استاد: مهدی سهراب خانی - دست‌نویس: سعید نجفی شندی

Year. ۹۵ Month. ۷ Date. ۵ ( ) Subject : دینامیک

منبع درس: کتاب دینامیک هیبلر ویرایش (۱۴) و ویرایش (۱۱) فارسی

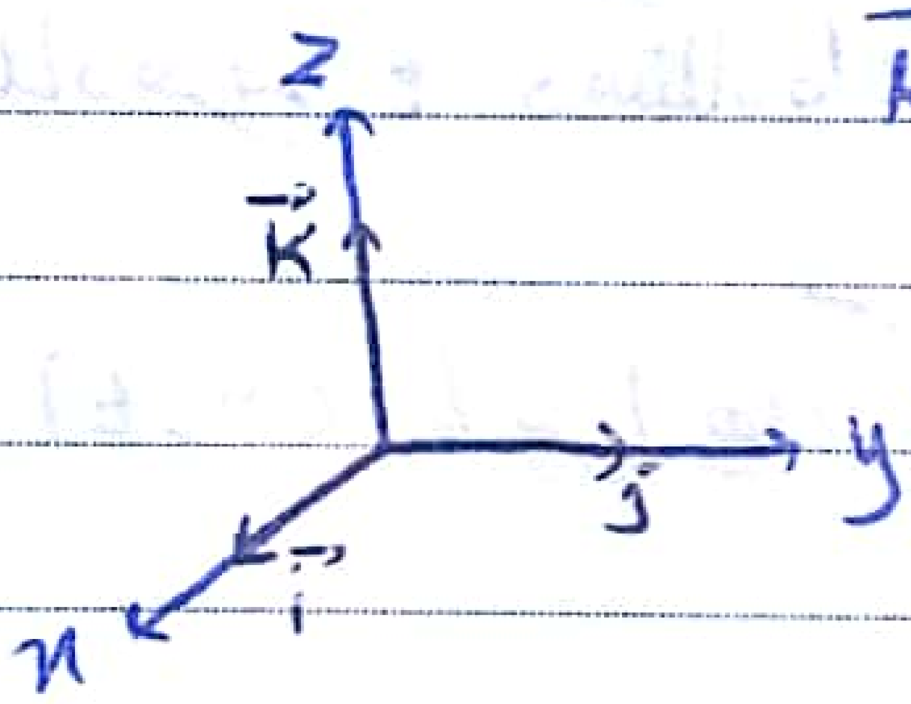
سرفصل درس:

سینماتیک: ذره، جسم صلب

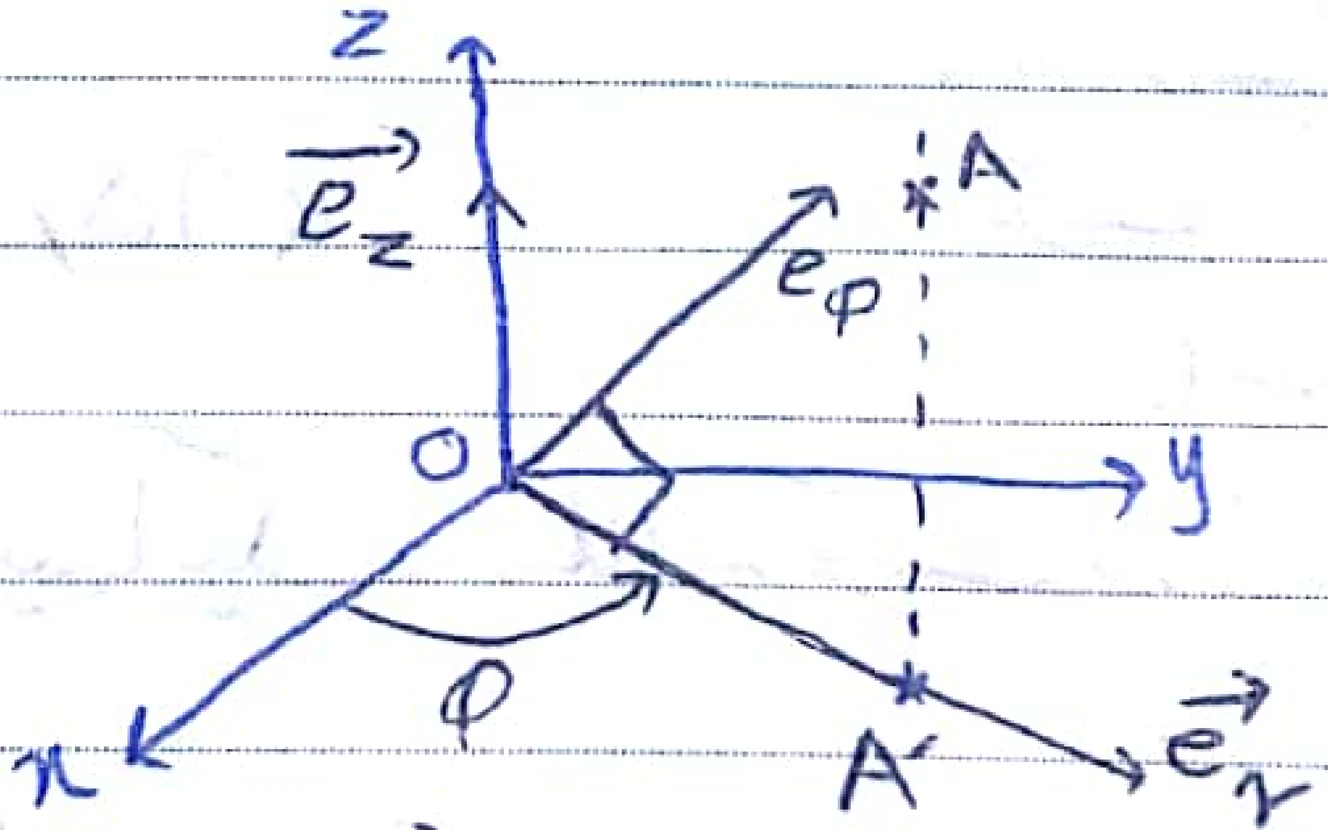
سینتیک: ذره، جسم صلب

انواع دستگاه مختصات:

۱- دستگاه دکارتی با بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{K}$

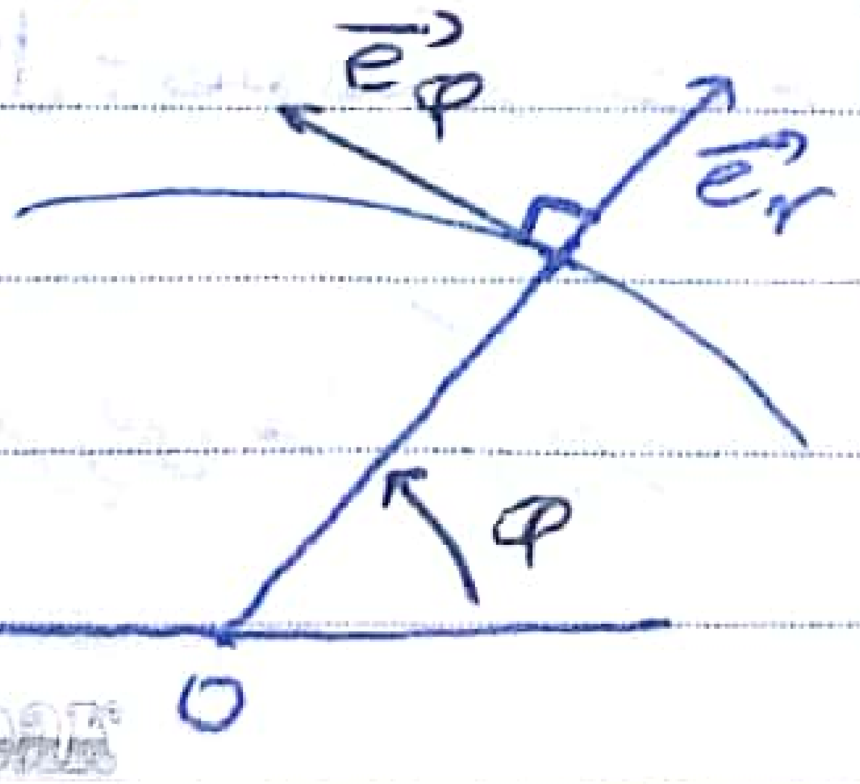


۲- دستگاه استوانه‌ای با بردارهای یکه $\vec{e_r}$ ، $\vec{e_\varphi}$ ، $\vec{e_z}$ یا $\boxed{u_r, u_\theta, u_z}$

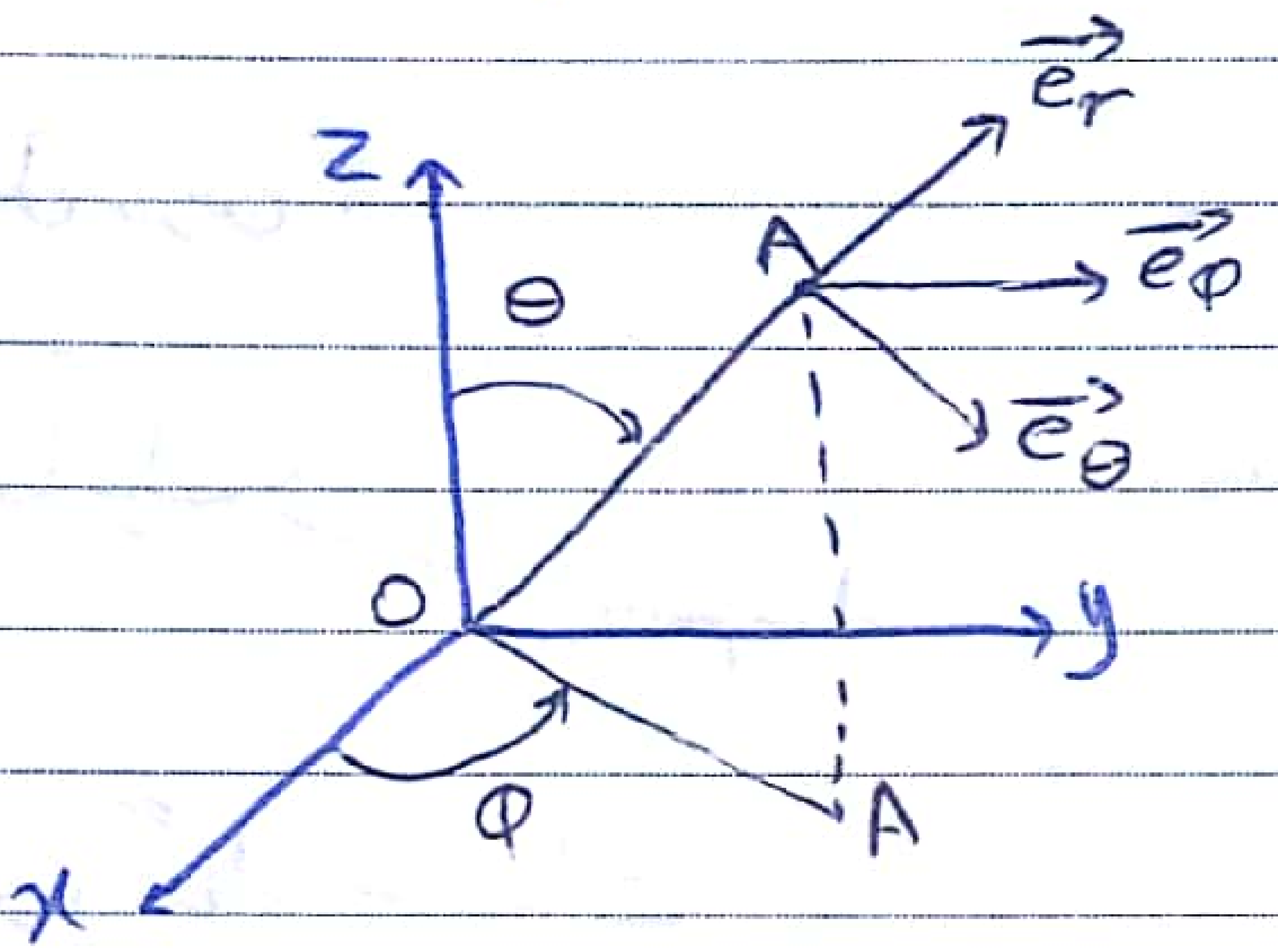


۳- دستگاه قطبی با بردارهای یکه $\vec{e_r}$ ، $\vec{e_\varphi}$

(دستگاه استوانه‌ای مسطح)

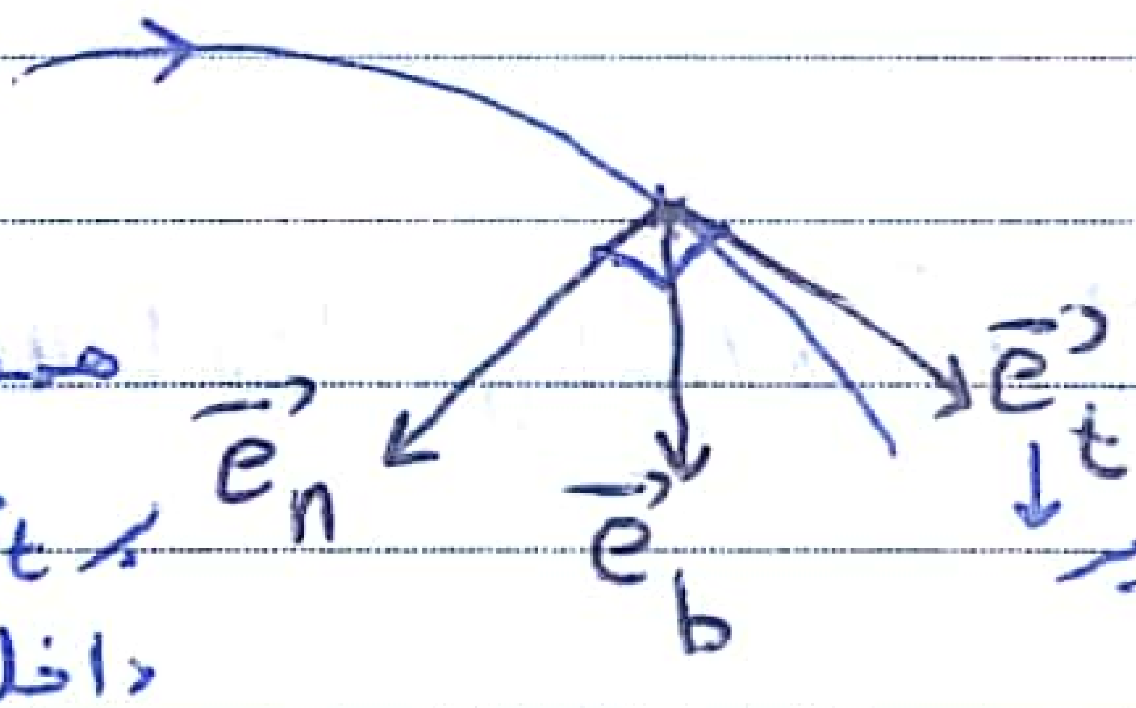


۴- دستگاه کروی با بردارهای یکه $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$



بردارهای یکه در جهت افزایش مقادیر r، θ، φ هستند.

۵- دستگاه عرضی: دستگاه وابسته به پارامترهای مسیر حرکت. دستگاه مماس قائم (n-t) با بردارهای یکه $\vec{e}_t$ ، $\vec{e}_n$ ، $\vec{e}_b$



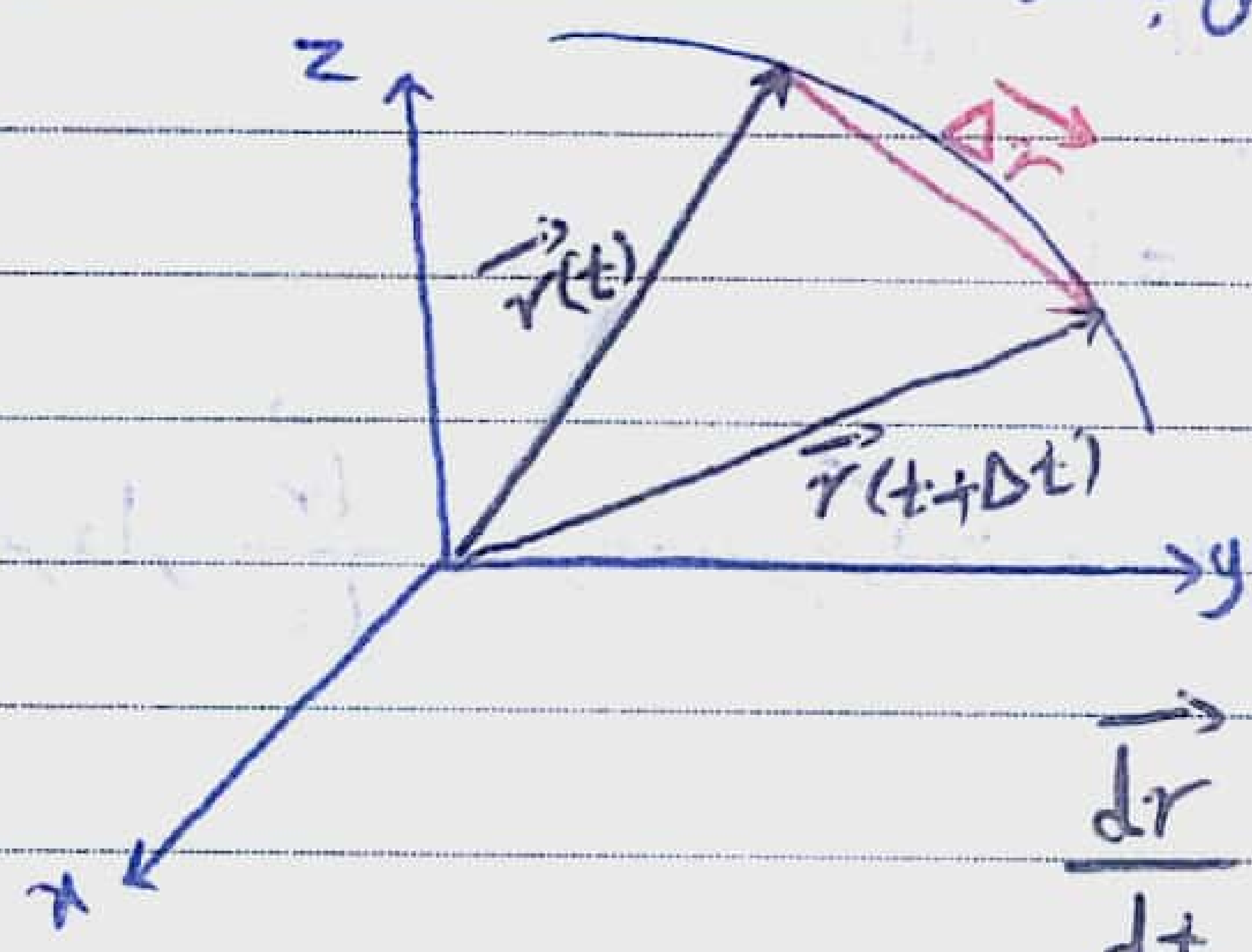
$$\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$$

«۹۵/۷/۱۲»

علم سینماتیک: مطالعه حرکت ذره یا جسم بدون در نظر گرفتن عوامل حرکت به دنبال: هندسه حرکت به همراه روابط موقعیت، سرعت و شتاب مورد بررسی قرار می‌گیرد.

علم سینتیک: مطالعه حرکت ذره یا جسم با در نظر گرفتن عوامل حرکت مثل نیرو، گشتاور و انرژی. و روابط بین این عوامل با پارامترهای سینماتیکی مورد توجه است.

فرض ذره‌ای در لحظه t دارای بردار موقعیت $\vec{r}(t)$ و در لحظه $t+\Delta t$ دارای بردار موقعیت $\vec{r}(t+\Delta t)$ می‌باشد.



با میل کردن Δt به سمت صفر بردار $\frac{d\vec{r}}{dt}$ بر مسیر حرکت مماس است.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

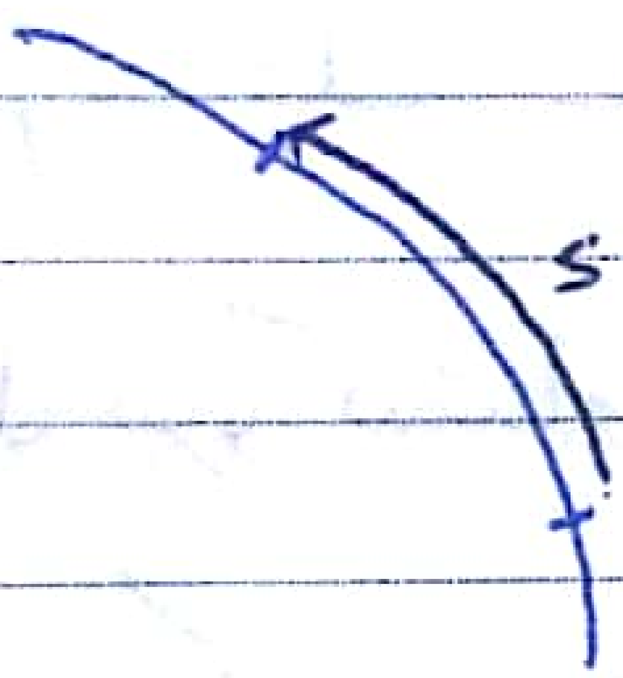
فرض: بردار دلخواه $\vec{A}$ دارای طول ثابت است.

$|\vec{A}| = Cte$ $\qquad$ $\vec{A}\cdot\vec{A} = |A|^2 = Cte$

$\vec{A}\cdot d\vec{A} + \vec{A}\cdot d\vec{A} = 0$ $\qquad$ $2\vec{A}\cdot d\vec{A} = 0$

$\vec{A}\cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp d\vec{A}$

با در نظر گرفتن بردار $\vec{r}$ به صورت زیر داریم:



s : طول مسیر طی شده.

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}$$

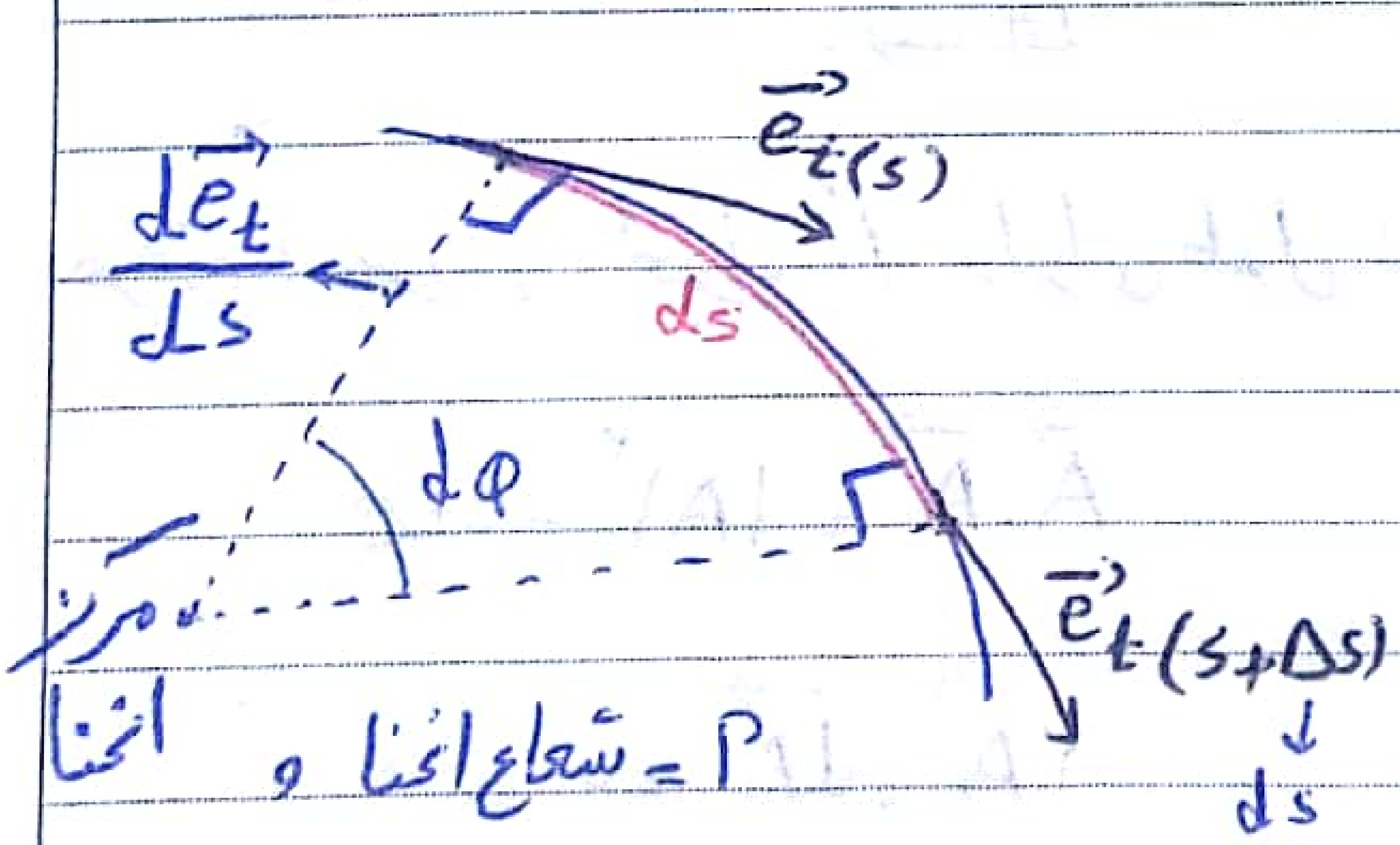
$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

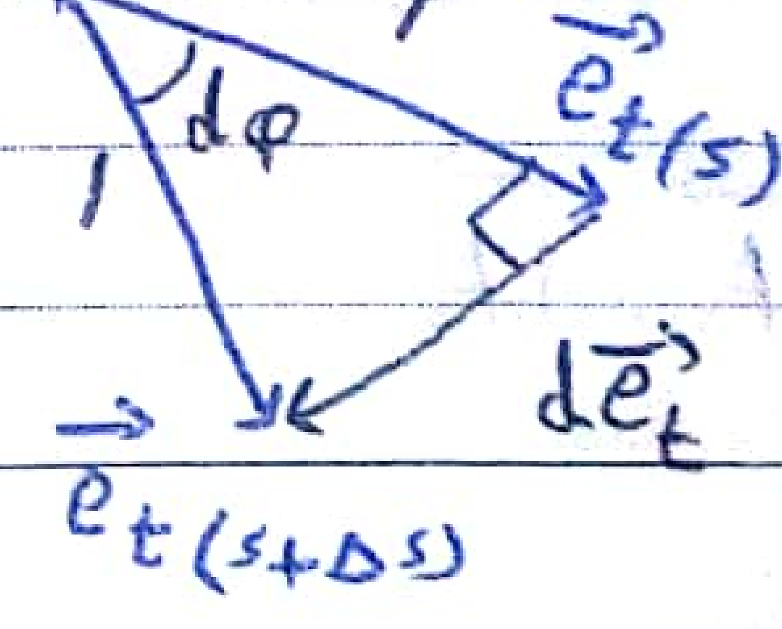
$$\text{(I)} \quad \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \sqrt{\frac{ds^2}{ds^2}} = 1$$

(II) بردار $\frac{d\vec{r}}{ds}$ بر مسیر حرکت مماس است.

$$\xRightarrow{I,\,II} \vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

محاسبه $\frac{d\vec{e}_t}{ds} = ?$





محاسبه طول بردار:

$$\tan d\varphi = \frac{|d\vec{e}_t|}{1}$$

از طرفی: $\tan d\varphi \simeq d\varphi \implies |d\vec{e}_t| = 1 \times \tan d\varphi$

$$\implies \boxed{|d\vec{e}_t| = d\varphi}$$

$$\implies \left|\frac{d\vec{e}_t}{ds}\right| = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{\rho\, d\varphi} \implies \boxed{\left|\frac{d\vec{e}_t}{ds}\right| = \frac{1}{\rho_{\text{رو}}}}$$

محاسبه امتداد: با توجه به این که طول بردار $\vec{e}_t$ ثابت است مشتق آن

بر خودش عمود است.

محاسبه جهت: قابل اثبات است که جهت بردار $\frac{d\vec{e}_t}{ds}$ به سمت تقعر و

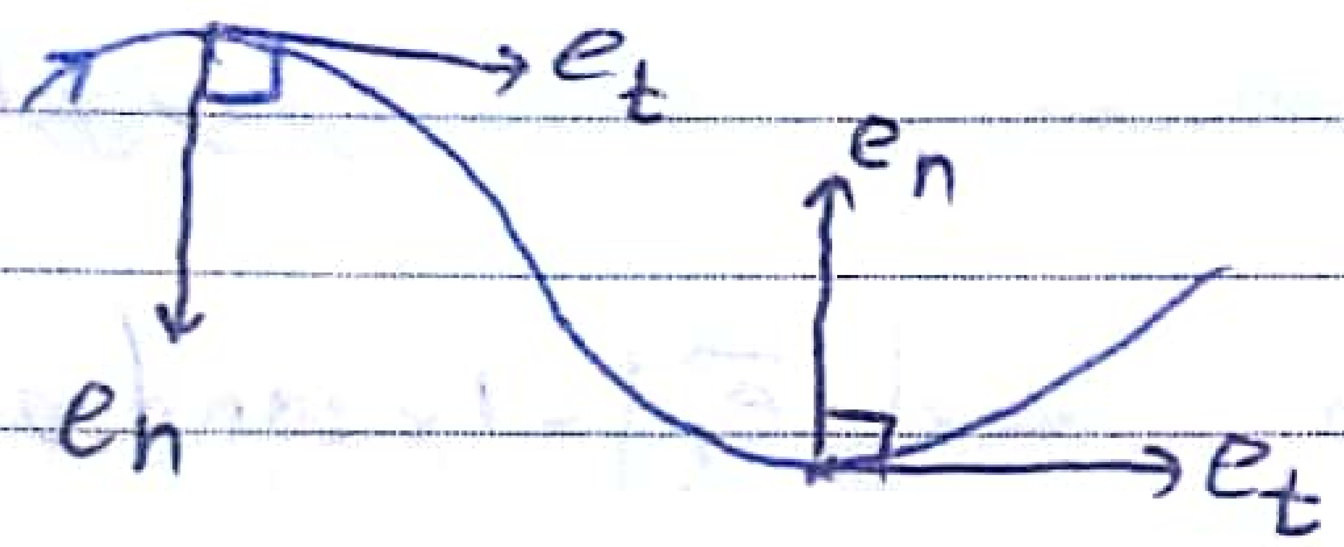
مرکز انحناء مسیر حرکت می باشد.

