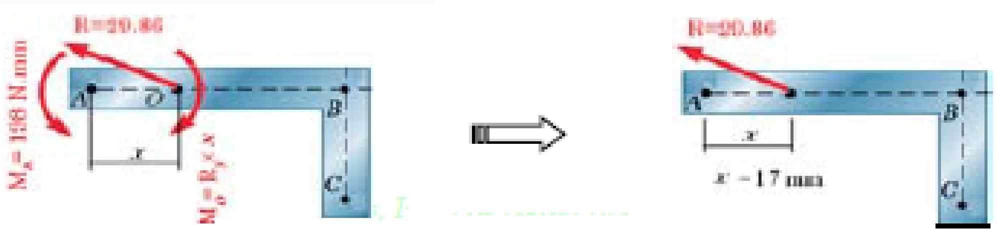

حل الف): ابتدا تمام نیروها را به نقطه $A$ انتقال می‌دهیم. سپس برایند نیروها و گشتاورها را (در نقطه $A$) تعیین می‌کنیم.




$$R_x = \sum F_x = -40 + 25\cos 60^\circ = -27.5\,\text{N} \qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{27.5^2 + 11.65^2} = 29.86\,\text{N}$$

$$R_y = \sum F_y = -10 + 25\sin 60^\circ = 11.65\,\text{N} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{11.65}{27.5}\right) = 23^\circ$$

$$M_A = \sum M = 800 + 25\sin 60^\circ \times 120 - 40 \times 80 = 198\,\text{N.mm}$$




$$M_A = M_O \quad \Rightarrow \quad x = \frac{198}{11.65} = 17\ \text{mm}$$

فصل ۳

# تعادل اجسام صلب

# تعادل اجسام صلب

**۱– معادلات تعادل اجسام صلب (در فضا):**

تعادل حرکتی $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$

تعادل چرخشی $\sum \vec{M}_o = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$

**۲– معادلات تعادل اجسام صلب (در صفحه):**

تعادل حرکتی $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$

تعادل چرخشی $\sum \vec{M}_o = 0 \Rightarrow \sum M_z = 0$

# تعادل اجسام صلب

## ۳– حل مسائل استاتیک با روش تعادل :

برای حل مسائل استاتیک به روش تعادل، ابتدا نمودار آزاد جسم صلب ترسیم می‌شود. نمـودار آزاد نموداری است که همه نیروها و گشتاورهای اعمالی به جسم (اعم از نیروها و گشتاورهای خــارجی و تکیه‌گاهی) را نشان دهد. برای نشان دادن نیرو و گشتاور تکیه گاهی بایـد انـواع تکیــه‌گـاه‌هـا را بشناسیم.

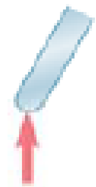
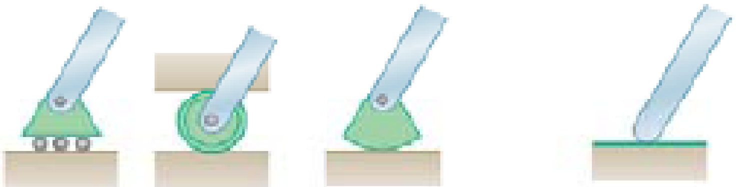
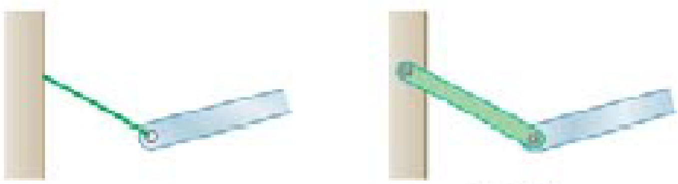
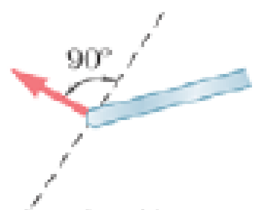
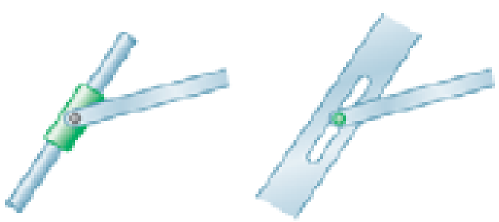
برای حل مسائل استاتیک به روش تعادل، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- ترسیم نمودار آزاد جسم

۲- نوشتن معادلات تعادل

۳- حل معادلات تعادل

# انواع تکیه گاهها

| تعداد مجهولات | عکس العمل | نوع تکیه‌گاه یا اتصال |
|---|---|---|
| 1 |  نیرو با امتداد معلوم |  غلطکی / تماسی بدون اصطکاک |
| 1 |  نیرو با امتداد معلوم |  کابل کوتاه / میله کوتاه |
| 1 |  نیرو با امتداد معلوم |  تکیه‌گاه کشوئی بدون اصطکاک |

انواع تکیه‌گاهها:

۱- تکیه‌گاه غلطکی، میله‌ای و لغزان (یک مجهولی)

۲- تکیه‌گاه مفصلی یا پینی (دو مجهولی)

۳- تکیه‌گاه گیردار (سه مجهولی)

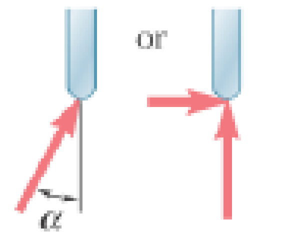
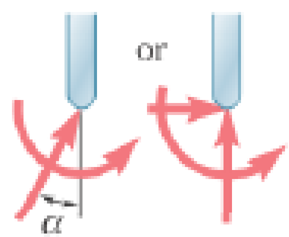
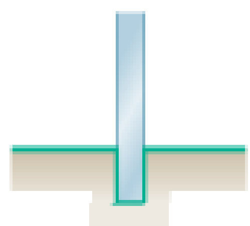
# انواع تکیه گاهها

**انواع تکیه‌گاهها:**

۱- تکیه‌گاه غلطکی، میله‌ای و لغزان (یک مجهولی)

۲- تکیه‌گاه مفصلی یا پینی (دو مجهولی)

۳- تکیه‌گاه گیردار (سه مجهولی)

| تعداد مجهولات | عکس العمل | نوع تکیه‌گاه یا اتصال |
|---|---|---|
| 2 |  نیرو و امتدادآن مجهول |  تکیه‌گاه پینی    تماسی با اصطکاک |
| 3 |  نیرو و گشتاور مجهول |  تکیه‌گاه گیردار |

# مثال ۱

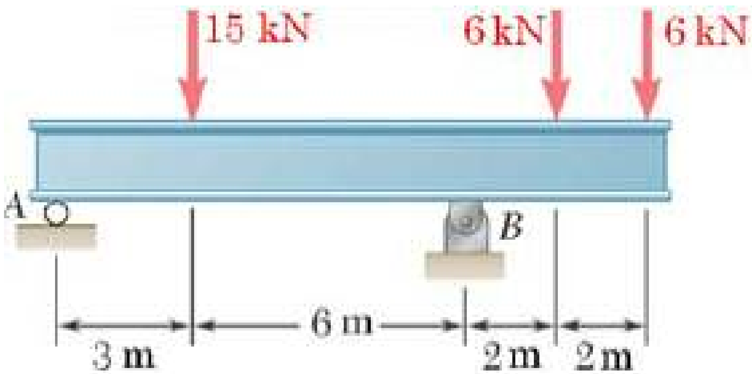
در تیر تحت بار مقابل مطلوبست: تعیین عکس العمل تکیه‌گاهی در A و B

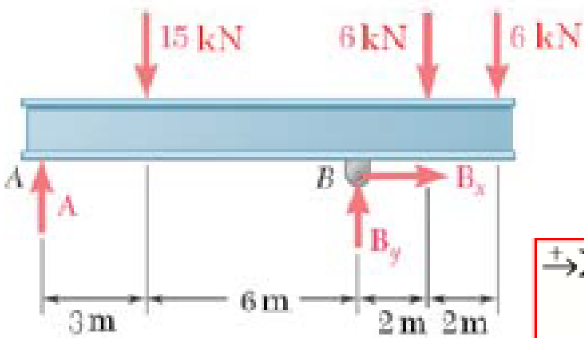
حل:

۱- ترسیم نمودار آزاد جسم

۲- نوشتن معادلات تعادل

۳- حل معادلات تعادل




$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0$: $B_x = 0$ $\boxed{\mathbf{B}_x = 0}$

$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$: $-(15)(3) + B_y(9) - (6)(11) - (6)(13) = 0$

$B_y = +21$ $\boxed{\mathbf{B}_y = 21 \text{ kN} \uparrow}$

$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$: $-A(9) + (15)(6) - (6)(2) - (6)(4) = 0$

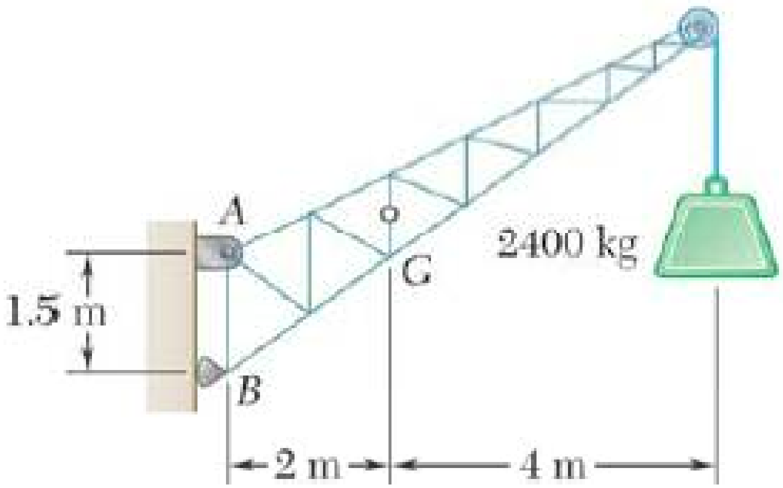
$A = +6$ $\boxed{\mathbf{A} = 6 \text{ kN} \uparrow}$

# مثال ۲

سازه مقابل دارای جرم ۱۰۰۰ کیلوگرم است و مرکز جرم آن در نقطه G قرار دارد. با اعمال بار ۲۴۰۰ کیلوگرم به آن مطلوبست:

الف) عکس العمل تکیه‌گاهی در B.

ب) عکس العمل تکیه‌گاهی در A.




حل:

۱- ترسیم نمودار آزاد جسم

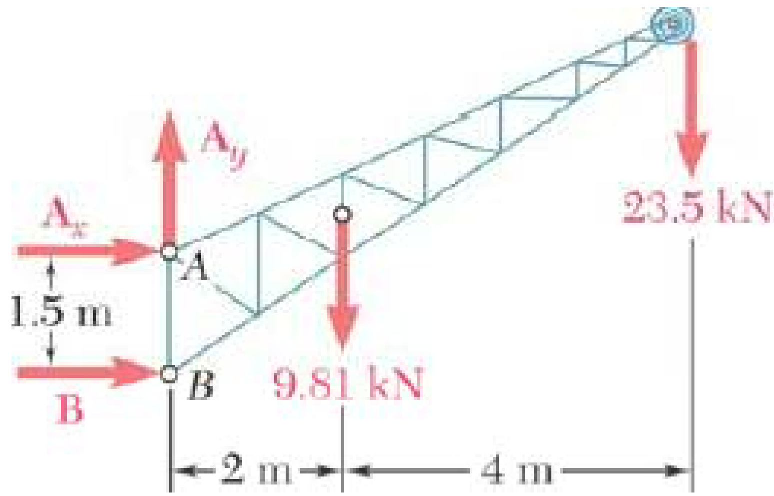
۲- نوشتن معادلات تعادل

۳- حل معادلات تعادل

$$W = 1000 \times 9.81 = 9810 \ \text{N} = 9.81 \ \text{kN}$$

$$F = 2400 \times 9.81 = 23500 \ \text{N} = 23.5 \ \text{kN}$$

حل:




$$\sum M_A = 0: \quad +B(1.5) - 9.81(2) - 23.5(6) = 0$$

$$\boxed{B = +107.1\,\text{kN}}$$

$$\sum F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

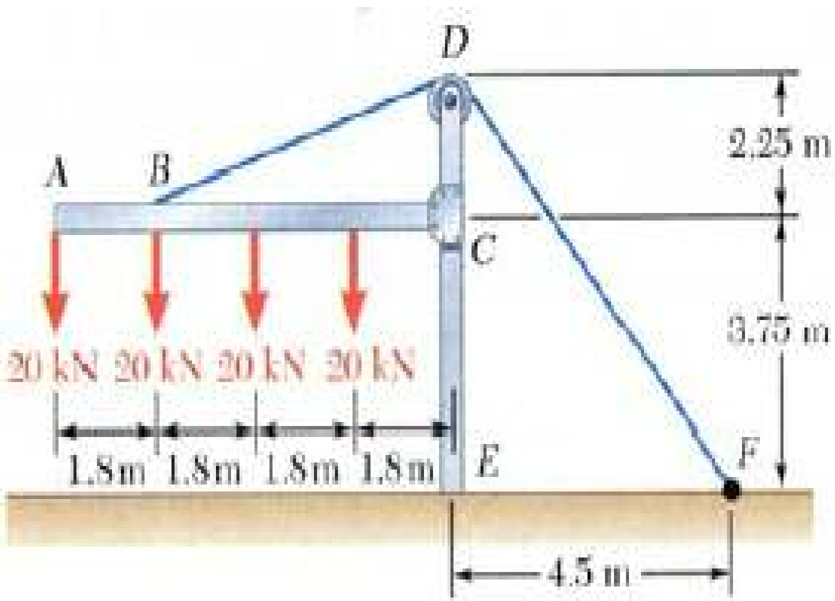
$$\boxed{A_x = -107.1\,\text{kN}}$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y - 9.81 - 23.5 = 0$$

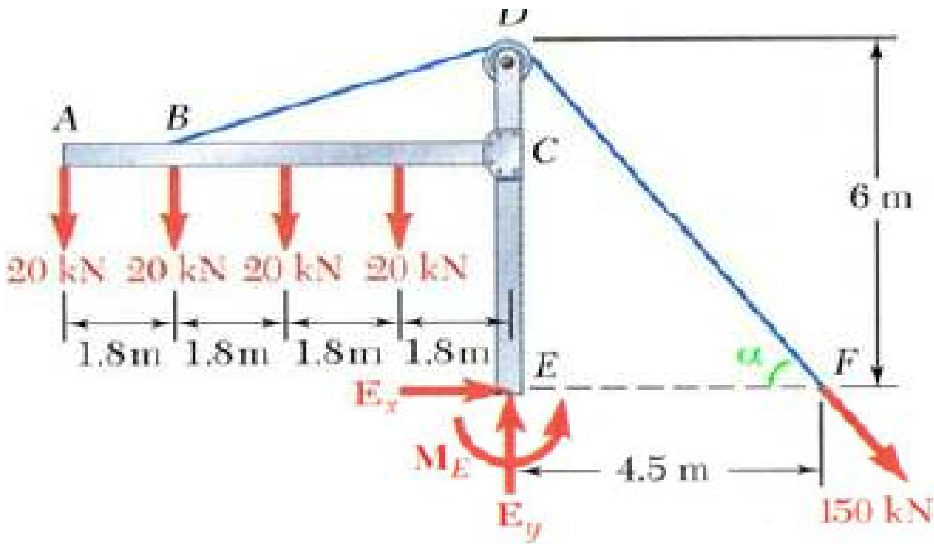
$$\boxed{A_y = +33.3\,\text{kN}}$$

## مثال ۳

قاب مقابل نیروهای سقف یک ساختمان کوچک را تحمل می‌کند. کشش در کابل برابر 150 kN است. عکس العمل در انتهای ثابت E را تعیین کنید.



حل:




$$\sum F_x = 0: \quad E_x + 150\cos\alpha = 0$$

$$E_x + \frac{4.5}{7.5}\times 150 = 0$$

$$\boxed{E_x = -90.0\ \text{kN}}$$

$$\sum F_y = 0: \quad E_y - 4(20) - \frac{6}{7.5}(150) = 0$$

$$\boxed{E_y = +200\ \text{kN}}$$

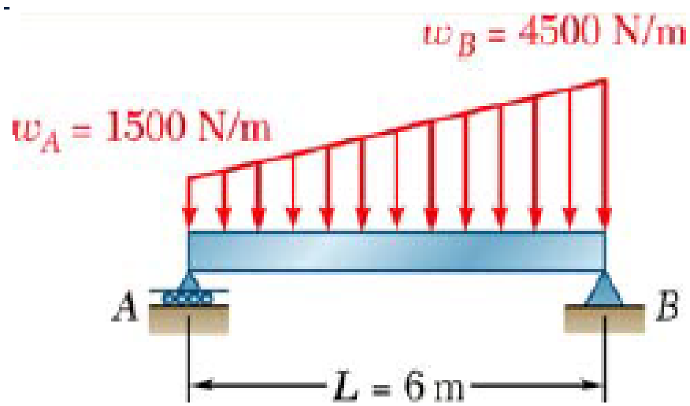
$$\sum M_E = 0:$$

$$+20(7.2) + 20(5.4) + 20(3.6) + 20(1.8) - \frac{6}{7.5}(150)4.5 + M_E = 0$$

$$\boxed{M_E = 180.0\ \text{kN}\cdot\text{m}}$$

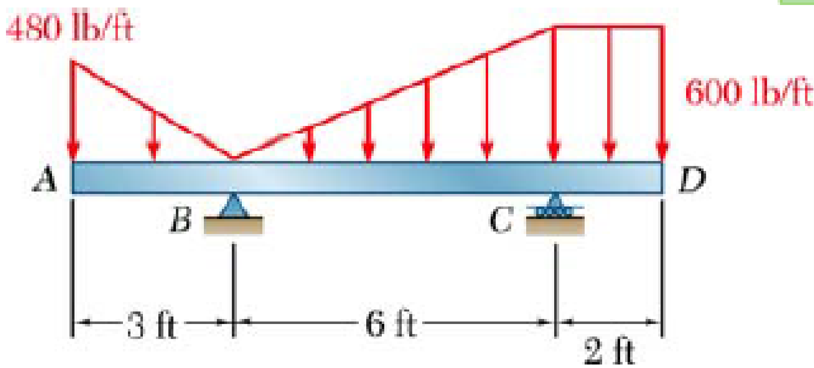
# تمرین

عکس العمل تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.

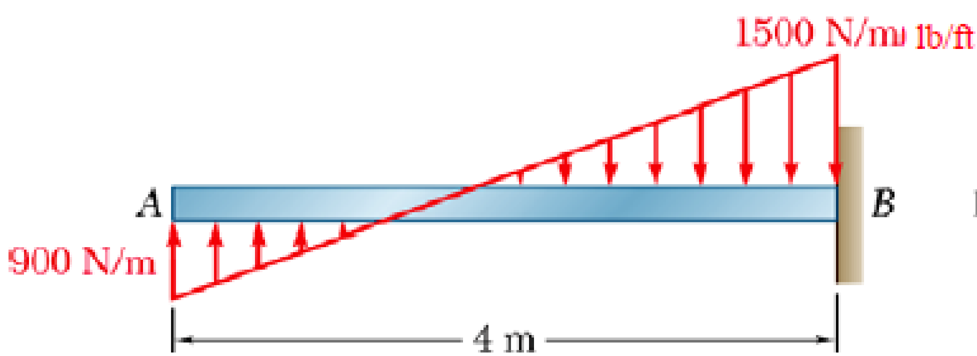


# تمرین

عکس العمل تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.



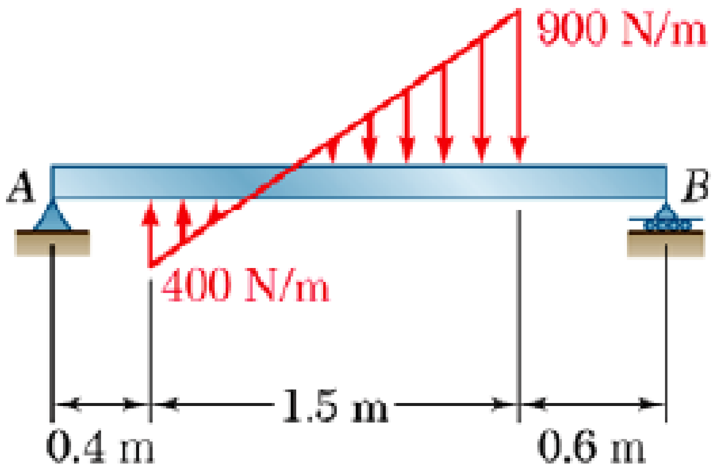

$\mathbf{B} = 1360\ \text{lb} \uparrow;\ \mathbf{C} = 2360\ \text{lb} \uparrow.$



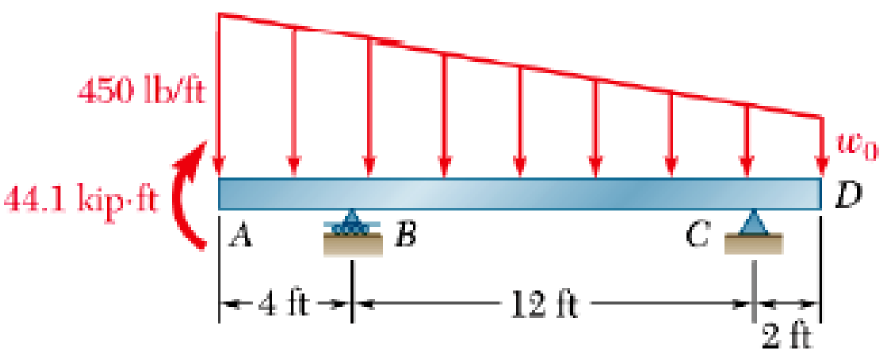

$\mathbf{B} = 1200\ \text{N} \uparrow,\ \mathbf{M}_B = 800\ \text{N} \cdot \text{m} \circlearrowleft.$

# تمرین

عکس العمل تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.




A = 105 N ↑, B = 270 N ↑

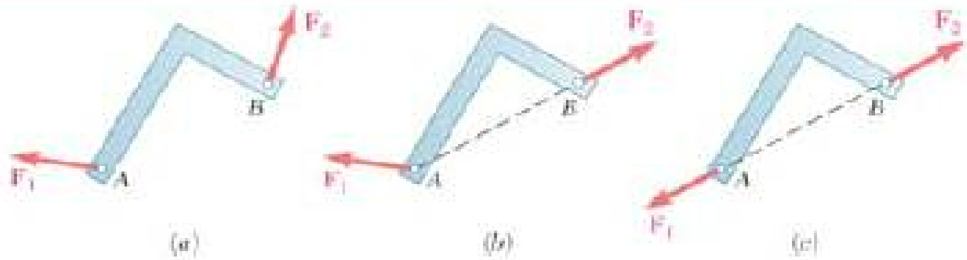


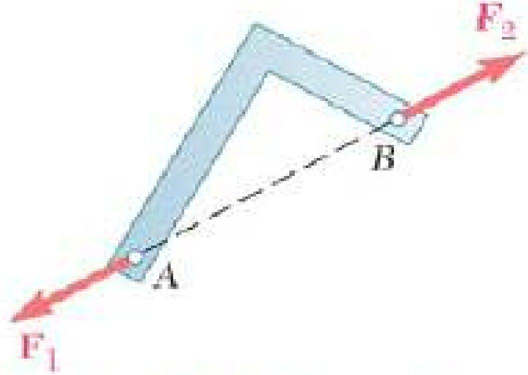

B = 150.0 lb ↑; C = 5250 lb ↑

# تعادل جسم دو نیرویی

اگر عضوی تحت اثر (فقط) دو نیرو قرار گرفته و در حال تعادل باشد، عضو دو نیرویی است.

گشتاورگیری حول نقاط اثر نیرو، نتیجه می‌دهد که امتداد نیروها: خط واصل دو نقطه اثر است.
همچنین با نوشتن معادله نیروها مشخص می‌شود که این دو نیرو با هم مساوی و مختلف الجهت‌اند.