با در نظر گرفتن جهت بردار $\vec{e}_n$ خواهیم داشت: $\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{e}_n$

$$\implies \vec{e}_n = \rho \frac{d\vec{e}_t}{ds}$$

دو رابطه مهم دستگاه فرنه: (حفظ شود)

1. $\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}$ 2. $\vec{e}_n = \rho \frac{d\vec{e}_t}{ds}$



مثال: متحرکی در دستگاه دکارتی مسیر زیر را طی می کند. مطلوب است محاسبه e_t و e_n.

$$\vec{r} = a\cos\varphi\,\vec{i} + a\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}$$

$$\boxed{\vec{e}_t = (-a\sin\varphi\,\vec{i} + a\cos\varphi\,\vec{j})\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)} \downarrow \star$$

$$|\vec{e}_t| = \left(\sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{ds}$$

$$\Rightarrow 1 = (a)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) \Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e}_t = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}}$$

$$\vec{e}_n = \rho\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \rho\frac{d\vec{e}_t}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}$$

$$\vec{e}_n = \rho(-\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j})\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$|\vec{e}_n| = (\rho)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\left(\frac{1}{a}\right)$$

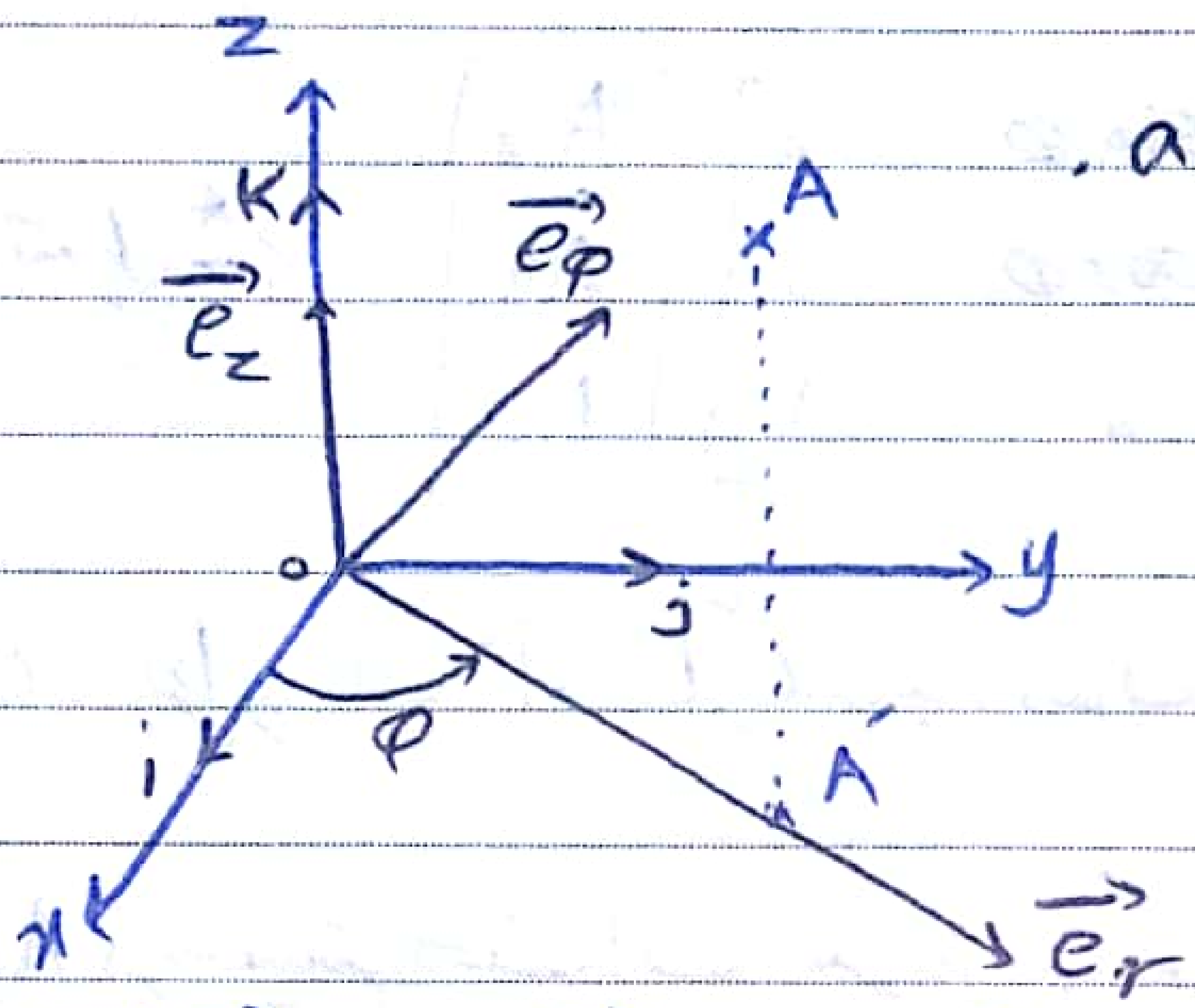
$$1 = (\rho)(1)\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow \rho = a \Rightarrow \boxed{\vec{e}_n = -\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}}$$

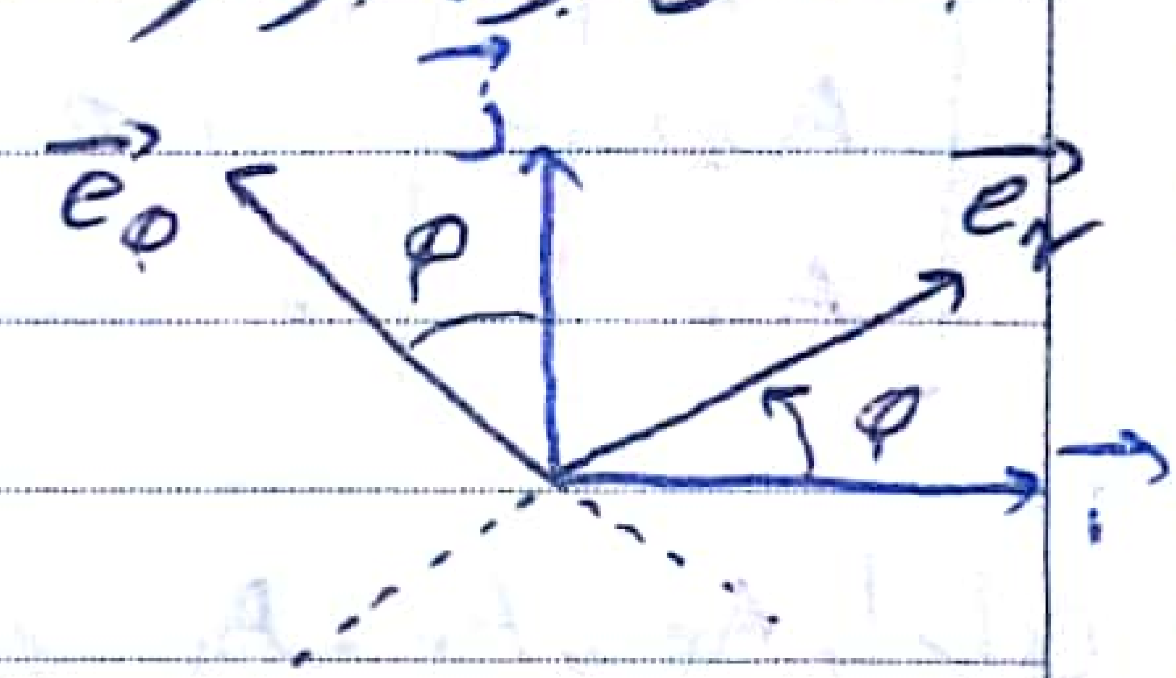
$$\downarrow$$

$$ds = a\,d\varphi$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال ۱: مطلوب است رابطه تبدیل از دستگاه دکارتی به استوانه‌ای و بالعکس برای بردار دلخواه a.





$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{K}$$

$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z$$

$$\vec{i} = \cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + 0\times\vec{e}_z$$

$$\vec{j} = \sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi + 0\times\vec{e}_z$$

$$\vec{k} = 0\times\vec{e}_r + 0\times\vec{e}_\varphi + 1\times\vec{e}_z$$

$$A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{K} = A_r\vec{e}_r + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z$$

$$A_x(\cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi + 0\times\vec{e}_z)$$

$$+A_y(\sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi + 0\times\vec{e}_z)$$

$$+A_z(0\times\vec{e}_r+0\times\vec{e}_\varphi+1\times\vec{e}_z)=A_r\vec{e}_r+A_\varphi\vec{e}_\varphi+A_z\vec{e}_z$$

$$\begin{bmatrix}A_r\\A_\varphi\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\-\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}$$ ماتریس تبدیل $\stackrel{*}{=}$ >

مثال ۳: بردار $\vec{A}$ را در نظر بگیرید. مؤلفه‌های A_1، A_2 و A_3 را برای بردار A در سیستم مختصات غیرمتعامد که جهت محورهای آن بوسیله $\vec{e}_1=\vec{i}$ و $\vec{e}_2=\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$ و $\vec{e}_3=\frac{\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{2}}$ مشخص شده است، تعیین نمایید.

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3\equiv A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$A_1(\vec{i})+A_2\left(\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}\right)+A_3\left(\frac{\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{2}}\right)=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}A_1 = A_x - A_y - A_z\\ A_2 = \sqrt{2}A_y\\ A_3 = \sqrt{2}A_z\end{cases}$$

مثال 4 : اگر بردار موقعیت در دستگاه دکارتی به صورت $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ تعریف شود. مطلوب است بردار موقعیت در دستگاه استوانه‌ای. با توجه به مثال قبل ماتریس تبدیل *

$$\begin{bmatrix}R_r\\ R_\varphi\\ R_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x = r\cos\varphi\\ y = r\sin\varphi\\ z = z\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}R_r\\ R_\varphi\\ R_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r\\ 0\\ z\end{bmatrix} \qquad \boxed{\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}$$

متحرک در دستگاه استوانه‌ای در صفحه $r-z$ حرکت دارد و مؤلفه φ آن برابر با صفر است.

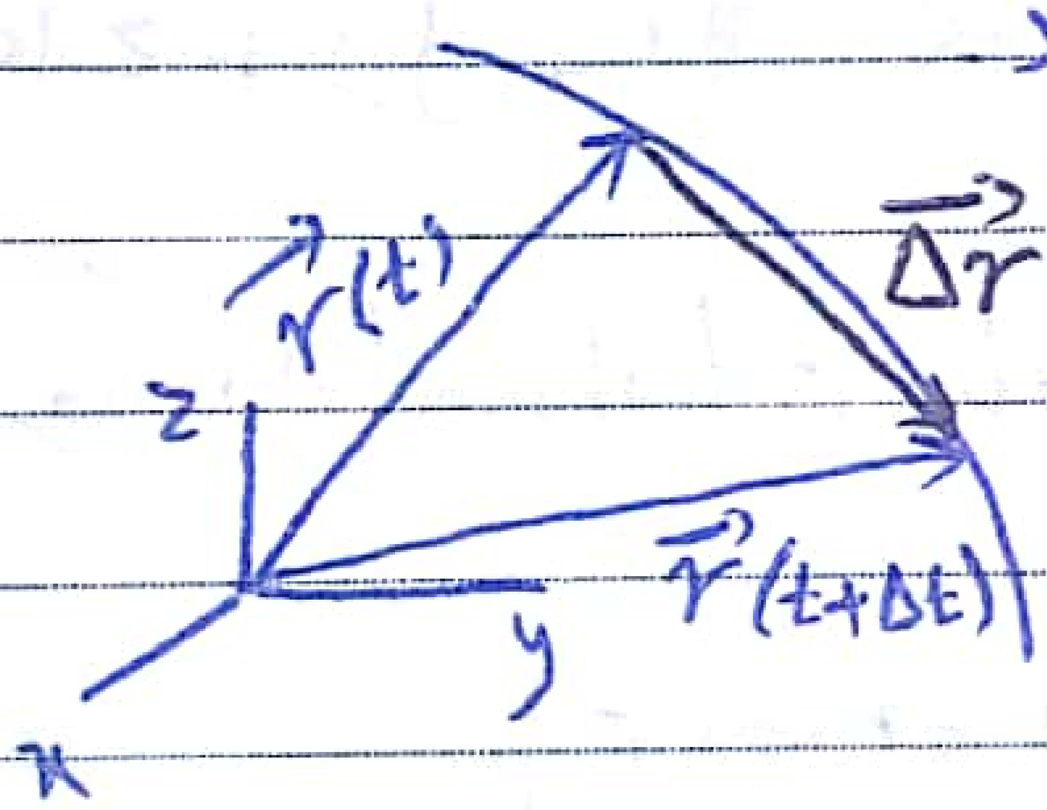
مثال 5 : مطلوب است رابطه تبدیل از دستگاه دکارتی به دستگاه کروی و

با استفاده از آن بردار موقعیت در دستگاه کروی را بنویسید.

بردار موقعیت در دستگاه کروی ← $\vec{R} = r\vec{e}_r$

سینماتیک: بررسی حرکت در ۳ دستگاه دکارتی، قطبی، استوانه‌ای و کروی:

فرض: متحرکی در لحظه t دارای بردار موقعیت $\vec{r}(t)$ و در لحظه $(t+\Delta t)$ دارای بردار موقعیت $\vec{r}(t+\Delta t)$ می‌باشد.



تعریف:
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

- بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{a}$ به ترتیب بردارهای سرعت و شتاب لحظه‌ای می‌باشند.

- بردار سرعت همواره بر مسیر حرکت مماس است ولی بردار شتاب الزاماً مماس نمی‌باشد.

۱. دستگاه دکارتی
بردار موقعیت $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

بردار سرعت $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$$= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

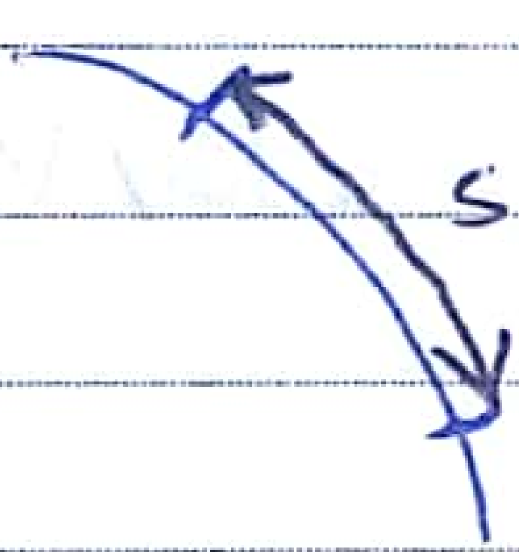
$|\vec{V}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt}$ اندازه حرکت

یا تندی حرکت که یک مقدار اسکالر است

بردار شتاب $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

$$= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

2- دستگاه فرنه: دستگاهی که مسیر حرکت مشخص باشد



بردار موقعیت $\vec{R} = \vec{R}(s)$

بردار سرعت $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{ds}\frac{ds}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t}$$

بردار شتاب

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{e}_t\right)$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\vec{e}_t + \frac{d\vec{e}_t}{dt}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \left(\frac{1}{\rho}\vec{e}_n\right)\frac{ds}{dt}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\,\vec{e}_t + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}\,\vec{e}_n}$$

بردار شتاب در حالت کلی دارای دو مولفه مماسی و قائم می باشد.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$$

مولفه مماسی $a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}$

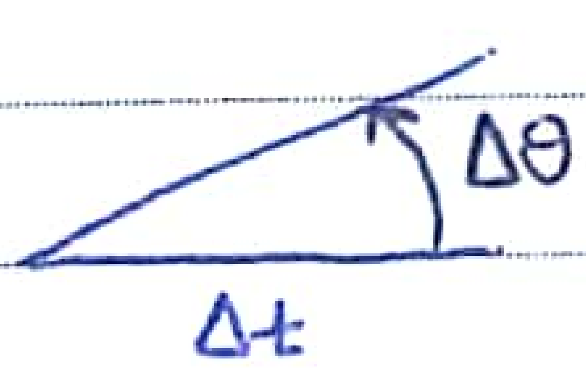
مولفه عمودی $a_n = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = \frac{|v|^2}{\rho}$

«۹۵/۷/۱۹» ۳. دستگاه استوانه ای

بردار موقعیت $\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

بردار سرعت $\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r + \dot{z}\vec{e}_z + z\dot{\vec{e}}_z$

فرض: ذره ای در زمان Δt زاویه $\Delta\theta$ را طی می کند.



خط جهت داری که حرکت فوق را مشخص می کند

دارای ویژگی های زیر می باشد: ۱. طول آن برابر زاویه طی شده برحسب

رادیان است. ۲. امتداد آن بر صفحه حرکت عمود است.

۳. جهت آن با توجه به قانون دست راست به دست می آید.

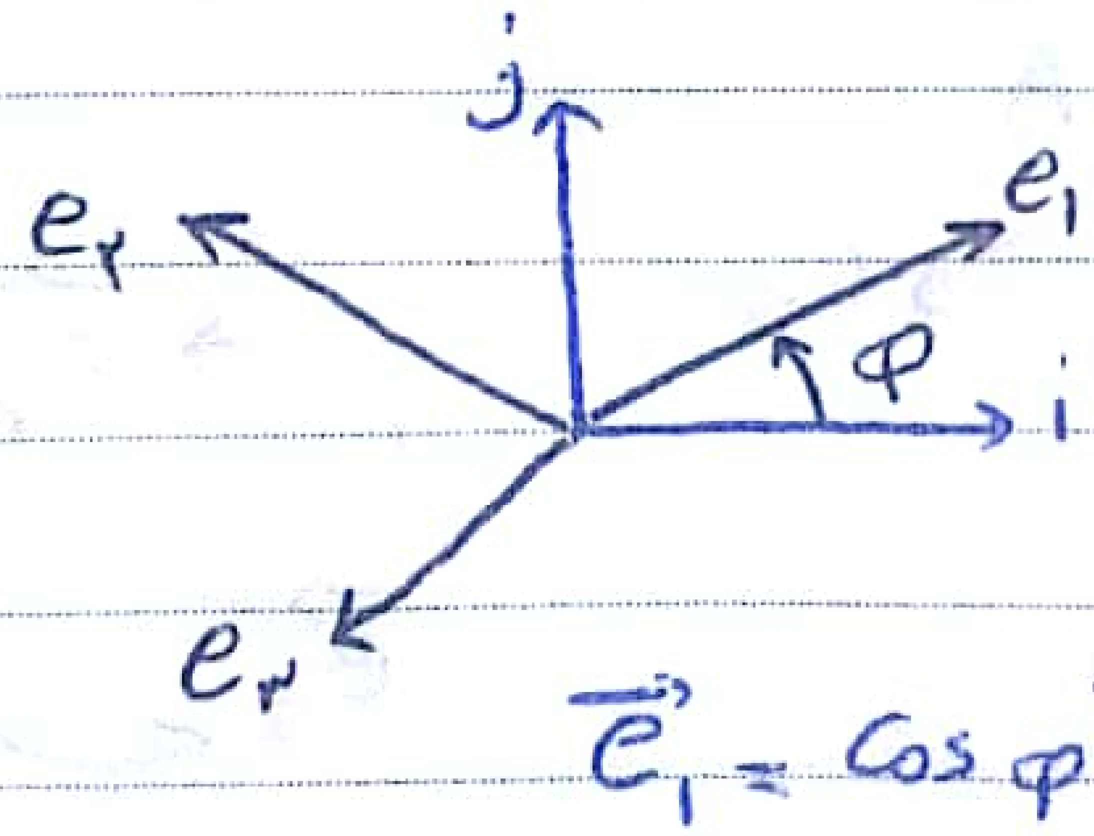
خط جهت دار فوق در مقادیر بزرگ بردار نمی باشد. زیرا از قانون جمع برداری پیروی نمی کند. $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} \neq \vec{A}+\vec{C}+\vec{B}$

خط جهت دار فوق در مقادیر دیفرانسیلی یک بردار است.

بردار سرعت زاویه ای: تعریف $$\boxed{\vec{\omega}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\vec{\Delta\theta}}{\Delta t}=\frac{\vec{d\theta}}{dt}=\dot{\vec{\theta}}\left(\frac{rad}{s}\right)}$$

بردار شتاب زاویه ای $$\boxed{\vec{\alpha}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\vec{\Delta\omega}}{\Delta t}=\frac{\vec{d\omega}}{dt}=\dot{\vec{\omega}}\left(\frac{rad}{s^2}\right)}$$

مشتق بردار یکه: فرض در دستگاه e_3 ، e_2 ، e_1 بردار $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ در صفحه $x-y$ حول محور $\vec{e}_3$ که عمود بر صفحه $x-y$ می باشد در حال دوران است.



بردار سرعت زاویه ای دستگاه $$\boxed{\vec{\omega}=\dot{\varphi}\vec{e}_3}$$

$$\vec{e}_1=\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j}$$

$\vec{e}_2 = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$

$\dfrac{d\vec{e}_1}{dt} = \dfrac{d\vec{e}_1}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} = (-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j})\,\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_2$

$\dfrac{d\vec{e}_2}{dt} = \dfrac{d\vec{e}_2}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} = (-\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j})\,\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_1$

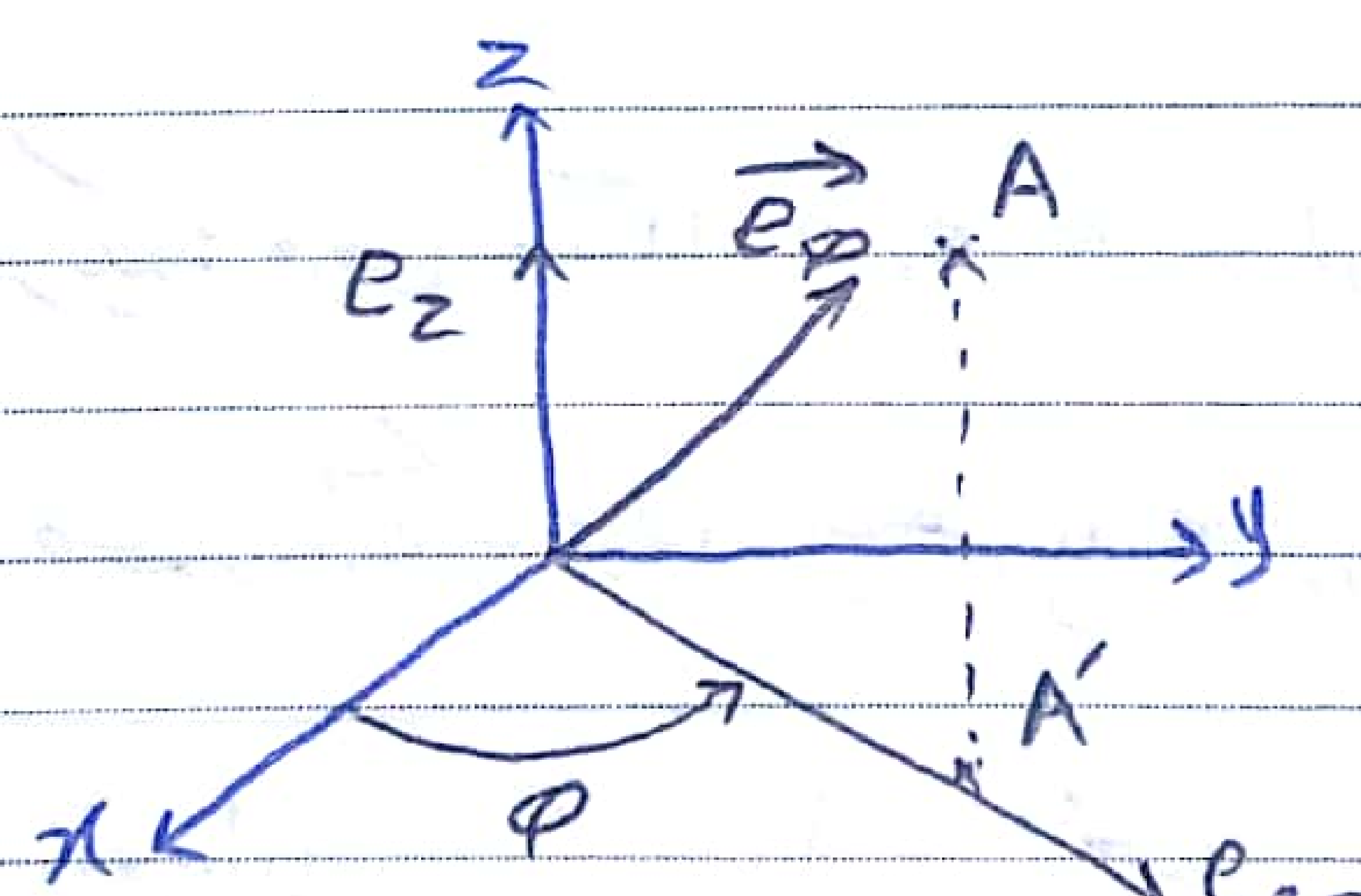
محاسبات مستقل را انجام می دهیم:

$\vec{w} \times \vec{e}_1 = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \dot{\varphi}\,\vec{e}_2$

$\vec{w} \times \vec{e}_2 = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_1$

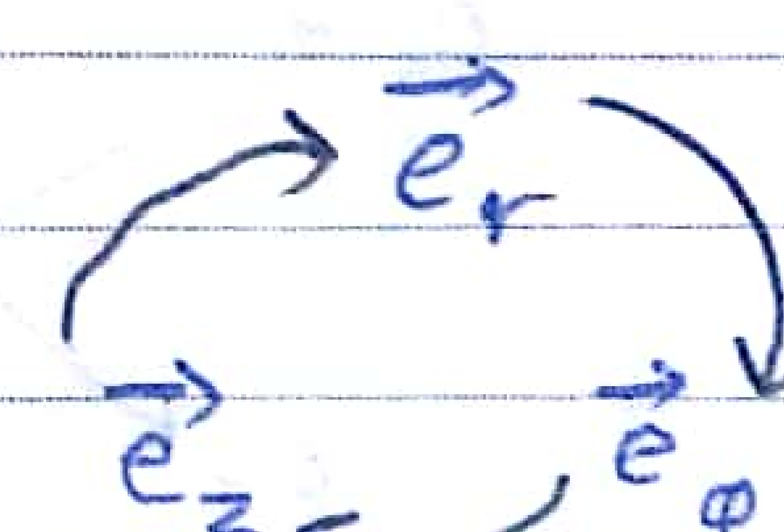
با مقایسه روابط بدست آمده خواهیم داشت:

$\boxed{\dot{\vec{e}} = \vec{w} \times \vec{e}}$



بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه استوانه

$\boxed{\vec{w} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z}$



$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{\omega} \times \vec{e}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_z = \vec{\omega} \times \vec{e}_z = \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi + v_z\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z$$

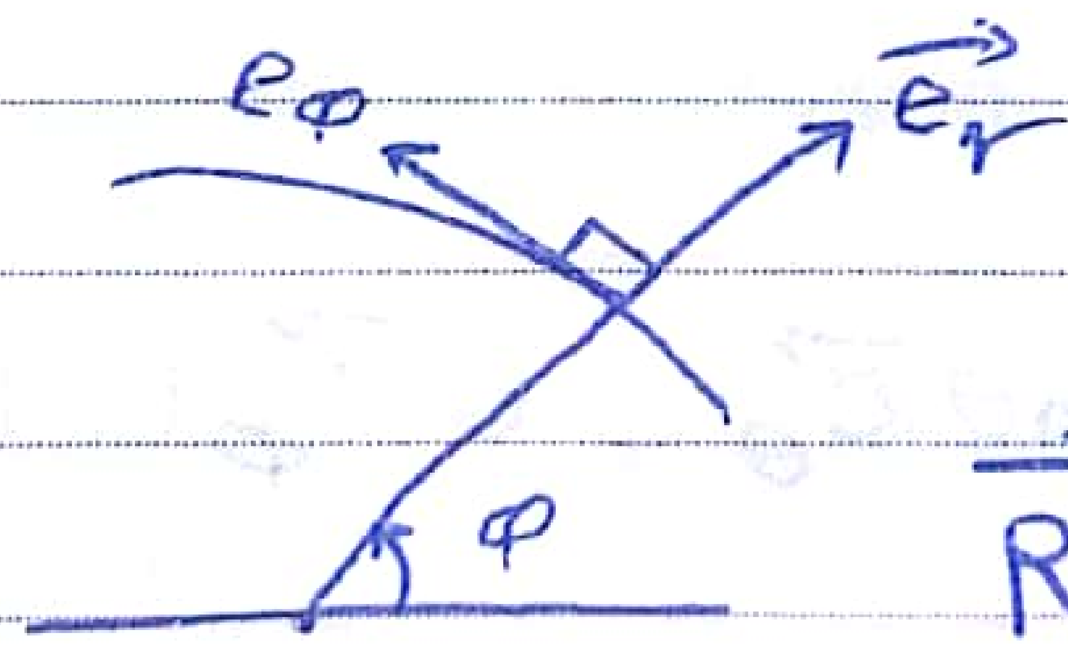
بردار شتاب $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\overset{\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}{\dot{\vec{e}}_r} + (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

$+ r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\dot{\vec{e}}_z$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \vec{\omega} \times \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z}$$

4. دستگاه قطبی:



$\vec{R} = r\vec{e}_r$ $\quad\quad$ $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

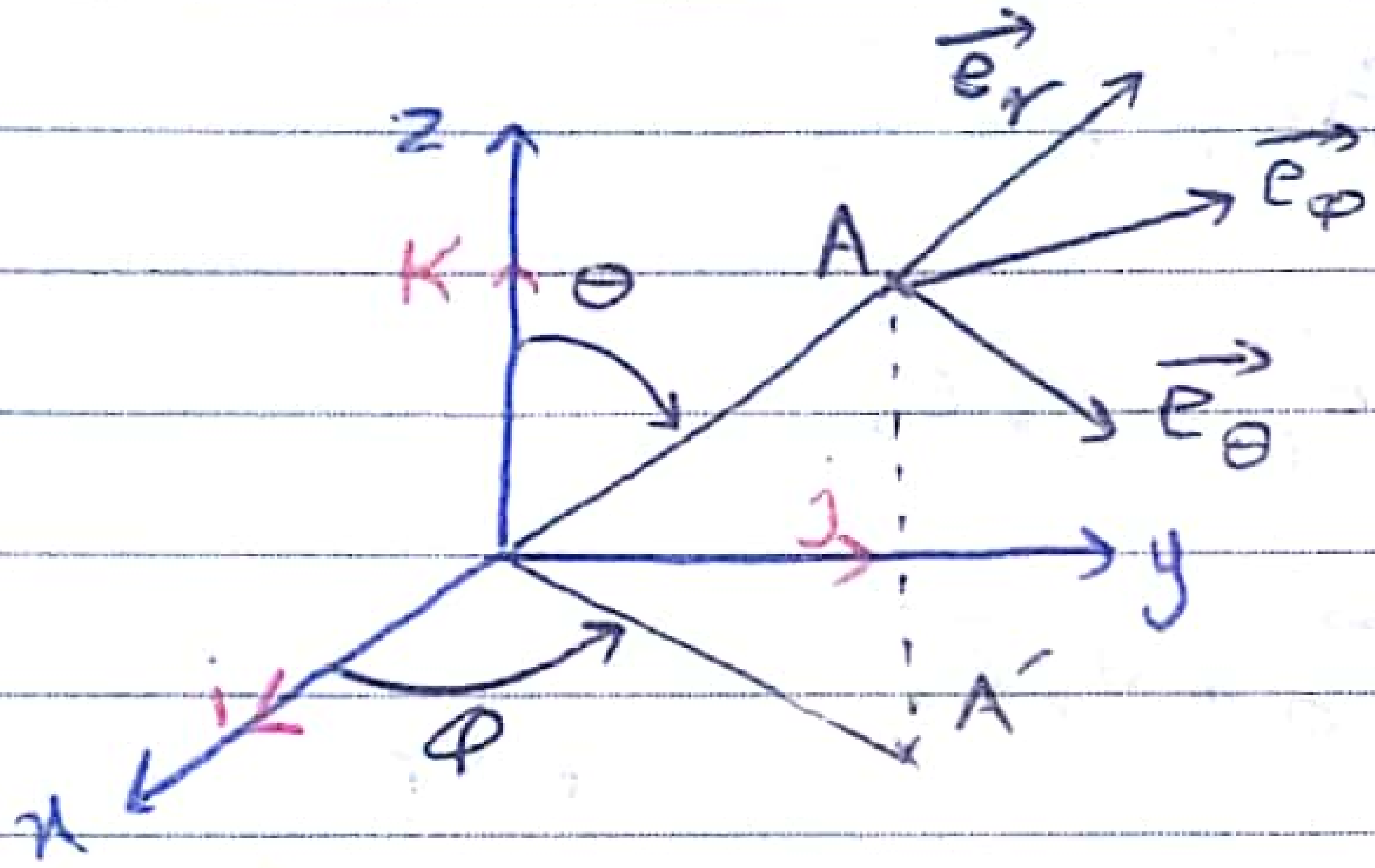
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

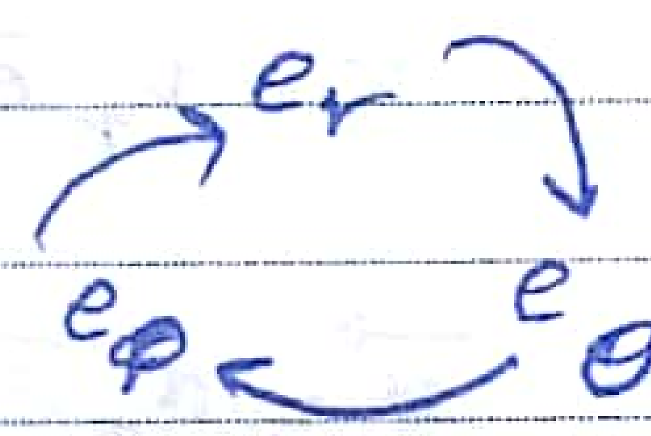
5. دستگاه دایره‌ای :

$r = cte \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\vec{v} = r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad \vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

6. دستگاه کروی :





جهت بردارهای یکه در جهت افزایش مقادیر r ، θ و φ می‌باشد

بردار موقعیت : $\vec{R} = r\vec{e}_r$

بردار سرعت : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{R}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$

بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه کروی $\vec{w} = \dot{\varphi}\vec{K} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$

$\vec{K} = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{w} = \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi}$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{w} \times \vec{e}_r = \begin{vmatrix} e_r & e_\theta & e_\varphi \\ \dot{\varphi}\cos\theta & -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\theta} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

بردار شتاب $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dots$ از کتاب مطالعه شود

مثال ۱: متحرکی در دستگاه دکارتی روی منحنی پارامتری زیر حرکت می‌کند. حرکت آن را در سه دستگاه دکارتی، فرنه و استوانه‌ای مطالعه کنید.

$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3$

دستگاه دکارتی

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{R} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j} + 6t\vec{k}$$

دستگاه فرنه

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t = |\vec{v}|\,\vec{e}_t$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+4t^2+9t^4} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \sqrt{1+4t^2+9t^4}\ \vec{e}_t}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{e}_t + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}\vec{e}_n$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d}{dt}|\vec{v}|\vec{e}_t + \frac{|v|^2}{\rho}\vec{e}_n}$$

$$\boxed{\rho = \frac{|v|^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}}$$ مقدار شعاع انحنا از رابطه زیر به دست می آید:

دستگاه استوانه ای $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{t^2+t^4}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1} t \qquad z = t^3$$

مثال ۲: متحرکی با سرعت v و شتاب a حرکت می کند. شعاع انحنا مسیر آن را بیابید.

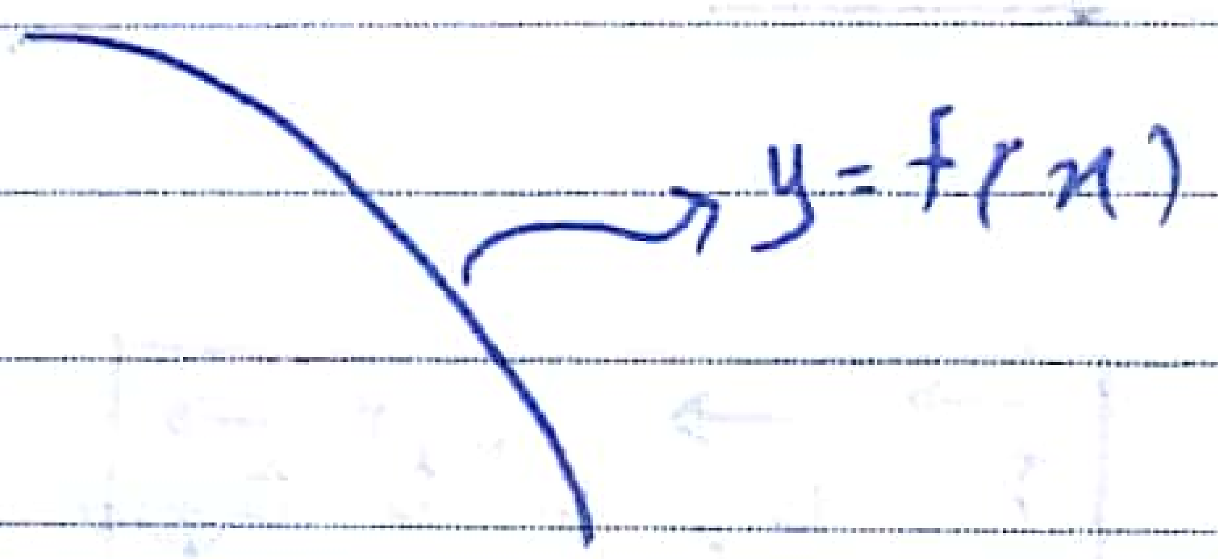
دستگاه طبیعی $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t$

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{e}_t + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}\vec{e}_n \qquad \vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$$

$$\vec{v}\times\vec{a} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\rho}\vec{e}_b \qquad |\vec{v}\times a| = \frac{|v|^3}{\rho} \qquad \boxed{\rho = \frac{|v|^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}}$$

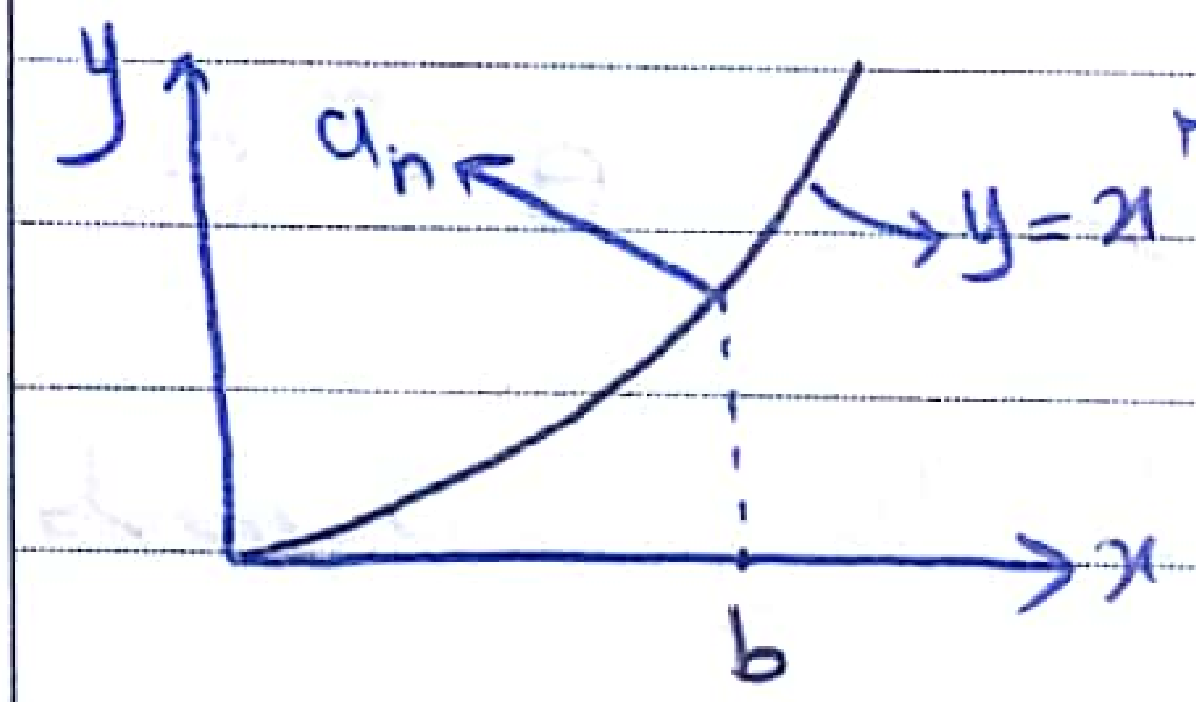
رابطه فوق در هر دستگاهی استفاده می‌شود و ρ یک مقدار اسکالر است.

یادآوری:



$$\frac{1}{\rho}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

مثال ۳: متحرکی با تندی q روی منحنی $y=x^2$ حرکت می‌کند. شتاب عمودی آن را در نقطه $x=b$ بیابید.



$$a_n=\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}$$

تندی حرکت $\frac{ds}{dt}=q$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{[1+(2b)^2]^{3/2}}$$

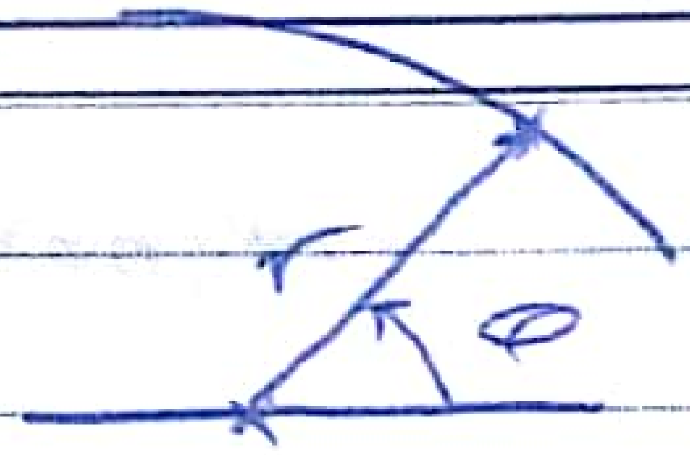
$$a_n=\frac{2q^2}{[1+4b^2]^{3/2}}$$

مثال ۴: متحرکی در دستگاه قطبی روی منحنی پارامتری زیر حرکت می‌کند.

مطلوب است محاسبه شتاب مماسی حرکت؟

دستگاه قطبی

$r = t \quad , \quad \varphi = t^2$



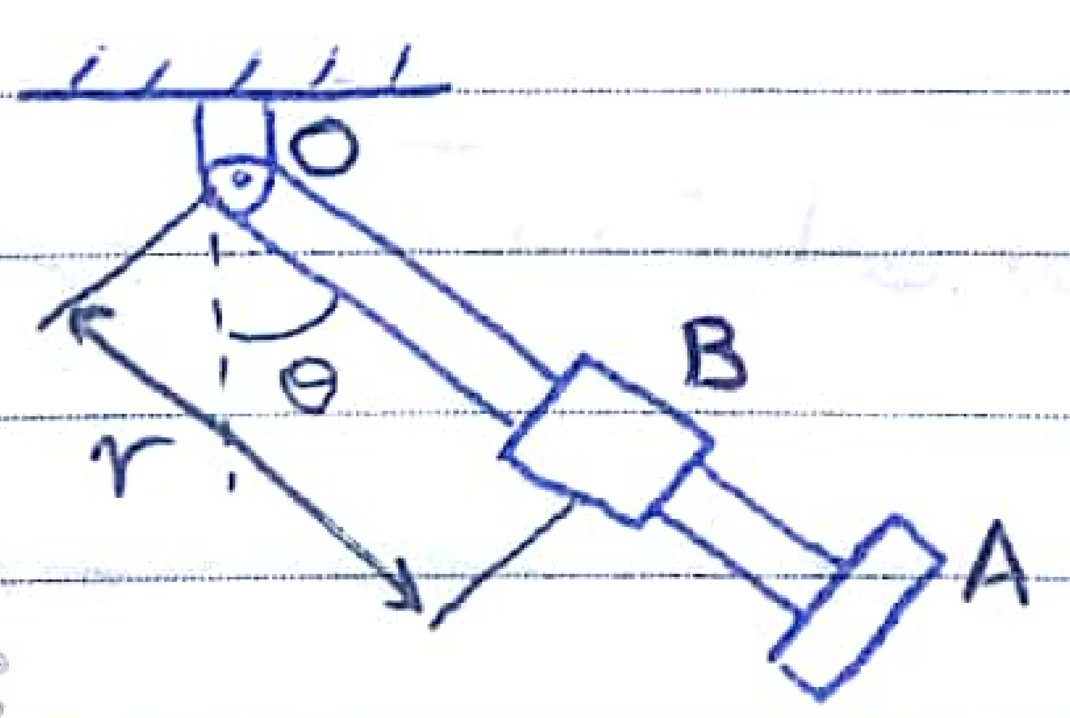
$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|\vec{v}|$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad \boxed{\vec{v} = \vec{e}_r + 2t^2\vec{e}_\varphi}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+4t^4} \qquad \boxed{a_t = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+4t^4}\right)}$$

مثال ۵: چرخش میله‌ی OA حول نقطه O با استفاده از رابطه‌ی $\theta = t^3 - 4t$ بیان می‌شود. که θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. طوقه‌ی B بر روی میله می‌لغزد به طوری که فاصله آن از نقطه O در هر لحظه با استفاده از رابطه‌ی $r = 2{,}5t^3 - 5t^2$ مشخص می‌گردد که r برحسب اینچ و t برحسب ثانیه است. در لحظه $t = 1s$ مطلوب است محاسبه

الف) سرعت طوقه؟ ب) شتاب طوقه؟ ج) شعاع انحنا مسیر حرکت طوقه؟



دستگاه قطبی

$$\vec v = \dot r \vec e_r + r\dot\theta \vec e_\theta \qquad \vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\vec e_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\vec e_\theta$$

$$\theta = t^3 - 4t \qquad \dot\theta = 3t^2 - 4 \qquad \ddot\theta = 6t$$

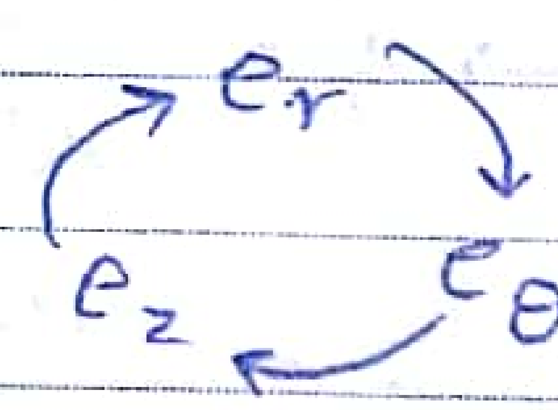
$$r = 2{,}5t^3 - 5t^2 \qquad \dot r = 7{,}5t^2 - 10t \qquad \ddot r = 15t - 10$$

$$\boxed{t = 1s}\ \begin{cases} \theta = -3\ rad & \dot\theta = -1\ rad & \ddot\theta = 6\ rad \\ r = -2{,}5\ in & \dot r = -2{,}5\ in/s & \ddot r = 5\ in/s^2 \end{cases}$$

الف) $\vec v = -2{,}5\vec e_r + 2{,}5\vec e_\theta$

$$|\vec v| = \sqrt{(-2{,}5)^2 + (2{,}5)^2} = 3{,}54\ in/s$$

ب) $\vec a = 7{,}5\vec e_r - 10\vec e_\theta$



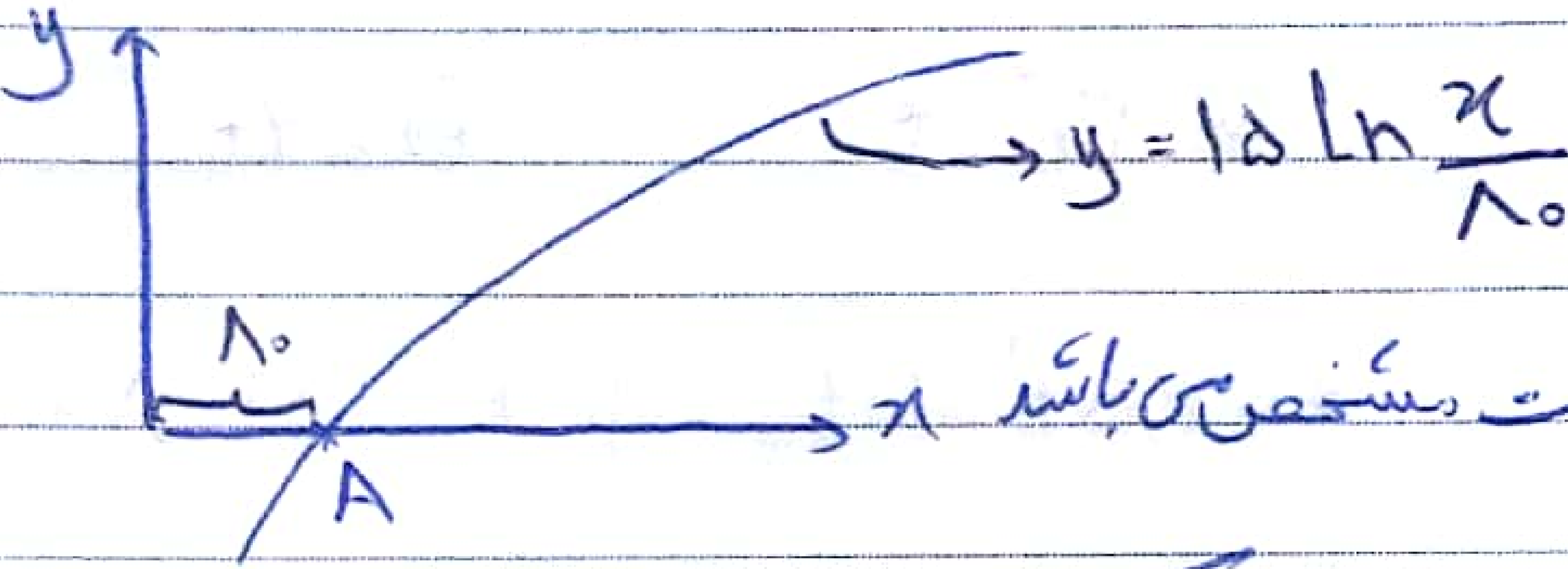
$$|\vec a| = \sqrt{(7{,}5)^2 + (-10)^2} = 12{,}5\ in/s^2$$

ج) $\rho = \dfrac{|v|^3}{|\vec v \times \vec a|} = \dfrac{(3{,}54)^3}{6{,}25} = 7{,}09\ in$

$$\vec v \times \vec a = 25\vec e_z - 18{,}75\vec e_z \qquad \vec v \times \vec a = 6{,}25\vec e_z$$

مثال ۶: متحرکی با سرعت ثابت $110\ m/s$ بر روی مسیر منحنی زیر حرکت

می کند. مطلوب است محاسبه شتاب ذره در نقطه A؟



چون مسیر حرکت مشخص می باشد

از دستگاه فرنه استفاده می کنیم. $v = 110 \ m/s$ ثابت

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{e}_t + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} \vec{e}_n$$

$$\frac{ds}{dt} = Cte \longrightarrow a_t = 0 \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\bigg|_{x=80}$$

$$y = 15 \ln \frac{x}{80} \longrightarrow y' = 15 \cdot \frac{1}{x} \xrightarrow{x=80} y' = 0/1875 \ m$$

$$\longrightarrow y'' = \frac{-15}{x^2} \xrightarrow{x=80} y'' = -0/00234 \ m$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{0/00234}{(1+(0/1875)^2)^{3/2}} \qquad \rho = 449/4 \ m$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(110)^2}{449/4} = 26/9 \ m/s^2$$

«۹۵/۷/۲۴» مثال ۱: حرکت متحرکی با استفاده از روابط زیر بیان می شود.

$$\left\{ y = t^2 \ (m) \quad , \quad x = (2t + t^2) \ (m) \right\}$$

که t برحسب ثانیه است. مطلوب است محاسبه مؤلفه‌های قائم و مماسی

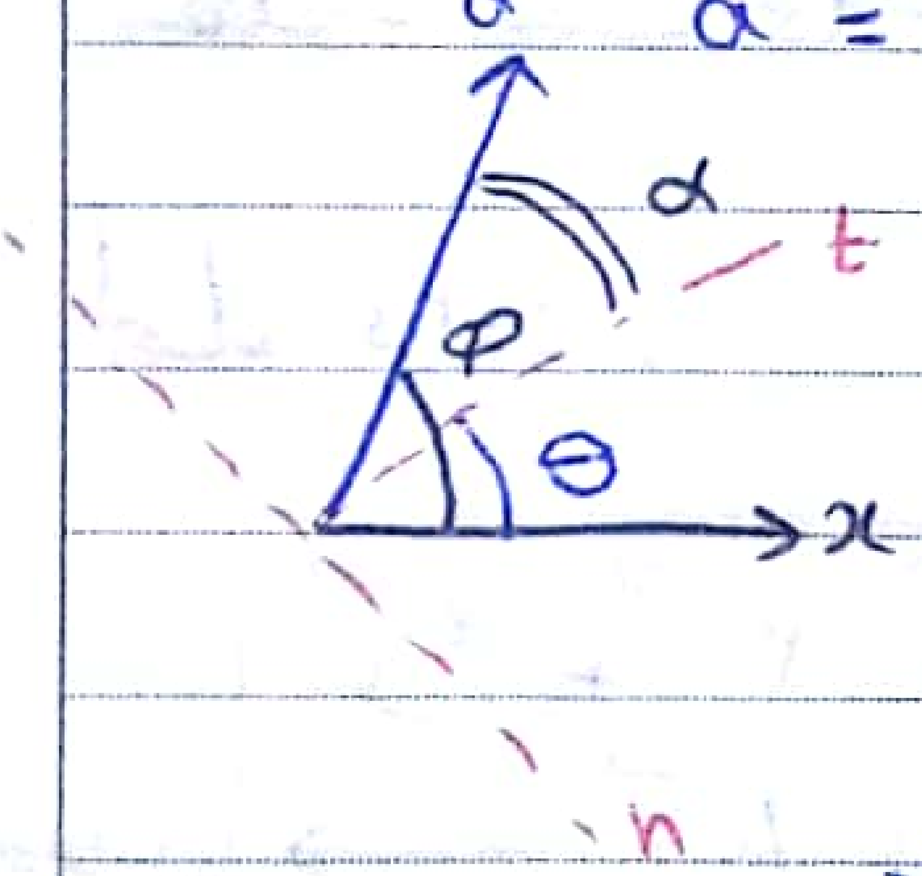
سرعت و شتاب ذره در لحظه $t=2(s)$.

بردار موقعیت $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (2t+t^2)\vec{i} + t^2\vec{j} \quad (m)$

بردار سرعت $\vec{v} = \dfrac{dr}{dt} = (2+2t)\vec{i} + 2t\vec{j} \quad m/s$

بردار شتاب $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \quad (m/s^2)$

$$\left.\begin{aligned} t=2s \longrightarrow \vec{v} &= 6\vec{i} + 4\vec{j} \quad (m/s) \\ \vec{a} &= 2\vec{i} + 2\vec{j} \quad (m/s^2) \end{aligned}\right\}$$ دستگاه دکارتی



$\vec{v} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$ v منطبق بر t است

$\tan\theta = \dfrac{4}{6} \longrightarrow \theta = \tan^{-1}\dfrac{4}{6}$

$\Longrightarrow \boxed{\theta = 33{,}69^\circ}$

$$\begin{cases} v_t = 7{,}21 \ m/s \\ v_n = 0 \end{cases}$$

$|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7{,}21 \ m/s$

$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \qquad \tan\varphi = \dfrac{2}{2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\dfrac{2}{2} = 45^\circ$

Scanned by CamScanner

$$\alpha = \varphi - \theta = 45 - 33{,}69^\circ \Longrightarrow \boxed{\alpha = 11{,}31^\circ}$$

$$a_t = a\cos\alpha = 2\sqrt{2}\cos 11{,}31^\circ$$

$$a_n = a\sin\alpha = 2\sqrt{2}\sin 11{,}31^\circ$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_n = 0{,}555 \ m/s^2 \\ a_t = 2{,}77 \ m/s^2 \end{cases}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \ m/s^2$$

مثال ۲: حرکت ذره‌ای در صفحه x-y با استفاده از رابطه زیر بیان می‌شود

$$\vec{r} = 2t\,\vec{i} + 4t^2\,\vec{j} \ (ft)$$

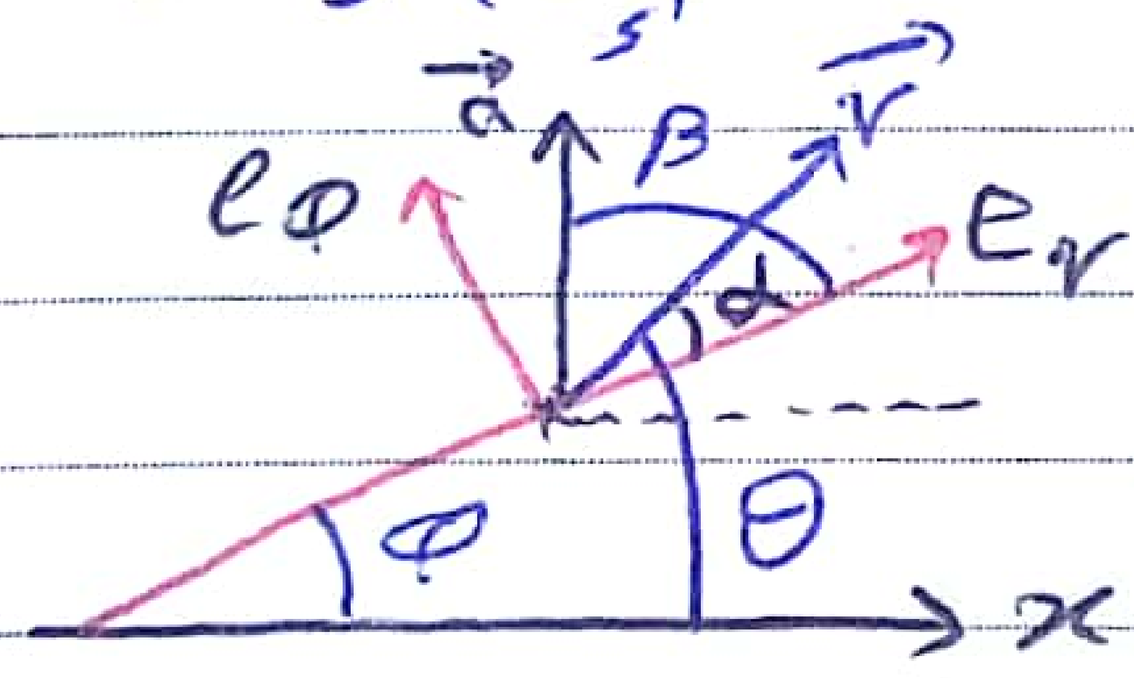
t برحسب ثانیه است.

مطلوب است محاسبه مؤلفه‌های سرعت و شتاب در دستگاه قطبی در لحظه t=2s.