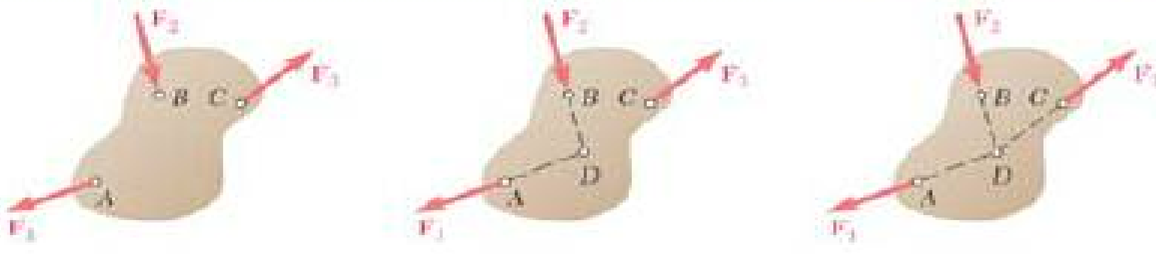


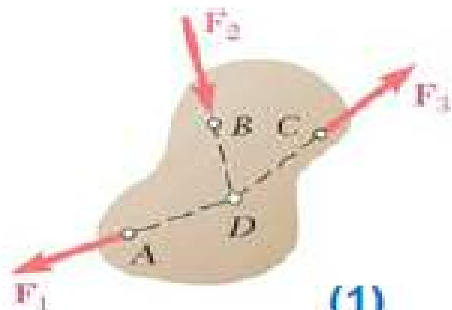

$$F_1 = F_2$$

# تعادل جسم سه نیرویی

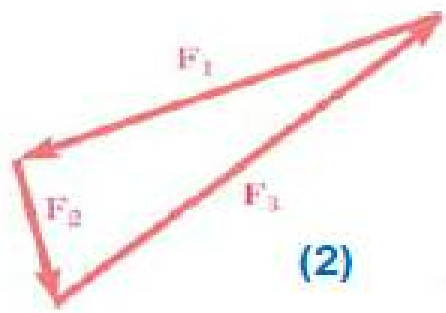
اگر عضوی تحت اثر (فقط) سه نیرو قرار گرفته و در حال تعادل باشد، عضو سه نیرویی است.
تعادل چرخشی و حرکتی نتیجه می‌دهد که در عضو سه نیرویی :
۱- امتداد سه نیرو از یک نقطه واحد (مشترک) می‌گذرد.
۲- چند ضلعی نیرو یک مثلث است.




(a) (b) (c)




(1)




(2)

# فصل ۴

# تحلیل تیرها

# تحلیل تیرها:

## تحلیل تیرها:

هدف ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی در طول تیر می باشد که به کمک آن مقادیر حداکثر آنها (نیرو و گشتاور) تعیین شده و جهت طراحی تیر مورد استفاده قرار می گیرد. برای ترسیم نمودارهای مذکور از دو روش زیر استفاده می شود:

۱- روش برش

۲- روش سطح زیر منحنی (روش جمع زنی)

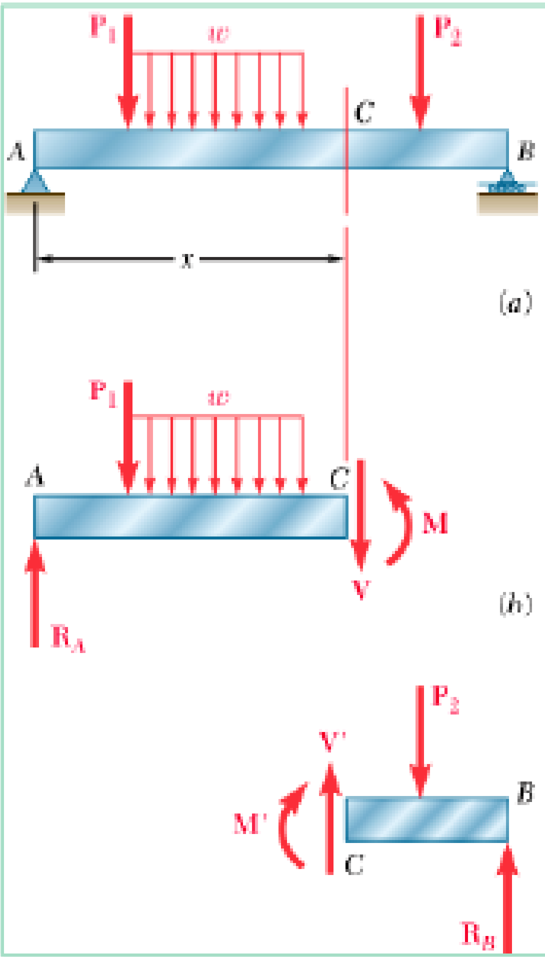
# روش برش برای ترسیم نمودار V و M

در روش برش مراحل زیر (جهت ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی) انجام می شود:

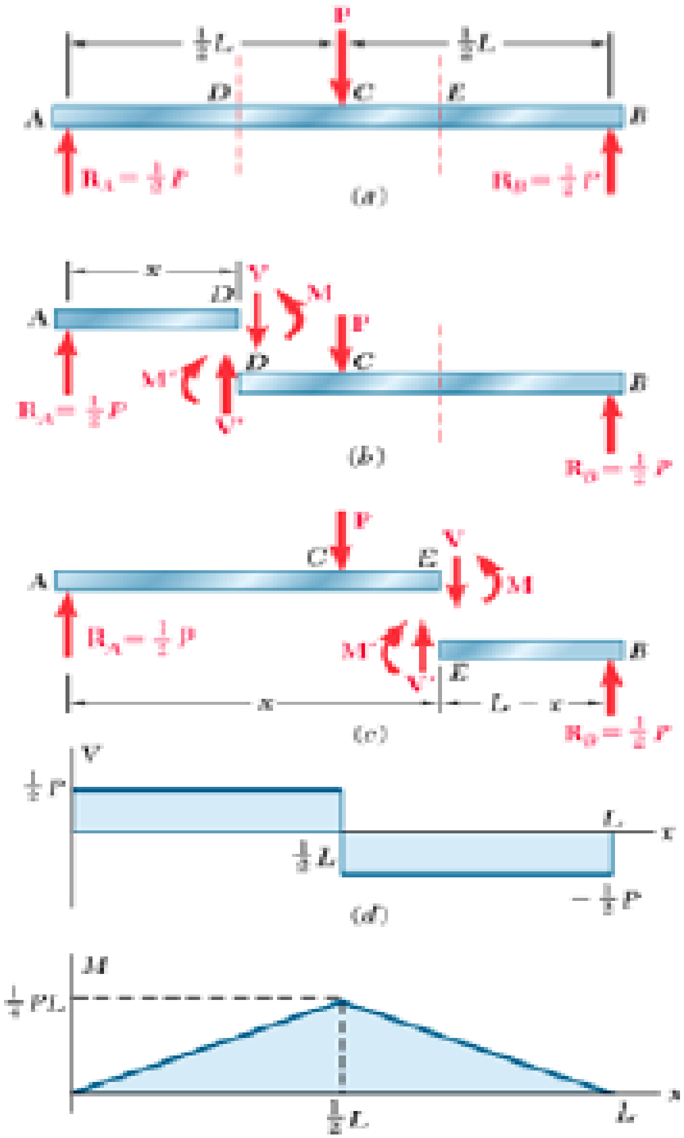
۱– تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی.

۲– برش تیر در حد فاصل نیروهای اعمالی به آن.  در مقطع برش، جهتهای نیروی برشی و گشتاور خمشی بصورت مقابل در نظر گرفته می شود.

۳– نوشتن معادلات تعادل برای یکی از دو قسمت برش خورده. که براساس این معادلات، نیروی برشی $V$ و گشتاور خمشی $M$ بر حسب طول تیر $x$ (در حد فاصل مورد نظر) تعیین می شود.



# نمودار برش و لنگر



در نقطه D برش داده و عضو AD
را درنظر می گیریم:

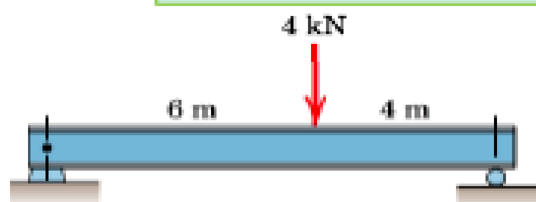
$$V = +P/2 \quad M = +Px/2$$

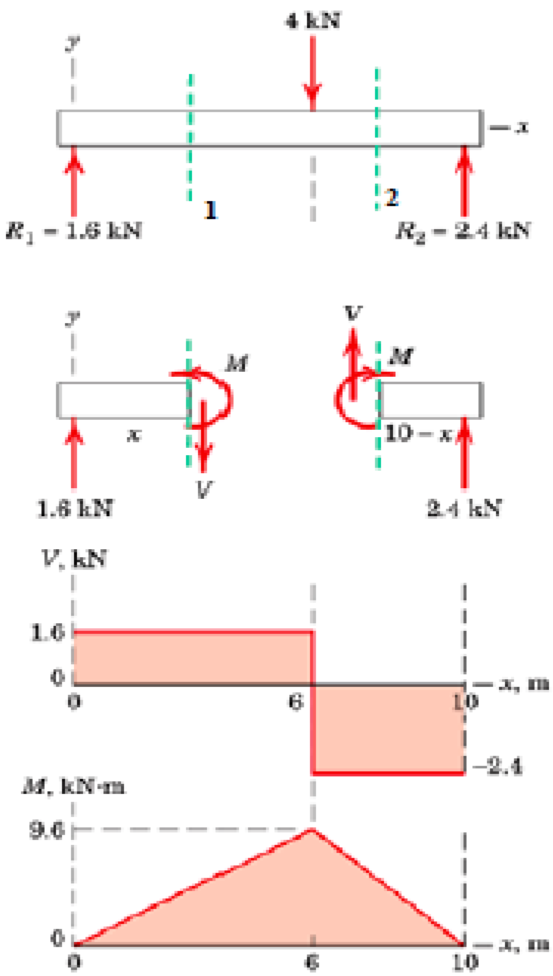
در نقطه E برش داده و عضو EB
را درنظر می گیریم:

$$V = -P/2 \quad M = +P(L-x)/2$$

# مثال ۱

بر اساس روش برش، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را ترسیم نمایید.




بررسی تعادل سمت چپ برش ۱

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad 1.6 - V = 0 \quad \boxed{V = 1.6 \text{ kN}}$

$[\Sigma M_{R_1} = 0]$ $\quad M - 1.6x = 0 \quad \boxed{M = 1.6x}$

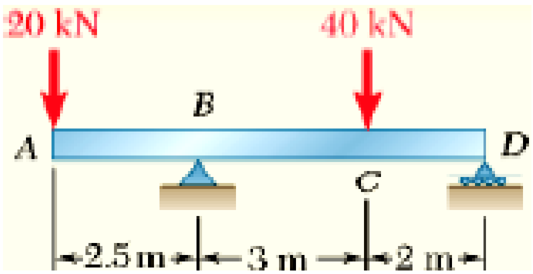
بررسی تعادل سمت راست برش ۲

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad V + 2.4 = 0 \quad \boxed{V = -2.4 \text{ kN}}$

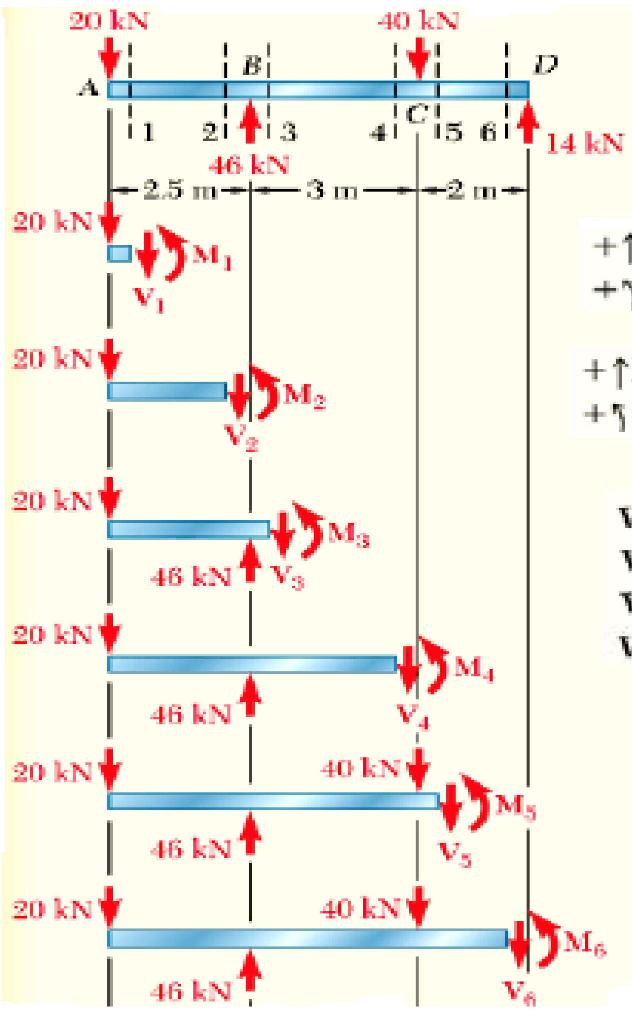
$[\Sigma M_{R_2} = 0]$ $\quad -(2.4)(10 - x) + M = 0 \quad \boxed{M = 2.4(10 - x)}$

# مثال ۲

بر اساس روش برش،  نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل ، ترسیم نمایید.



## حل مثال ۲:




$\mathbf{R}_B = 46 \text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14 \text{ kN} \uparrow$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0{:} \quad -20 \text{ kN} - V_1 = 0 \qquad V_1 = -20 \text{ kN}$

$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0{:} \quad (20 \text{ kN})(0 \text{ m}) + M_1 = 0 \qquad M_1 = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0{:} \quad -20 \text{ kN} - V_2 = 0 \qquad V_2 = -20 \text{ kN}$

$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0{:} \quad (20 \text{ kN})(2.5 \text{ m}) + M_2 = 0 \qquad M_2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$

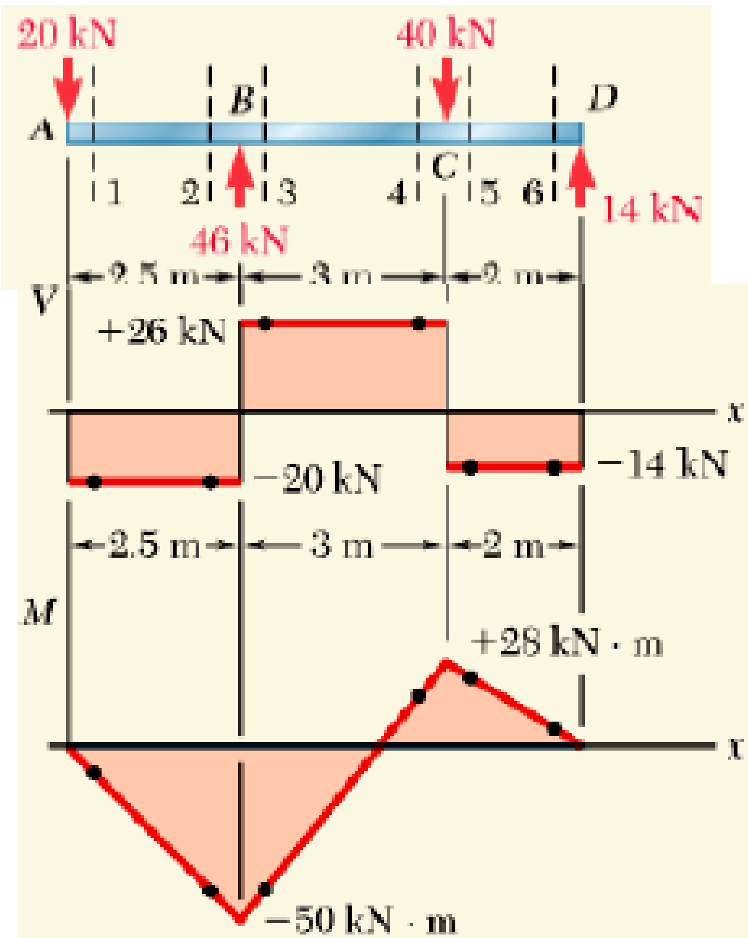
$V_3 = +26 \text{ kN} \qquad M_3 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$V_4 = +26 \text{ kN} \qquad M_4 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$V_5 = -14 \text{ kN} \qquad M_5 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$

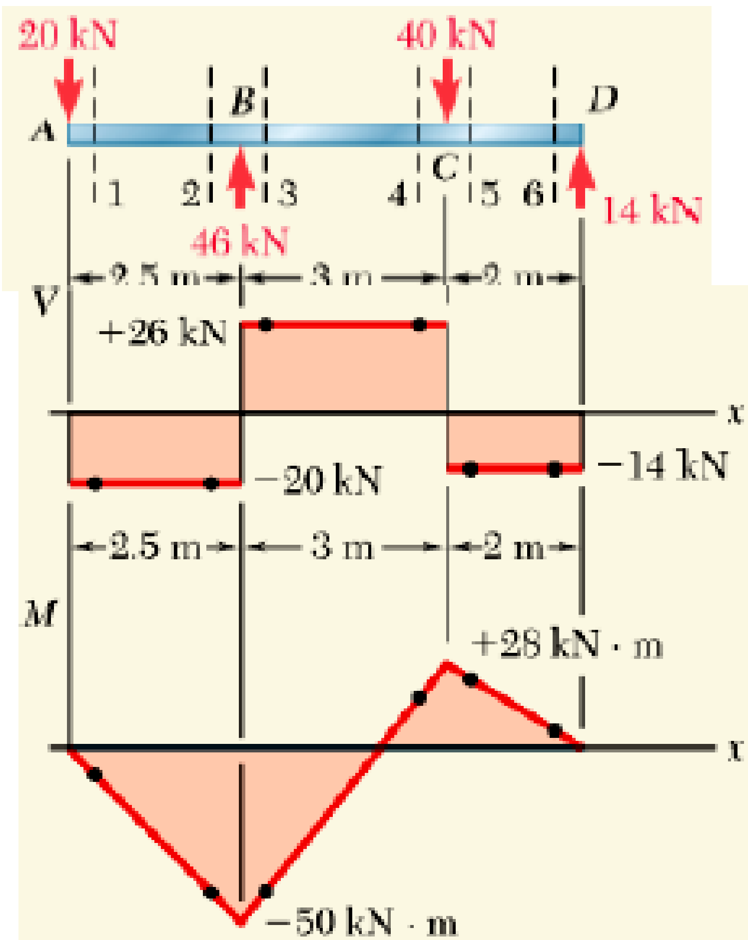
$V_6 = -14 \text{ kN} \qquad M_6 = 0$

## ادامه حل مثال ۲:



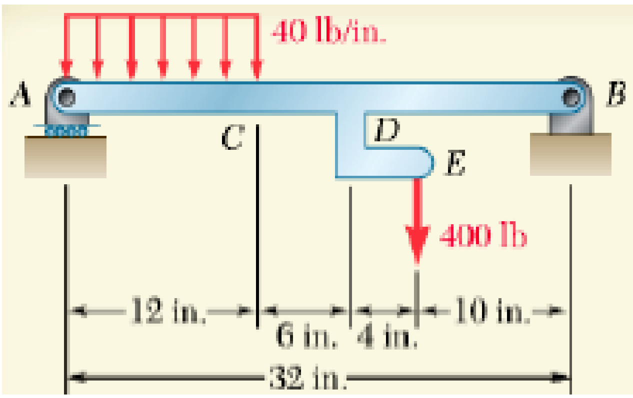

| | |
|---|---|
| $V_1 = -20$ kN | $M_1 = 0$ |
| $V_2 = -20$ kN | $M_2 = -50$ kN · m |
| $V_3 = +26$ kN | $M_3 = -50$ kN · m |
| $V_4 = +26$ kN | $M_4 = +28$ kN · m |
| $V_5 = -14$ kN | $M_5 = +28$ kN · m |
| $V_6 = -14$ kN | $M_6 = 0$ |

## ادامه حل مثال ۲:



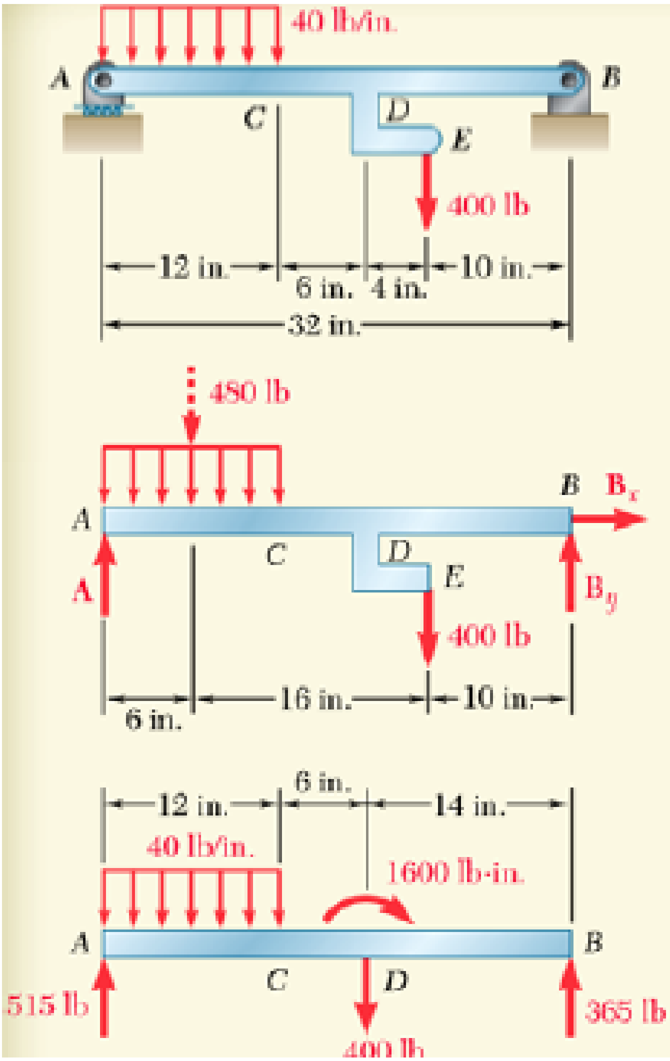

| | |
|---|---|
| $V_1 = -20\ \text{kN}$ | $M_1 = 0$ |
| $V_2 = -20\ \text{kN}$ | $M_2 = -50\ \text{kN}\cdot\text{m}$ |
| $V_3 = +26\ \text{kN}$ | $M_3 = -50\ \text{kN}\cdot\text{m}$ |
| $V_4 = +26\ \text{kN}$ | $M_4 = +28\ \text{kN}\cdot\text{m}$ |
| $V_5 = -14\ \text{kN}$ | $M_5 = +28\ \text{kN}\cdot\text{m}$ |
| $V_6 = -14\ \text{kN}$ | $M_6 = 0$ |

# مثال ۳




بر اساس روش برش، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل ، ترسیم نمایید.

# حل مثال ۳:




$$\sum M_A = 0:$$

$$B_y(32\,\text{in.}) - (480\,\text{lb})(6\,\text{in.}) - (400\,\text{lb})(22\,\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{B_y = 365\,\text{lb}}$$

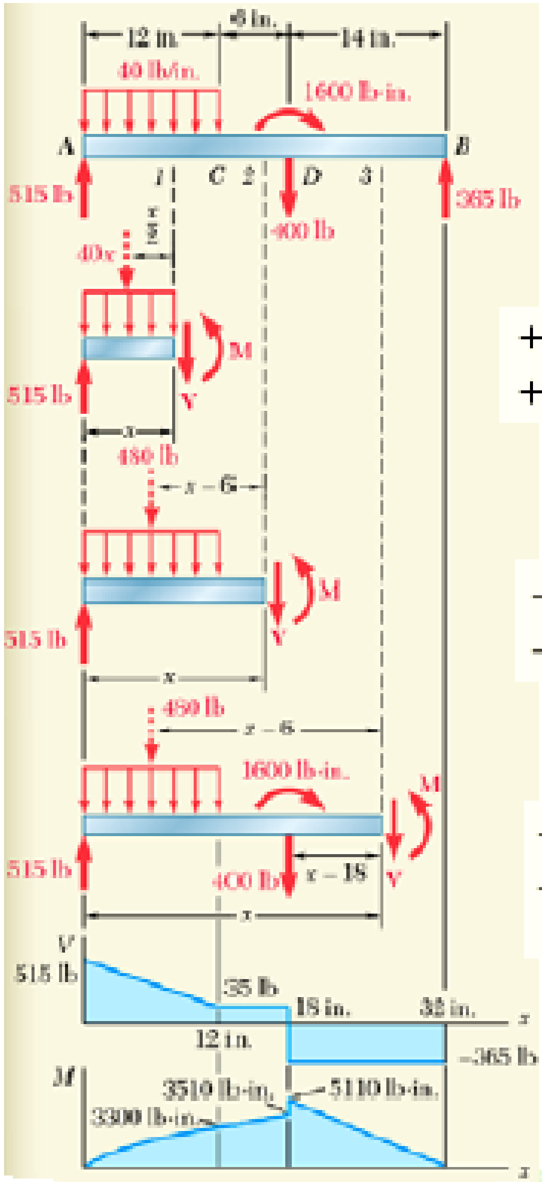
$$\sum M_B = 0:$$

$$(480\,\text{lb})(26\,\text{in.}) + (400\,\text{lb})(10\,\text{in.}) - A(32\,\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{A = 515\,\text{lb}}$$

$$\sum F_x = 0: \qquad \boxed{B_x = 0}$$

## ادامه حل:




$0 < x < 12$ in.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 515 - 40x - V = 0 \qquad V = 515 - 40x$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \quad -515x + 40x(\tfrac{1}{2}x) + M = 0 \qquad M = 515x - 20x^2$$

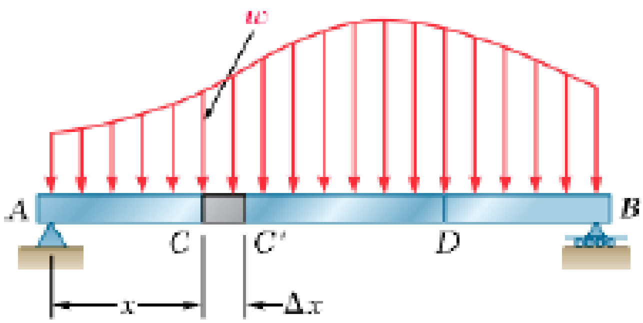
18 in. $< x <$ 32 in.

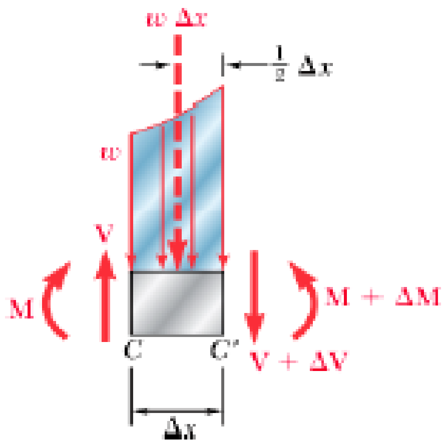
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 515 - 480 - V = 0 V = 35 \text{ lb}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \quad -515x + 480(x - 6) + M = 0 \qquad M = (2880 + 35x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

18 in. $< x <$ 32 in.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 515 - 480 - 400 - V = 0 \qquad V = -365 \text{ lb}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_3 = 0: \quad -515x + 480(x - 6) - 1600 + 400(x - 18) + M = 0$$
$$M = (11{,}680 - 365x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

# ارتباط بین بار، نیروی برشی و لنگر خمشی




- Relations between load and shear:

$$V-(V+\Delta V)-w\Delta x=0$$

$$\frac{dV}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=-w$$

$$V_D-V_C=-\int_{x_C}^{x_D} w\,dx=-(\text{area under load curve})$$

- Relations between shear and bending moment:

$$(M+\Delta M)-M-V\Delta x+w\Delta x\frac{\Delta x}{2}=0$$

$$\frac{dM}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta M}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(V-\tfrac{1}{2}w\Delta x\right)=V$$

$$M_D-M_C=\int_{x_C}^{x_D} V\,dx=(\text{area under shear curve})$$

# روش سطح زیر منحنی برای ترسیم نمودار V و M (روش جمع زنی)

در روش جمع زنی مراحل زیر (جهت ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی) انجام می شود:

۱– تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی و ترسیم نمودار برش. مجموع نیروها در جهت قائم (در طول) برابر صفر است.

۲– ترسیم نمودار گشتاور خمشی بر اساس سطح زیر منحنی نیروی برشی و گشتاورهای متمرکز اعمالی به تیر.

۳– در صورت نیاز، استفاده از روابط بین بار، برش و گشتاور .

$$w = -\frac{dV}{dx}$$

$$\int_{V_0}^{V} dV = -\int_{x_0}^{x} w \, dx$$

$V = V_0 +$ (the negative of the area under the loading curve from $x_0$ to $x$)

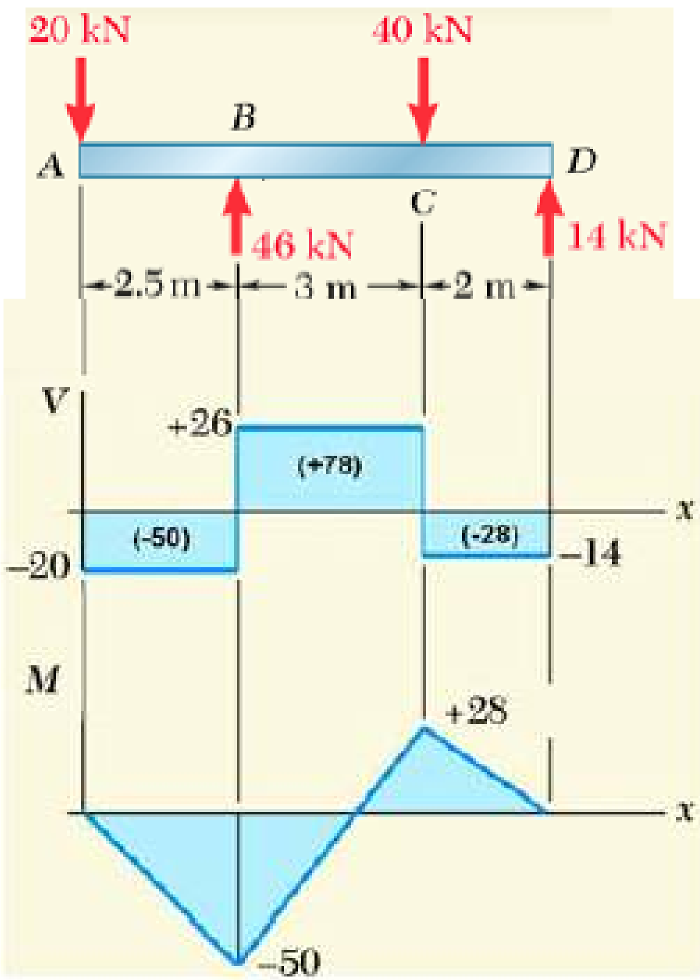
$$V = \frac{dM}{dx}$$

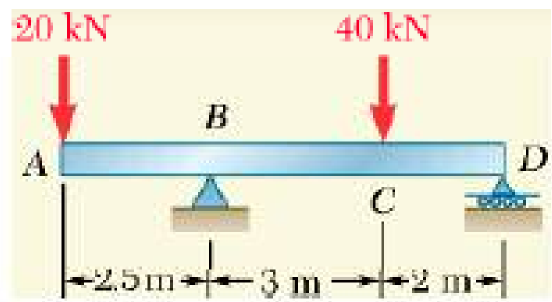
$$\int_{M_0}^{M} dM = \int_{x_0}^{x} V \, dx$$

$M = M_0 +$ (area under the shear diagram from $x_0$ to $x$)

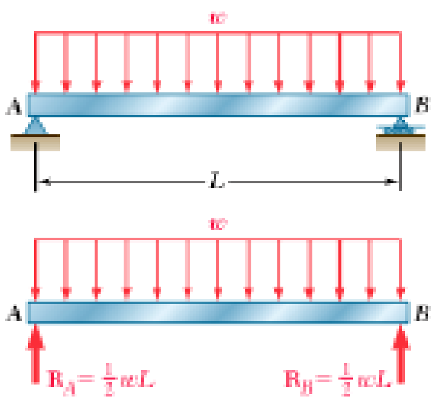
# مثال ۱

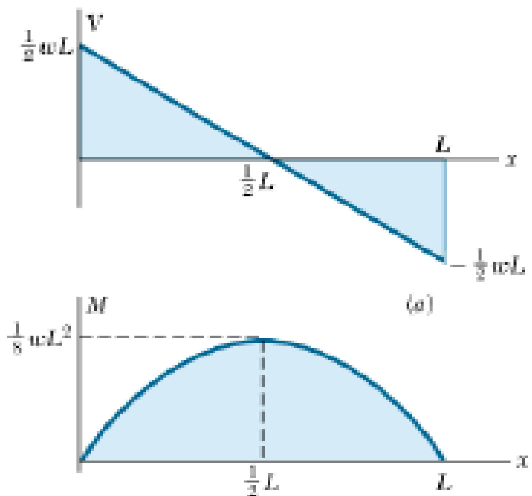
بر اساس روش جمع زنی، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل ، ترسیم نمایید.



# رابطه بین بار، نیروی برشی و لنگر خمشی




- Reactions at supports, $R_A = R_B = \dfrac{wL}{2}$
- Shear curve,

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

- Moment curve,

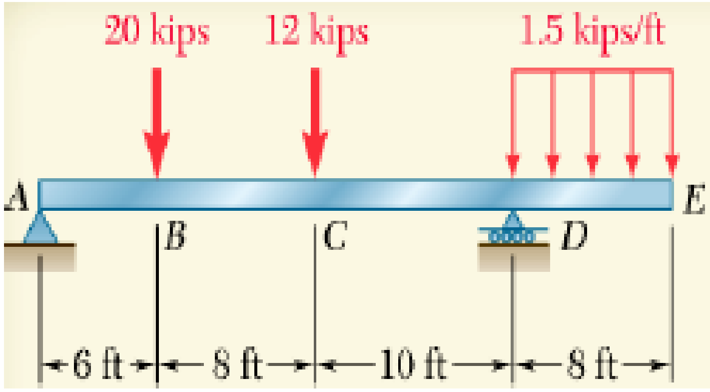
$$M - M_A = \int_0^x V dx$$

$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right)dx = \frac{w}{2}\left(Lx - x^2\right)$$

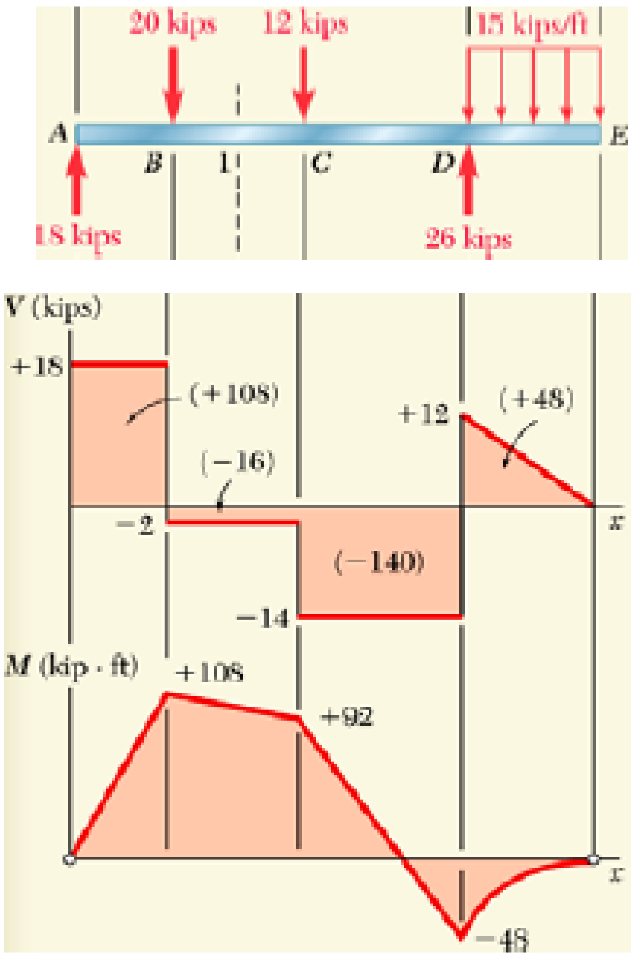
$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} \quad \left(M \text{ at } \frac{dM}{dx} = V = 0\right)$$

# مثال ۲

بر اساس روش جمع زنی، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل ، ترسیم نمایید.



حل:




$$\sum M_A = 0:$$

$$D(24\text{ ft}) - (20\text{ kips})(6\text{ ft}) - (12\text{ kips})(14\text{ ft}) - (12\text{ kips})(28\text{ ft}) = 0$$

$$\boxed{D = 26\text{ kips}}$$

$$\sum F_y = 0:$$

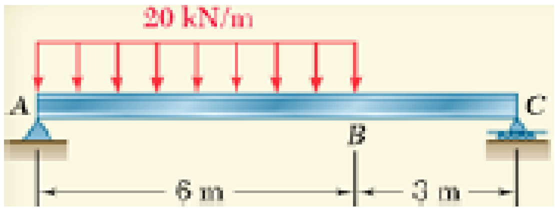
$$A_y - 20\text{ kips} - 12\text{ kips} + 26\text{ kips} - 12\text{ kips} = 0$$

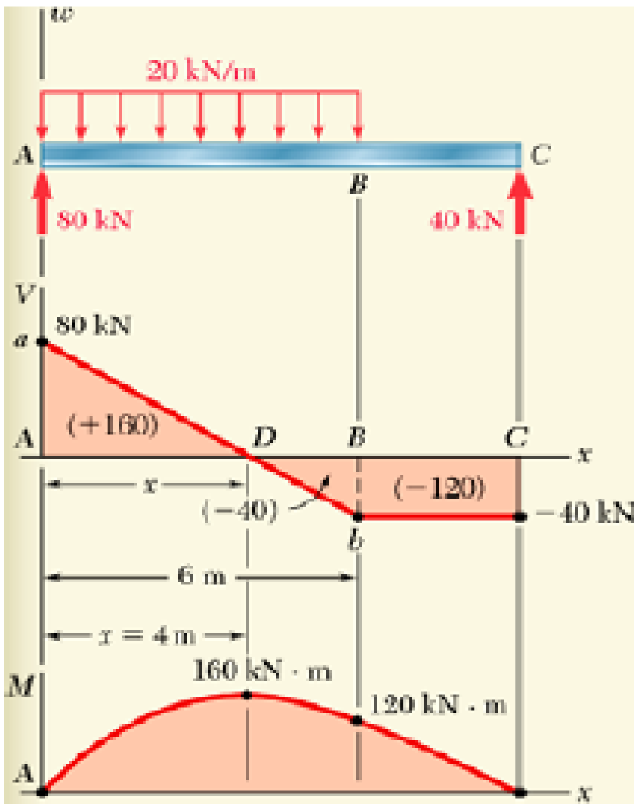
$$\boxed{A_y = 18\text{ kips}}$$

- Between concentrated load application points, $dV/dx = -w = 0$ and shear is constant.

# مثال ۳

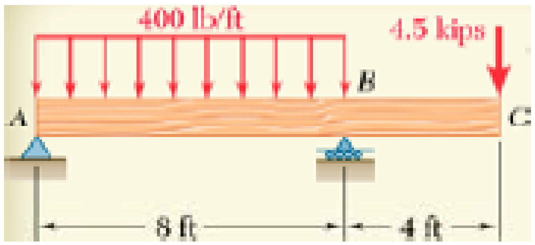
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.

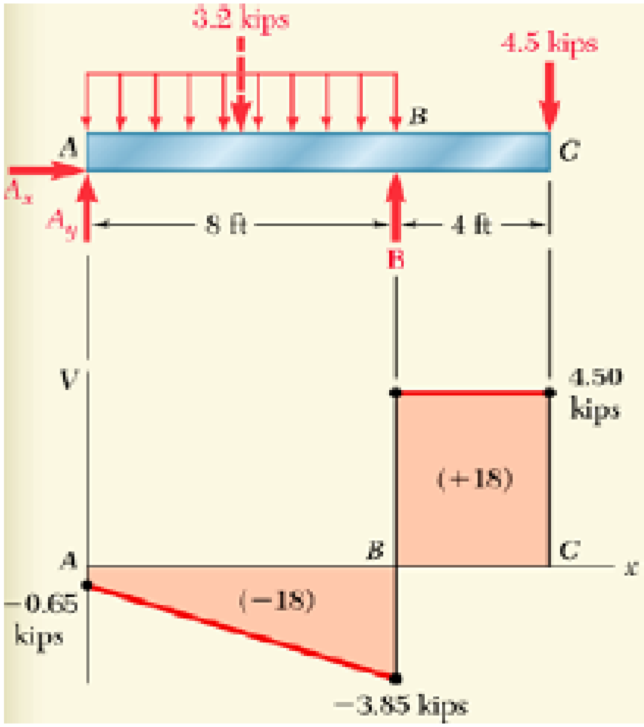


# مثال ۴

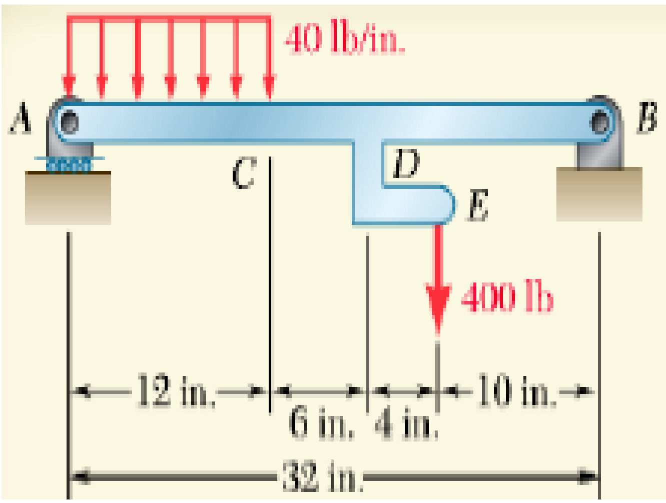
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.



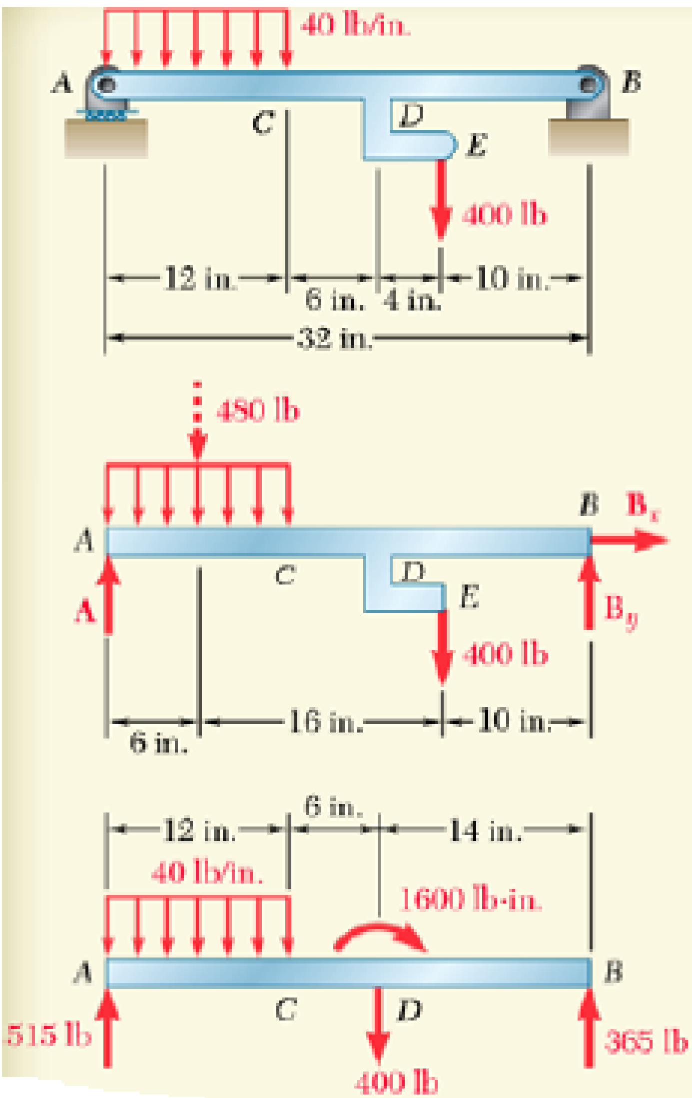



# مثال ۵

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.



حل:




$$\sum M_A = 0:$$

$$B_y(32\,\text{in.}) - (480\,\text{lb})(6\,\text{in.}) - (400\,\text{lb})(22\,\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{B_y = 365\,\text{lb}}$$

$$\sum M_B = 0:$$

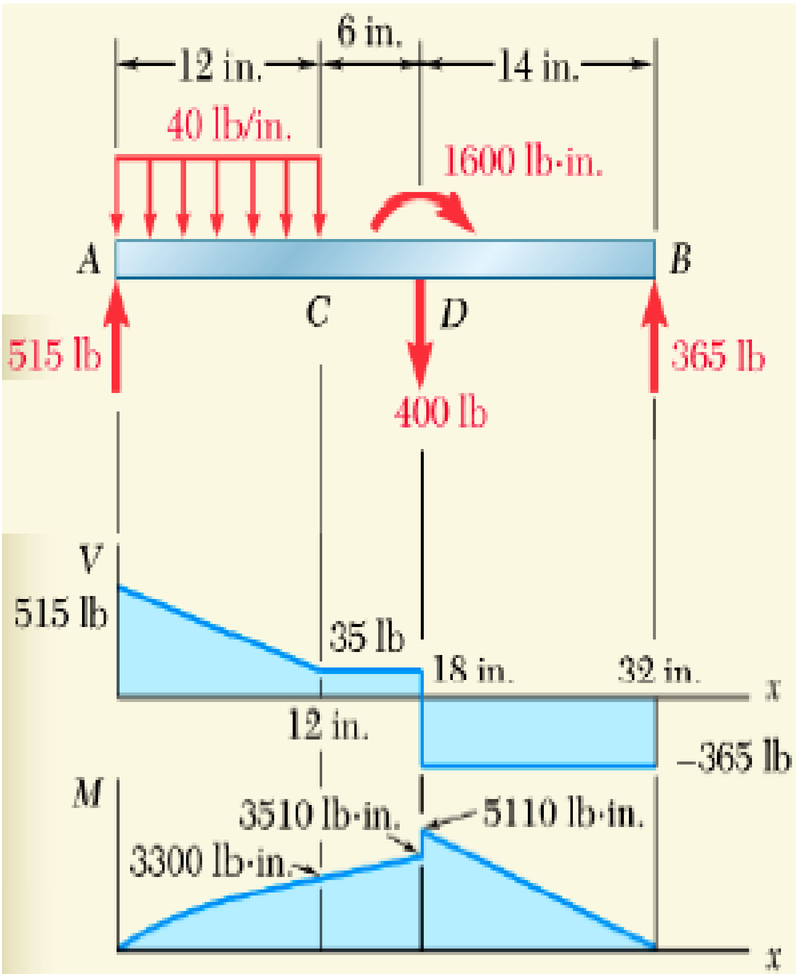
$$(480\,\text{lb})(26\,\text{in.}) + (400\,\text{lb})(10\,\text{in.}) - A(32\,\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{A = 515\,\text{lb}}$$

$$\sum F_x = 0: \qquad \boxed{B_x = 0}$$

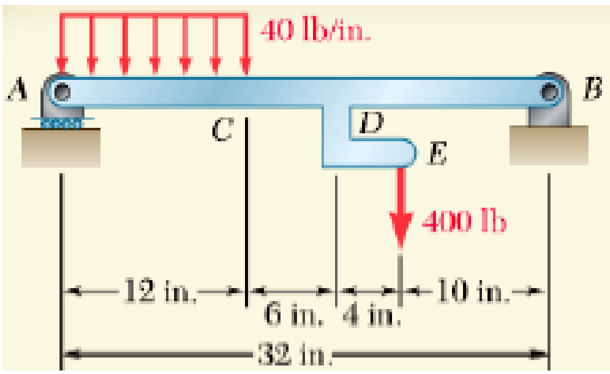
- Note: The 400 lb load at $E$ may be replaced by a 400 lb force and 1600 lb-in. couple at $D$.

حل:

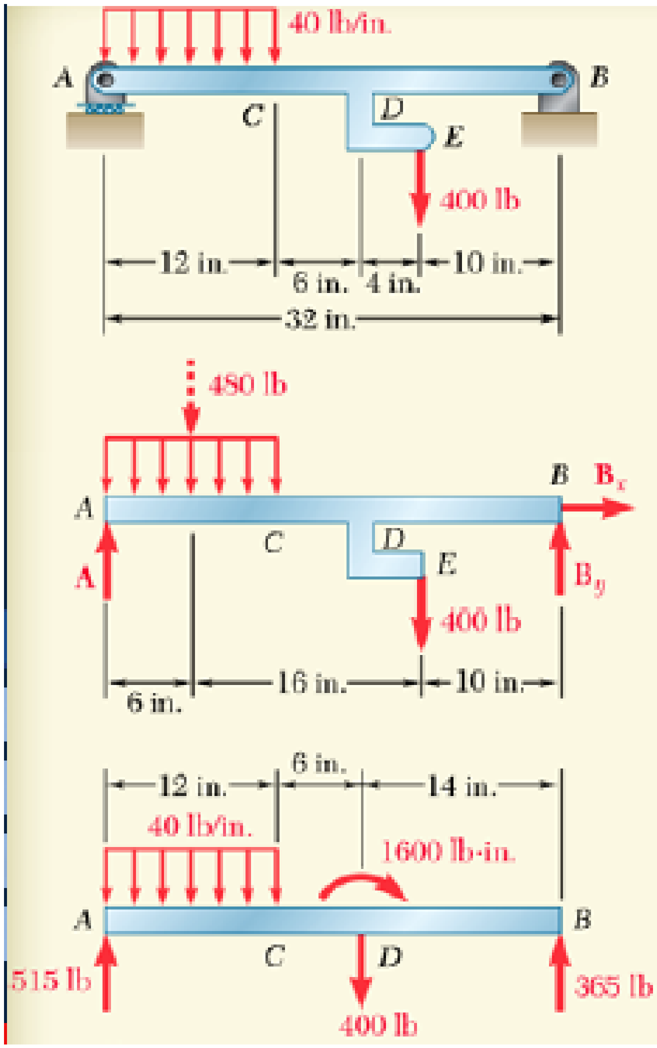

6 in.
12 in.
14 in.
40 lb/in.
1600 lb·in.
A
B
C
D
515 lb
400 lb
365 lb
V
515 lb
35 lb
18 in.
32 in.
x
12 in.
–365 lb
M
3510 lb·in.
5110 lb·in.
3300 lb·in.
x

# مثال ۶

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.