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 8t\,\vec{j} \ (ft/s)$$

$$\vec{a} = 8\vec{j} \ (ft/s^2)$$

$$t=2s \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{v} = 2\vec{i} + 16\vec{j} \\ \vec{a} = 8\vec{j} \longrightarrow \text{عمودی} \end{array}}$$



$$t=2s \longrightarrow \boxed{\vec{r} = 4\vec{i} + 16\vec{j}}$$

$$\tan\varphi = \frac{16}{4} \longrightarrow \varphi = \tan^{-1} 4 \Longrightarrow \boxed{\varphi = 75{,}964^\circ}$$

$\vec{V} = ۲\vec{i} + ۱۴\vec{j}$ $\tan\theta = \frac{۱۴}{۲}$ $\rightarrow$ $\boxed{\theta = \tan^{-1}۸ = ۸۲,۸۷۵^\circ}$

$\alpha = \theta - \varphi = ۸۲,۸۷۵^\circ - ۷۵,۹۶۴^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha = ۶,۹۱۱^\circ}$

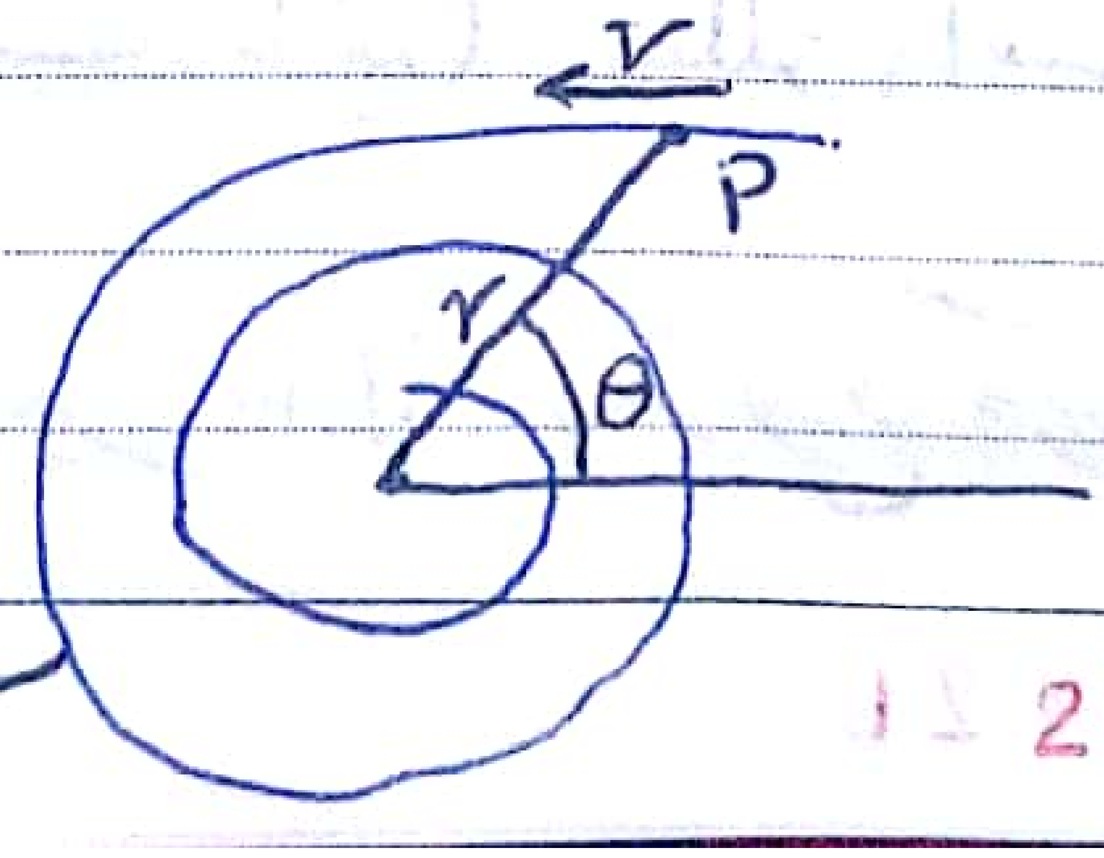
$$\begin{cases} v_r = v\cos\alpha = ۱۴,۱۴ \cos ۶,۹^\circ \\ v_\varphi = v\sin\alpha = ۱۴,۱۴ \sin ۶,۹^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_r = ۱۴ \frac{ft}{s} \\ v_\varphi = ۱,۹۴ \frac{ft}{s} \end{cases}$$

$: |\vec{V}| = \sqrt{۲^۲ + ۱۴^۲} = ۱۴,۱۴ \frac{ft}{s}$ $\beta = ۹۰ - \varphi$

$\beta = ۹۰ - ۷۵,۹۶۴^\circ = ۱۴,۰۳۶^\circ$

$$\begin{cases} \vec{a}_r = a\cos\beta = ۸\cos ۱۴,۰۳۶^\circ = ۷,۷۶ \frac{ft}{s^۲} \\ \vec{a}_\varphi = a\sin\beta = ۸\sin ۱۴,۰۳۶^\circ = ۱,۹۴ \frac{ft}{s^۲} \end{cases}$$

مثال ۳: ذره‌ی P بر روی مسیر مارپیچ (۲-۳) $r = \frac{۱۰}{\theta}$ (ft) حرکت می‌کند، θ برحسب رادیان است. اگر سرعت ذره برابر با مقدار ثابت $v = ۲۰ \frac{m}{s}$ باشد مطلوب است محاسبه v_r و v_θ برحسب تابعی از θ و همچنین در لحظه $\theta = 1$ rad



$r = \frac{۱۰}{\theta}$

دستگاه قطبی $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$r = \frac{10}{\theta} \longrightarrow \boxed{\dot{r} = -\frac{10}{\theta^2}\dot{\theta}}$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} = 20\,\frac{m}{s}$

$\longrightarrow 400 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \qquad 400 = \left(-\frac{10\dot{\theta}}{\theta^2}\right)^2 + \left(\frac{10}{\theta}\right)^2\dot{\theta}^2$

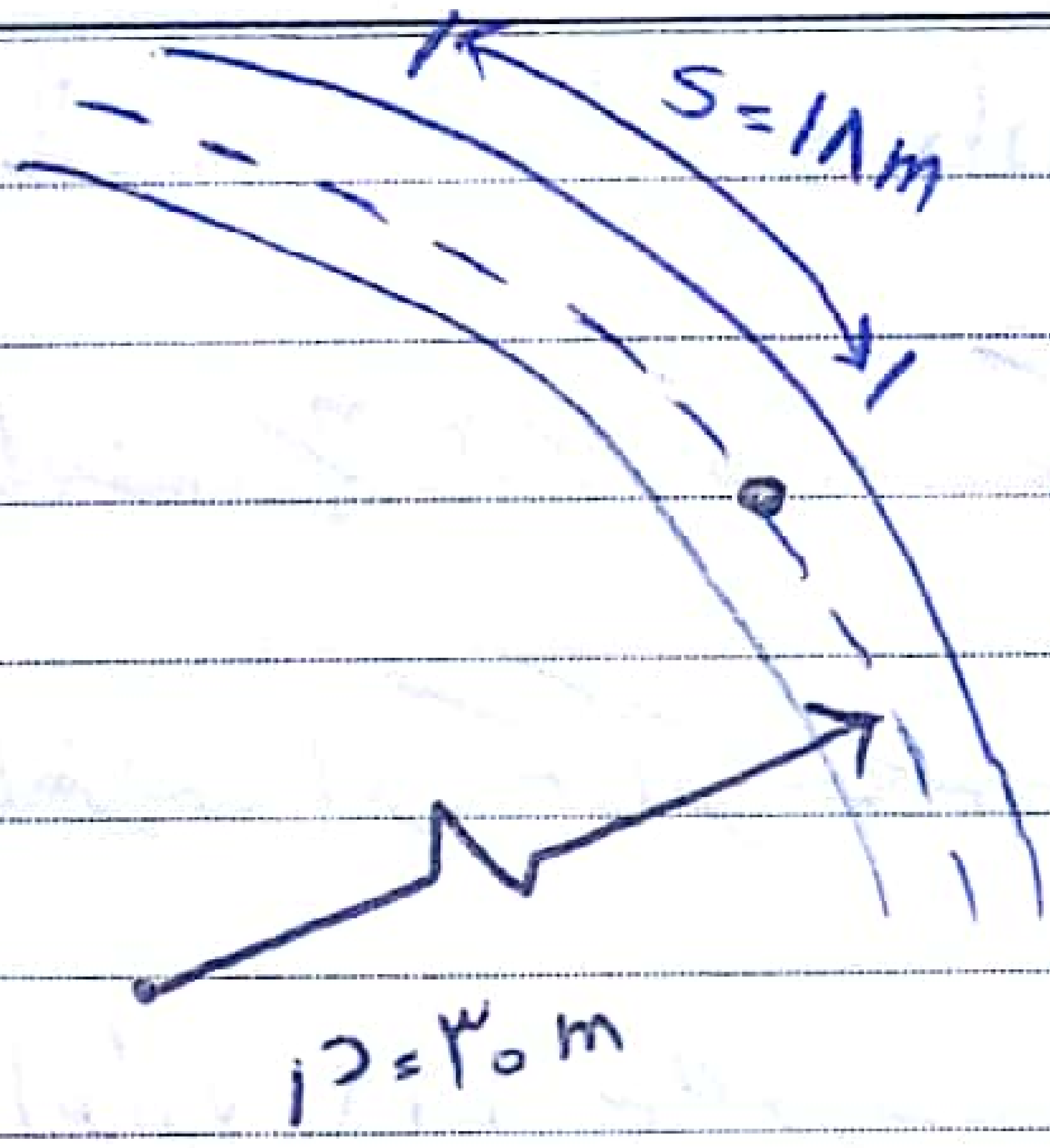
$\Rightarrow 400 = 100\left(\frac{1}{\theta^4} + \frac{1}{\theta^2}\right)\dot{\theta}^2 \longrightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{2\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}}$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = -\frac{10}{\theta^2}\dot{\theta} = \frac{-20}{\sqrt{1+\theta^2}} \\ v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{10}{\theta}(\dot{\theta}) = \frac{20\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} \end{cases}$$

$$\theta = 1\,rad \Rightarrow \begin{cases} v_r = -\frac{20}{\sqrt{2}} = -14{,}1\ \frac{ft}{s} \\ v_\theta = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14{,}1\ \frac{ft}{s} \end{cases}$$

مثال ۴: متحرکی روی مسیر دایره‌ای نشان داده شده طوری حرکت می‌کند که سرعت آن با شتاب $a_t = 0{,}5e^t\ (\frac{m}{s^2})$ افزایش می‌یابد (t برحسب ثانیه) مطلوب است محاسبه سرعت و شتاب ذره پس از طی مسیر $18\,m$ از شروع حرکت.

دستگاه قرنیه



$$a_t = \frac{d^۲ s}{dt^۲} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_۰^v dv = \int_۰^t a_t\, dt$$

$$v = \int_۰^t ۰{,}۵ e^t dt = ۰{,}۵ e^t \Big|_۰^t \Rightarrow \boxed{v = ۰{,}۵(e^t - ۱)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \longrightarrow \int_۰^s ds = \int_۰^t v\, dt$$

$$s = \int_۰^t ۰{,}۵(e^t - ۱)\, dt = ۰{,}۵(e^t - t)\Big|_۰^t$$

$$\Rightarrow \boxed{s = ۰{,}۵(e^t - t - ۱)} \qquad s = ۱۸m$$

$$\Rightarrow ۱۸ = ۰{,}۵(e^t - t - ۱) \longrightarrow \boxed{t = ۳{,}۷۰۲\, s}$$

$$a_t = \dot{v} = ۰{,}۵ e^t = ۰{,}۵ e^{۳{,}۷۰۲} = ۲۰{,}۲۵\ m/s^۲$$

$$a_n = \frac{v^۲}{\rho}, \quad v = ۰{,}۵(e^t - ۱)\Big|_{t=۳{,}۷۰۲s} = ۱۹{,}۸۵\ m/s$$

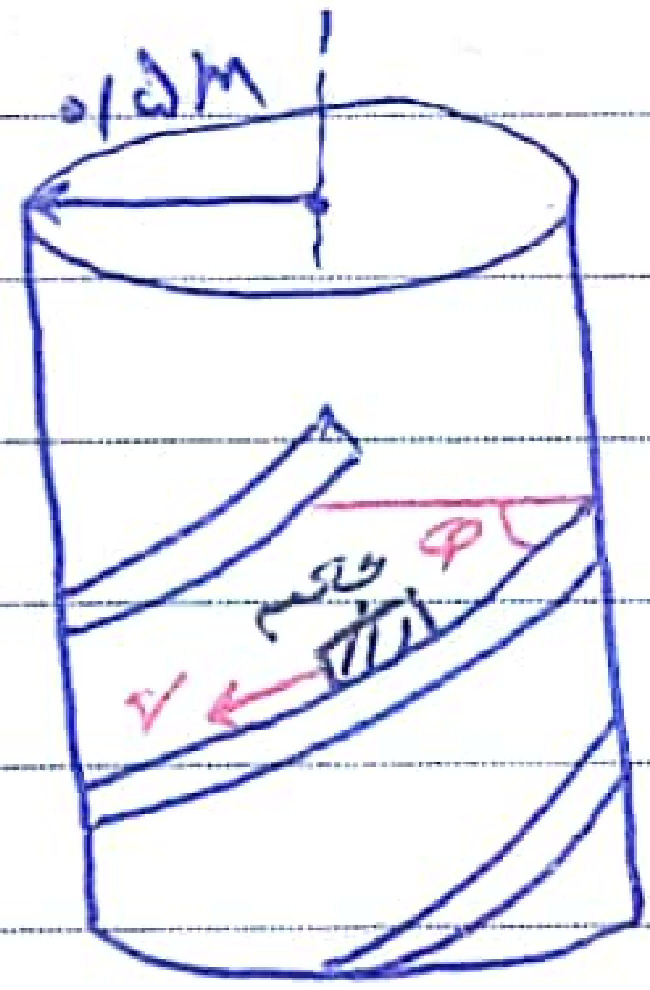
$$a_n = \frac{۱۹{,}۸۵^۲}{۳۰} \Rightarrow a_n = ۱۳{,}۱۴\ m/s^۲$$

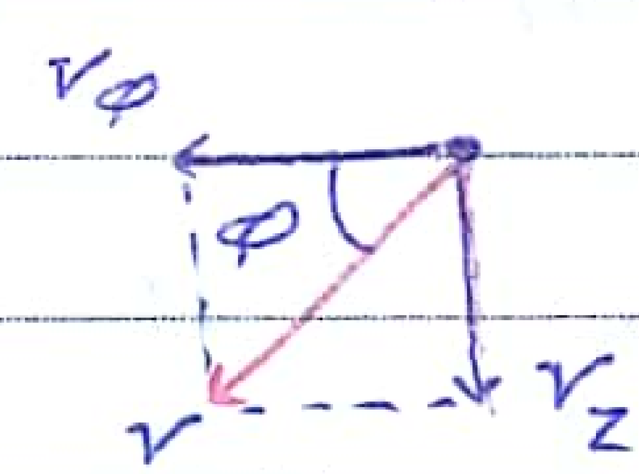
$$a = \sqrt{a_t^۲ + a_n^۲} = \sqrt{(۲۰{,}۲۵)^۲ + (۱۳{,}۱۴)^۲} \Rightarrow \boxed{a = ۲۴{,}۲\ m/s^۲}$$

Year.   Month.   Date.   ( )   Subject :

مثال ۵: جسم نشان داده شده بر روی مسیر مارپیچ با سرعت ثابت $v=2\ m/s$ حرکت می‌کند. مطلوب است محاسبه شتاب جسم با فرض این که اگر جسم مسیر مارپیچ را یک دور کامل طی نماید به اندازه $1\ m$ به صورت عمودی جابجا شود

دستگاه استوانه‌ای





$$\tan\varphi = \frac{L}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi(0.5)} = \frac{1}{\pi}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\pi}\right) \Rightarrow \boxed{\varphi = 17.44^\circ}$$

$$\begin{cases} v_z = v\sin\varphi = 2\sin 17.44^\circ = 0.404\ m/s \\ v_\varphi = v\cos\varphi = 2\cos 17.44^\circ = 1.904\ m/s \end{cases}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$r = 0.5\,m \longrightarrow \boxed{\dot{r} = \ddot{r} = 0} \qquad \boxed{\ddot{z} = 0}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi} = 1.904$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

$\Rightarrow (0/5)\ \dot{\phi} = 1/906$ $\quad \dot{\phi} = 3/812\ \frac{rad}{s}$ $\quad \ddot{\phi} = 0$

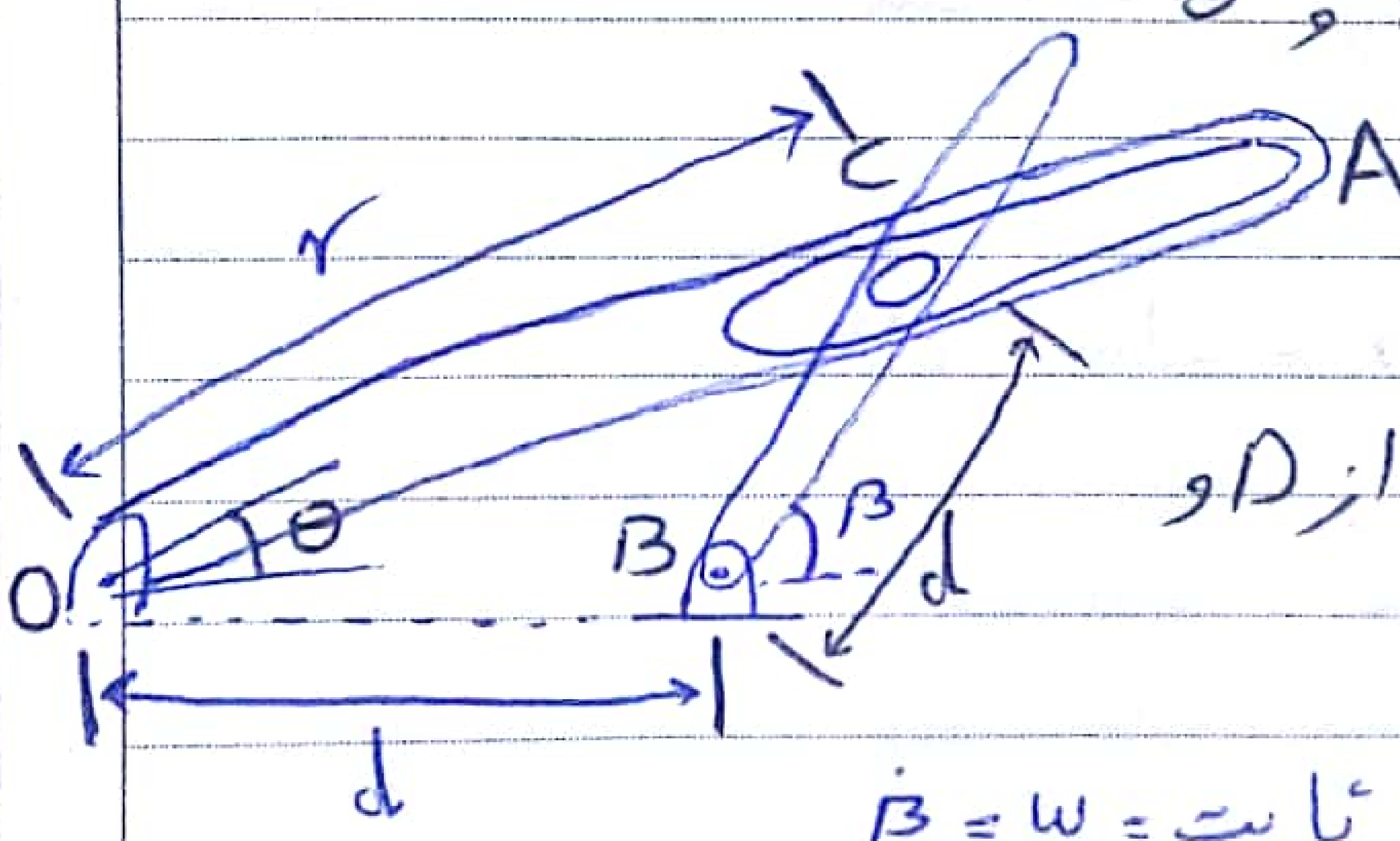
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = 0 - (0/5)(3/812)^2 = -7/264\ m/s^2$

$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0$ $\quad a_z = 0$

$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\phi^2 + a_z^2}$ $\quad |\vec{a}| = 7/26\ m/s^2$

مثال ۲ مهم: پین C متصل به میله‌ی BC می‌تواند آزادانه بر روی راهنمای میله (بازوی) OA حرکت کند اگر سرعت زاویه‌ای میله‌ی BC برابر با مقدار ثابت ω باشد، مطلوب است محاسبه

الف) $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ $\quad$ ب) $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$



در لحظه‌ی $\beta = 60^\circ$

جواب برحسب پارامترهایی از D و ω نوشته شود

$\dot{\beta} = \omega = $ ثابت $\quad \Rightarrow \ddot{\beta} = 0 \quad \dot{\omega} = 0$

حرکت پین C نسبت به نقطه B $\longrightarrow$ حرکت دایره‌ای

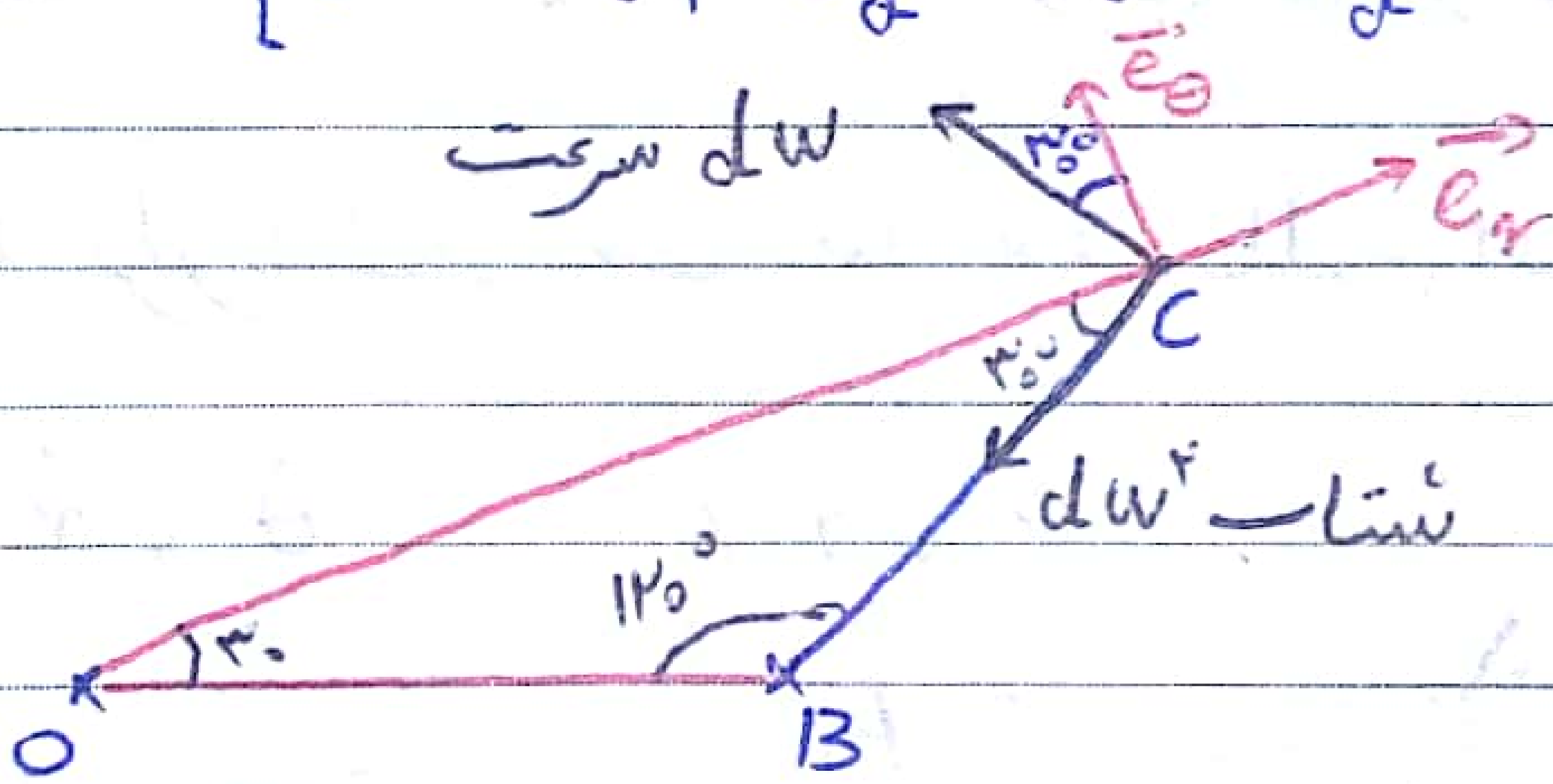
Year. Month. Date. ( ) Subject :

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

حرکت دایره‌ای $r = cte \longrightarrow \boxed{\dot{r} = \ddot{r} = 0}$ دستگاه دایره‌ای

$$\begin{cases} \vec{v} = r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

با توجه به شکل $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \vec{v} = d\dot{\beta}\vec{e}_\beta = d\omega\vec{e}_\beta \\ \vec{a} = -d\dot{\beta}^2\vec{e}_d = -d\omega^2\vec{e}_d \end{cases}$



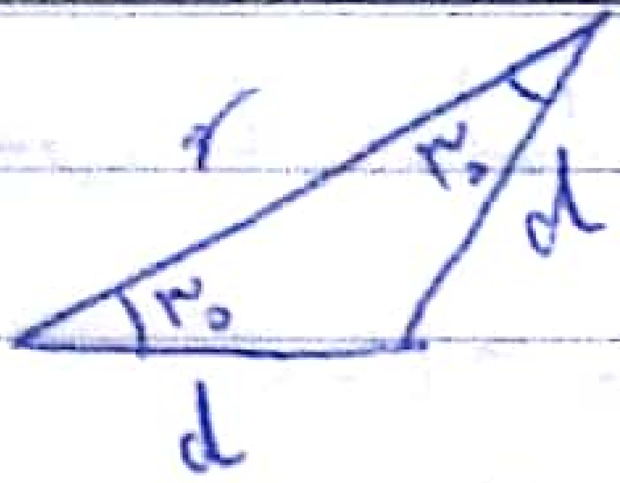
دستگاه قطبی $v_r = \dot{r} = -d\omega\sin 30°$

$\Rightarrow$

$v_\theta = r\dot{\theta} = d\omega\cos 30°$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{r} = -\frac{1}{2}d\omega \\ \dot{\theta} = \dfrac{d\omega\frac{\sqrt{3}}{2}}{d\sqrt{3}} \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{2}\omega \end{cases}$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :



$r = d\cos 30 + d\cos 30$ $\qquad r = d\sqrt{3}$

ب) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -d\omega^2 \cos 30°$ نسبت به O قطبی:

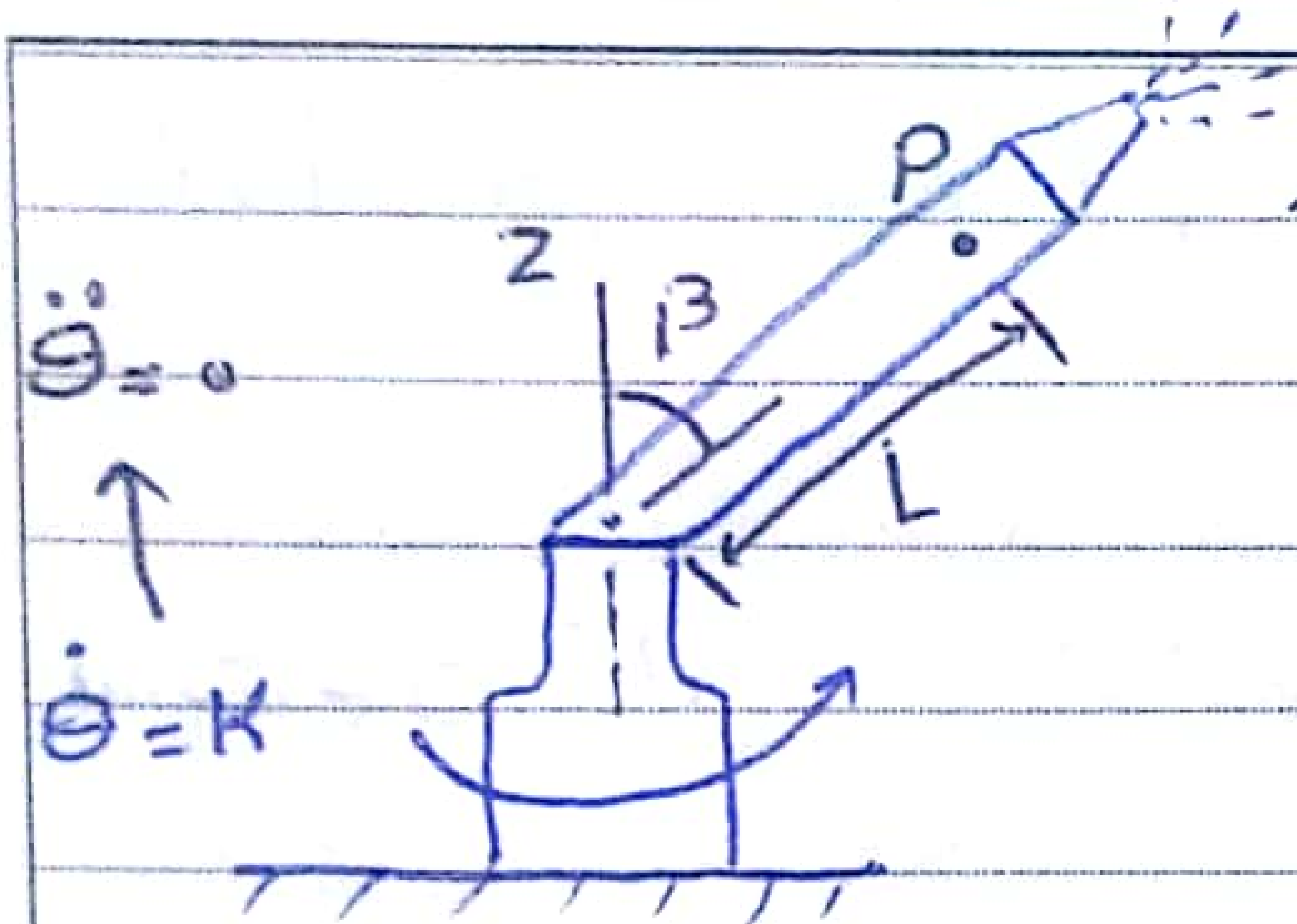
$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -d\omega^2 \sin 30$

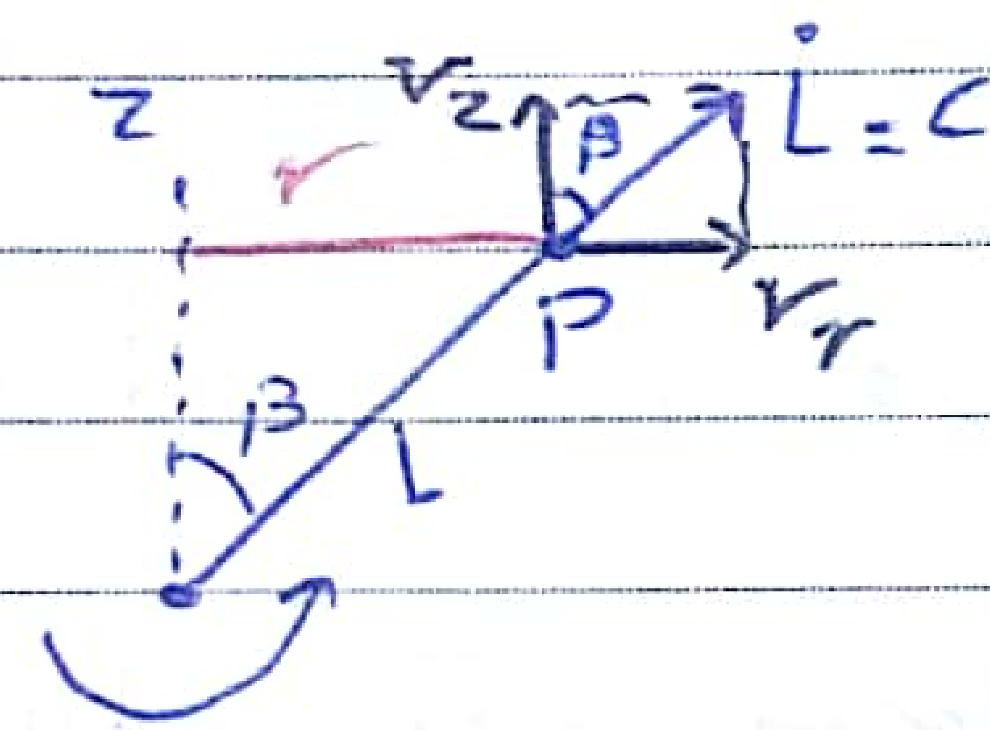
$$\begin{cases} \ddot{r} = -d\omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} + (d\sqrt{3})(\frac{1}{2}\omega)^2 \\ \ddot{\theta} = \dfrac{-d\omega^2(\frac{1}{2}) - 2(-\frac{1}{2}d\omega)(\frac{1}{2}\omega)}{d\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\frac{\sqrt{3}}{4} d\omega^2 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

مثال ۷: شیپوره‌ای چرخان که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = k$ دوران می‌کند. به سطح دایره‌ای بزرگ آب می‌پاشد. ذرات آب با میزان ثابت $\dot{l} = c$ نسبت به لوله در طول آن حرکت می‌کند. عبارت‌هایی برای اندازه‌های سرعت و شتاب ذره‌ی آب P در موقعیت

مشخص L در لوله چرخان بنویسید.