:حل




SOLUTION:

$$\sum M_A = 0:$$

$$B_y(32\,\text{in.}) - (480\,\text{lb})(6\,\text{in.}) - (400\,\text{lb})(22\,\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{B_y = 365\,\text{lb}}$$

$$\sum M_B = 0:$$

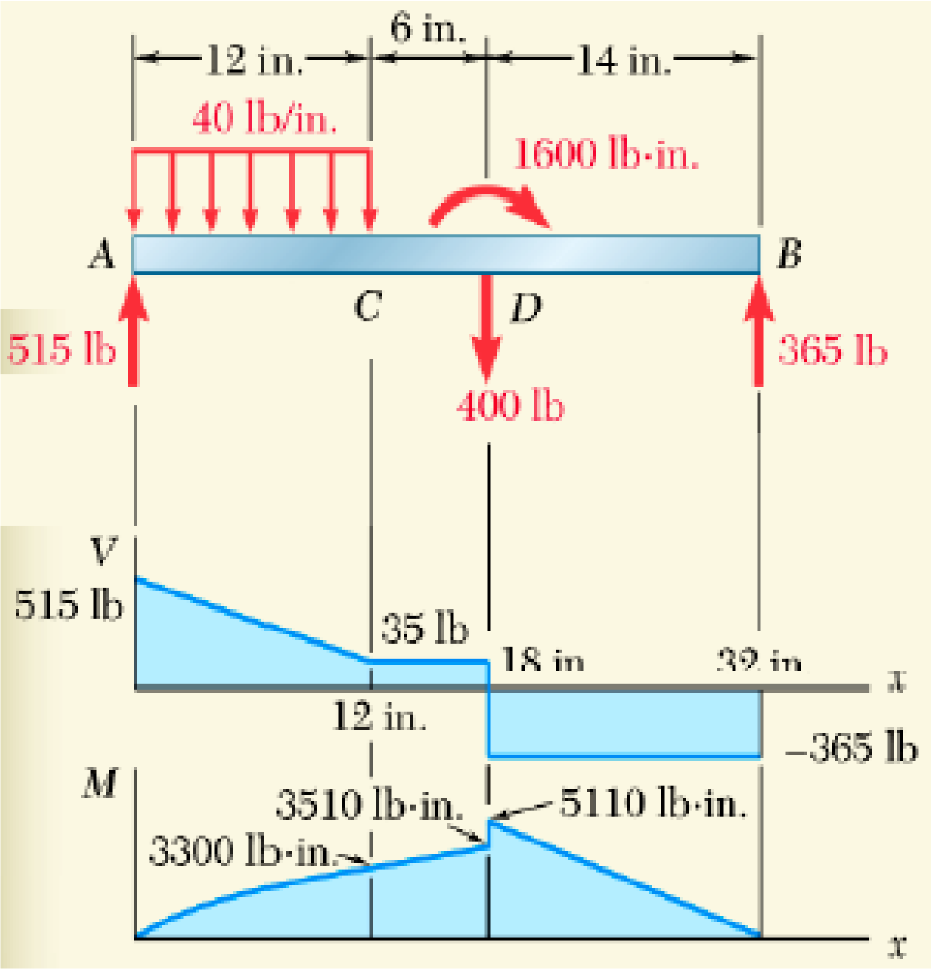
$$(480\,\text{lb})(26\,\text{in.}) + (400\,\text{lb})(10\,\text{in.}) - A(32\,\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{A = 515\,\text{lb}}$$

$$\sum F_x = 0: \qquad \boxed{B_x = 0}$$

- Note: The 400 lb load at $E$ may be replaced by a 400 lb force and 1600 lb-in. couple at $D$.

ادامه حل:



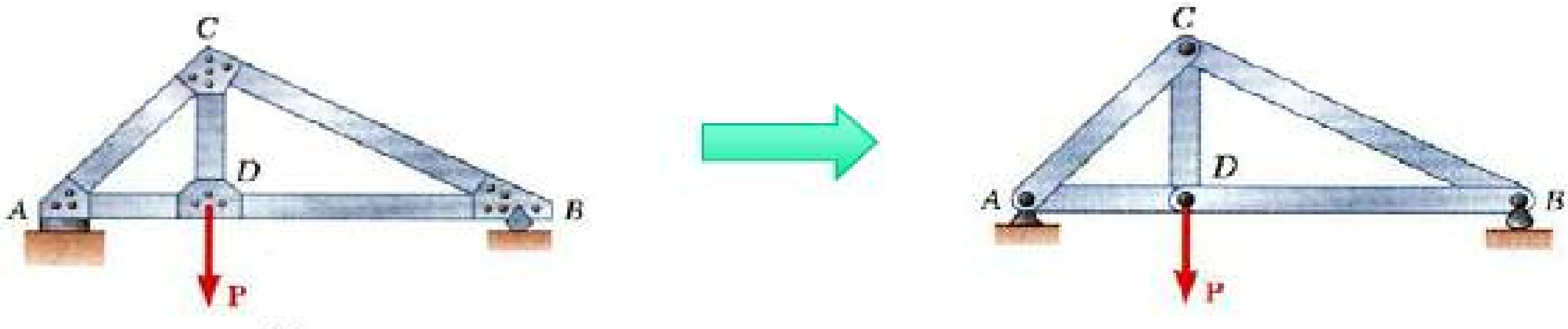
6 in.
12 in.
14 in.
40 lb/in.
1600 lb·in.
A
B
C
D
515 lb
400 lb
365 lb
V
515 lb
35 lb
18 in.
32 in.
x
12 in.
–365 lb
M
3510 lb·in.
5110 lb·in.
3300 lb·in.
x

# فصل ۵

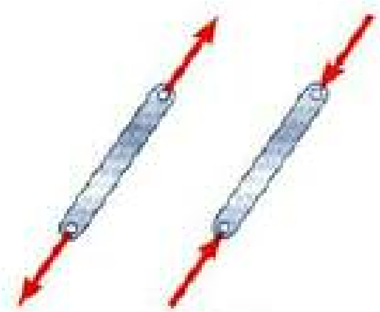
# خرپا

# تعریف خرپا

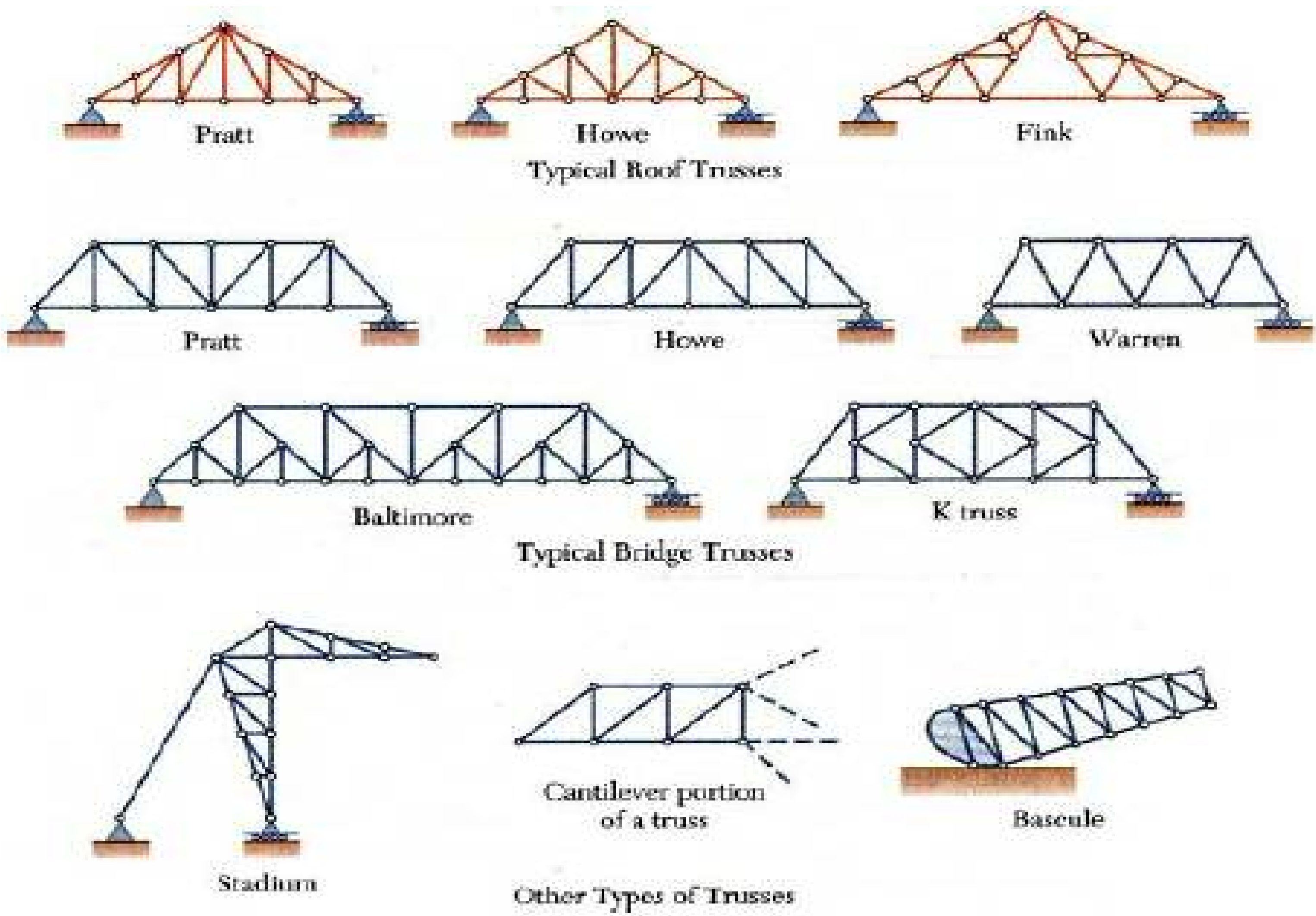
**تعریف خرپا: خرپا ها مثل تیر ها برای تحمل بار طراحی می‌شوند. خرپاها از تعدادی عضو دونیرویی مستقیم تشکیل می‌شوند که توسط نقاط انتهایی شان به یکدیگر متصل می‌شوند.**




عضو دونیرویی تحت
کشش یا فشار



# انواع خرپا


Pratt
Howe
Fink
Typical Roof Trusses
Pratt
Howe
Warren
Baltimore
K truss
Typical Bridge Trusses
Stadium
Cantilever portion of a truss
Basculc
Other Types of Trusses

# تحلیل خرپا

**تحلیل خرپا:**

**نیروی تکیه‌گاهی در خرپاها، با استفاده از روش تعادل (بررسی تعادل کل خرپا) تعیین می‌شود.**

**همچنین برای تعیین نیروی داخلی هرعضو از خرپا، از روش تعادل مفصل و تعادل مقطع استفاده می‌گردد. لذا برای تحلیل خرپا از دو روش زیر استفاده می شود:**

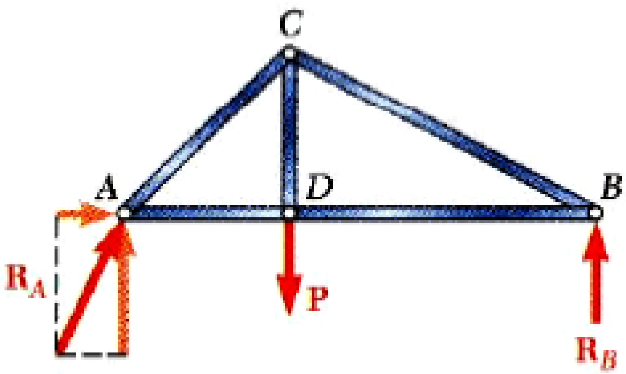
**۱– تحلیل خرپا به روش تعادل مفصل (روش گره)**

**۲– تحلیل خرپا به روش برش (روش مقاطع)**

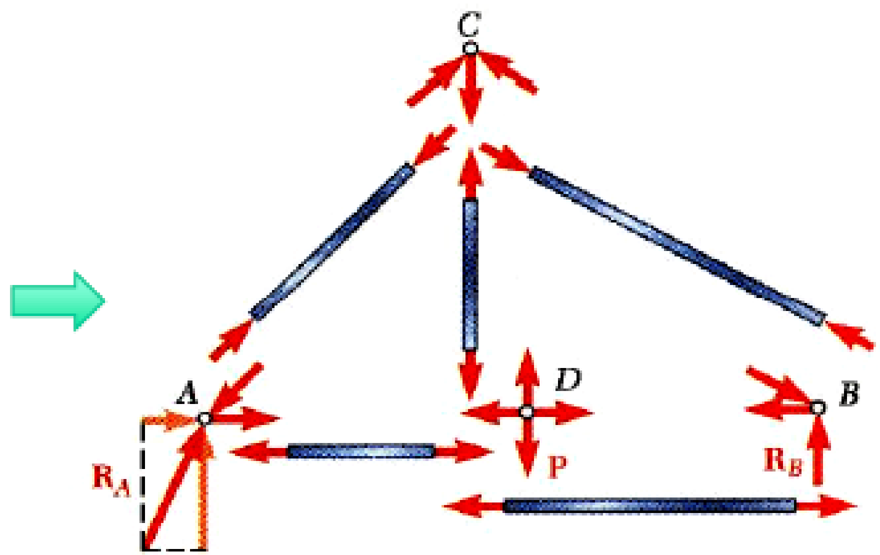
# روش تعادل مفصل برای حل مسائل خرپا

**۱– تحلیل خرپا به روش تعادل مفصل (روش گره)**

**در این روش بعد از تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی، با بررسی تعادل هر مفصل، نیرو در عضوهای مرتبط به آن مفصل تعیین می‌گردد.**




تعیین عکس العمل تکیه گاهی




بررسی تعادل هر مفصل و
تعیین نیروی داخلی اعضا

# تعادل یک نقطه مادی (تعادل ذره)

**طبق قانون اول نیوتن، برایند نیروهای وارد بر یک ذره در حال تعادل صفر است. لذا داریم:**

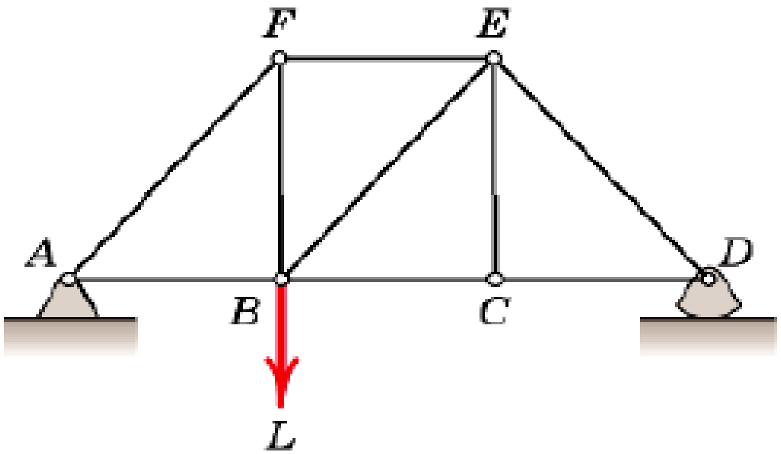
$$\vec{R}=\sum\vec{F}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \Rightarrow\ 1\text{-}\ \ \text{ترسیم چند ضلعی بسته نیروها} \\[2ex] \Rightarrow\ 2\text{-}\begin{cases} R_x=0 \ \Rightarrow\ \sum F_x=0 \\ R_y=0 \ \Rightarrow\ \sum F_y=0 \end{cases} \end{cases}$$

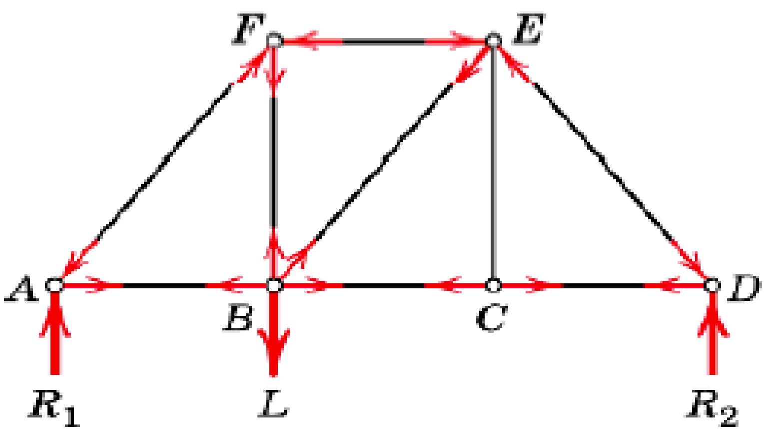
**بنابراین برای حل مسائل به روش تعادل ذره، باید یک نقطه مادی را در نظر بگیریم و ابتدا نمودار آزاد نقطه را ترسیم نموده به یکی از دو روش فوق عمل کنیم. یعنی:**

**۱– نیروهای وارد بر نقطه مادی را بدنبال یکدیگر ترسیم کرده و چند ضلعی بسته‌ای را ترسیم کنیم.**

**۲– معادلات تعادل را برای نیروهای وارد بر نقطه مادی بنویسیم.**

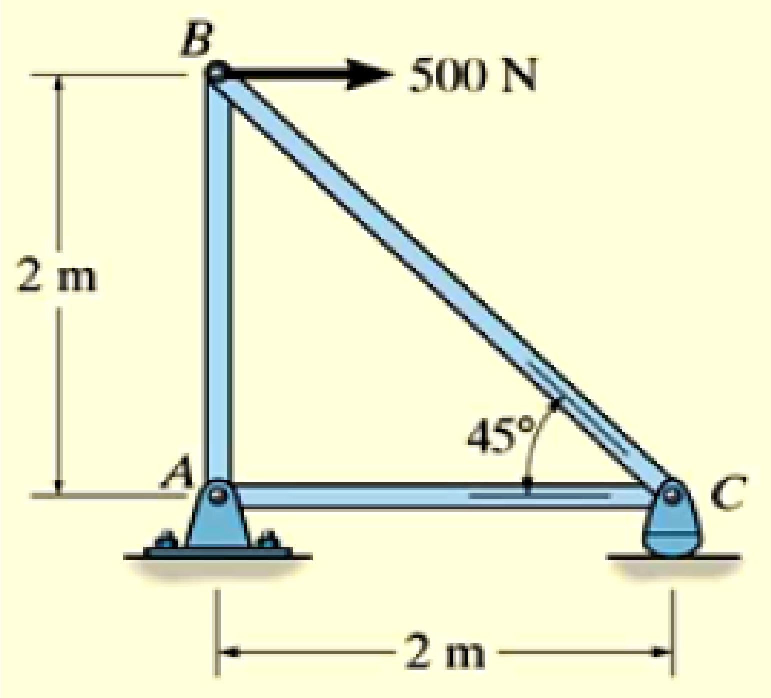
# مثال تعادل مفصل در خرپا



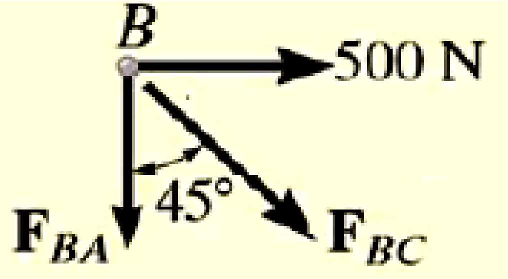



## مثال ۱

**بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی هر عضو را تعیین کنید.**



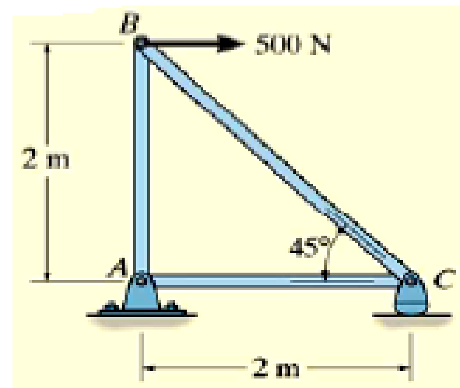

**بررسی تعادل گره B**



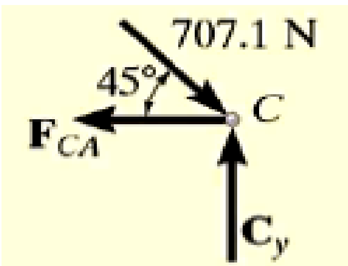

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 500\text{ N} + F_{BC} \sin 45^\circ = 0 \qquad F_{BC} = -707.1\text{ N} \quad \text{(C)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -F_{BC} \cos 45^\circ - F_{BA} = 0 \qquad F_{BA} = 500\text{ N} \quad \text{(T)}$$

حل:



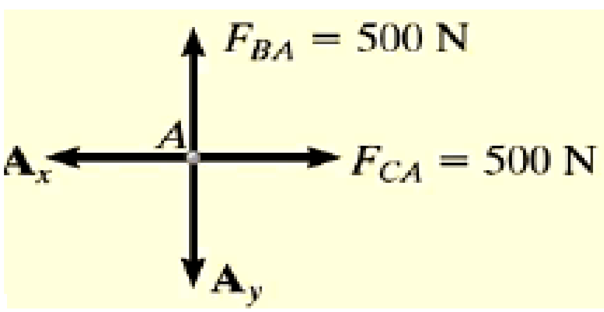

**بررسی تعادل گره C**




$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad -F_{CA} + 707.1 \cos 45° \text{ N} = 0 \qquad F_{CA} = 500 \text{ N (T)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad C_y - 707.1 \sin 45° \text{ N} = 0 \qquad C_y = 500 \text{ N}$$

**بررسی تعادل گره A**



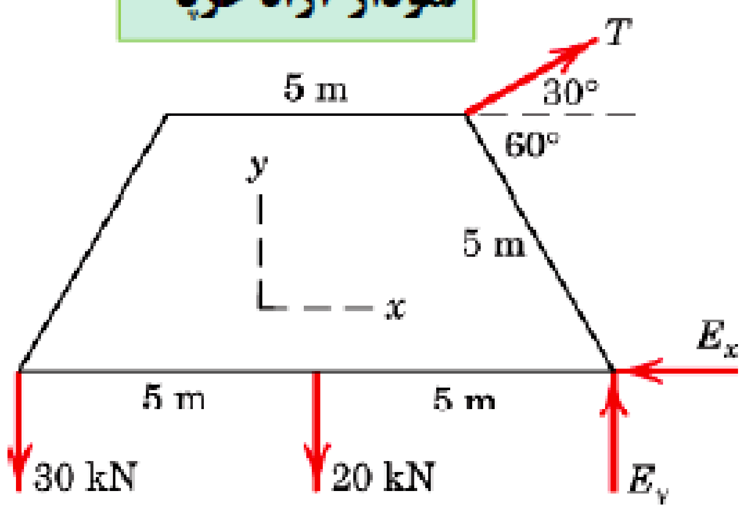

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad 500 \text{ N} - A_x = 0 \qquad A_x = 500 \text{ N}$$

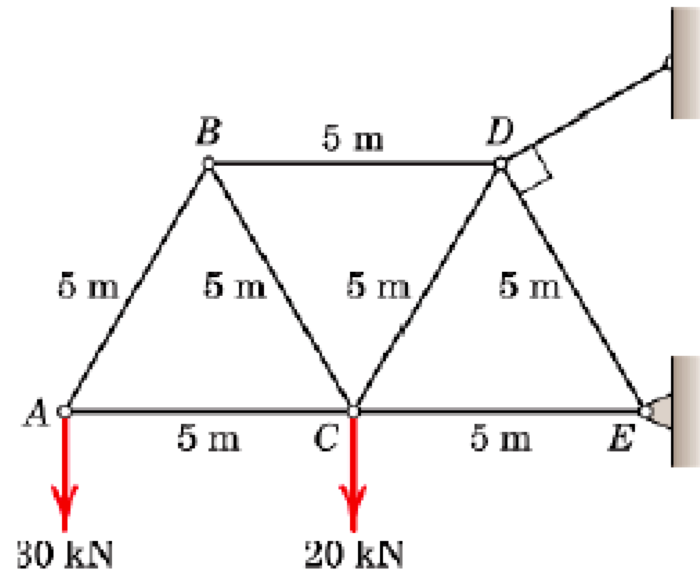
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 500 \text{ N} - A_y = 0 \qquad A_y = 500 \text{ N}$$

# مثال ۲

بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی هر عضو را تعیین کنید.

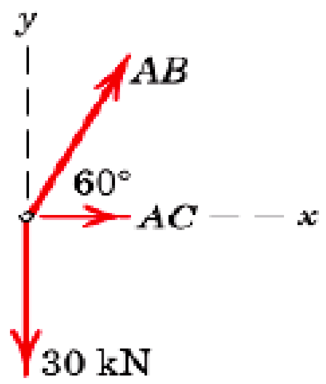
نمودار آزاد خرپا



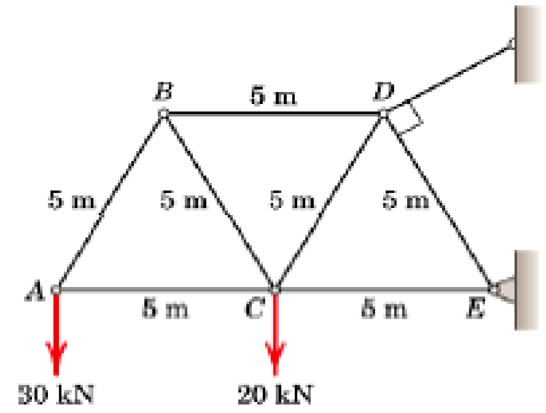




| | | |
|---|---|---|
| $[\Sigma M_E = 0]$ | $5T - 20(5) - 30(10) = 0$ | $T = 80$ kN |
| $[\Sigma F_x = 0]$ | $80 \cos 30^\circ - E_x = 0$ | $E_x = 69.3$ kN |
| $[\Sigma F_y = 0]$ | $80 \sin 30^\circ + E_y - 20 - 30 = 0$ | $E_y = 10$ kN |

## حل:



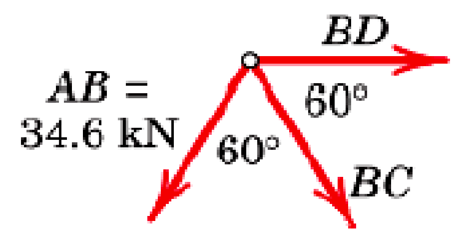

**بررسی تعادل مفصل A:**




$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 0.866AB - 30 = 0 \qquad AB = 34.6 \text{ kN} \quad T$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad AC + 0.5(34.6) = 0 \qquad AC = -17.32 \text{ kN} \quad C$$

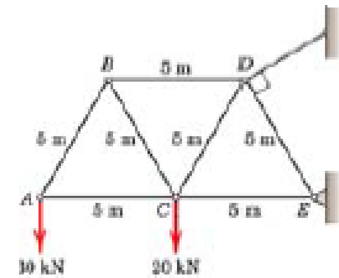
**بررسی تعادل مفصل B:**



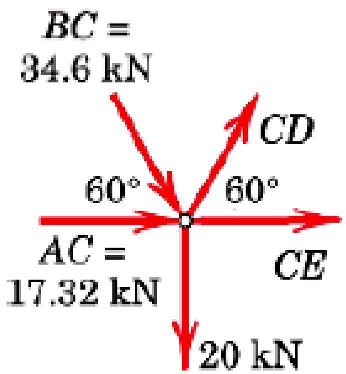

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad -0.866BC - 0.866(34.6) = 0 \qquad BC = -34.6 \text{ kN} \quad C$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad BD - (0.5)(34.6) + (0.5)(-34.6) = 0 \qquad BD = 34.6 \text{ kN} \quad T$$

## حل:




**بررسی تعادل مفصل C:**



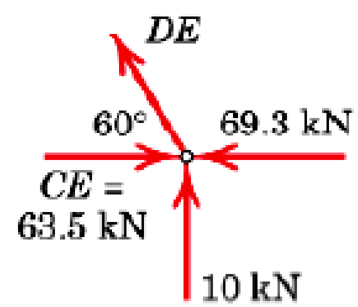

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 0.866CD - 0.866(34.6) - 20 = 0$$

$$CD = 57.7 \text{ kN} \quad T$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad CE + 17.32 + 0.5(34.6) + 0.5(57.7) = 0$$

$$CE = -63.5 \text{ kN} \quad C$$

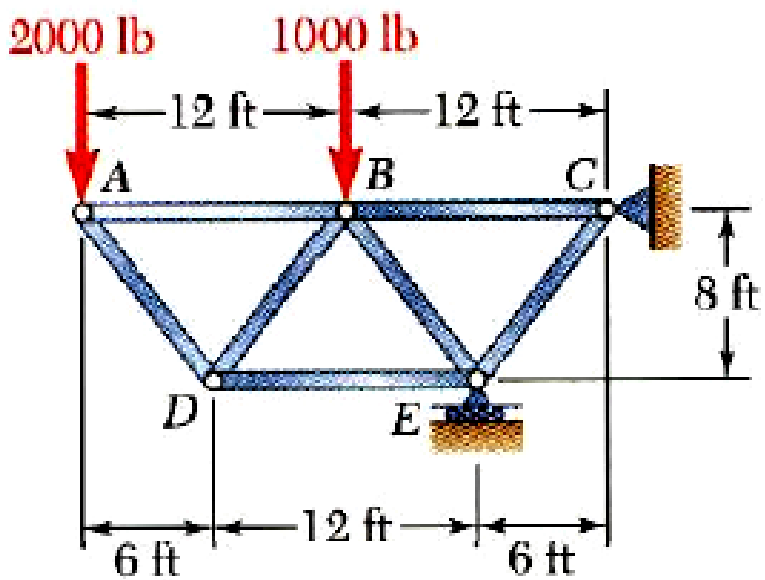
**بررسی تعادل مفصل E:**




$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 0.866DE + 10 = 0 \qquad DE = -11.55 \text{ kN} \quad C$$

# مثال

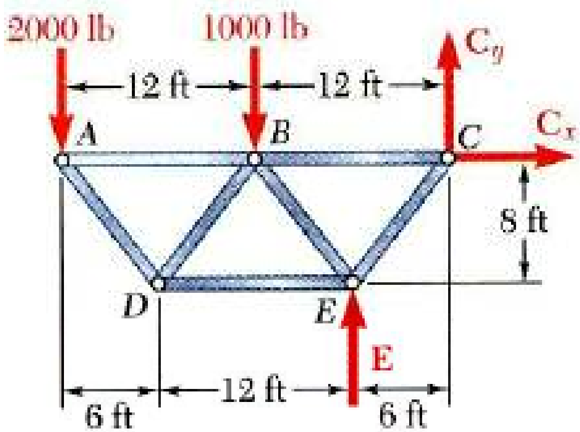
**بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی هر عضو را تعیین کنید.**



## حل:

حل:

ابتدا با بررسی تعادل کل خرپا، عکس العمل تکیه گاهی تعیین می‌شود.




$$\sum M_C = 0$$

$$(2000\text{ lb})(24\text{ ft}) + (1000\text{ lb})(12\text{ ft}) - E(6\text{ ft}) = 0$$

$$\boxed{E = 10{,}000\text{ lb}\uparrow}$$

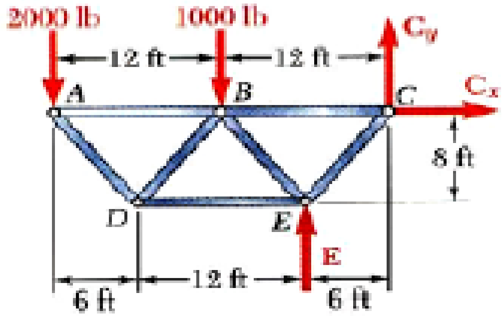
$$\sum F_x = 0 = C_x$$

$$\boxed{C_x = 0}$$

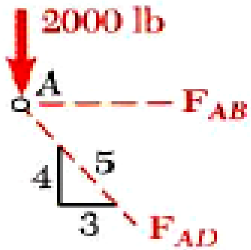
$$\sum F_y = 0 = -2000\text{ lb} - 1000\text{ lb} + 10{,}000\text{ lb} + C_y$$

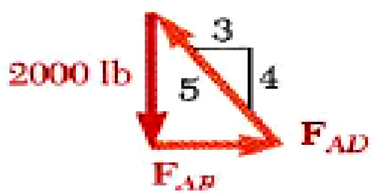
$$\boxed{C_y = 7000\text{ lb}\downarrow}$$

# حل




**بررسی تعادل مفصل A.**



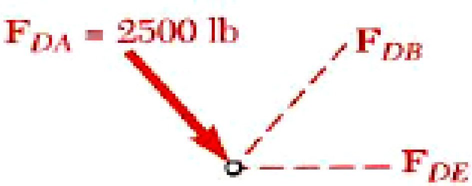



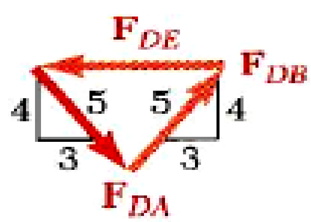

$$\frac{2000\ \text{lb}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AD}}{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{AB} &= 1500\ \text{lb}\ \ T \\ F_{AD} &= 2500\ \text{lb}\ \ C \end{aligned}}$$

---

**بررسی تعادل مفصل D.**



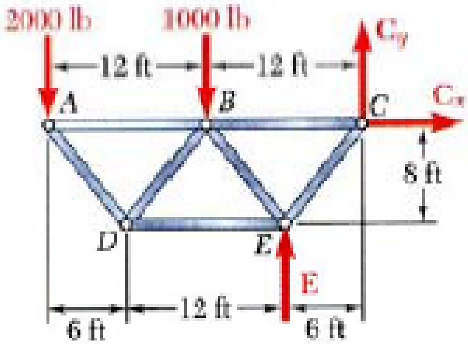




$$F_{DB} = F_{DA}$$

$$F_{DE} = 2\left(\tfrac{3}{5}\right)F_{DA}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{DB} &= 2500\ \text{lb}\ \ T \\ F_{DE} &= 3000\ \text{lb}\ \ C \end{aligned}}$$

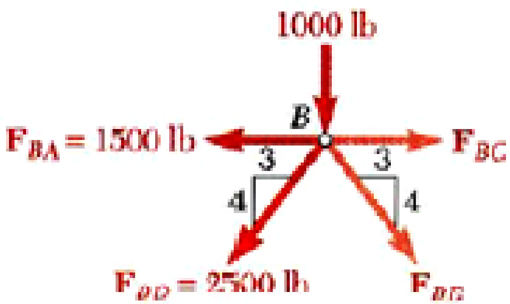
# حل:




## بررسی تعادل مفصل B.

$$\sum F_y = 0 = -1000 - \tfrac{4}{5}(2500) - \tfrac{4}{5} F_{BE}$$

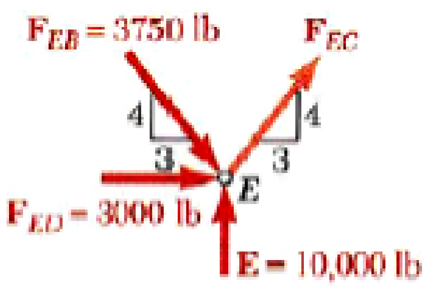
$$F_{BE} = -3750 \text{ lb} \qquad \boxed{F_{BE} = 3750 \text{ lb} \;\; C}$$




$$\sum F_x = 0 = F_{BC} - 1500 - \tfrac{3}{5}(2500) - \tfrac{3}{5}(3750)$$

$$F_{BC} = +5250 \text{ lb} \qquad \boxed{F_{BC} = 5250 \text{ lb} \;\; T}$$

## بررسی تعادل مفصل E.



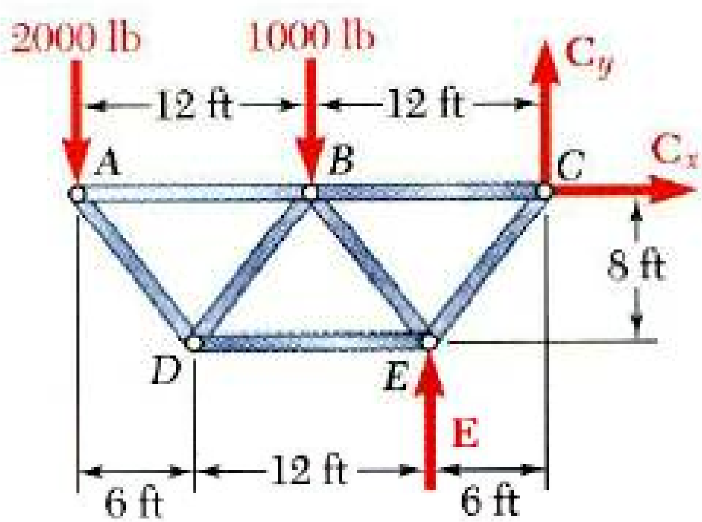

$$\sum F_x = 0 = \tfrac{3}{5} F_{EC} + 3000 + \tfrac{3}{5}(3750)$$

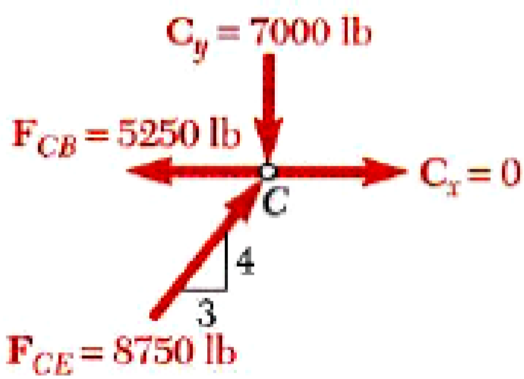
$$F_{EC} = -8750 \text{ lb}$$

$$\boxed{F_{EC} = 8750 \text{ lb} \;\; C}$$

## حل:

بررسی تعادل مفصل C برای کنترل جوابهای بدست آمده:



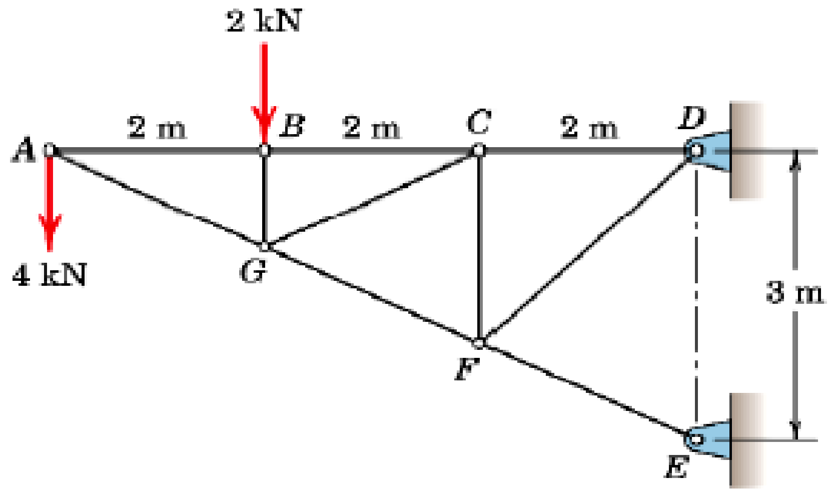




$$\sum F_x = -5250 + \tfrac{3}{5}(8750) = 0 \quad \text{(checks)}$$

$$\sum F_y = -7000 + \tfrac{4}{5}(8750) = 0 \quad \text{(checks)}$$

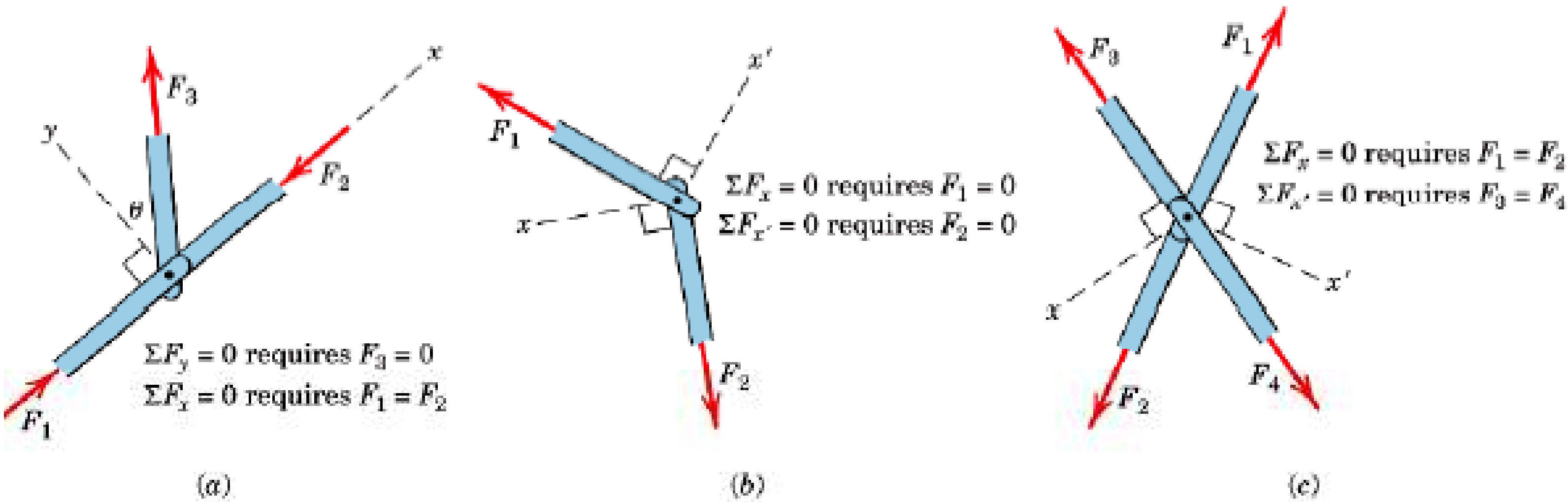
# تمرین

بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی عضو GC و FC را تعیین کنید.

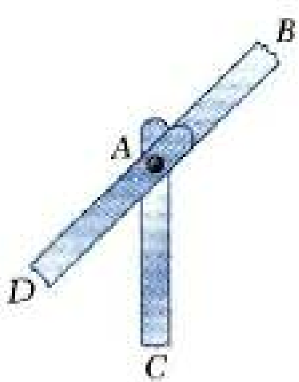



$CG = 2.24 \text{ kN } T, CF = 1 \text{ kN } C$

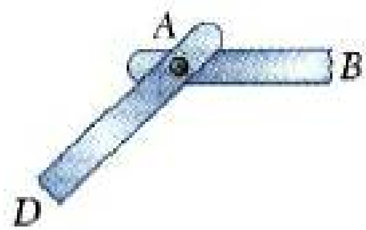
# عضوهای صفر



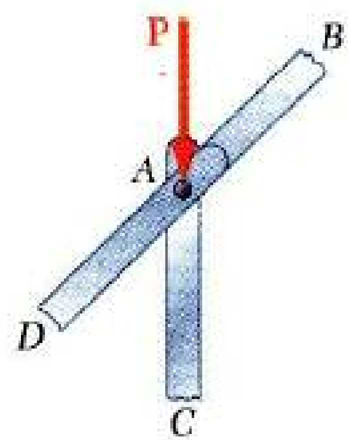
$\Sigma F_y = 0$ requires $F_3 = 0$
$\Sigma F_x = 0$ requires $F_1 = F_2$
(a)
$\Sigma F_x = 0$ requires $F_1 = 0$
$\Sigma F_{x'} = 0$ requires $F_2 = 0$
(b)
$\Sigma F_x = 0$ requires $F_1 = F_2$
$\Sigma F_{x'} = 0$ requires $F_3 = F_4$
(c)

A
B
C
D

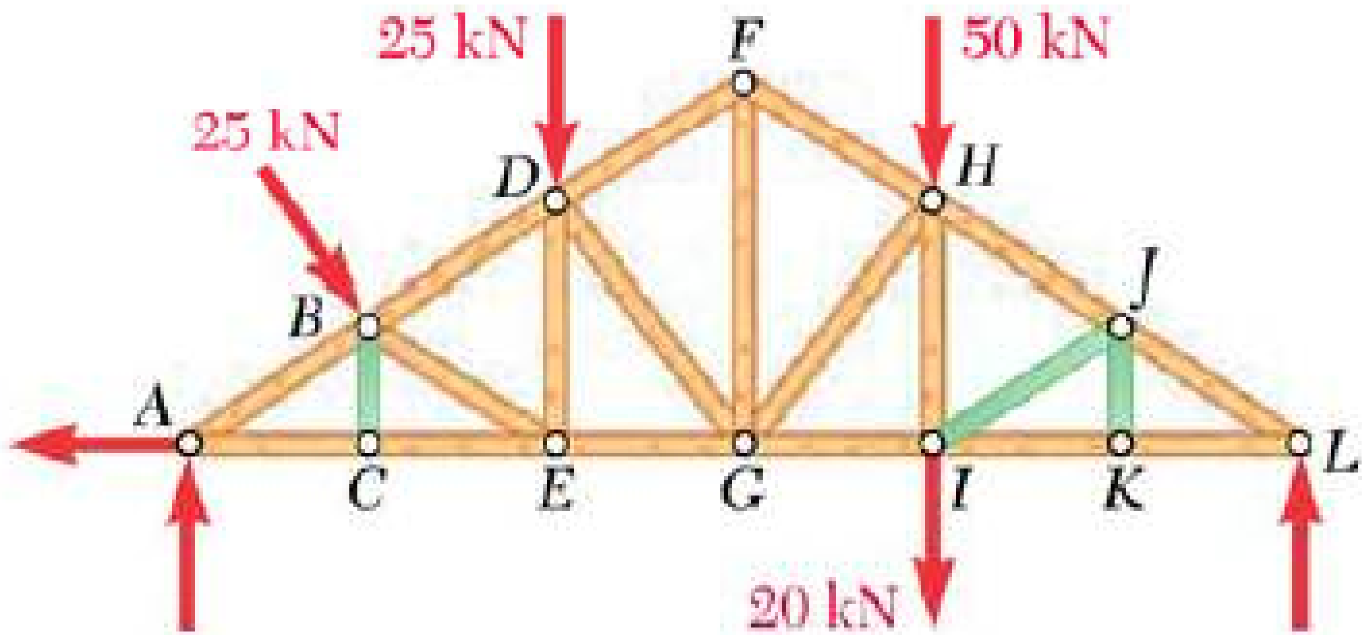
A
B
D

P
A
B
C
D

## مثال

در خرپای نشان داده شده عضوهای صفر را مشخص کنید.