دستگاه استوانه‌ای : $v_r=\dot{L}\sin\beta=c\sin\beta$

$v_z=\dot{L}\cos\beta=c\cos\beta \qquad v_\theta=r\dot{\theta}$

$r=L\sin\beta \ , \ \dot{\theta}=K \implies v_\theta=KL\sin\beta$

$|\vec{v}|=\sqrt{v_r^2+v_z^2+v_\theta^2}=\sqrt{c^2\sin^2\beta+K^2L^2\sin^2\beta+c^2\cos^2\beta}$

$\implies \boxed{|\vec{v}|=\sqrt{c^2+K^2L^2\sin^2\beta}} \qquad \dot{r}=\dot{L}\sin\beta$

$\dot{L}=c \implies \ddot{L}=0 \qquad \ddot{r}=\ddot{L}\sin\beta=0$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-(L\sin\beta)K^2$

$a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=2(c\sin\beta)(K)+0$

$a_z=\ddot{z}=0 \qquad |\vec{a}|=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2+a_z^2}$

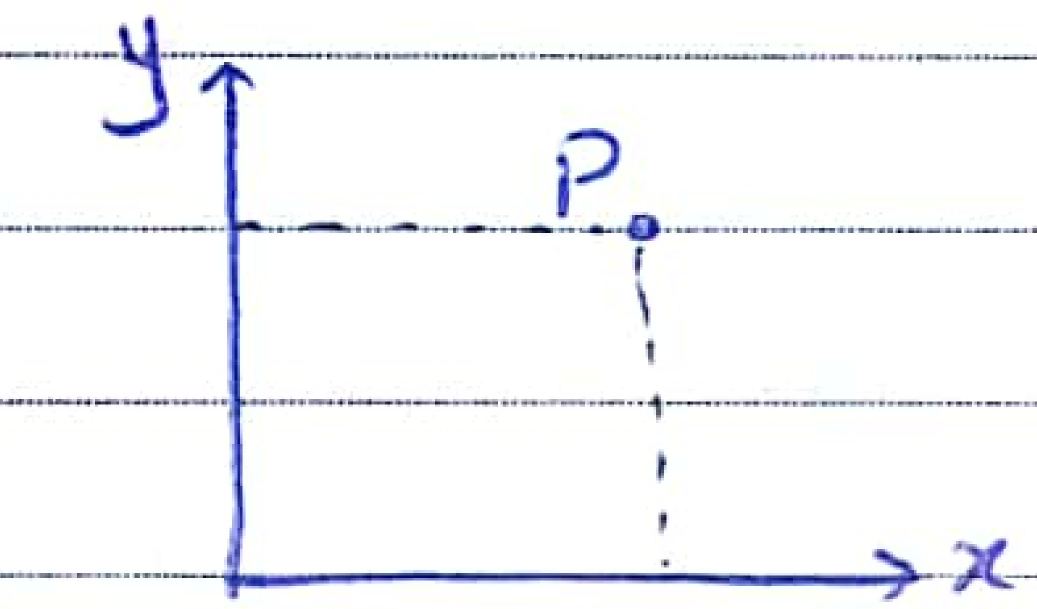
$$=\sqrt{L^2K^4\sin^2\beta+4K^2C^2\sin^2\beta}$$

$$\boxed{|\vec{a}|=K\sin\beta\sqrt{L^2K^2+4C^2}}$$

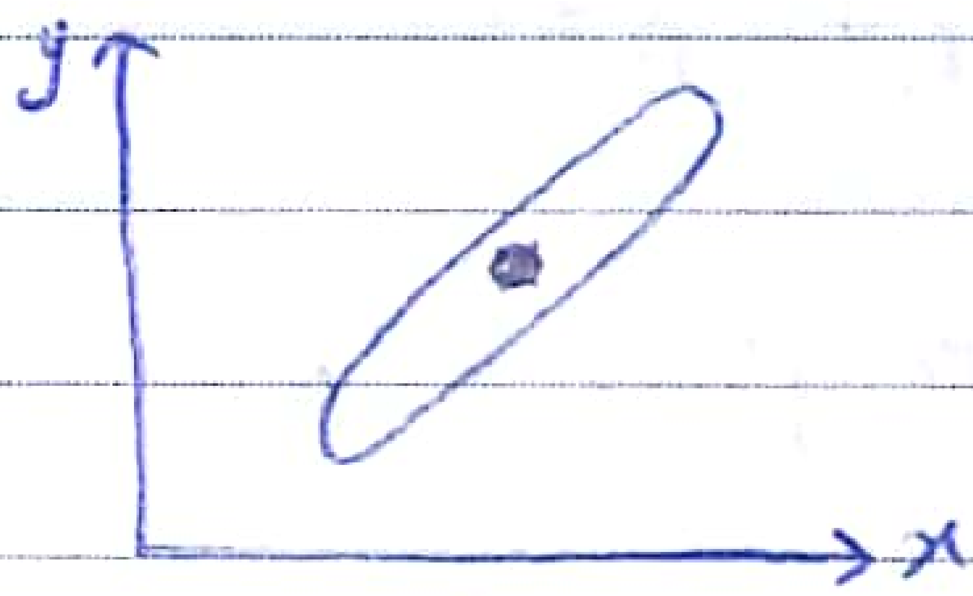
«۱۳۹۵/۰۸/۰۳»

سیستم های مقیّد:

درجه آزادی: تعداد مختصات مستقل جهت تعیین حرکت ذره.

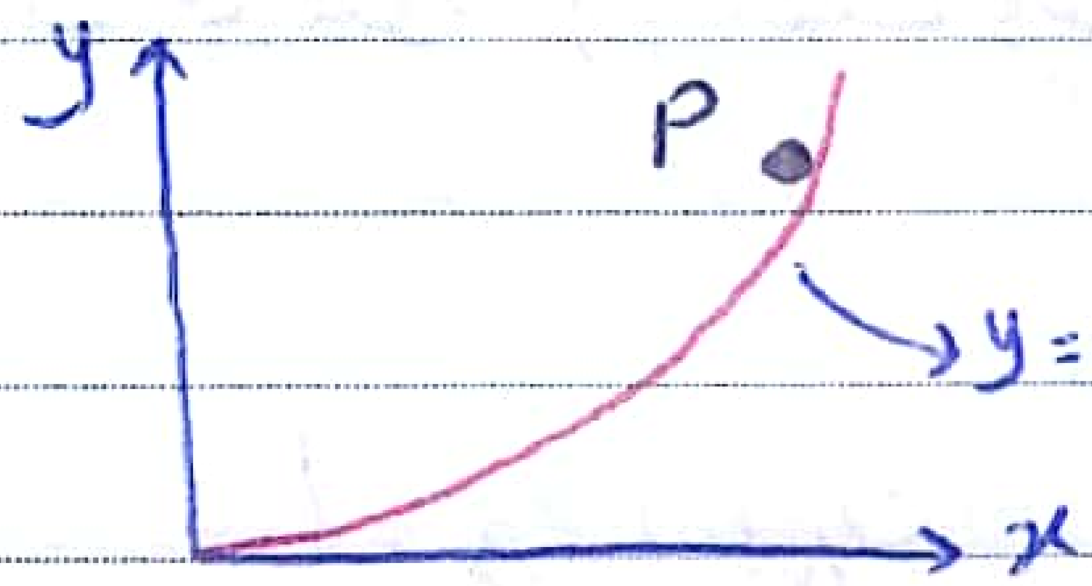


دو درجه آزادی



سه درجه آزادی

قید: رابطه ی بین مختصات سیستم.



یک درجه آزادی

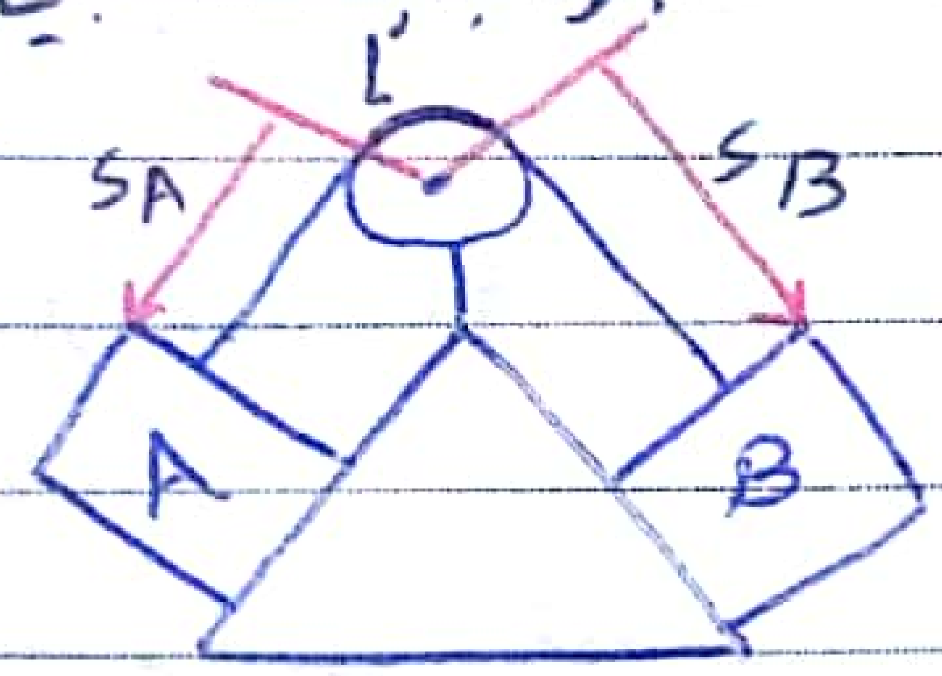
= رابطه بین هندسه حرکت که به تعداد قیدها از درجه آزادی سیستم کاسته می شود.

قیدهایی که عمدتاً در دینامیک مورد استفاده قرار می گیرند عبارتند از:

۱- طول طناب در سیستم های طناب و قرقره که یک مقدار ثابت است.

۲- رابطه هندسی حاکم بر مسیر حرکت.

مثال ۱: در شکل نشان داده شده مطلوب است محاسبه رابطه شتاب بین جسم‌های A و B. حرکت به سمت پایین + و به سمت قرقره (-) است.

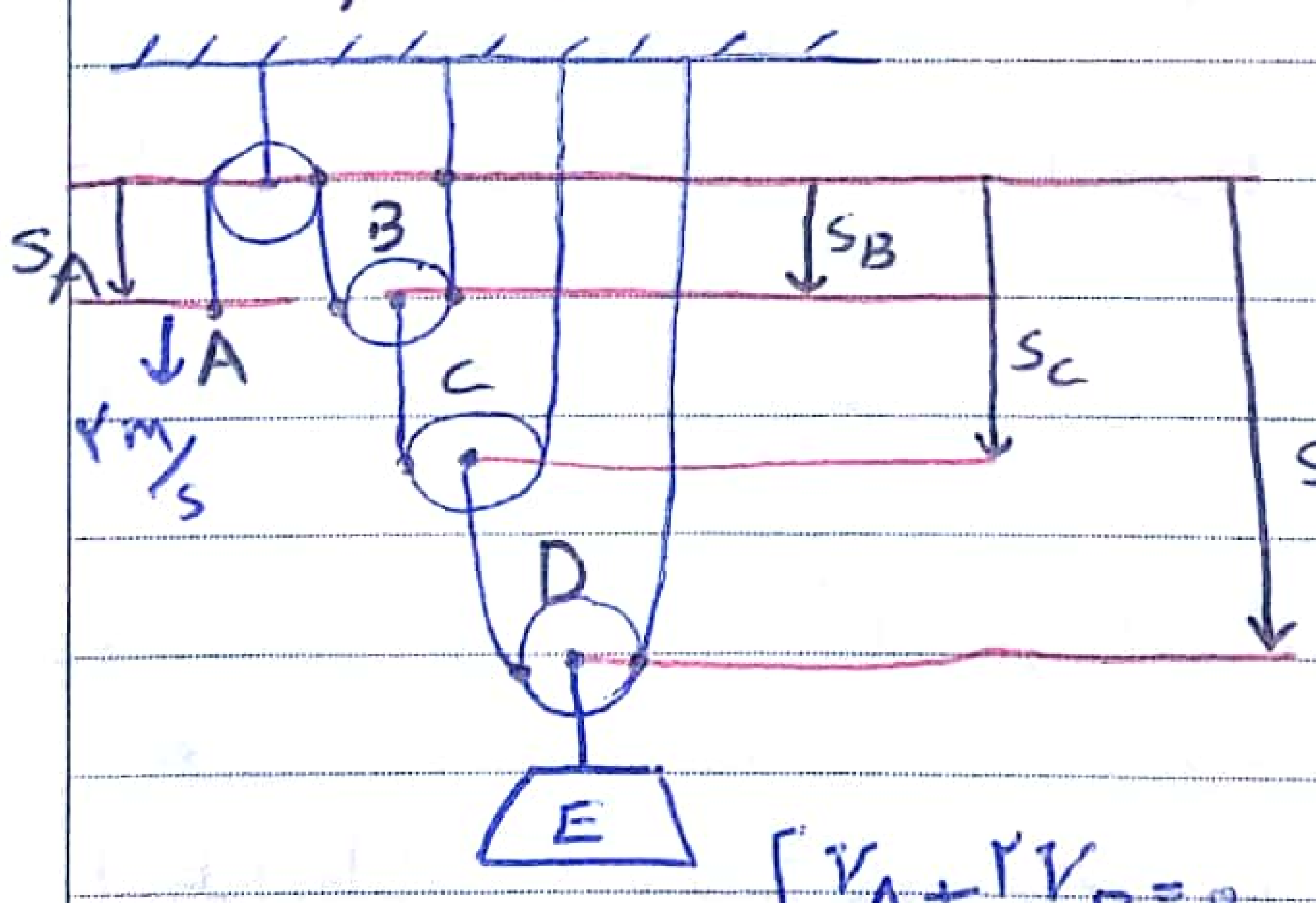


(قید) ← طول طناب: $S_A + \cancel{L} + S_B = l$

$\dot{S}_A + \dot{S}_B = 0$ $\qquad$ $\ddot{S}_A + \ddot{S}_B = 0$

$\Rightarrow \boxed{a_B = -a_A}$

مثال ۲: در سیستم طناب و قرقره نشان داده شده اگر نقطه A با سرعت $2\,\frac{m}{s}$ جابجا شود (به سمت پایین) مطلوب است محاسبه سرعت جسم E



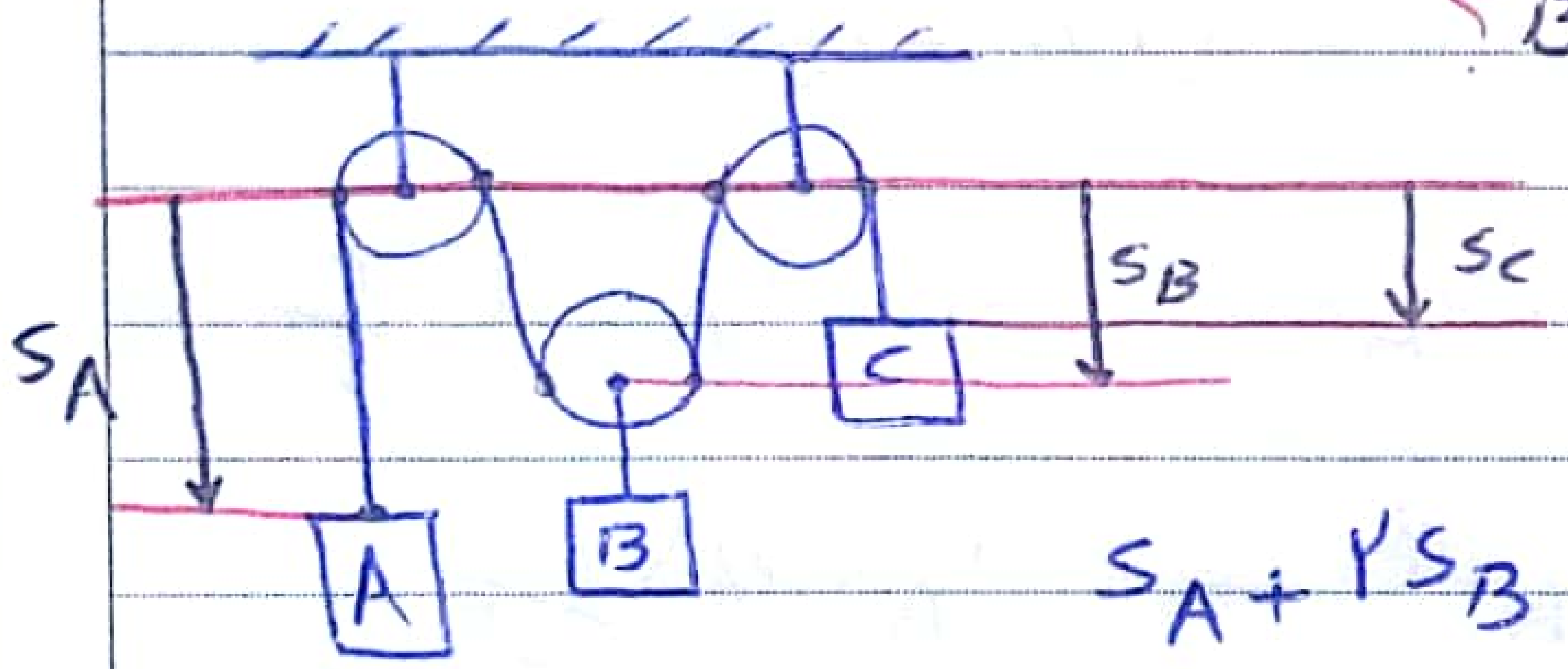
$$\begin{cases} S_A + 2S_B = l_1 \\ (S_C - S_B) + S_C = l_2 \\ (S_E - S_C) + S_E = l_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A + 2V_B = 0 \\ 2V_C - V_B = 0 \\ 2V_E - V_C = 0 \end{cases}$$

$v_A = -8 v_E \Rightarrow 2 = -8 v_E \Rightarrow v_E = -0.25\ m/s$

$\longrightarrow v_E = 0.25\ m/s \uparrow$

مثال 3: در سیستم طناب و قرقره نشان داده شده اگر اجسام A و C به ترتیب دارای سرعت های $4\ ft/s$ و $18\ ft/s$ به سمت پایین باشند مطلوب است محاسبه سرعت جسم B؟

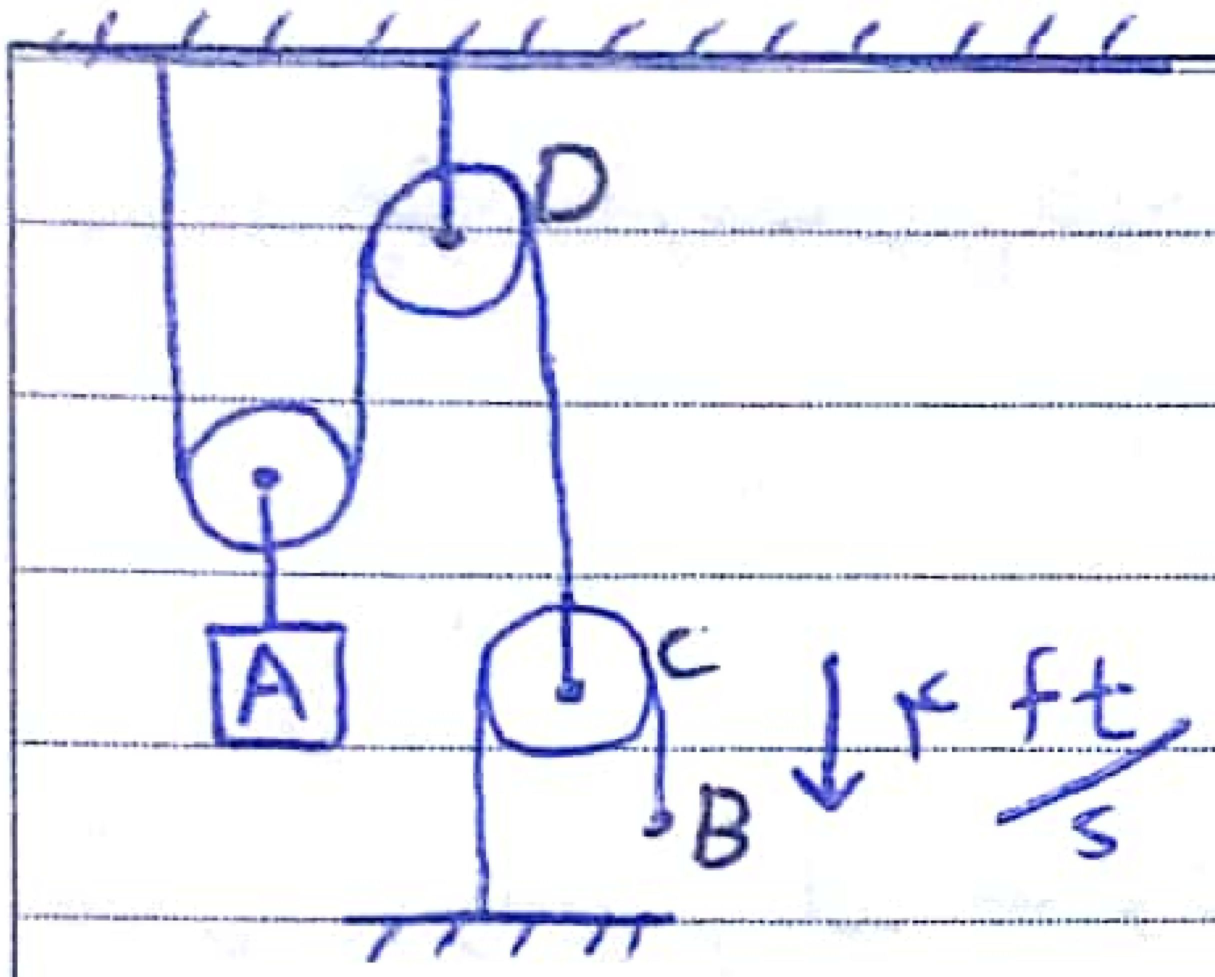


$S_A + 2S_B + S_C = L$

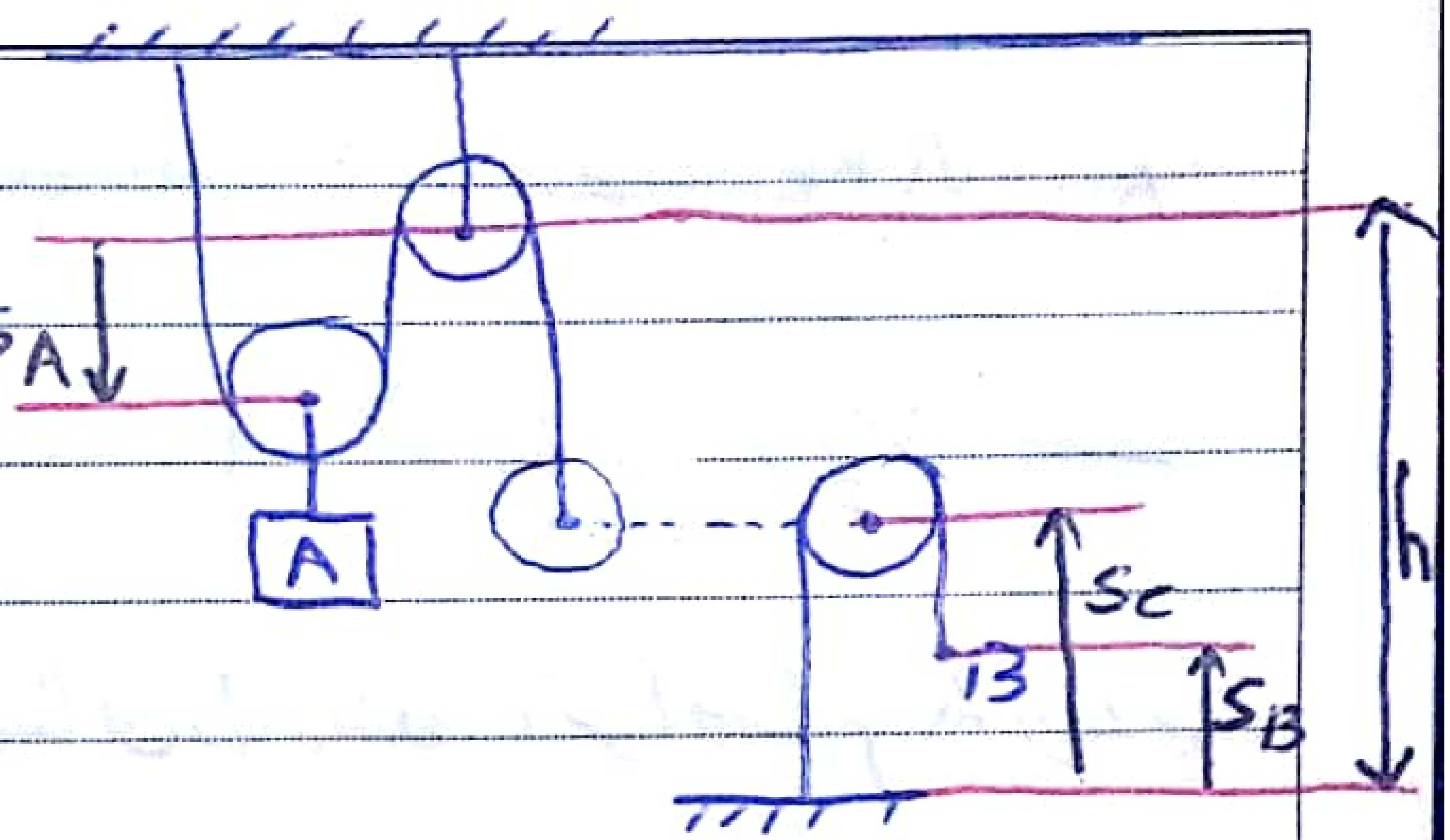
$\Rightarrow v_A + 2v_B + v_C = 0 \Rightarrow 4 + 2v_B + 18 = 0$

$\Rightarrow \boxed{v_B = -12\ ft/s}$

مثال 4: نقطه B از طناب نشان داده شده دارای سرعت $4\ ft/s$ می باشد به طوری که $2\ ft/s^2$ از آن کاسته می شود. مطلوب است محاسبه سرعت و شتاب جسم A در این لحظه.



$\Longrightarrow$



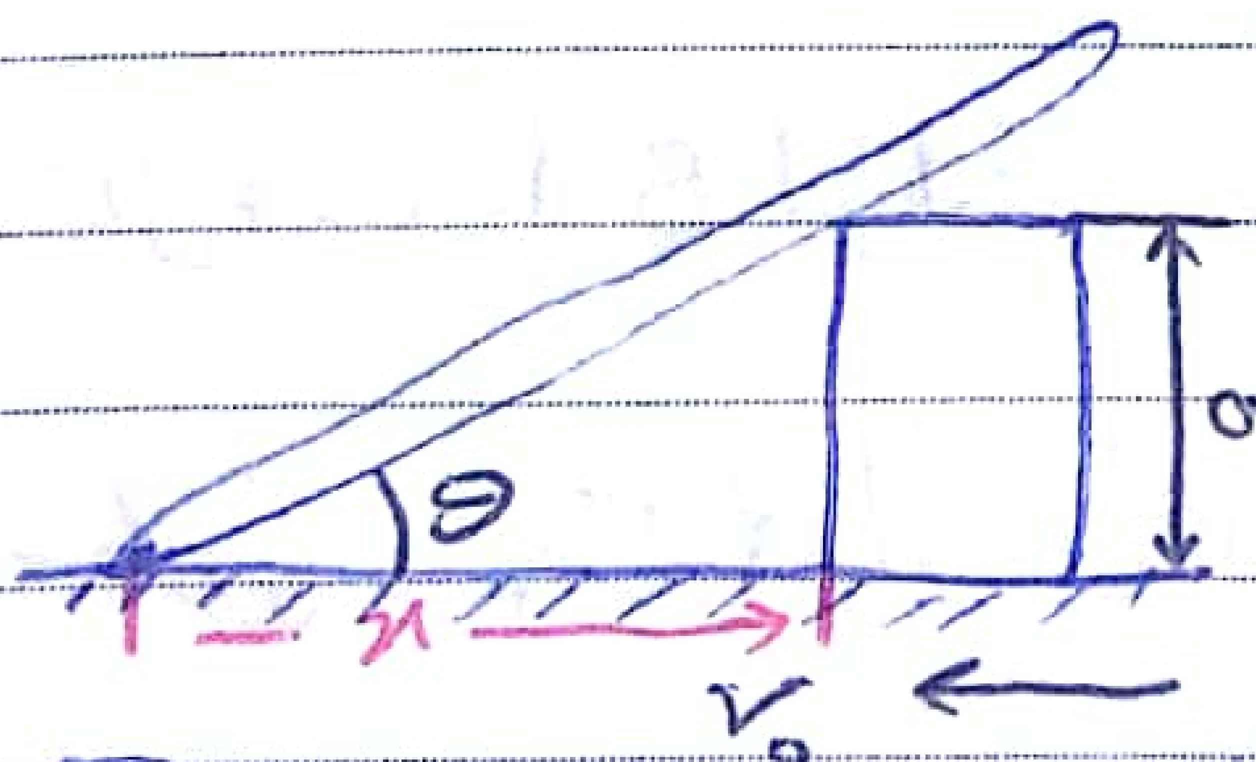
$$2S_A+(h-S_C)=L_1 \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} 2V_A-V_C=0 \quad \times 2 \\ 2V_C-V_B=0 \end{cases}$$

$$S_C+(S_C-S_B)=L_2$$

$$\longrightarrow 4V_A=V_B \longrightarrow 4V_A=-4 \Longrightarrow V_A=-1\ \frac{ft}{s}$$

$$4a_A=a_B \Longrightarrow 4a_A=2 \Longrightarrow a_A=0/5\ \frac{ft}{s^2}$$

مثال ۵: اگر بلوک نشان داده شده با سرعت ثابت v_0 به سمت چپ جابجا شود مطلوب است محاسبه سرعت و شتاب زاویه‌ای میله به صورت تابعی از θ.



$$\tan\theta=\frac{a}{x}$$

$$\boxed{x=\frac{a}{\tan\theta}=a\,\mathrm{cotg}\,\theta}$$

$$\frac{dx}{dt}=-a\csc^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

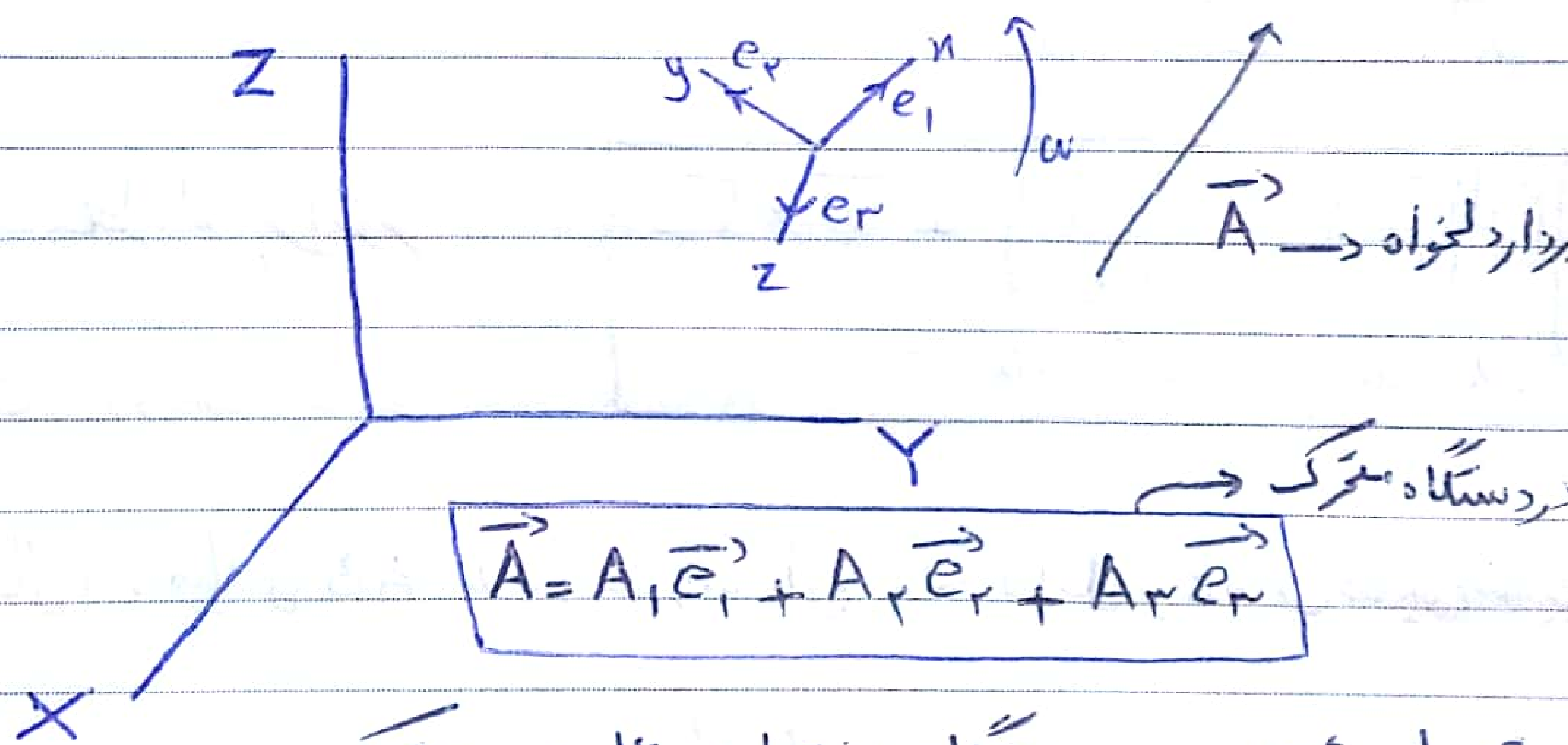
$$\frac{dx}{dt} = -V_0 \quad , \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega \implies -V_0 = -a\csc^2\theta\,\omega$$

$$\implies \omega = \frac{V_0}{a\csc^2\theta} = \frac{V_0}{a}\sin^2\theta \implies \boxed{\omega = \frac{V_0}{a}\sin^2\theta}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{V_0}{a}\right)(2\sin\theta\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\implies \boxed{\alpha = \left(\frac{V_0}{a}\right)^2 (\sin 2\theta \sin^2\theta)}$$

- حرکت از دید دوناظر متحرک و ثابت



$$\boxed{\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3}$$

- تبدیل مشتق بین دو دستگاه مختصات ثابت و متحرک

$$(\dot{\vec{A}})_{XYZ} = \dot{A}_1\vec{e}_1 + A_1\dot{\vec{e}}_1 + \dot{A}_2\vec{e}_2 + A_2\dot{\vec{e}}_2 + \dot{A}_3\vec{e}_3 + A_3\dot{\vec{e}}_3$$

$$\dot{\vec{e}}_1 = \vec{\omega}\times\vec{e}_1 \qquad \dot{\vec{e}}_2 = \vec{\omega}\times\vec{e}_2 \qquad \dot{\vec{e}}_3 = \vec{\omega}\times\vec{e}_3$$

$$(\dot{\vec{A}})_{XYZ} = \dot{A}_1\vec{e}_1 + A_1\vec{\omega}\times\vec{e}_1 + \dot{A}_2\vec{e}_2 + A_2\vec{\omega}\times\vec{e}_2$$

$$+\dot{A}_3\vec{e}_3 + A_3\vec{\omega}\times\vec{e}_3$$

$$(\dot{\vec{A}})_{XYZ} = \underbrace{\dot{A}_1\vec{e}_1 + \dot{A}_2\vec{e}_2 + \dot{A}_3\vec{e}_3}_{(\dot{\vec{A}})_{xyz}} + \vec{\omega}\times\underbrace{(A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3)}_{\vec{A}}$$

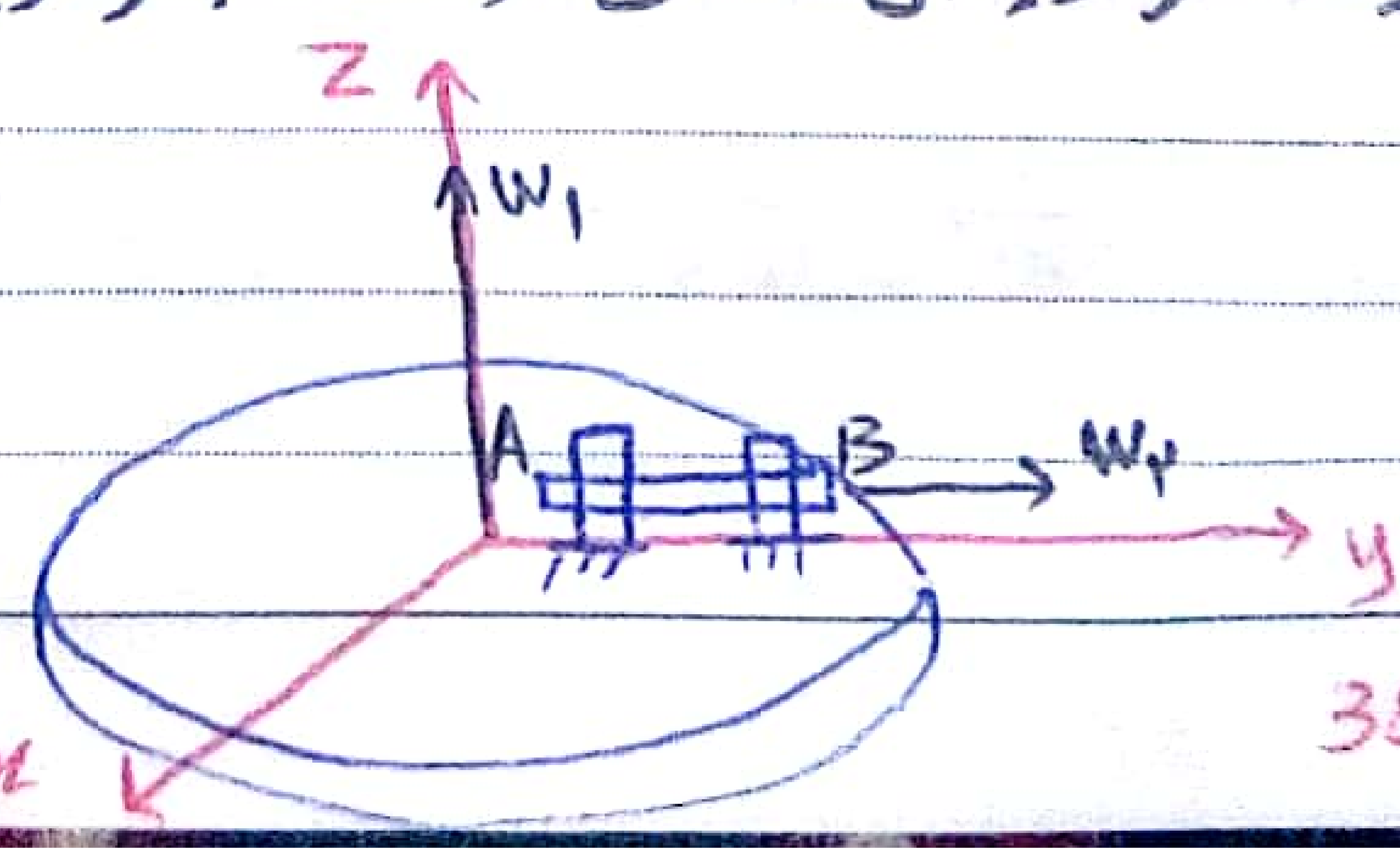
$$\boxed{(\dot{\vec{A}})_{XYZ} = (\dot{\vec{A}})_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{A}}$$

$\vec{\omega}$: بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه متحرک

$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{d\square}{dt}\right)}_{\text{دستگاه مطلق}} = \underbrace{\left(\frac{d\square}{dt}\right)}_{\text{دستگاه متحرک}} + \vec{\omega}\times\square}$$

معادله اپراتور

مثال 1: میله‌ی AB با سرعت زاویه‌ای ω_2 داخل یاتاقان هایش نسبت به میز می‌چرخد. و میز با سرعت زاویه‌ای ω_1 نسبت به زمین دوران دارد. مطلوبست بردار سرعت زاویه‌ای مطلق و شتاب زاویه‌ای مطلق AB؟



حرکت میله: میله نسبت به میز } دستگاه متحرک (واسطه) xyz در مرکز میز
میز نسبت به زمین } در نظر گرفته می‌شود

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega_2 \vec{j} + \omega_1 \vec{k}} \qquad (\dot{\vec{\omega}})_{XYZ} = \dot{\omega}_2 \vec{j} + \omega_2 \dot{\vec{j}} + \dot{\omega}_1 \vec{k} + \omega_1 \dot{\vec{k}}$$

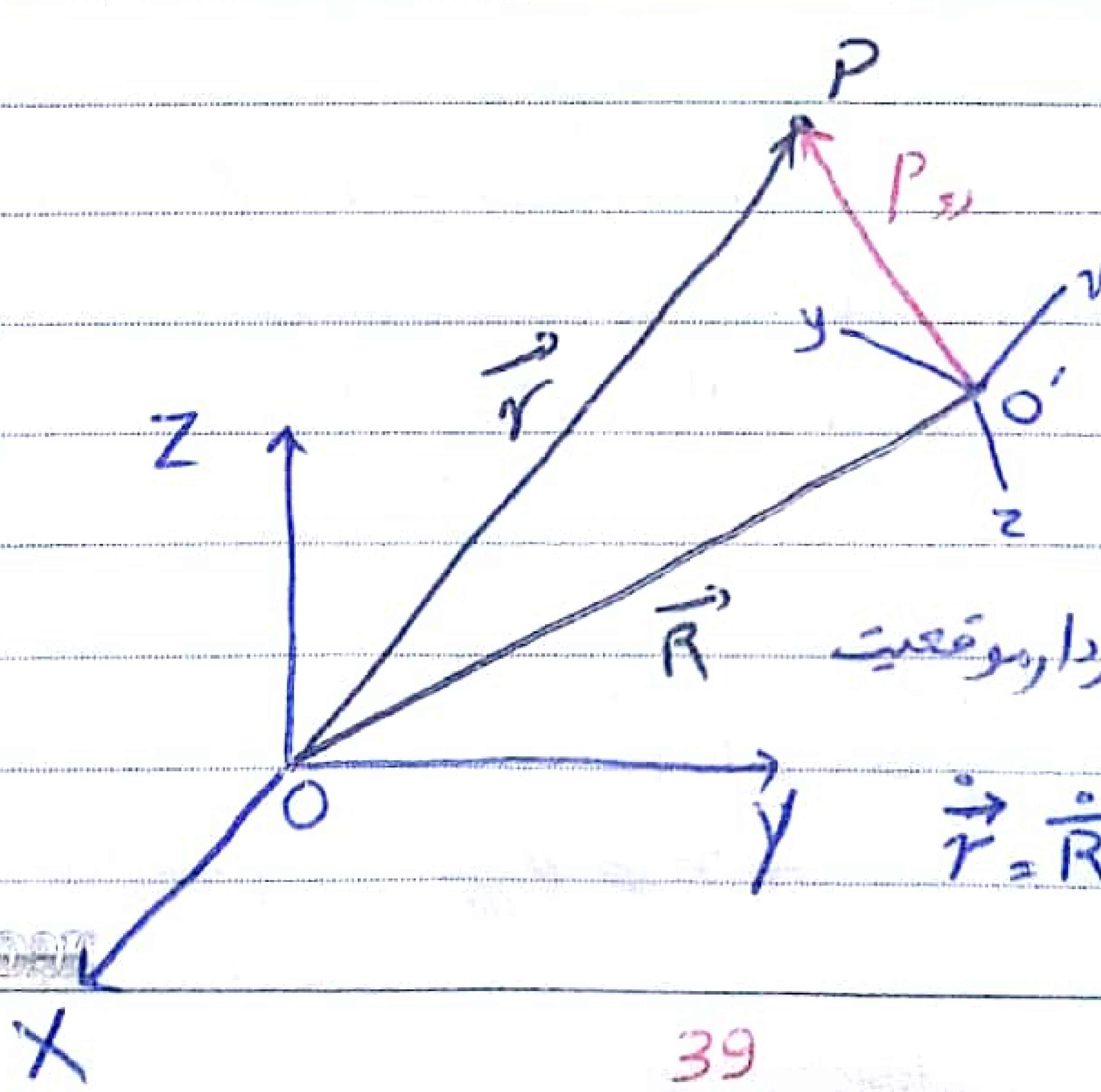
$$\boxed{\dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e}}$$

$$\dot{\vec{j}} = \omega_1 \vec{k} \times \vec{j} = -\omega_1 \vec{i} \qquad \dot{\vec{k}} = \omega_1 \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \alpha_2 \vec{j} - \omega_1 \omega_2 \vec{i} + \alpha_1 \vec{k}}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha_2 \vec{j} + \alpha_1 \vec{k} + (\omega_1 \vec{k}) \times (\omega_2 \vec{j} + \omega_1 \vec{k}) \Leftarrow$$ با استفاده از معادله اپراتور

$$\boxed{\vec{\alpha} = \alpha_2 \vec{j} + \alpha_1 \vec{k} - \omega_1 \omega_2 \vec{i}}$$



بردار موقعیت $\vec{r} = \vec{R} + \vec{P}_{\text{ور}}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + (\dot{\vec{P}})_{XYZ}$$

$$(\dot{\vec{P}})_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{P}$$

$$\boxed{\vec{v}_p = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$$: سرعت مطلق ذره‌ی P

سرعت مطلق مبدأ دستگاه متحرک

سرعت نسبی

بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه متحرک

بردار موقعیت ذره‌ی P نسبت به دستگاه متحرک

$$\dot{\vec{v}}_p = \ddot{\vec{R}} + (\dot{\vec{v}}_r)_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{\rho}})_{xyz}$$

$$(\dot{\vec{v}}_r)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r \qquad (\dot{\vec{\rho}})_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\boxed{\vec{a}_p = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})}$$

شتاب کریولیس

شتاب مماسی

شتاب نرمال

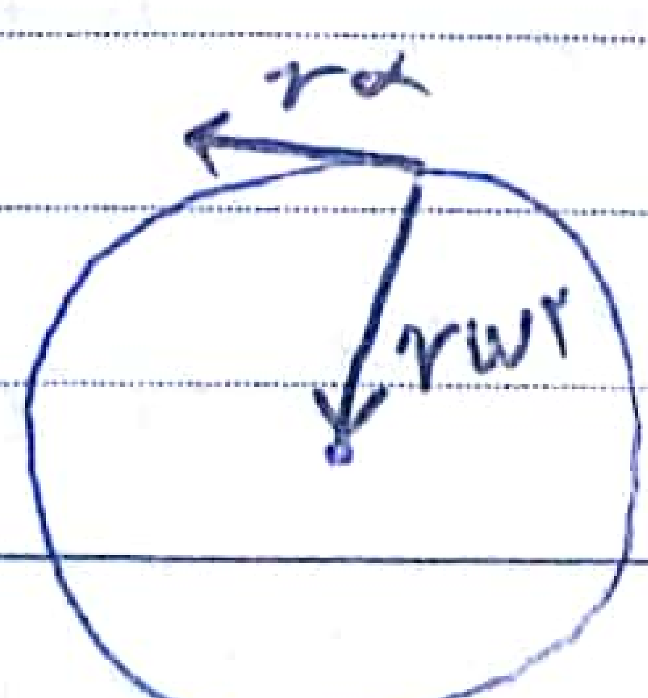
شتاب در اثر دوران بردار سرعت نسبی

شتاب در اثر تغییر اندازه و راستای بردار سرعت نسبی

مولفه‌های n-t شتاب ذره P نسبت به مبدأ O

$\rho \ddot{\phi}$ = شتاب مماسی

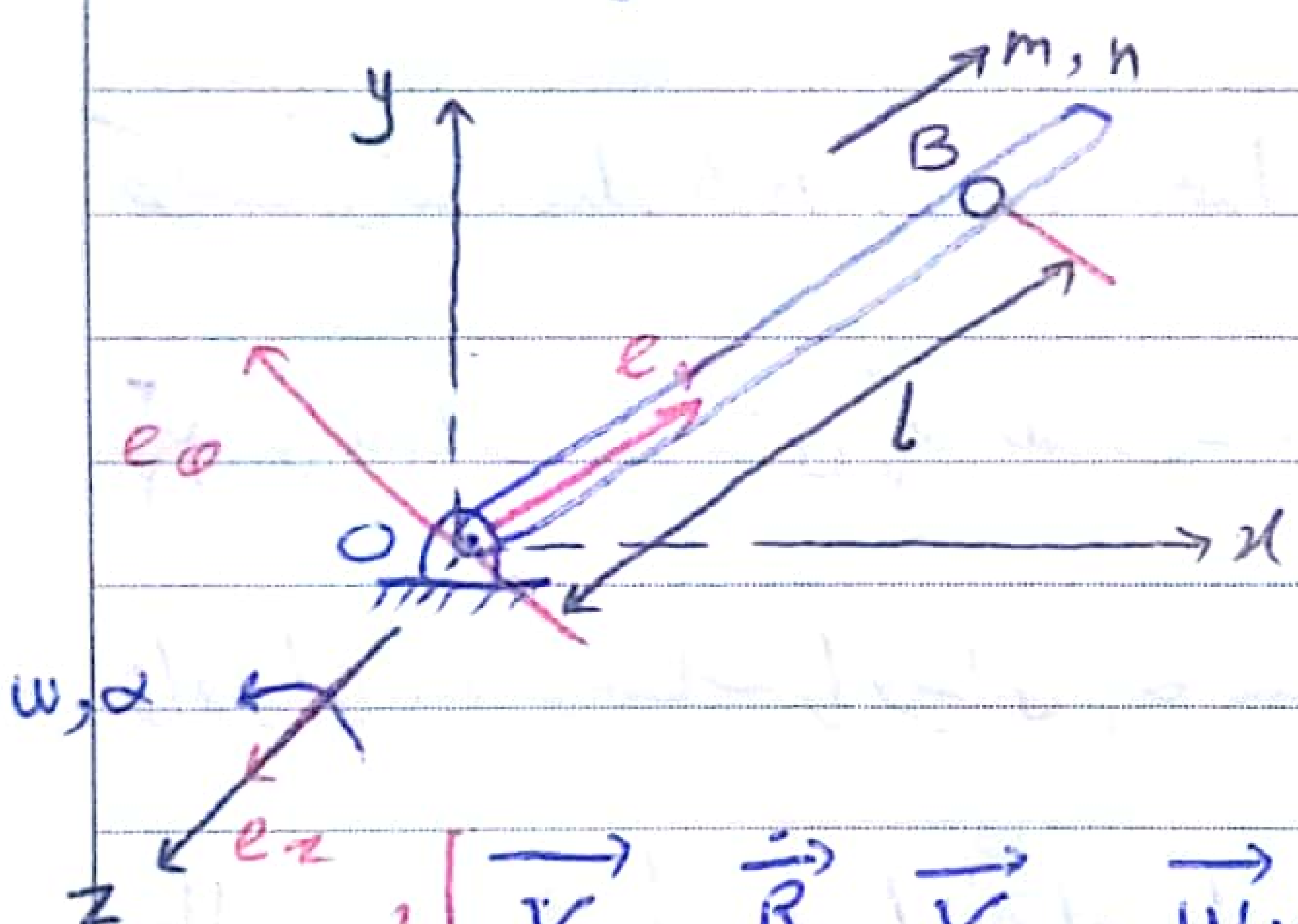
$\rho \omega^2$ = شتاب نرمال



$$a = -r\dot{\phi}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\phi}\, \vec{e}_\phi$$

Year. ۹۵ Month. ۰۸ Date. ۱۰ ( ) Subject :

مثال ۱: لوله‌ای در صفحه $x-y$ در نقطه O لولا شده و در این صفحه حول محور z با سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α می‌چرخد. داخل لوله ساچمه B نسبت به لوله با سرعت m و شتاب n می‌لغزد. سرعت و شتاب مطلق ساچمه B را در لحظه نشان داده شده به دست آورید.



دستگاه متحرک (واسطه)

e_r, e_φ, e_z در نقطه O به

میله متصل می‌شود

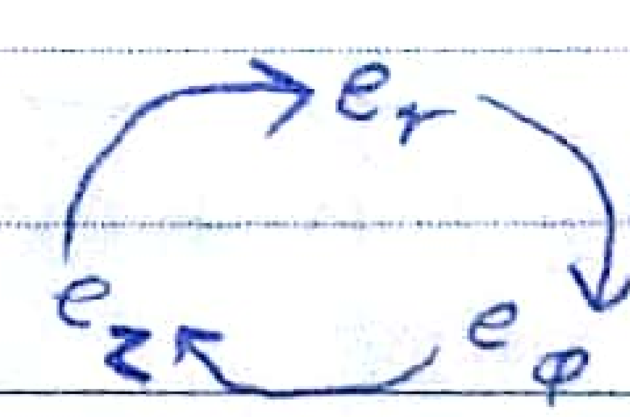
$$1) \quad \vec{V}_B = \dot{\vec{R}} + \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$2) \quad \vec{a}_B = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

$\dot{\vec{R}} = 0 \quad , \quad \vec{V}_r = m\vec{e}_r \quad , \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \qquad \vec{\rho} = l\vec{e}_r$

$$\vec{V}_B = m\vec{e}_r + \omega\vec{e}_z \times l\vec{e}_r \longrightarrow \boxed{\vec{V}_B = m\vec{e}_r + l\omega\vec{e}_\varphi}$$

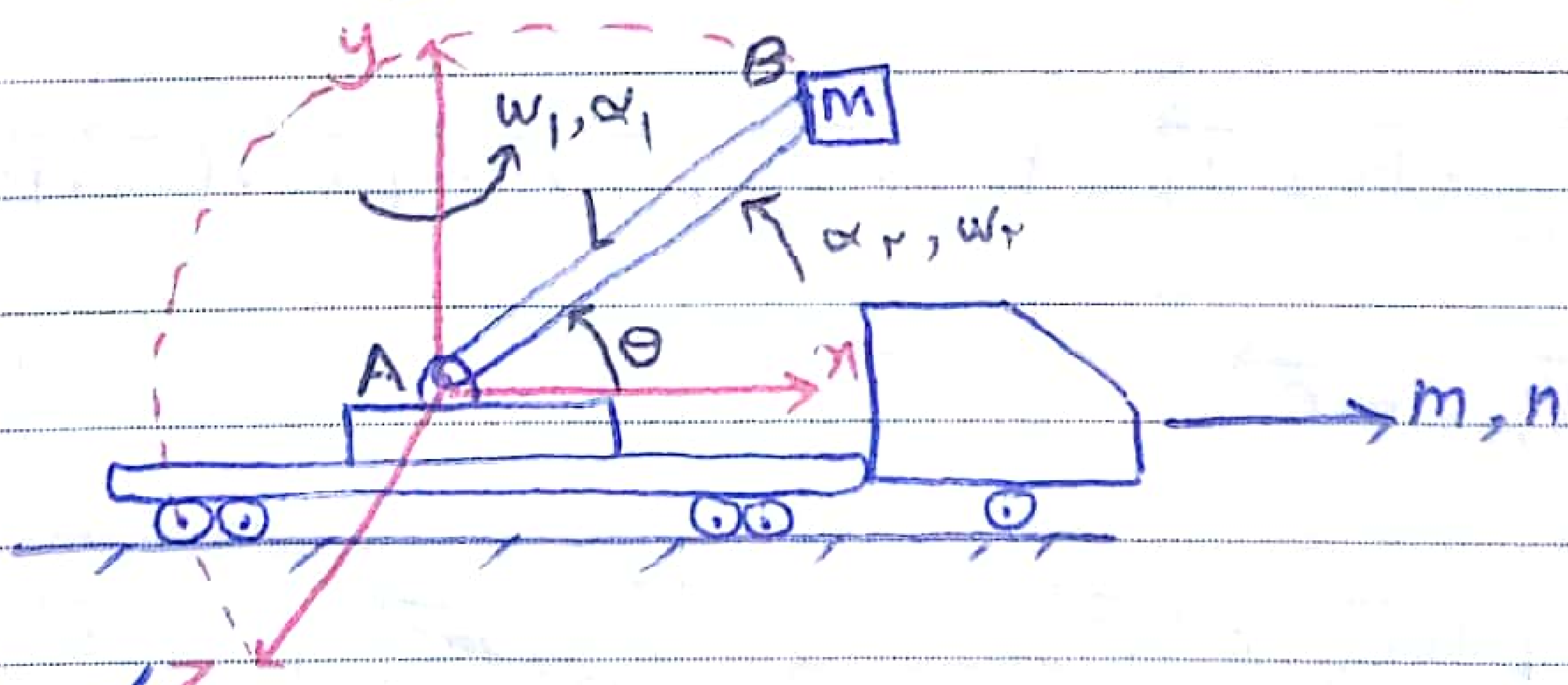
$\ddot{\vec{R}} = 0 \quad , \quad \vec{a}_r = n\vec{e}_r \quad , \quad \vec{\alpha} = \alpha\vec{e}_z$



$$\vec{a}_B = n\vec{e}_r + \underbrace{2\omega\vec{e}_z \times m\vec{e}_r}_{2m\omega\vec{e}_\phi} + \underbrace{\alpha\vec{e}_z \times L\vec{e}_r}_{L\alpha\vec{e}_\phi} + \underbrace{\omega\vec{e}_z \times (\underbrace{\omega\vec{e}_z \times L\vec{e}_r}_{L\omega\vec{e}_\phi})}_{-L\omega^2\vec{e}_r}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = (n - L\omega^2)\vec{e}_r + (2m\omega + L\alpha)\vec{e}_\phi$$

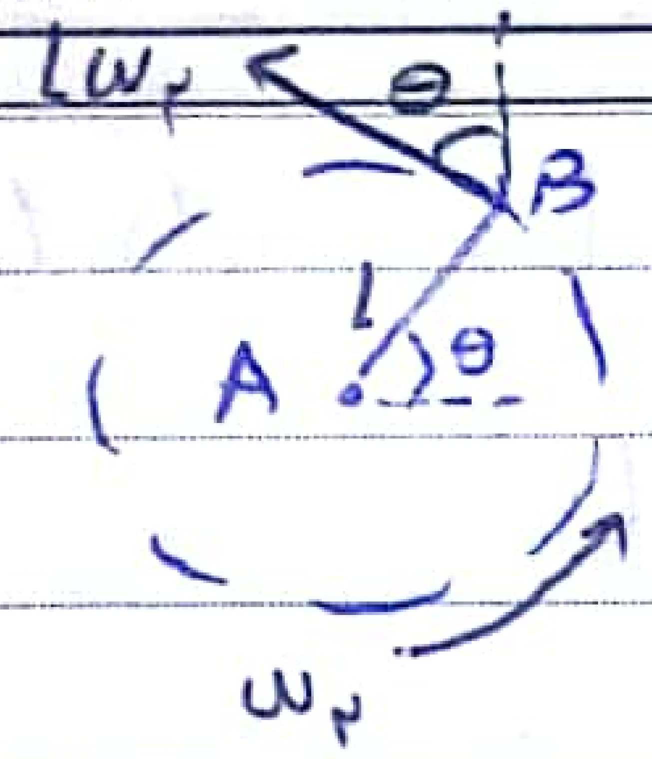
مثال ۲: کامیونی با سرعت m و شتاب n نسبت به زمین مطابق شکل حرکت می‌کند. میله AB بر روی صفحه‌ای نصب شده که با سرعت زاویه‌ای ω_2 و شتاب زاویه‌ای α_2 نسبت به صفحه می‌چرخد. اگر صفحه با سرعت زاویه‌ای ω_1 و شتاب زاویه‌ای α_1 نسبت به زمین بچرخد، سرعت و شتاب مطلق نقطه B را در لحظه نشان داده‌شده به دست آورید.