# روش برش برای حل مسائل خرپا

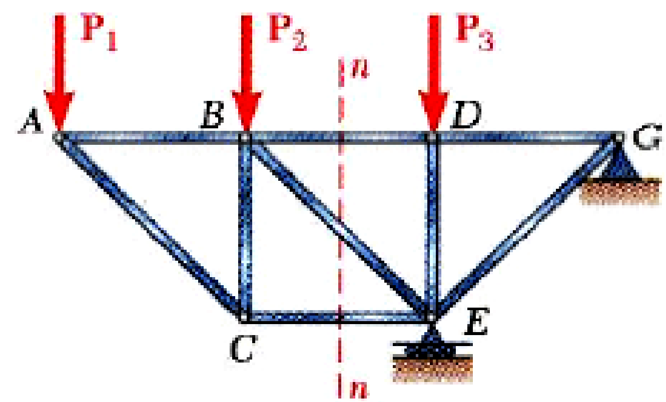
**۲– تحلیل خرپا به روش برش (روش مقاطع)**

**روش برش ، برای وقتیکه تنها نیروی یک یا چند عضو از خرپا مورد نظر باشد کارامدتر است.**

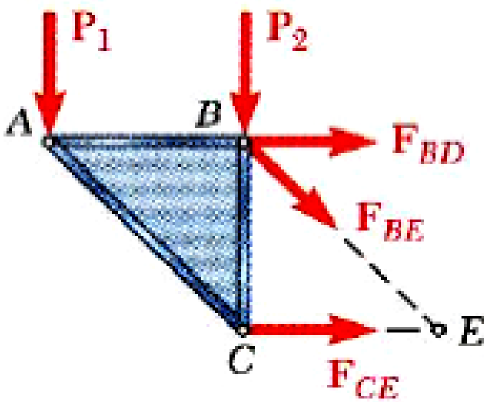
**در این روش بعد از تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی ، دو گام زیر اجرا می‌شود:**

**۱– تعیین مسیر برش بگونه‌ای که عضو مورد نظر و حداکثر سه عضو از خرپا برش بخورد.**

**۲– با بررسی تعادل یکی از دو قسمت برش خورده می‌توان نیروهای اعضا برش خورده را بدست آورد (سه مجهول حل می‌شود).**



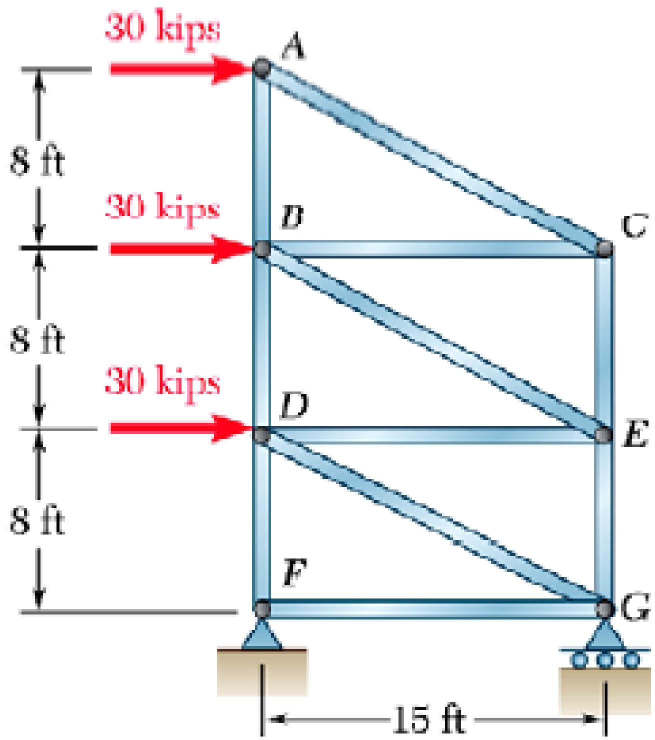

تعیین مسیر برش




بررسی تعادل سمت چپ برش nn

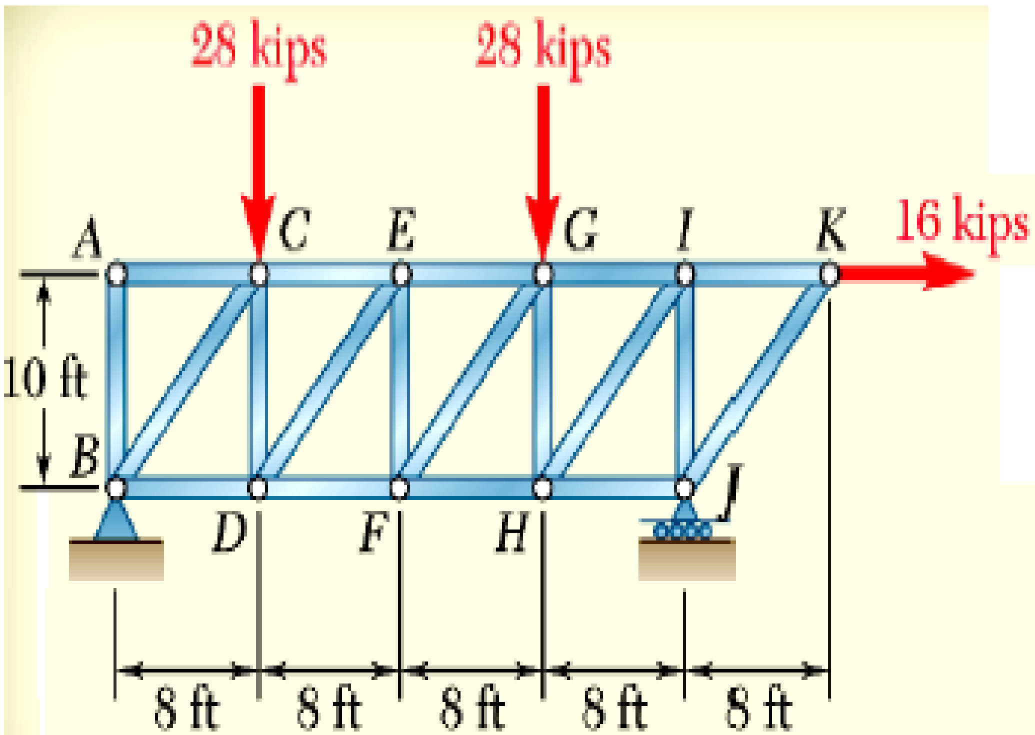
# مثال

بر اساس روش برش،  نیروی داخلی عضوهای BD و DE را تعیین کنید.



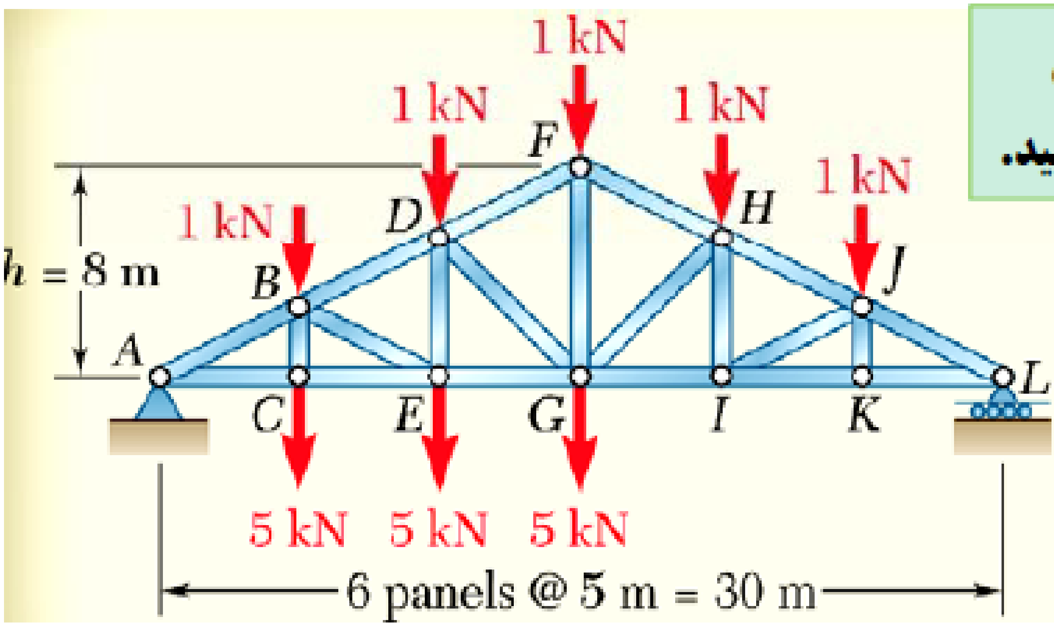
# مثال

بر اساس روش برش، نیروی داخلی عضوهای EF و GI را تعیین کنید.



# مثال

بر اساس روش برش، نیروی داخلی عضوهای FHو GIو GH را تعیین کنید.

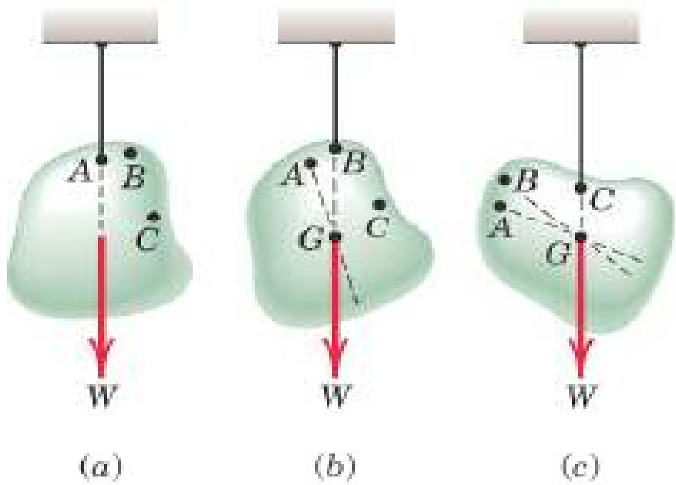


فصل ۶

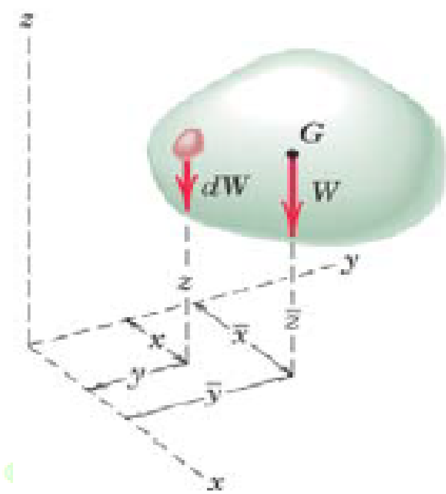
# مرکز هندسی، گشتاور اول سطح

# مرکز ثقل یک جسم

**مرکز ثقل یک جسم و موقعیت آن.**




نیروی وزن اجسام به یک نقطه به نام مرکز ثقل جسم (نقطه G) اثر می‌کند :




مطابق قضیه وارینیون، گشتاور یک نیرو با گشتاور مولفه های آن نیرو برابر است. یعنی:

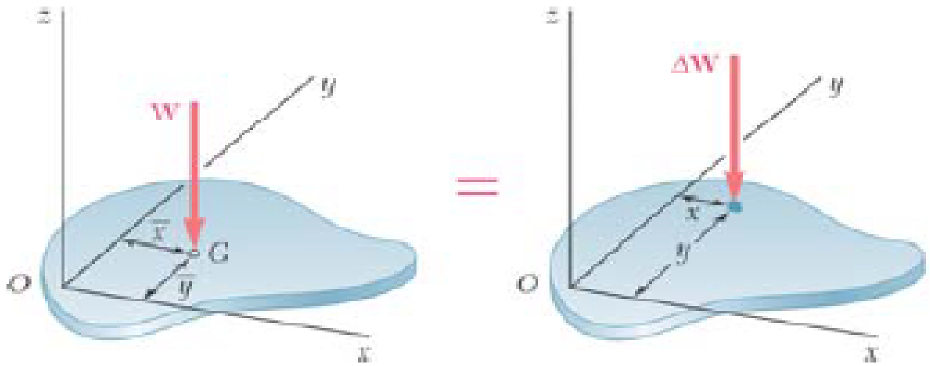
$$\bar{x}W = \int x\, dW$$

نهایتا موقعیت مرکز جرم اجسام بصورت زیر قابل تعیین است:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dW}{W} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dW}{W} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dW}{W}$$

# مرکز ثقل یک صفحه

**موقعیت مرکز ثقل و مرکز سطح صفحه نشان داده شده (دارای مساحت A و ضخامت t) را بدست آورید.**




حل:

ابتدا تعیین $\bar{y}$ :

اگر وزن کل $W$ را به چندین جز $\Delta W$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\sum M_x : \Rightarrow \bar{y}\, W = \sum y\, \Delta W \Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum y\, \Delta W}{W} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int y\, dW}{W}$$

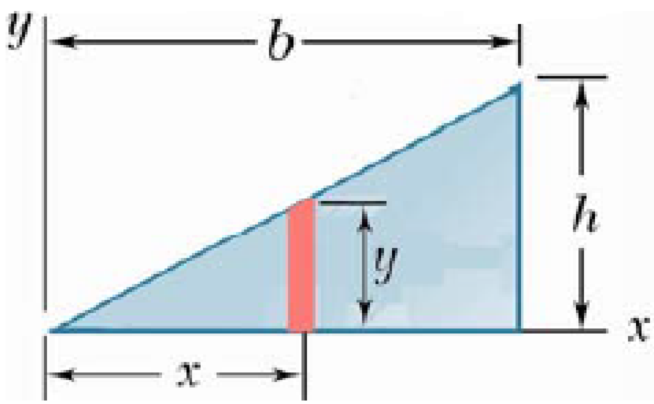
$$W = \rho g V = \rho g t A \Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum y\, \Delta A}{A} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A}$$

نهایتا برای مرکز سطح، نتیجه می‌شود :

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \text{and} \quad \bar{x} = \frac{\int x dA}{A}}$$

## مثال:

موقعیت مرکز سطح مثلث نشان داده شده را بدست آورید.



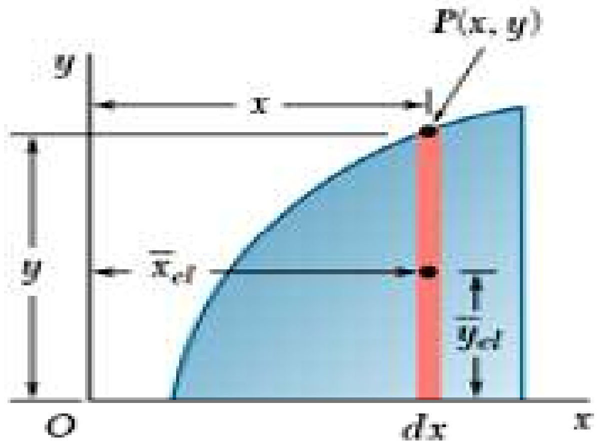

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{h}{b}x$$

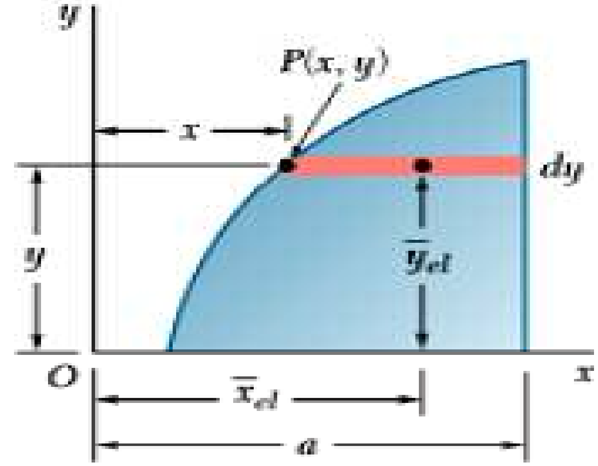
$$dA = ydx = \frac{h}{b}xdx$$

$$\bar{x}A = \int xdA = \int \frac{h}{b}x^2dx = \frac{h}{b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{hb^2}{3}$$

$$A = \frac{bh}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{2}{3}b$$

# تعیین مرکز سطح با انتگرال گیری




$$\overline{x}_{el} = x$$

$$\overline{y}_{el} = y/2$$

$$dA = y\,dx$$

$$\overline{x}_{el} = \frac{a + x}{2}$$

$$\overline{y}_{el} = y$$

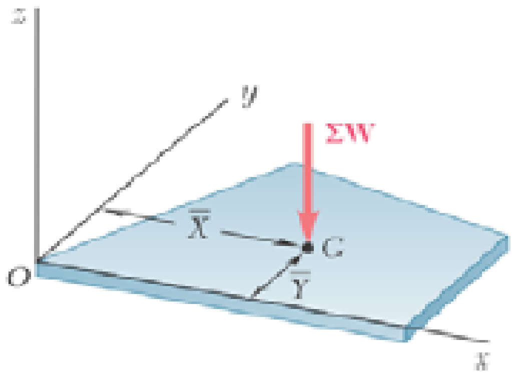
$$dA = (a - x)\,dy$$

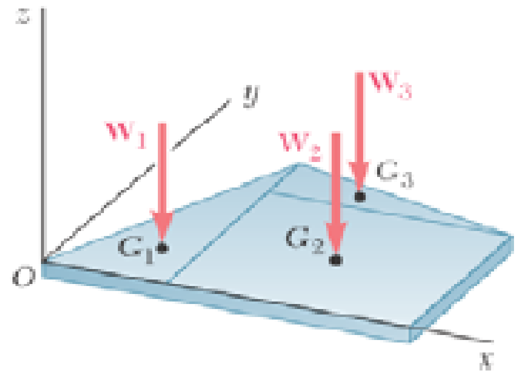
$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA$$

$$Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA$$

# موقعیت مرکز سطح برای سطوح مرکب

**موقعیت مرکز سطح برای سطوح مرکب.**



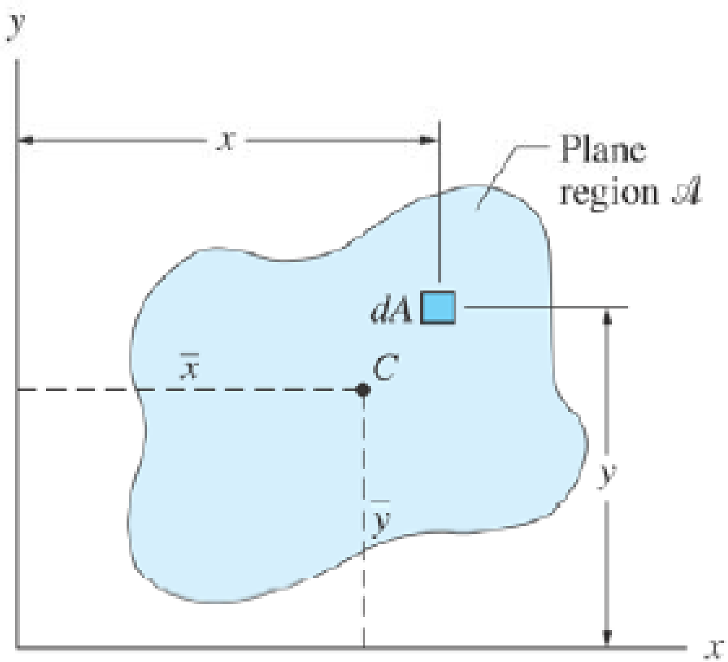

$$W = \rho g V = \rho g t A = \mathrm{k} A$$

اگر مساحت کل $A$ به n سطح معلوم (شناخته شده) قابل تقسیم باشد، خواهیم داشت:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{A}}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{A}}$$

# گشتاور اول سطح




گشتاور اول سطح نسبت به محور x و y
بصورت زیر تعریف می‌شود:

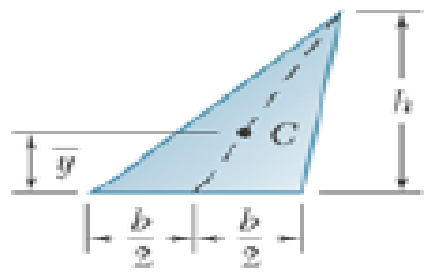
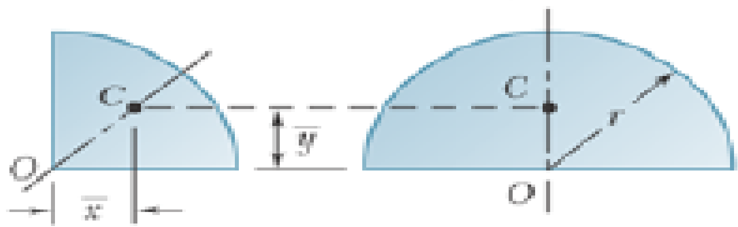
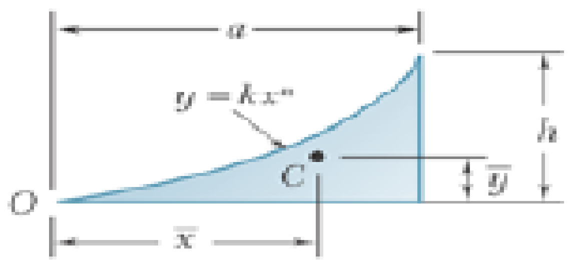
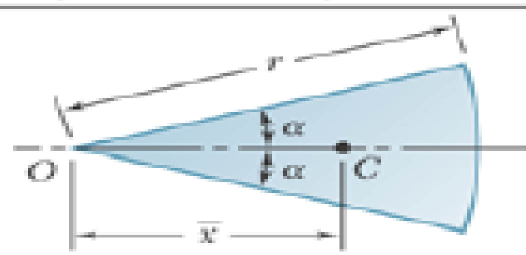
$$Q_x = \bar{y}A = \sum_{i=1}^{n} y_i A_i = \int y\,dA$$

$$Q_y = \bar{x}A = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i = \int x\,dA$$

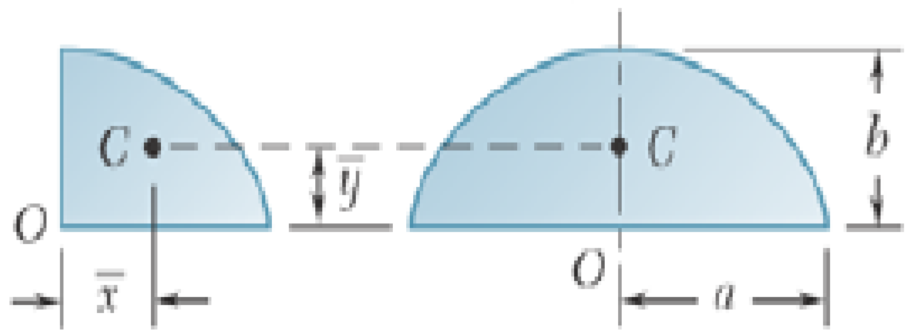
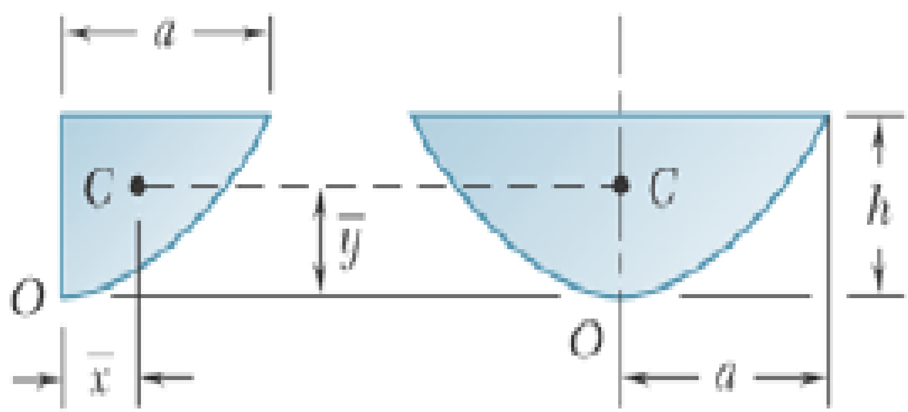
بنابراین برای مرکز سطح، می‌توان روابط زیرا نیز نوشت:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{A} = \frac{Q_x}{A} \quad \text{and} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{A} = \frac{Q_y}{A}$$

# مرکز هندسی سطوح متعارف

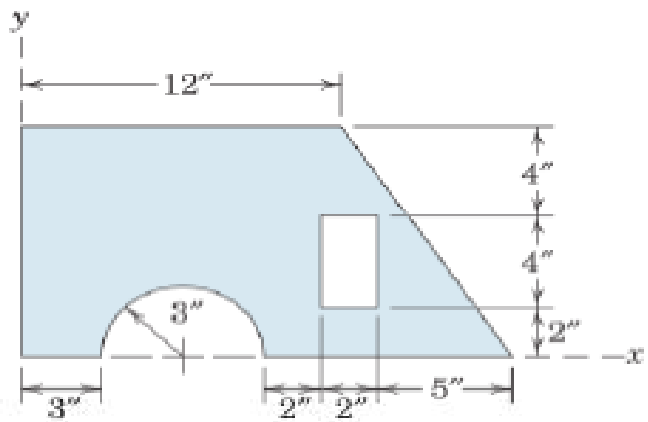
| | شکل | $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | مساحت |
|---|---|---|---|---|
| مثلث |  | | $\frac{h}{3}$ | $\frac{bh}{2}$ |
| ربع دایره |  | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{\pi r^2}{4}$ |
| نیم دایره | | 0 | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{\pi r^2}{2}$ |
| اسپاندرل |  | $\frac{n+1}{n+2}a$ | $\frac{n+1}{4n+2}h$ | $\frac{ah}{n+1}$ |
| قطاع دایره |  | $\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$ | 0 | $\alpha r^2$ |

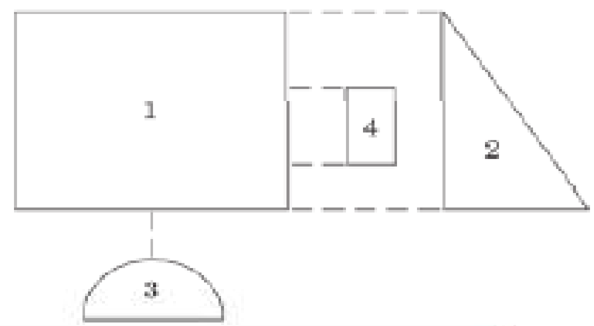
# مرکز هندسی سطوح متعارف

| شکل | | $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | مساحت |
|---|---|---|---|---|
| ربع بیضی |  | $\frac{4a}{3\pi}$ | $\frac{4b}{3\pi}$ | $\frac{\pi ab}{4}$ |
| نیم بیضی | | $0$ | $\frac{4b}{3\pi}$ | $\frac{\pi ab}{2}$ |
| نیم سهمی |  | $\frac{3a}{8}$ | $\frac{3h}{5}$ | $\frac{2ah}{3}$ |
| سهمی | | $0$ | $\frac{3h}{5}$ | $\frac{4ah}{3}$ |

# مثال

موقعیت مرکز سطح را برای سطح داده شده بدست آورید.