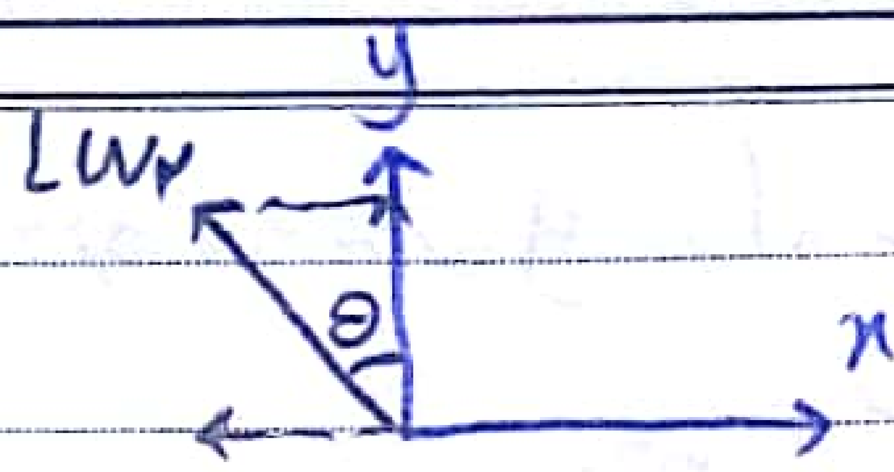


دستگاه متحرک (واسط) xyz را در نقطه A بر روی صفحه در نظر می‌گیریم.

1) $\vec{V}_B = \vec{R} + \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ $\qquad \vec{R} = m\vec{i}$ و $\vec{\omega} = \omega_1\vec{j}$

Year. Month. Date. ( ) Subject :



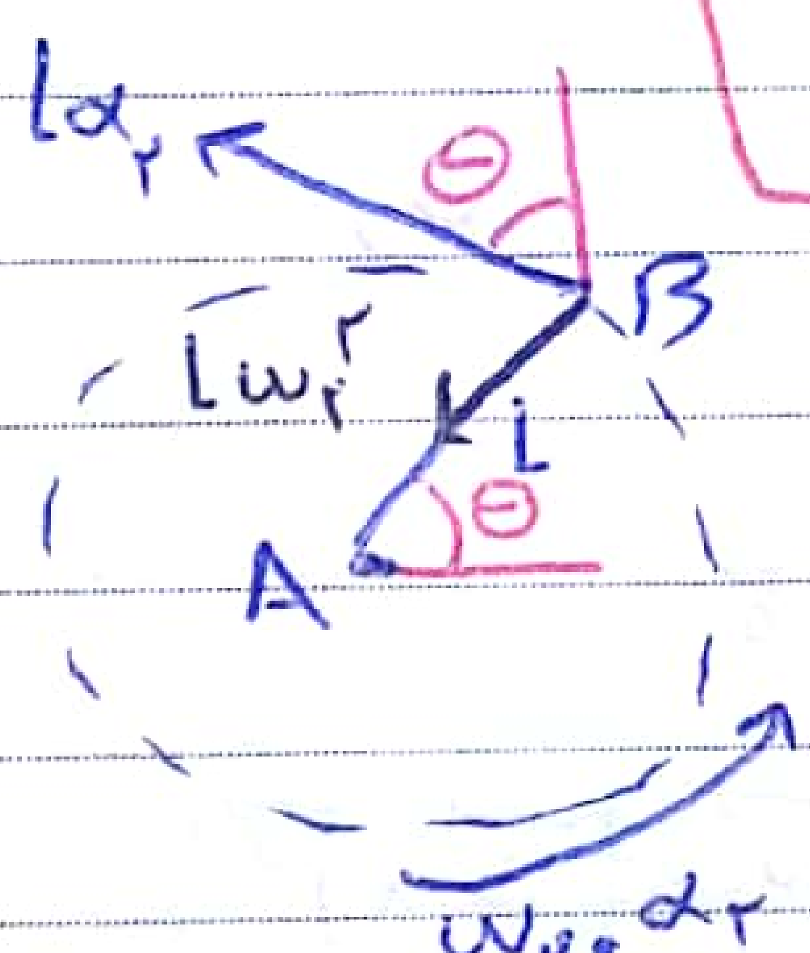


$$\vec{V}_2 = l\omega_2\,(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$$
جایگذاری

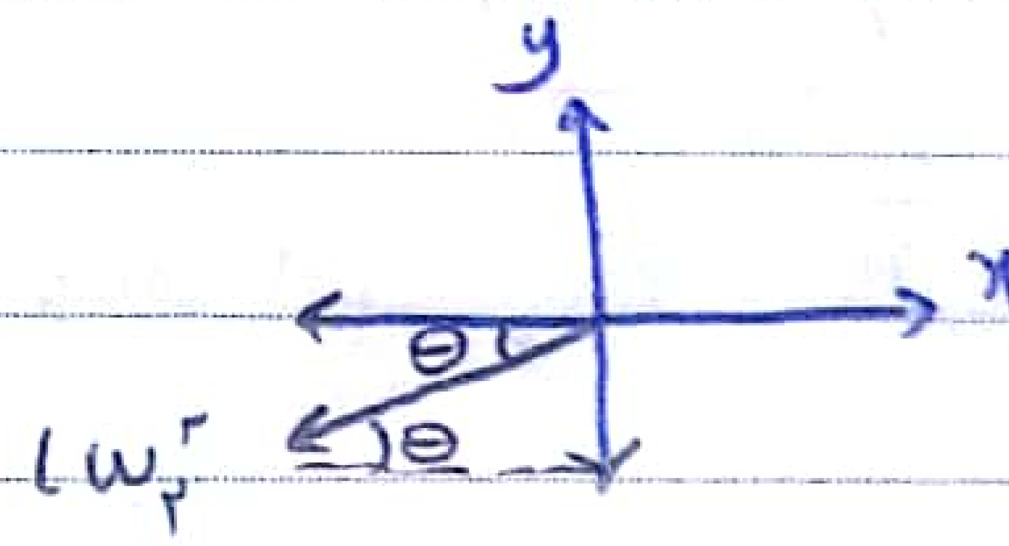
$$\vec{\rho} = l\,(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$
در 1)

$$\vec{a}_B = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_2 + 2\,\vec{\omega}\times\vec{V}_2 + \vec{\alpha}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$$

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{x}\,\vec{i} \quad , \quad \boxed{\vec{a}_2 = l\alpha_2\,(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) + l\omega_2^2\,(-\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j})}$$



شتاب زاویه‌ای دستگاه متحرک $\vec{\alpha} = \alpha_1\,\vec{j}$



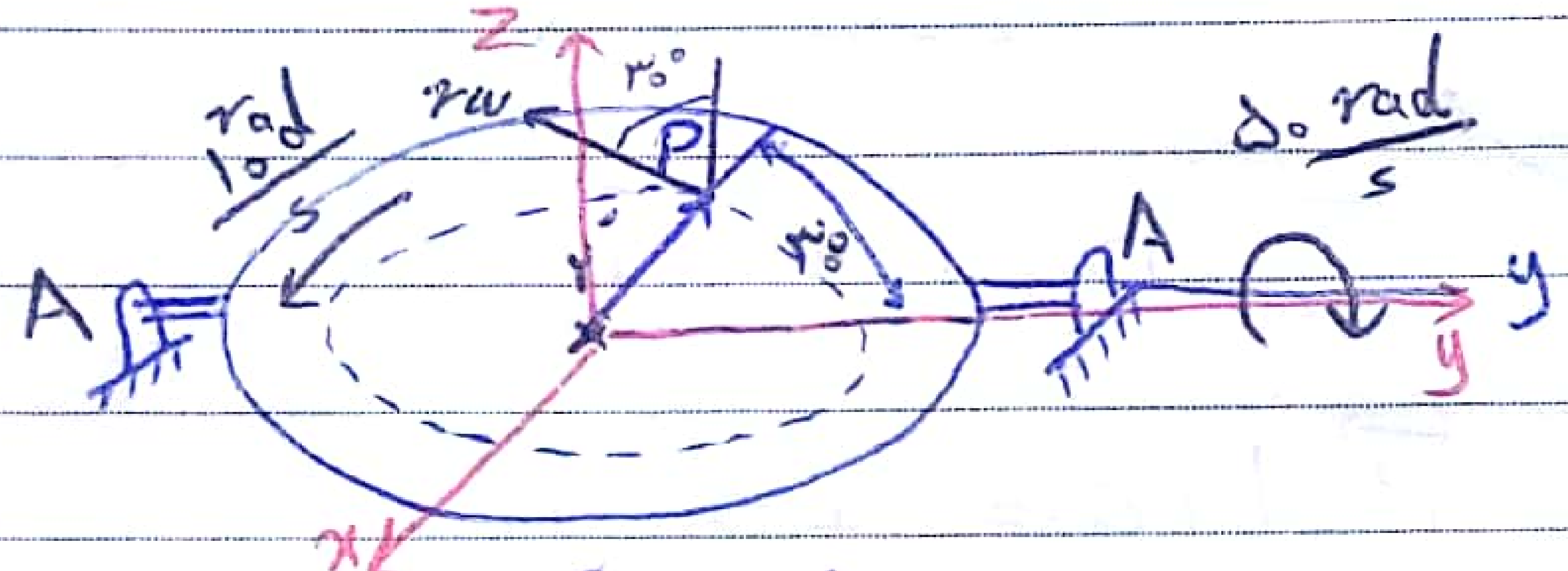
مثال 3: ذره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت $10\,\frac{Rad}{s}$ روی یک دیسک می‌چرخد.

و دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت $50\,\frac{Rad}{s}$ حول محور A-A دوران دارد.

مطلوب است سرعت و شتاب ذره‌ی P در لحظه‌ای که دیسک در صفحه‌ی x-y

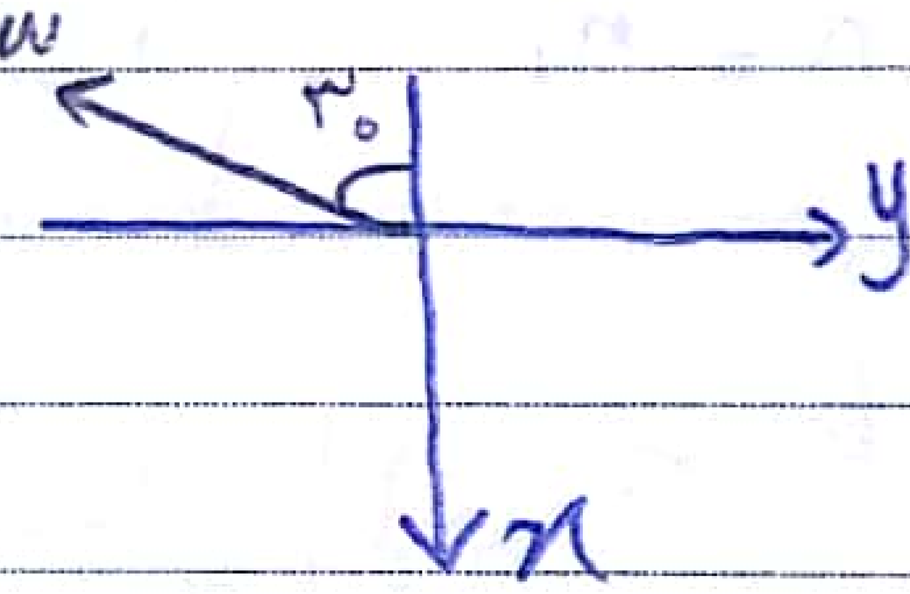
Year. Month. Date. ( ) Subject :

قرار دارد. و بردار شعاع ذره با محور y زاویه ۳۰° می‌سازد



دستگاه متحرک (واسطه) xyz در مرکز دیسک در نظر گرفته می‌شود

$\vec{v}_p = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$ $\qquad \dot{\vec{R}} = 0 \qquad \vec{\omega} = 50\vec{j}$



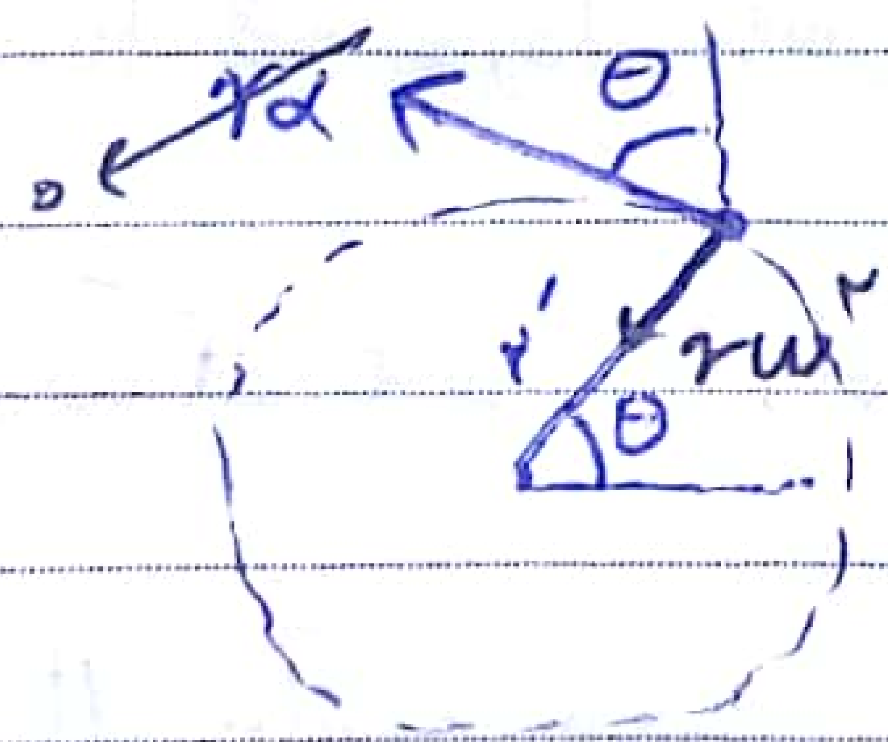
$\vec{v}_r = (2)(10)(-\cos 30^\circ \vec{i} - \sin 30^\circ \vec{j})$

$\vec{\rho} = 2(-\sin 30^\circ \vec{i} + \cos 30^\circ \vec{j})$

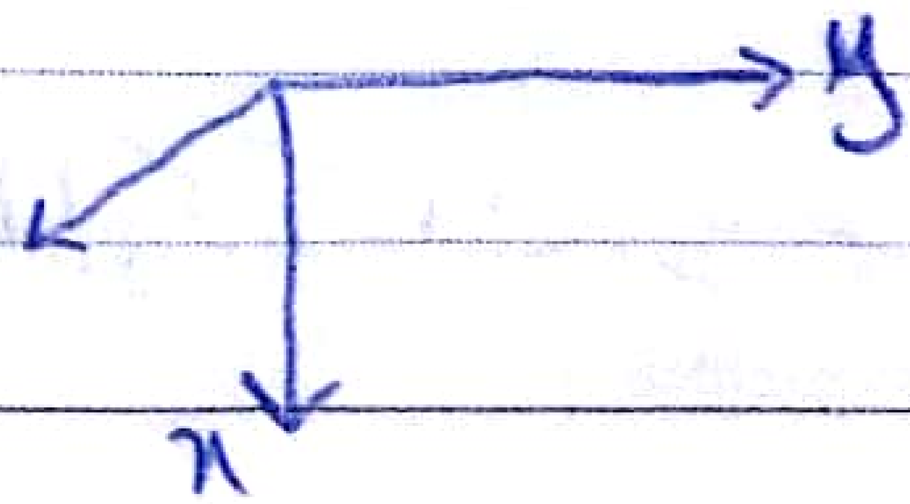
$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_p = -17.32\vec{i} - 10\vec{j} - 50\vec{K} \ \frac{ft}{s}}$

$\vec{a}_p = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$

$\ddot{\vec{R}} = 0 \ , \quad \vec{a}_r = (2)(10)^2(+\sin 30^\circ \vec{i} - \cos 30^\circ \vec{j})$

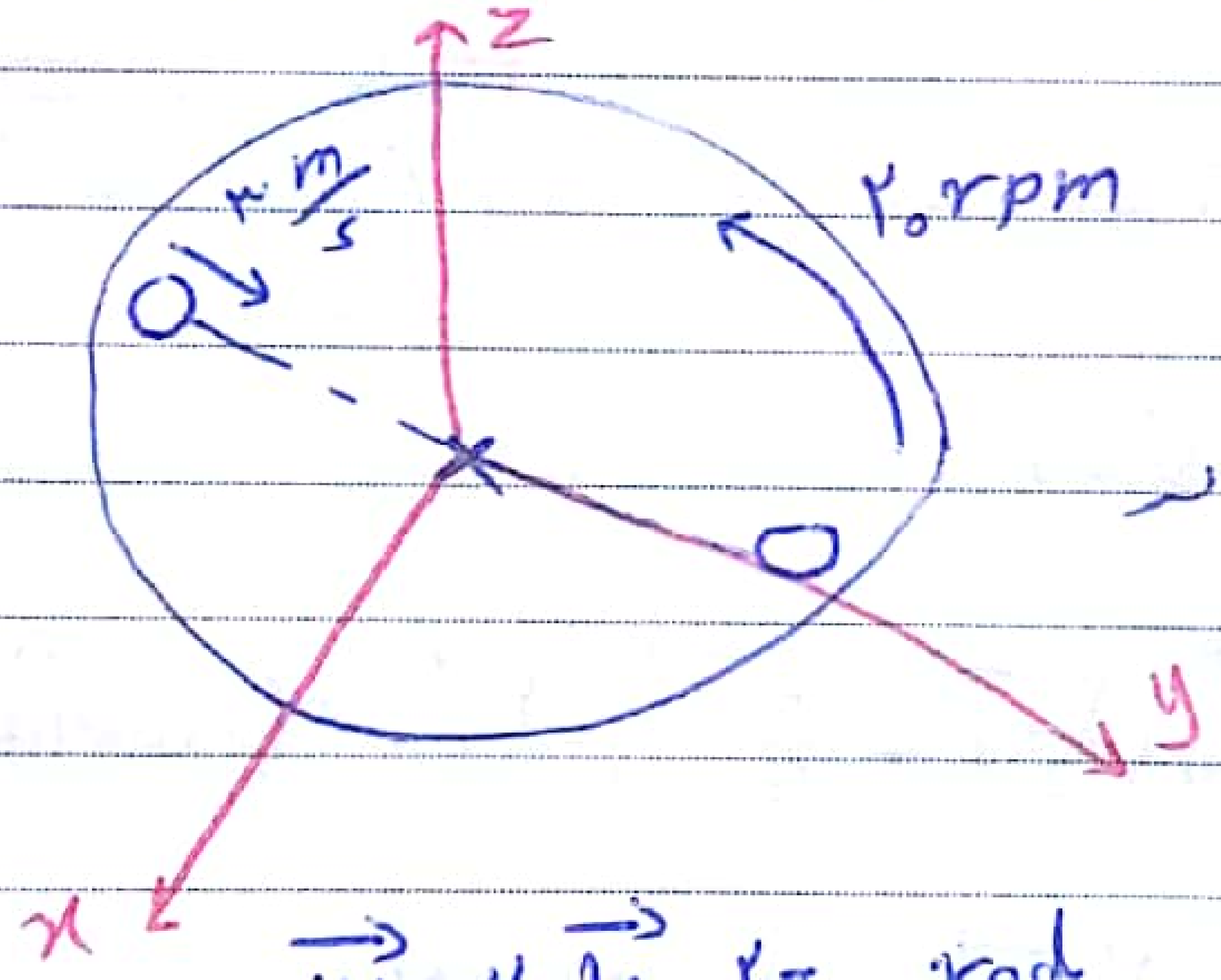


$\omega = \text{Constant} \ (10) \longrightarrow \alpha = 0$



$\vec{\omega} = 50 \longrightarrow \vec{\alpha} = 0 \Longrightarrow \boxed{\vec{a}_p = 2400\vec{i} - 173.2\vec{j} - 1732\vec{k}\ \frac{ft}{s^2}}$

مثال 4: فردی یک توپ به جرم 3kg را از یک طرف یک دیسک گردان به طرف دیگر که مطابق شکل در مقابل فرد اول روی قطر دیسک قرار دارد پرتاب می کند. شتاب کریولیس توپ را به دست آورید.



$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$

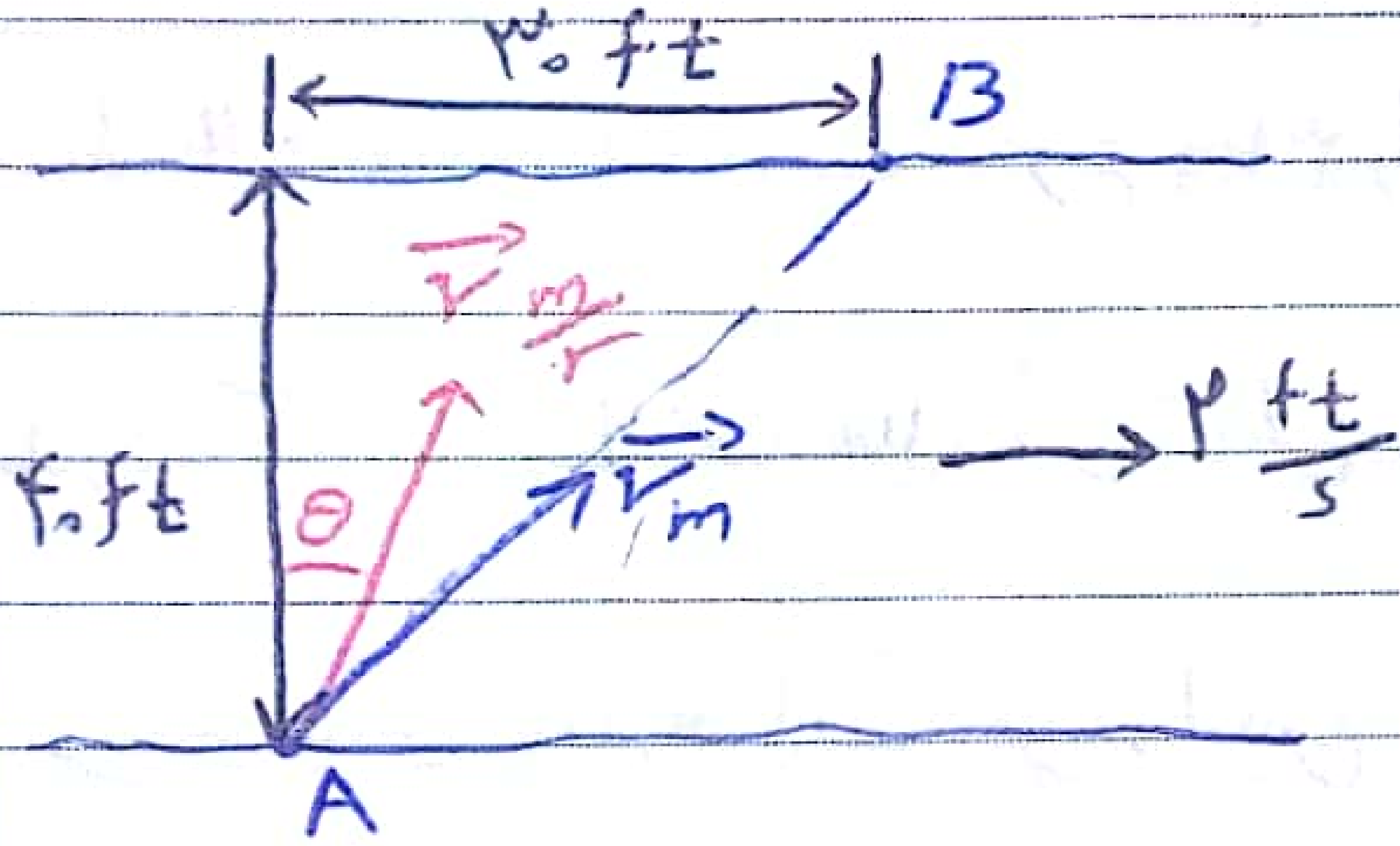
دستگاه متحرک xyz در مرکز دیسک در نظر گرفته می شود.

$\vec{\omega} = \underbrace{20\vec{k}}_{\times} \frac{2\pi}{60}\ \frac{rad}{s}$ $\qquad \vec{V}_r = 3\vec{j}\ \frac{m}{s}$

$\vec{a}_{cor} = (2)(20 \times \frac{2\pi}{60}\vec{k}) \times (3\vec{j}) \Longrightarrow \boxed{a_{cor} = -12.57\vec{i}}$

مثال 5: شناگری می تواند با سرعت $4\frac{ft}{s}$ در آب ساکن (راکد) شنا کند. برای رسیدن به نقطه B باید 40 ft عرض رودخانه را طی نموده و 30 ft به سمت پایین رودخانه شنا نماید. اگر سرعت جریان آب برابر با $2\frac{ft}{s}$ باشد:

مطلوب است محاسبه سرعت شناگر و مدت زمان لازم برای رسیدن به نقطه B؟ نسبی

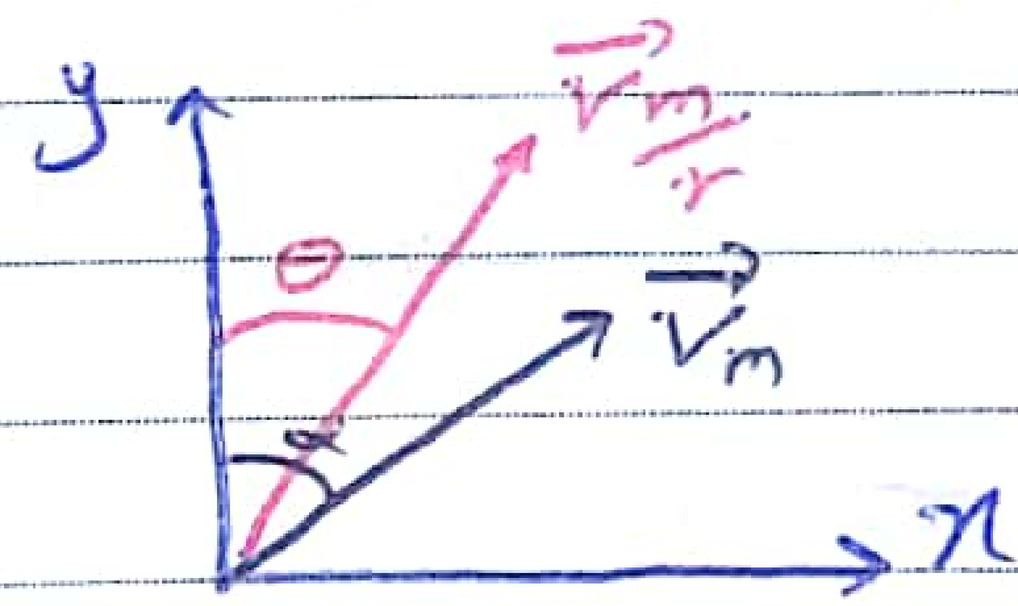


$$\vec V_{man} = \vec R + \vec V_r + \cancel{\vec \omega \times \vec r}\ 0$$

$\vec R = \vec V_{river}$ آب رودخانه

$\vec V_r = \vec V_{m/r}$ $\qquad V_B = V_A + V_{B/A}$ $\qquad \boxed{\vec V_m = \vec V_r + \vec V_{m/r}}$

چرخش (دوران) ندارد $\longrightarrow \vec\omega = 0$



$$\vec V_m\left(\frac{3}{5}\vec i + \frac{4}{5}\vec j\right) = 2\vec i + 4(\sin\theta\,\vec i + \cos\theta\,\vec j)$$

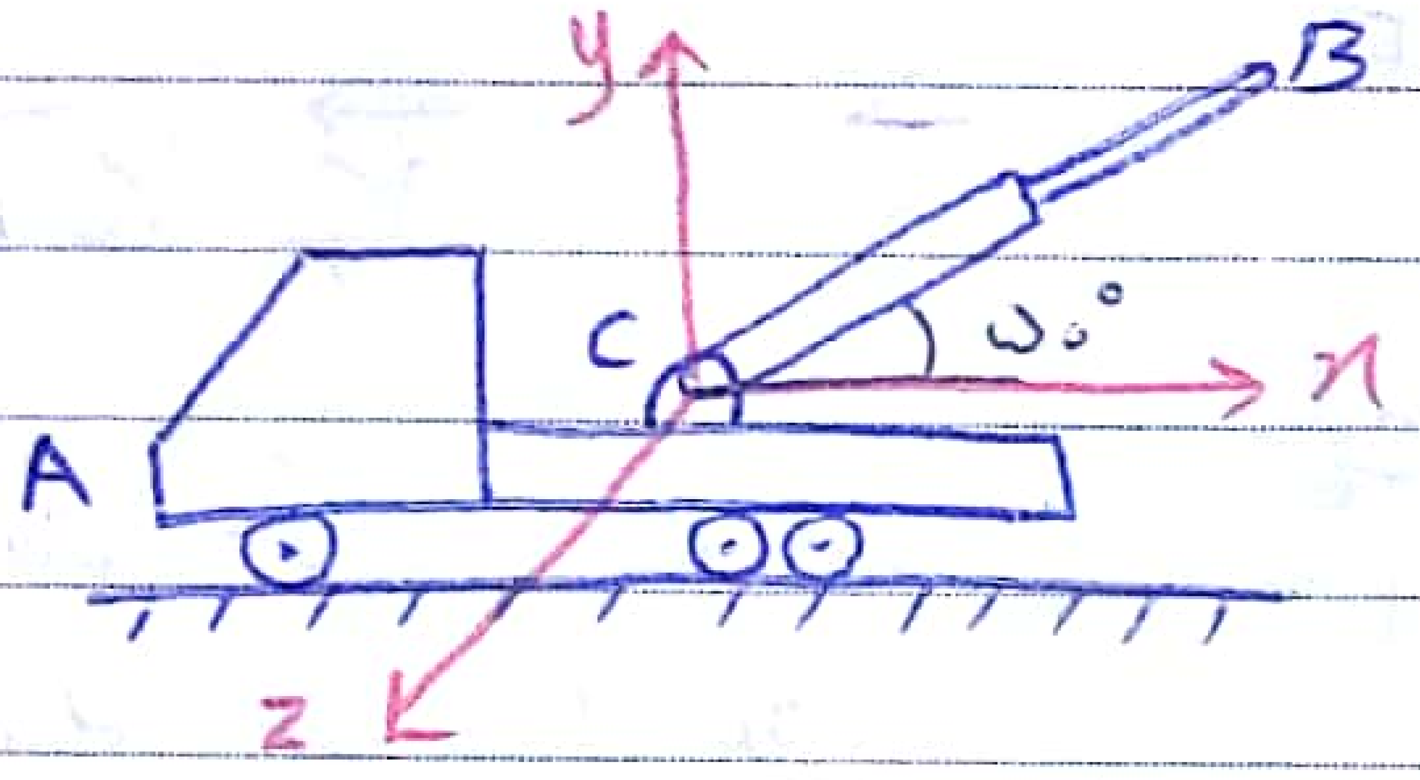
$$i:\ \frac{3}{5}\vec V_m = 2 + 4\sin\theta$$

$$j:\ \frac{4}{5}V_m = 4\cos\theta \Longrightarrow \boxed{\begin{cases}\theta = 13.3^\circ \\ V_m = 4.87\ \frac{ft}{s}\end{cases}}$$