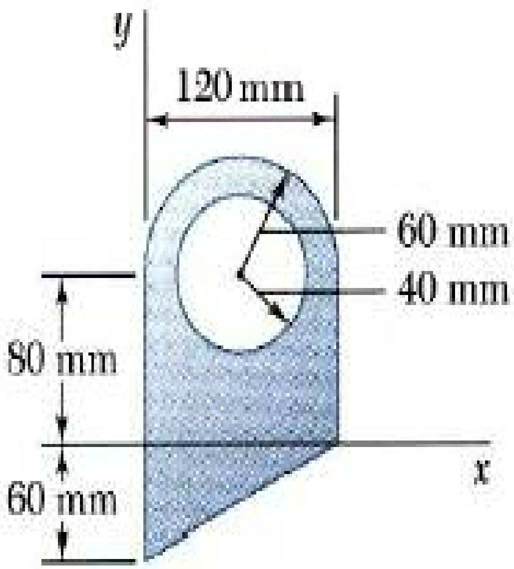

| PART | $A$ in.$^2$ | $\bar{x}$ in. | $\bar{y}$ in. | $\bar{x}A$ in.$^3$ | $\bar{y}A$ in.$^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 120 | 6 | 5 | 720 | 600 |
| 2 | 30 | 14 | 10/3 | 420 | 100 |
| 3 | −14.14 | 6 | 1.273 | −84.8 | −18 |
| 4 | −8 | 12 | 4 | −96 | −32 |
| TOTALS | 127.9 | | | 959 | 650 |

$$\left[\bar{X} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A}\right] \qquad \bar{X} = \frac{959}{127.9} = 7.50 \text{ in.}$$

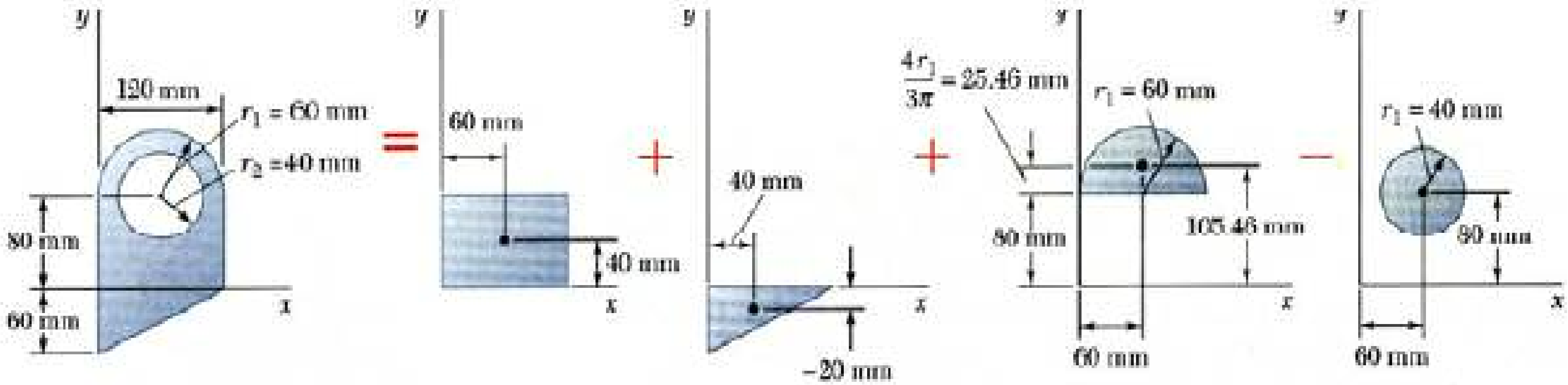
$$\left[\bar{Y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A}\right] \qquad \bar{Y} = \frac{650}{127.9} = 5.08 \text{ in.}$$

# مثال

موقعیت مرکز سطح و گشتاور اول سطح را برای سطح داده شده بدست آورید.



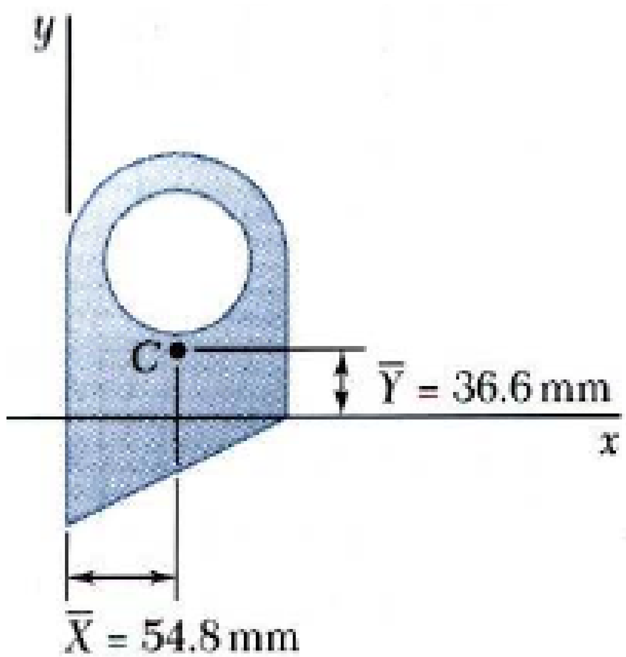
حل:




| Component | $A$, mm² | $\bar{x}$, mm | $\bar{y}$, mm | $\bar{x}A$, mm³ | $\bar{y}A$, mm³ |
|---|---|---|---|---|---|
| Rectangle | $(120)(80) = 9.6 \times 10^3$ | 60 | 40 | $+576 \times 10^3$ | $+384 \times 10^3$ |
| Triangle | $\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$ | 40 | −20 | $+144 \times 10^3$ | $-72 \times 10^3$ |
| Semicircle | $\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$ | 60 | 105.46 | $+339.3 \times 10^3$ | $+596.4 \times 10^3$ |
| Circle | $-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$ | 60 | 80 | $-301.6 \times 10^3$ | $-402.2 \times 10^3$ |
| | $\Sigma A = 13.828 \times 10^3$ | | | $\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$ | $\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$ |

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= +506.2\times10^3\,\text{mm}^3 \\ Q_y &= +757.7\times10^3\,\text{mm}^3 \end{aligned}}$$

## ادامه حل:




$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{+757.7\times10^3\,\text{mm}^3}{13.828\times10^3\,\text{mm}^2}$$

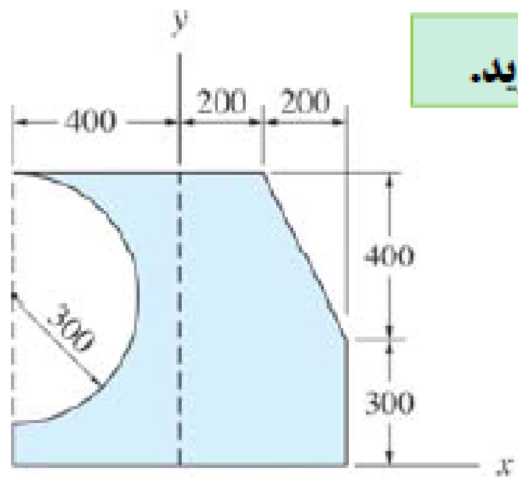
$$\boxed{\bar{X} = 54.8\ \text{mm}}$$

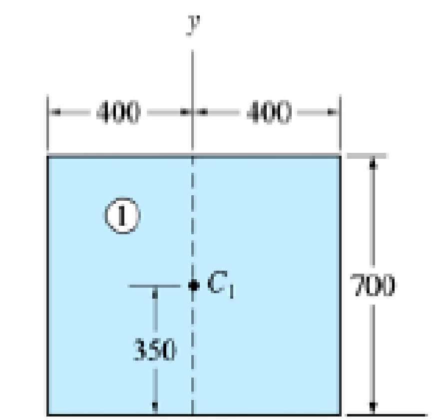
$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{+506.2\times10^3\,\text{mm}^3}{13.828\times10^3\,\text{mm}^2}$$

$$\boxed{\bar{Y} = 36.6\ \text{mm}}$$

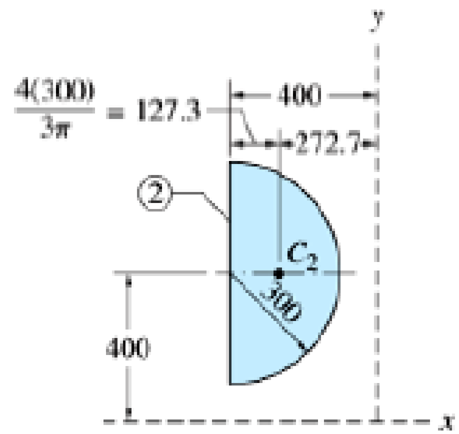
## مثال:

**موقعیت مرکز سطح و گشتاور اول سطح را برای سطح داده شده بدست آورید.**

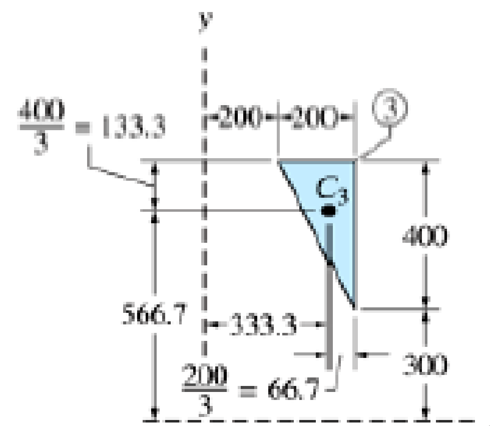



Area = (700)(800) = 560 × $10^3$ $mm^2$ (+)




Area = $\frac{\pi}{2}(300)^2$ = 141.4 × $10^3$ $mm^2$ (−)




Area = $\frac{1}{2}(200)(400)$ = 40 × $10^3$ $mm^2$ (−)

**ادامه حل:**

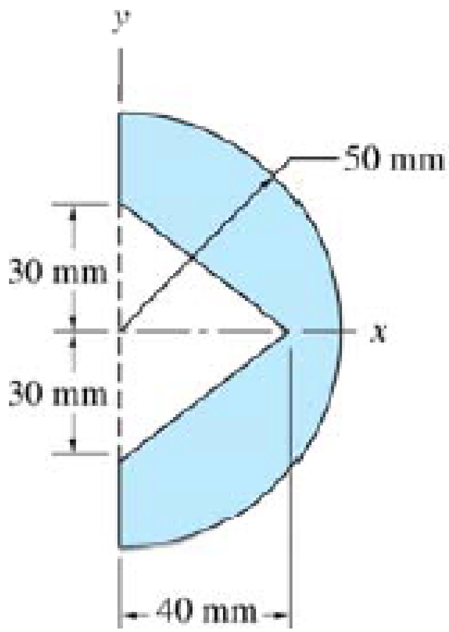
| Shape | Area $A$ ($mm^2$) | $\bar{x}$ (mm) | $A\bar{x}$ ($mm^3$) | $\bar{y}$ (mm) | $A\bar{y}$ ($mm^3$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 (Rectangle) | $+560.0 \times 10^3$ | 0 | 0 | +350 | $196.0 \times 10^6$ |
| 2 (Semicircle) | $-141.4 \times 10^3$ | −272.7 | $+38.56 \times 10^6$ | +400 | $-56.56 \times 10^6$ |
| 3 (Triangle) | $-40.0 \times 10^3$ | +333.3 | $-13.33 \times 10^6$ | +566.7 | $-22.67 \times 10^6$ |
| Σ | $+378.6 \times 10^3$ | ··· | $+25.23 \times 10^6$ | ··· | $+116.77 \times 10^6$ |

$$\bar{x} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A} = \frac{+25.23 \times 10^6}{+378.6 \times 10^3} = 66.6 \text{ mm}$$

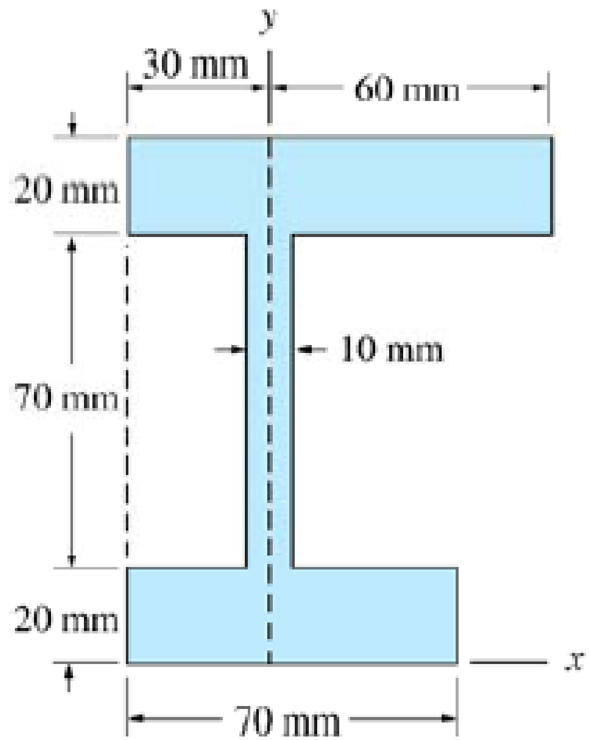
$$\bar{y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} = \frac{+116.77 \times 10^6}{+378.6 \times 10^3} = 308 \text{ mm}$$

# تمرین

**موقعیت مرکز سطح و گشتاور اول سطح را برای سطوح داده شده بدست آورید.**




$\bar{x} = 24.7$ mm, $\bar{y} = 0$

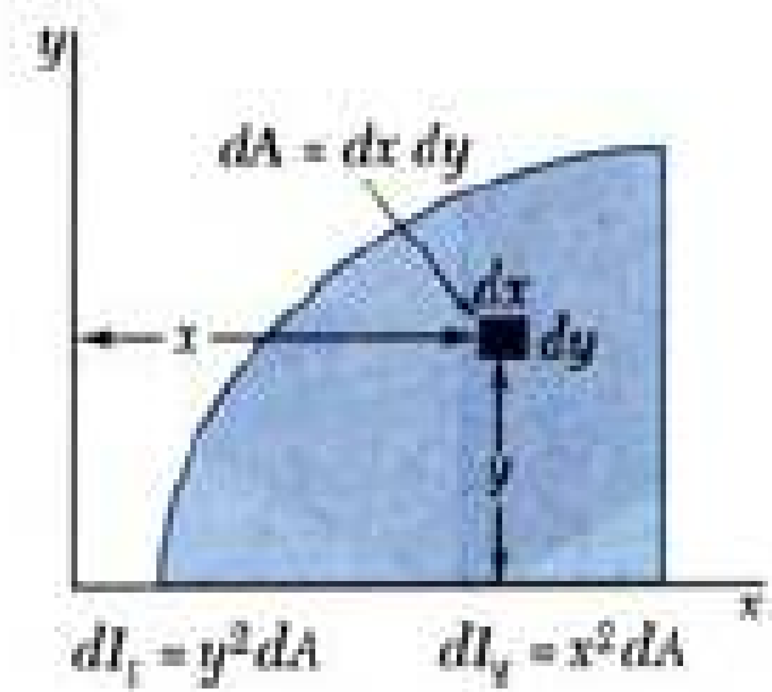



$\bar{x} = 87.2$ mm, $\bar{y} = 59.6$ mm

# فصل ۷

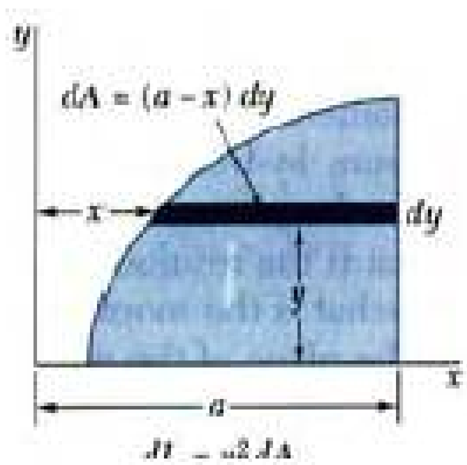
## گشتاور دوم سطح
## (گشتاور لختی سطح)

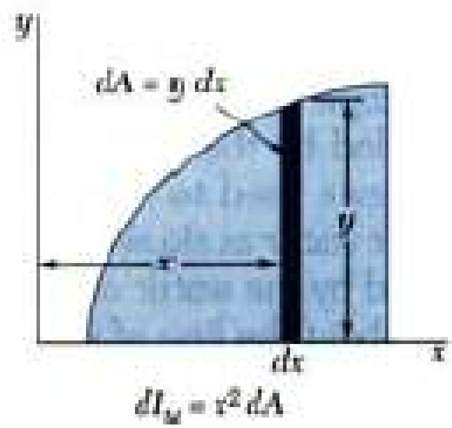
## گشتاور دوم سطح نسبت به محور x و y




$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

## گشتاور دوم سطح نسبت به محور x و y

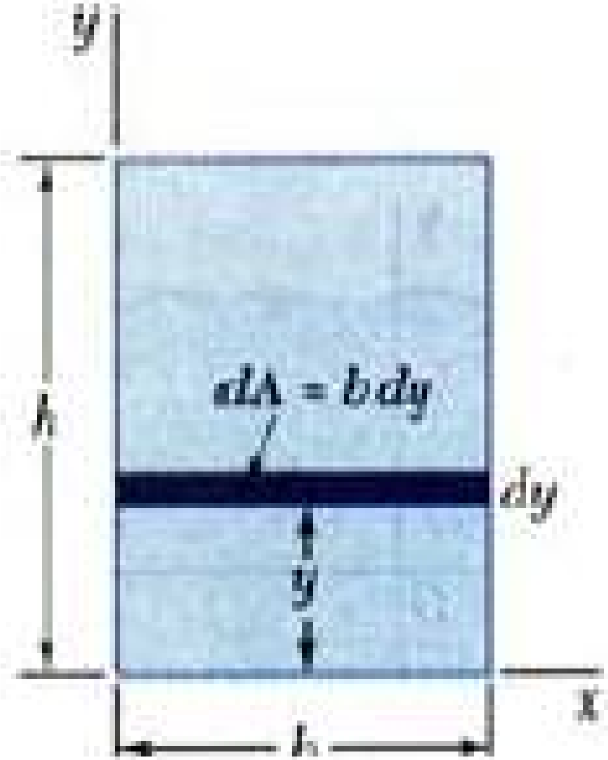



$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

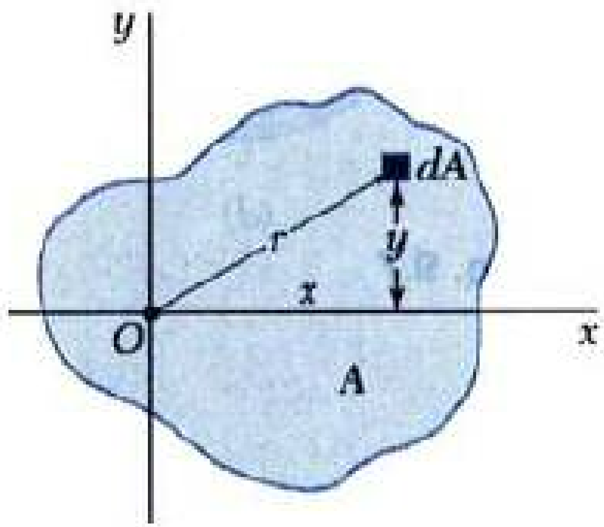
## گشتاور دوم سطح نسبت به محور x و y

### گشتاور دوم سطح مستطیلی نسبت به محور x




$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{1}{3} b h^3$$

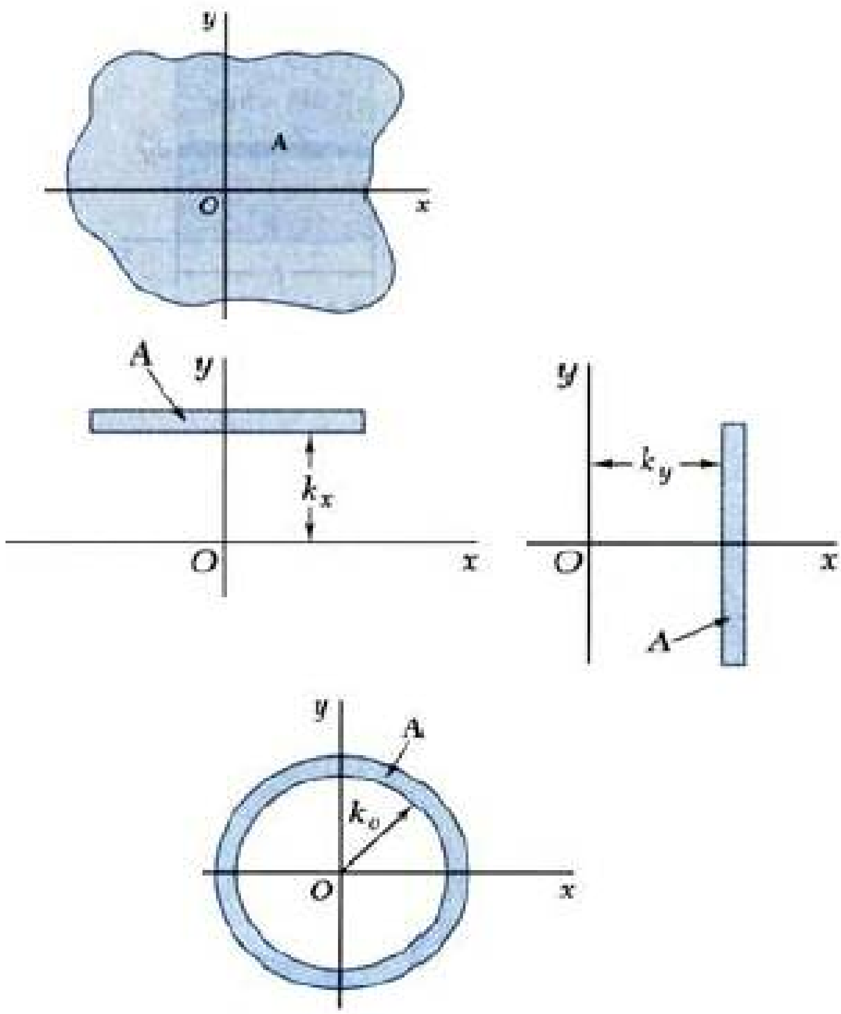
# گشتاور لختی قطبی سطح




$$J_0 = \int r^2 dA$$

$$J_0 = \int r^2 dA = \int \left(x^2 + y^2\right) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$
$$= I_y + I_x$$

# شعاع ژیراسیون (چرخش) یک سطح



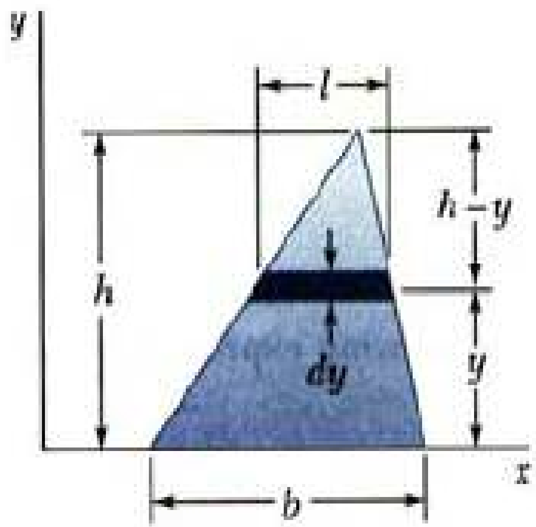

$$I_x = k_x^2 A \qquad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$I_y = k_y^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$J_O = k_O^2 A \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2$$

## مثال نمونه ۱




$$dI_x = y^2 dA \qquad dA = l\,dy$$

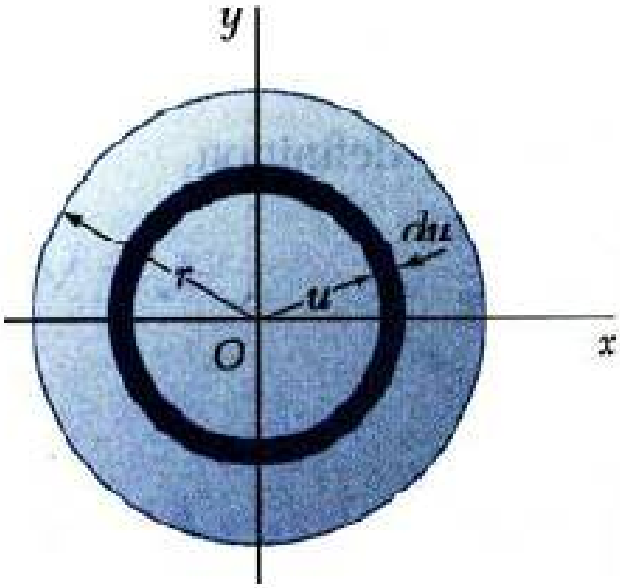
$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad l = b\frac{h-y}{h} \qquad dA = b\frac{h-y}{h}dy$$

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b\frac{h-y}{h}dy = \frac{b}{h}\int_0^h \left(hy^2 - y^3\right)dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h$$

$$\boxed{I_x = \frac{bh^3}{12}}$$

# مثال نمونه ۲




$$dJ_O = u^2 dA \qquad dA = 2\pi u\, du$$

$$J_O = \int dJ_O = \int_0^r u^2 (2\pi u\, du) = 2\pi \int_0^r u^3 du$$

$$\boxed{J_O = \frac{\pi}{2} r^4}$$

$$I_x = I_y$$

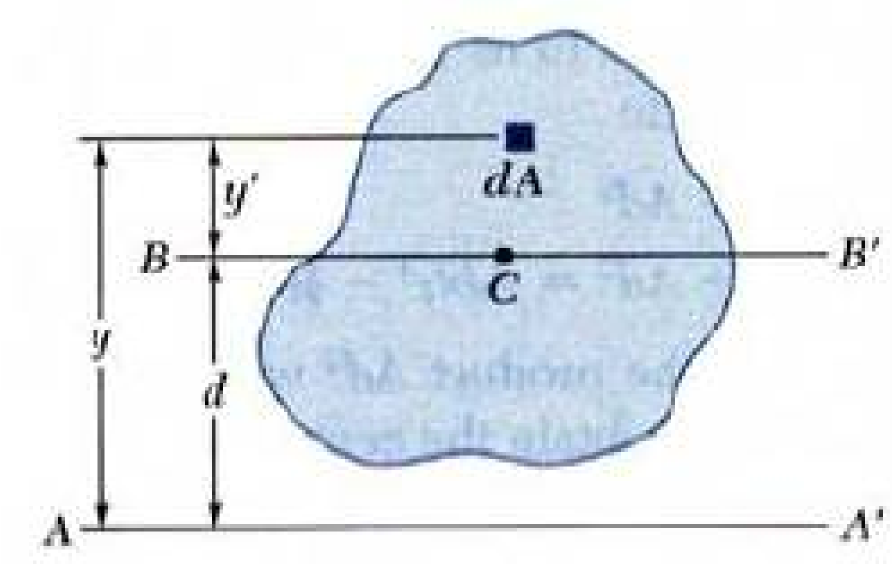
$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \qquad \frac{\pi}{2} r^4 = 2I_x$$

$$\boxed{I_{diameter} = I_x = \frac{\pi}{4} r^4}$$

# قضیه محورهای موازی

اگر گشتاور دوم سطح حول محور AA’

$$I = \int y^2 dA$$




اگر BB’ محور گذرنده از مرکز سطح جسم باشد. داریم:

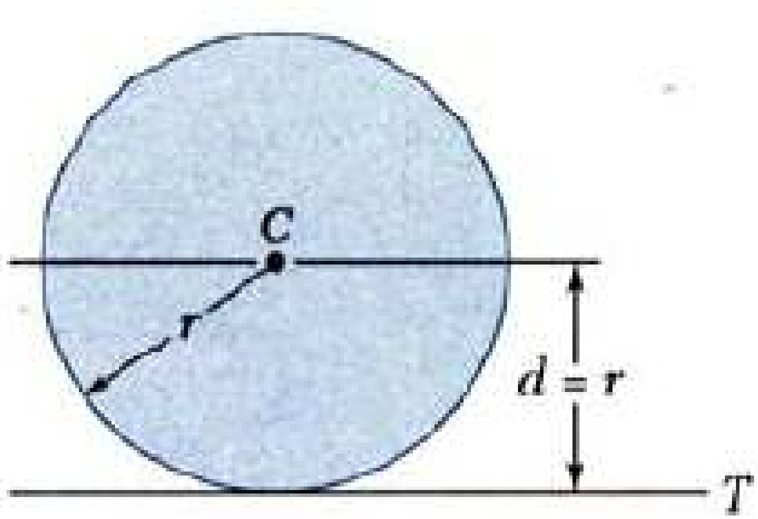
$$I = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA$$

$$= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

$$I = \bar{I} + Ad^2$$

## قضیه محورهای موازی

گشتاور دوم سطح دایروی حول محور T:

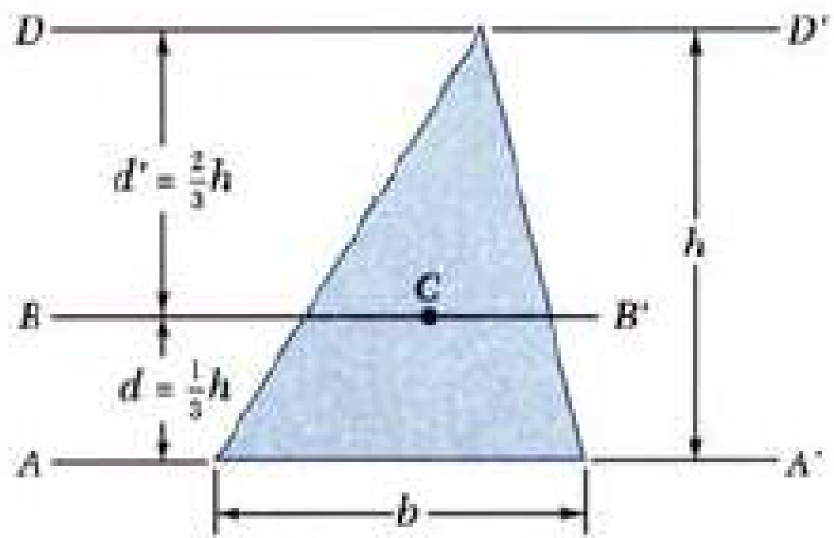



$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \frac{1}{4}\pi r^4 + \left(\pi r^2\right) r^2$$

$$= \frac{5}{4}\pi r^4$$

## قضیه محورهای موازی

گشتاور دوم سطح مثلثی حول محور گذرنده از مرکز سطح آن:



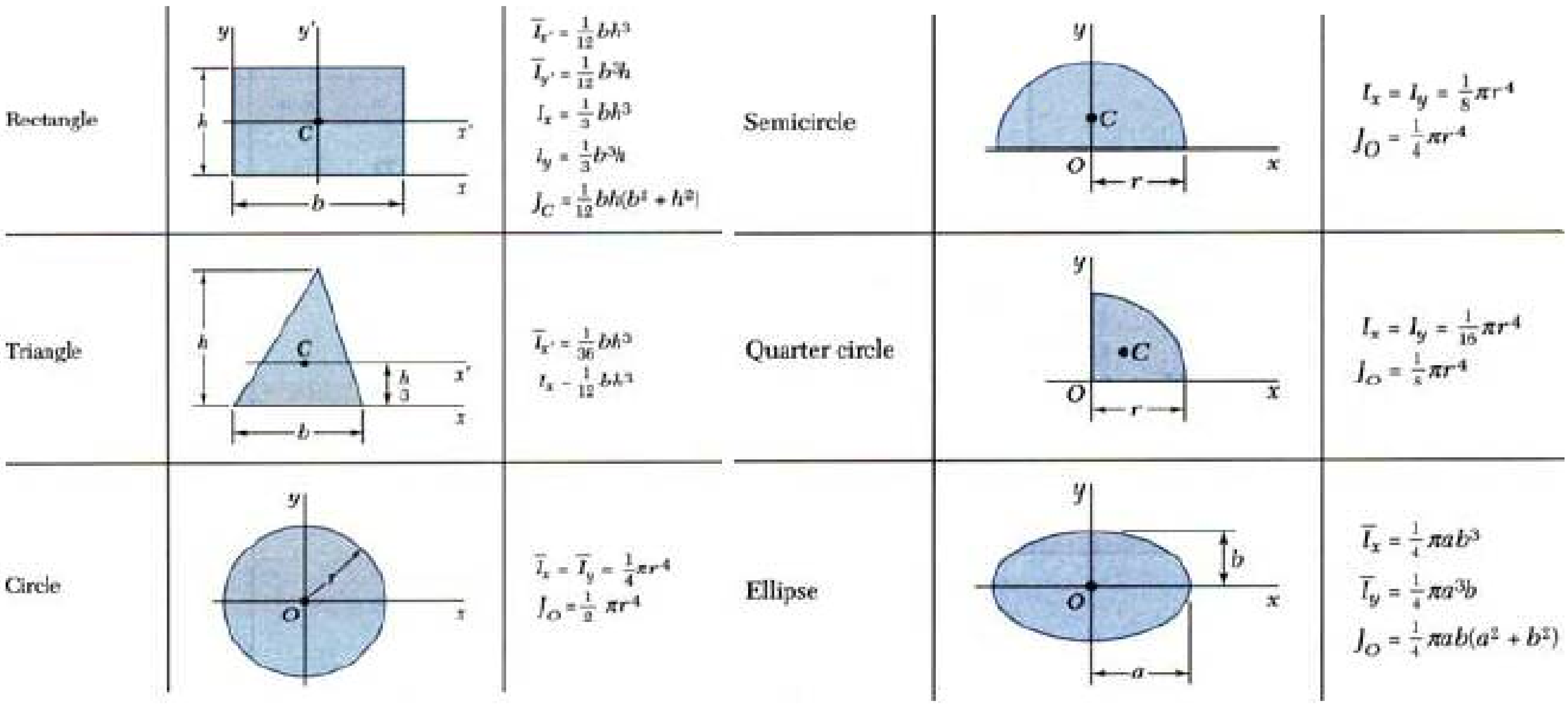

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$

$$I_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{2}bh\left(\frac{1}{3}h\right)^2$$

$$= \frac{1}{36}bh^3$$

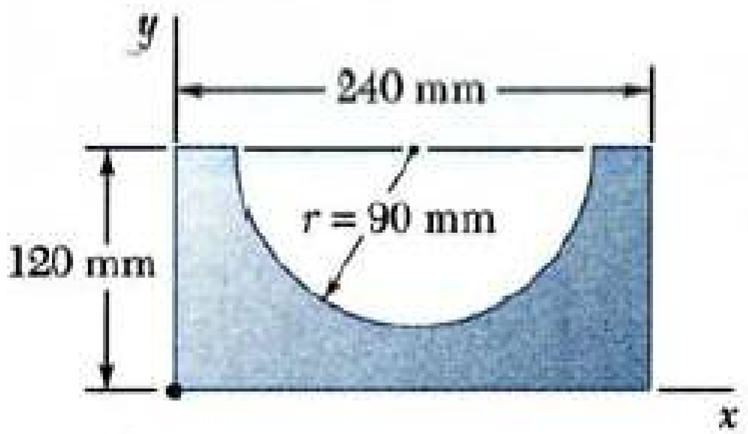
# گشتاور لختی سطوح مرکب

گشتاور لختی سطح $A$ نسبت به محور مفروض، با جمع گشتاور لختی سطوح $A_1$ و $A_2$ و $A_3$ و ... نسبت به همان محور به دست می آید.

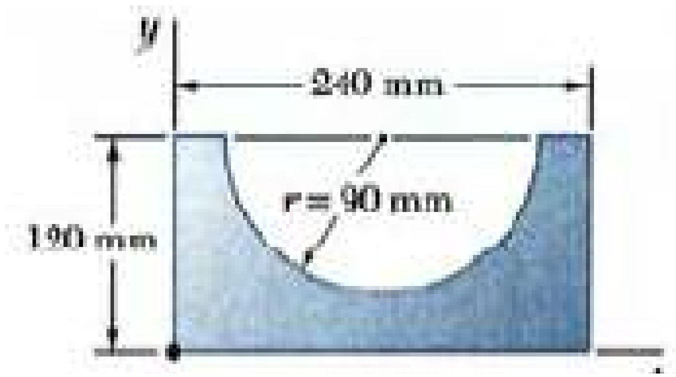


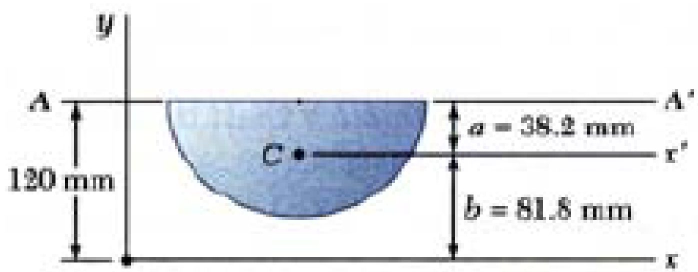
## مثال ۱:

مطلوب است محاسبه گشتاور دوم سطح حول محور x



## حل:




$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90)}{3\pi} = 38.2\,\mathrm{mm}$$

$$\mathrm{b} = 120 - \mathrm{a} = 81.8\,\mathrm{mm}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\pi(90)^2$$

$$= 12.72\times10^3\,\mathrm{mm}^2$$

برای سطح مستطیلی:

$$I_x = \tfrac{1}{3}bh^3 = \tfrac{1}{3}(240)(120) = 138.2\times10^6\,\mathrm{mm}^4$$

برای نیم دایره:

گشتاور دوم سطح حول محور AA’:

$$I_{AA'} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(90)^4 = 25.76\times10^6\,\mathrm{mm}^4$$

گشتاور دوم سطح حول محور x’:

$$\bar{I}_{x'} = I_{AA'} - Aa^2 = (25.76\times10^6)(12.72\times10^3)$$

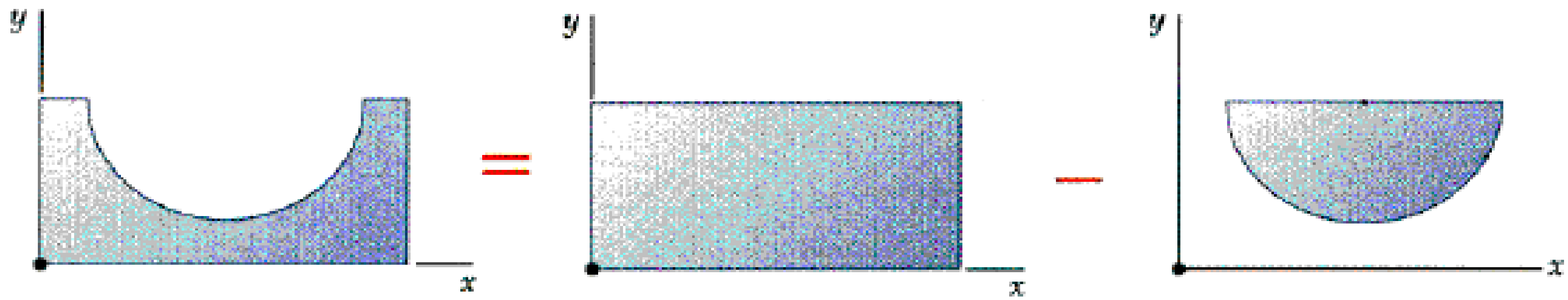
$$= 7.20\times10^6\,\mathrm{mm}^4$$

گشتاور دوم سطح حول محور x:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20\times10^6 + (12.72\times10^3)(81.8)^2$$

$$= 92.3\times10^6\,\mathrm{mm}^4$$

حل:

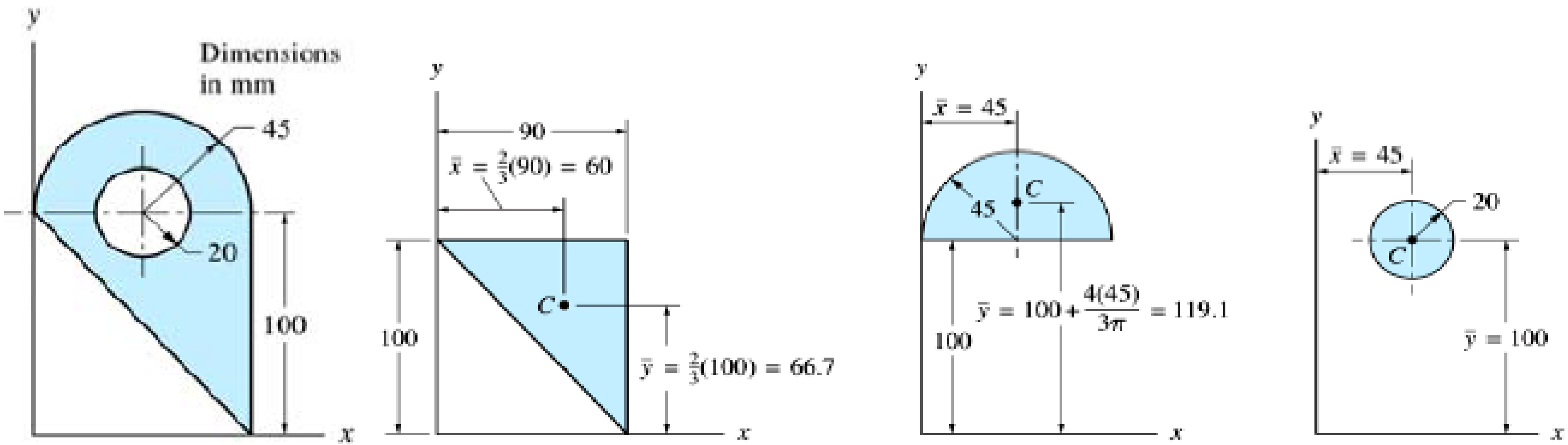



$$I_x \quad = \quad 138.2\times10^6\,\text{mm}^4 \quad - \quad 92.3\times10^6\,\text{mm}^4$$

$$\boxed{I_x = 45.9\times10^6\,\text{mm}^4}$$

## مثال ۲:

مطلوب است محاسبه گشتاور دوم سطح حول محور x و y




**Triangle**

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{90(100)}{2} = 4500 \text{ mm}^2$$

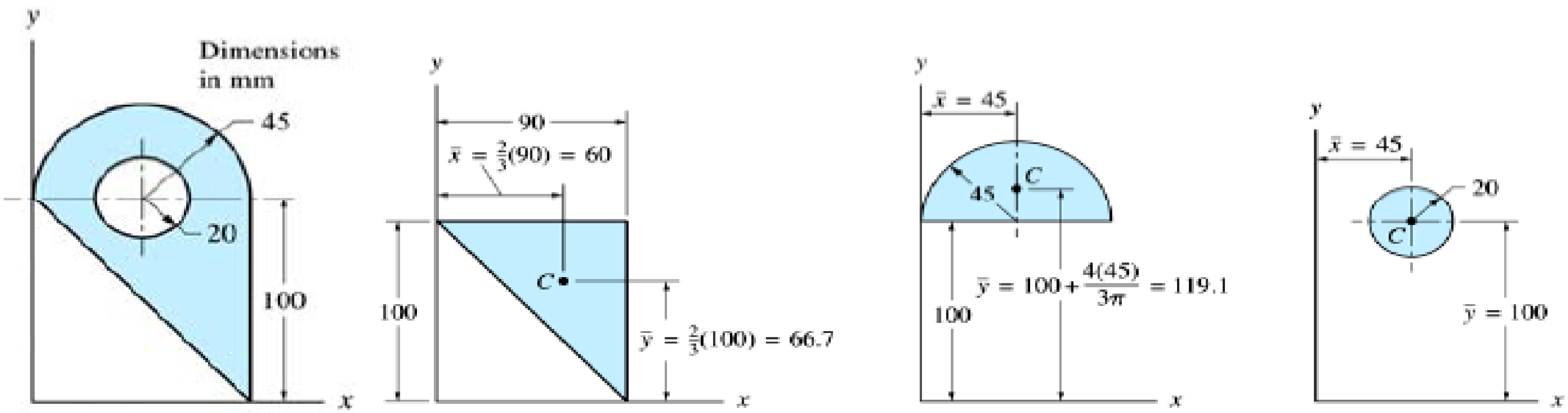
$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{90(100)^3}{36} = 2.50 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = (2.50 \times 10^6) + (4500)(66.7)^2 = 22.52 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{hb^3}{36} = \frac{100(90)^3}{36} = 2.025 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 = (2.025 \times 10^6) + (4500)(60)^2 = 18.23 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

حل:




Semicircle

$$A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi (45)^2}{2} = 3181 \text{ mm}^2$$

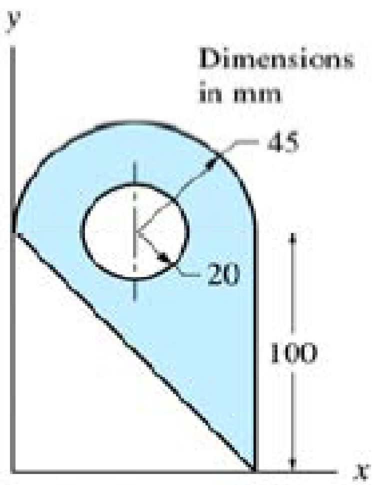
$$\bar{I}_x = 0.1098 R^4 = 0.1098(45)^4 = 0.450 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

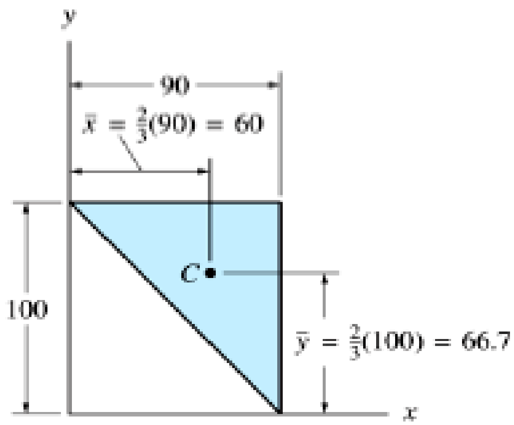
$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = (0.450 \times 10^6) + (3181)(119.1)^2 = 45.57 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

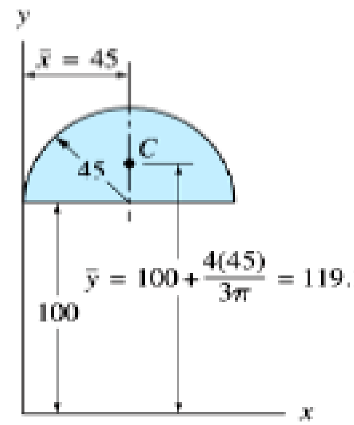
$$\bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi (45)^4}{8} = 1.61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

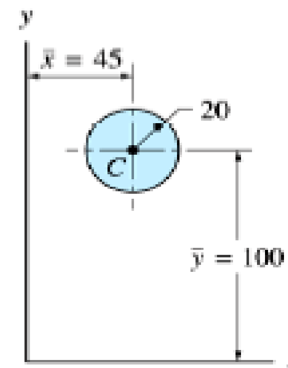
$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 = (1.61 \times 10^6) + (3181)(45)^2 = 8.05 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

حل:




Circle

$$A = \pi R^2 = \pi(20)^2 = 1257 \text{ mm}^2$$

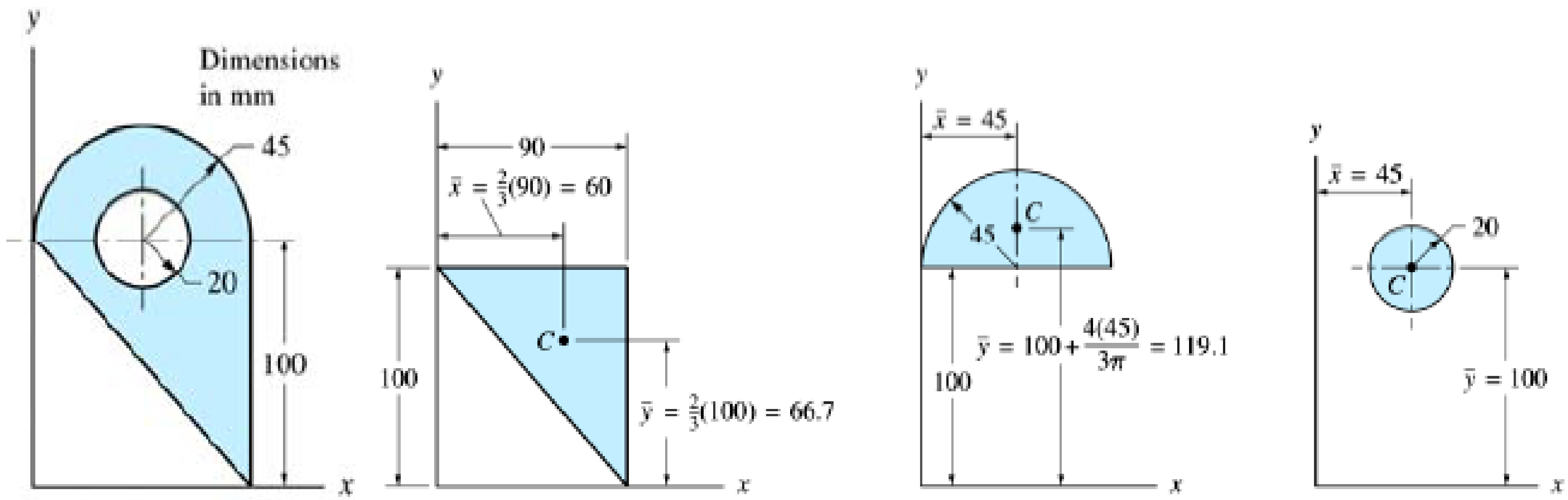
$$\bar{I}_x = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi(20)^4}{4} = 0.1257 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = (0.1257 \times 10^6) + (1257)(100)^2 = 12.70 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi(20)^4}{4} = 0.1257 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 = (0.1257 \times 10^6) + (1257)(45)^2 = 2.67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

حل:




$$A = \Sigma A = 4500 + 3181 - 1257 = 6424 \text{ mm}^2$$

$$I_x = \Sigma I_x = (22.52 + 45.57 - 12.70) \times 10^6 = 55.39 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \Sigma I_y = (18.23 + 8.05 - 2.67) \times 10^6 = 23.61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

## تمرین:

مطلوب است محاسبه گشتاور دوم سطح حول محور x و y