$s_{AB} = vt$ $\qquad t = \frac{s_{AB}}{v} = \frac{\sqrt{30^2 + 40^2}}{4.87}$ $\qquad \boxed{t = 10.3\,s}$

مثال 6: کامیونی با شتاب ثابت $4\frac{ft}{s^2}$ حرکت می کند، و قسمت B از بوم کامیون با شتاب ثابت $1.6\frac{ft}{s^2}$ حرکت می کند. مطلوبست ... نسبت به کامیون

محاسبه الف) شتاب قسمت B ب) سرعت قسمت B بعد از ۲s ؟



$$\vec{a}_B = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_r + 2\cancel{\vec{\omega} \times \vec{v}_r} \cancel{+ \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}} + \cancel{\vec{\omega} (\vec{\omega} \times \vec{\rho})}$$

دوران نداریم ← $\vec{\omega}, \vec{\alpha} = 0$

$$\vec{a}_B = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_r$$

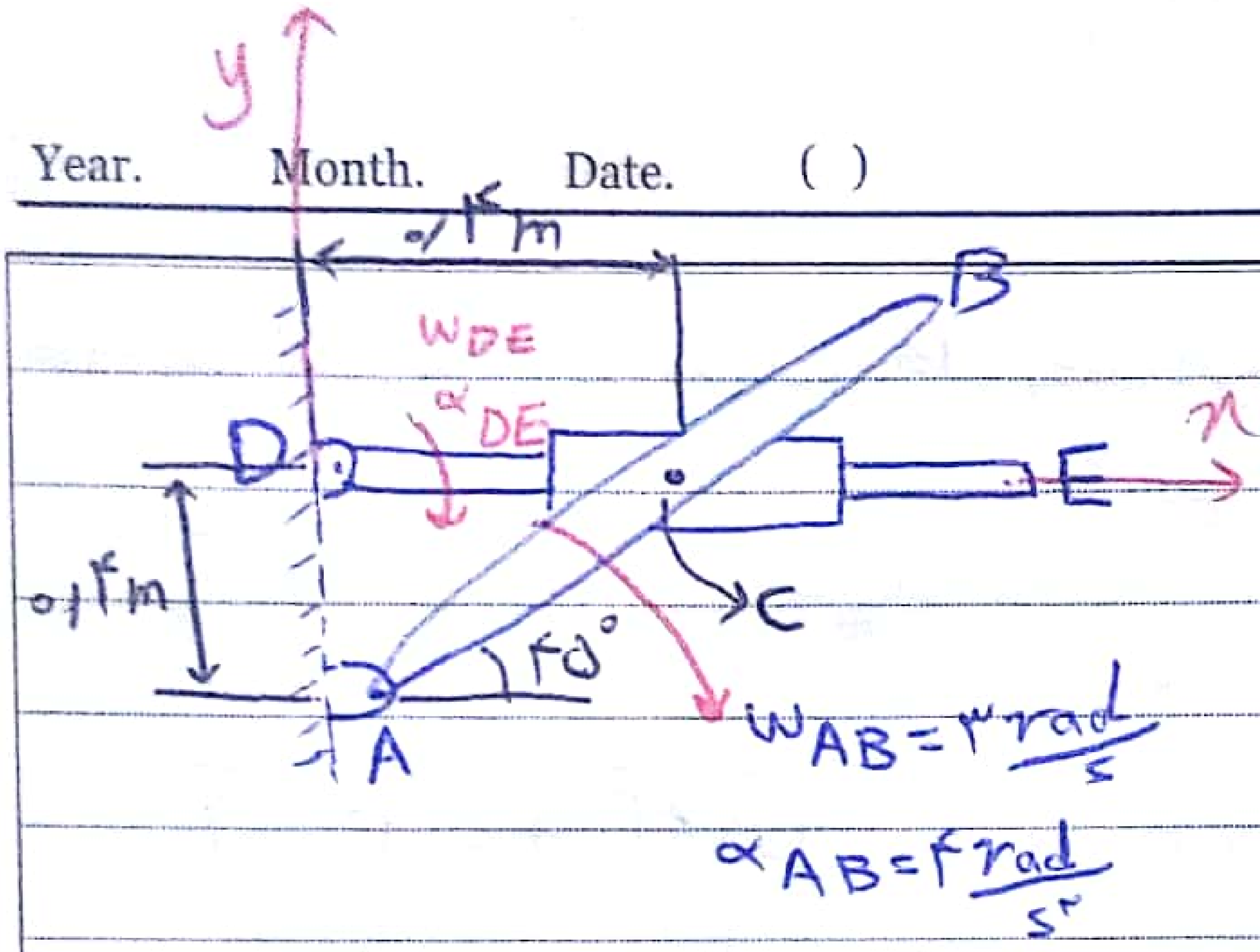
$$\vec{a}_B = -4\vec{i} + 1.6(\cos 50^\circ \vec{i} + \sin 50^\circ \vec{j})$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -2.97\vec{i} + 1.225\vec{j}}$$ الف)

$$v_B = (v_B)_0 + a_B t \qquad v_B = 0 + \left(\sqrt{(-2.97)^2 + (1.225)^2}\right)(2)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_B = 6.43 \ \frac{ft}{s}}$$ ب)

مثال ۷: میله AB دارای سرعت زاویه‌ای $3 \frac{Rad}{s}$ و شتاب زاویه‌ای $4 \frac{Rad}{s^2}$ مطابق شکل می‌باشد. (در لحظه‌ای که $\theta = 45^\circ$ است). مطلوب است محاسبه حرکت زاویه‌ای میله DE در این لحظه؟ طوقه C به میله AB (در نقطه) پین شده و می‌تواند آزادانه بر روی میله DE حرکت کند.



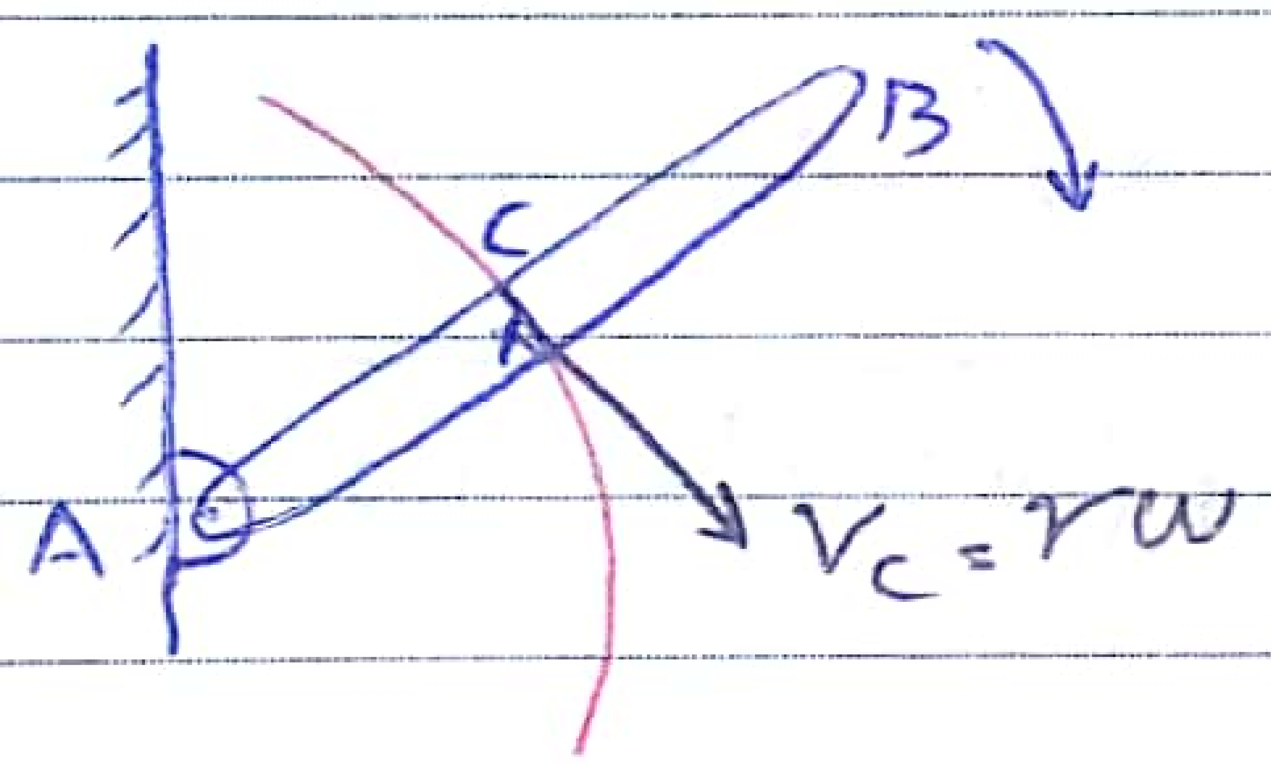
$$\vec V_C = \vec{\dot R} + \vec V_r + \vec\omega \times \vec\rho$$

$$\vec{\dot R} = 0 \qquad \vec V_r = V_r \vec i$$

دستگاه متحرک در نقطه D به میله DE وصل شده.

$$\vec\omega = -\omega_{DE}\vec k \qquad \vec\rho = 0.4\,\vec i$$

$$\vec V_C = V_r\vec i + (-\omega_{DE}\vec k)\times(0.4\,\vec i)$$



از طرفی (حرکت دایره‌ای نسبت به نقطه A): $\vec V_C = \vec\omega \times \vec\rho = (-3\vec k)\times(0.4\,\vec i + 0.4\,\vec j)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec V_C = -1.2\,\vec j + 1.2\,\vec i}$$

$$\Rightarrow -1.2\,\vec j + 1.2\,\vec i = V_r\vec i - 0.4\,\omega_{DE}\vec j$$

$$\begin{cases} j: & -1.2 = -0.4\,\omega_{DE} \\ i: & \boxed{1.2 = V_r} \end{cases} \qquad \boxed{\omega_{DE} = 3\ \frac{rad}{s}}$$

$$\vec{a}_c = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r + \vec{\alpha}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$$

$$\ddot{\vec{R}} = 0 \quad , \quad \vec{a}_r = a_r\vec{i} \quad , \quad \vec{\alpha} = -\alpha_{DE}\vec{k}$$

شتاب نسبی طوقه

از طرفی: $\vec{a}_c = \vec{\alpha}\times\vec{\rho} - \omega^2\vec{\rho}$

$$\vec{a}_c = (-4\vec{k})\times(0{,}4\vec{i} + 0{,}4\vec{j}) - (3)^2(0{,}4\vec{i} + 0{,}4\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2\vec{i} - 5{,}2\vec{j} \ \ \mathrm{m/s^2}}$$

$$\Rightarrow -2\vec{i} - 5{,}2\vec{j} = a_r\vec{i} + 2(-3\vec{k})\times(1{,}2\vec{i}) + (-\alpha_{DE}\vec{k})$$

$$\times(0{,}4\vec{i}) + (-3\vec{k})\times(-3\vec{k}\times 0{,}4\vec{i})$$

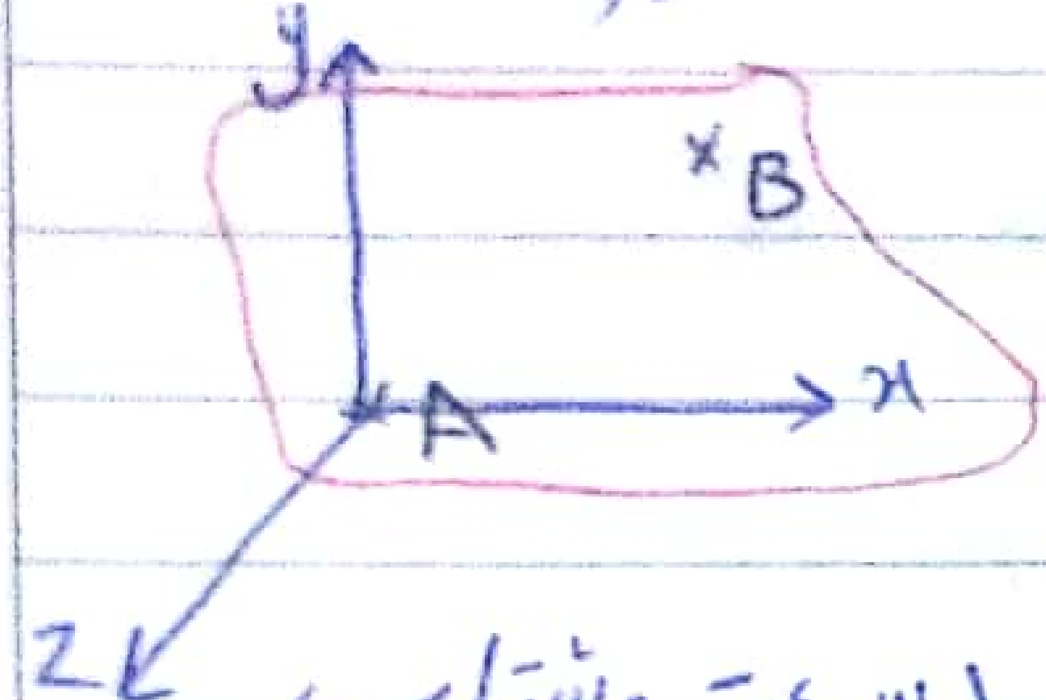
$$\begin{cases} i: \ldots \\ j: \ldots \end{cases}$$

$$\boxed{a_r = 1{,}6 \ \mathrm{m/s^2}} \qquad \boxed{\alpha_{DE} = -5\ \mathrm{rad/s^2} = 5\ \mathrm{rad/s^2} \circlearrowleft}$$

«۹۵/۰۸/۱۷» ـــ سینماتیک جسم صلب

فرض: سرعت و شتاب یک نقطه از جسم صلب مشخص است

می‌خواهیم سرعت و شتاب نقطه دیگر را بدست آوریم.



دستگاه متحرک xyz را در نقطه A به جسم صلب متصل می‌کنیم

(سرعت و شتاب نقطه A معلوم)

رابطه سرعت در حرکت نسبی : $\vec{V} = \dot{\vec{R}} + \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

صفر (جسم صلب)

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \cancel{\vec{V}_r} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{\rho}_{AB}$$

$$\boxed{\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{\rho}_{AB}}$$

رابطه شتاب در حرکت نسبی : $\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$

صفر صفر

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \cancel{\vec{a}_r} + \cancel{2\vec{\omega}_{AB} \times \vec{V}_r} + \alpha_{AB} \times \vec{\rho}_{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{\rho}_{AB})$$

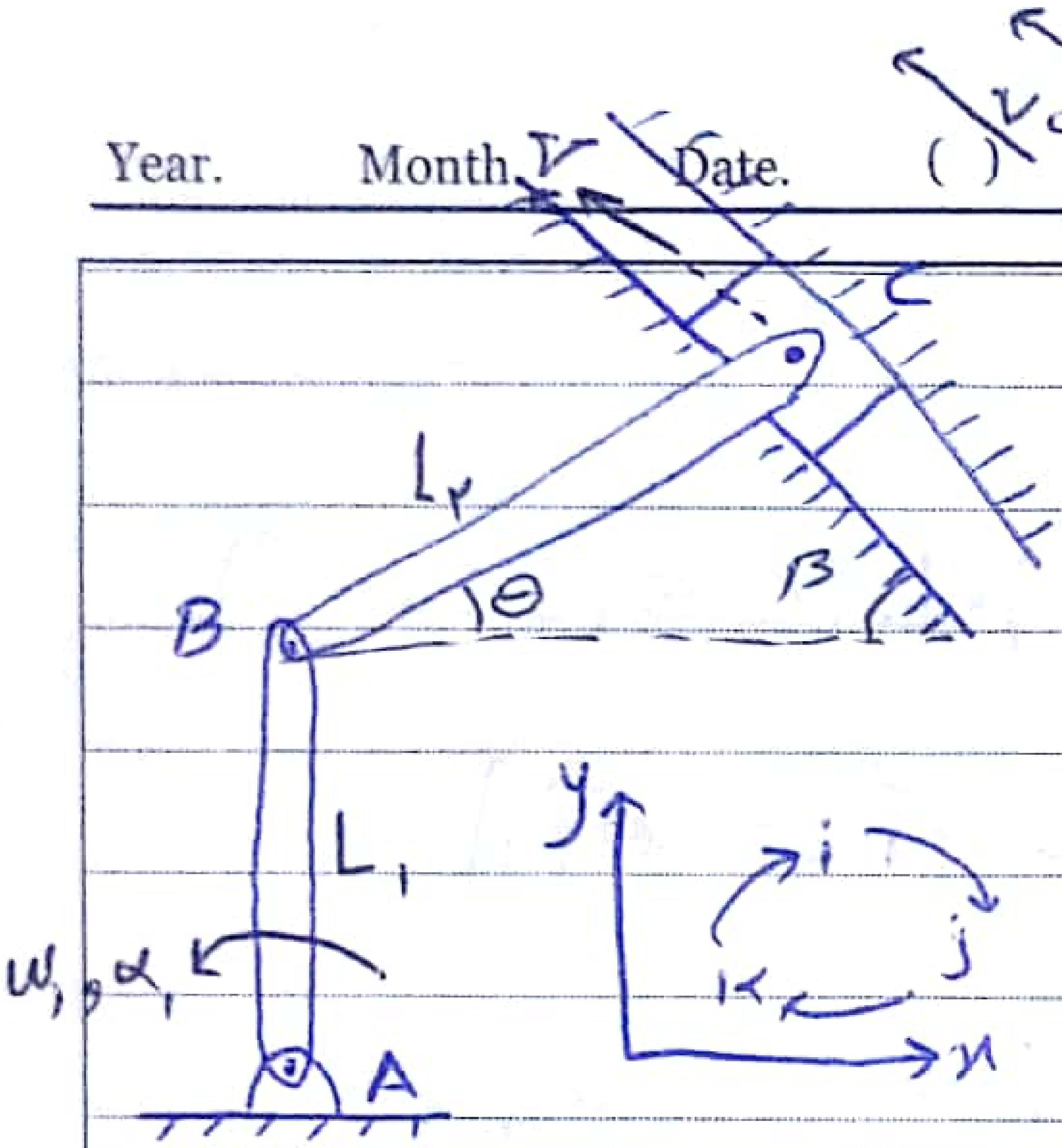
$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{\rho}_{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{\rho}_{AB})}$$

مثال ۱: در مکانیزم نشان داده شده قطعه C مقیّد است. داخل سطح

شیدار نشان داده شده حرکت می‌کند. در لحظه نشان داده شده سرعت و

Year. Month. Date. ( ) Subject :

جهت دلخواه a_C V_C



شتاب قطعه C چقدر است؟

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB}$$

$$\vec{V}_B = 0 + (\omega_1 \vec{k}) \times (l_1 \vec{j})$$

$$\boxed{V_B = -L_1 \omega_1 \vec{i}} \quad (1)$$

(2) $\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{BC}$ $\qquad \underset{?}{\vec{V}_C} = -L_1\omega_1\vec{i} + (\underset{?}{\omega_{BC}}\vec{k}) \times L_2$

$(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) \rightarrow \vec{V}_C = -L_1\omega_1\vec{i} + L_2\omega_{BC}\cos\theta\vec{j} - L_2\omega_{BC}\sin\theta\vec{i}$

$$\vec{V}_C(-\cos\beta\vec{i} + \sin\beta\vec{j})$$

$$\begin{cases} i: & -V_C\cos\beta = -L_1\omega_1 - L_2\omega_{BC}\sin\theta \\ j: & V_C\sin\beta = L_2\omega_{BC}\cos\theta \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{BC} &= \checkmark \\ V_C &= \checkmark \end{aligned}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB})$$

$$\vec{a}_B = 0 + \underbrace{(\alpha_1\vec{k}) \times (l_1\vec{j})}_{-L_1\alpha_1\vec{i}} + \underbrace{\left[(\omega_1\vec{k}) \times \underbrace{(\omega_1\vec{k} \times l_1\vec{j})}_{-l_1\omega_1\vec{i}}\right]}_{-L_1\omega_1^2\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -L_1\alpha_1\vec{i} - L_1\omega_1^2\vec{j}} \quad 3$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC}\times\vec{r}_{BC} + \vec{\omega}_{BC}\times(\vec{\omega}_{BC}\times\vec{r}_{BC}) \quad (4)$$

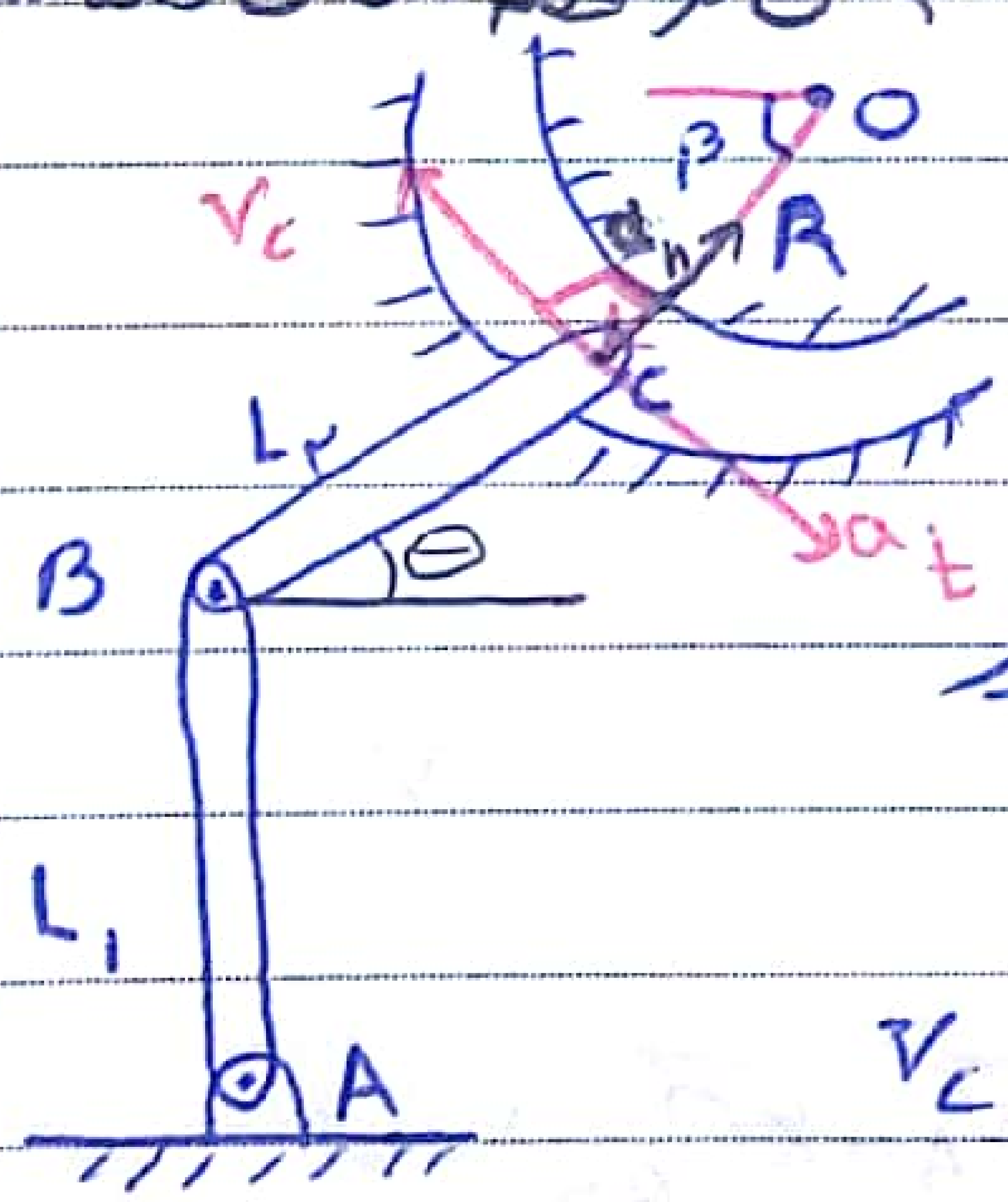
$$\underbrace{\vec{a}_C}_{?} = -l_1\alpha_1\vec{i} - l_1\omega_1^2\vec{j} + (\underbrace{\alpha_{BC}}_{?}\vec{k})\times l_2(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

$$+\,\omega_{BC}\vec{k}\times\left[(\omega_{BC}\vec{k})\times l_2(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})\right]$$

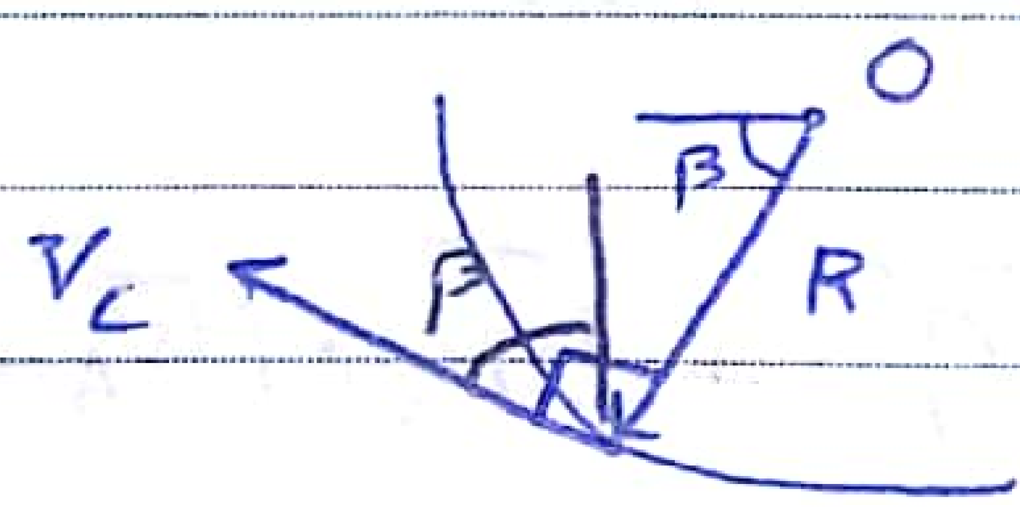
$$a_C(\cos\beta\,\vec{i} - \sin\beta\,\vec{j})$$

$$\boxed{\begin{cases} i: & \alpha_{BC} = \checkmark \\ j: & a_C = \checkmark \end{cases}}$$

مثال 2: درمثال قبل اگر قطعه C داخل سطح خمیده‌ای به شعاع R حرکت کند؛ مطلوبست محاسبه سرعت و شتاب آن در لحظه نشان داده شده



روابط 1 و 2 مانند مثال قبل نوشته شده، با این تفاوت که بردار $\vec{V}_C$ به صورت زیر نوشته می‌شود:



$$V_C(-\sin\beta\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j})$$

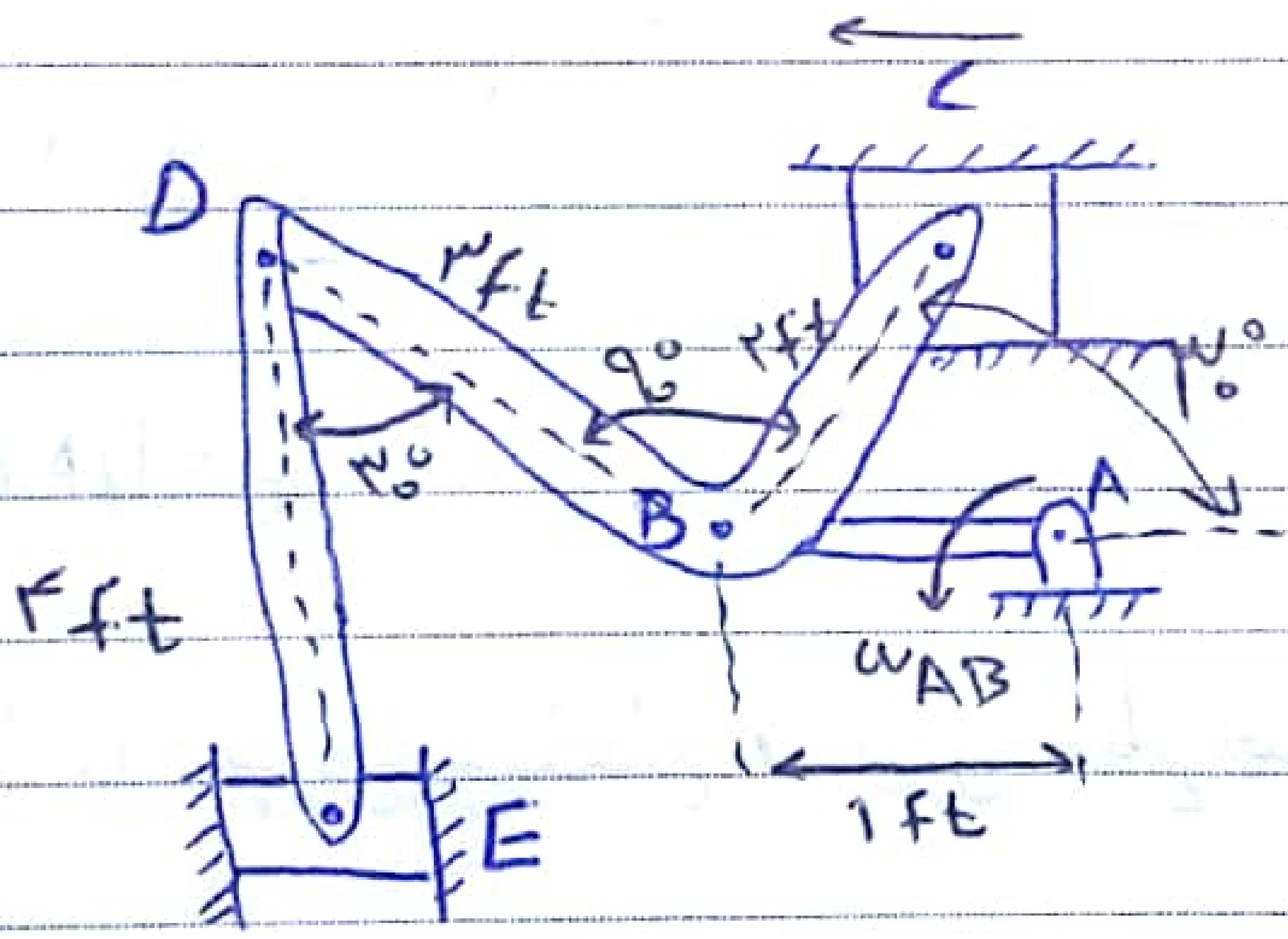
روابط 3 و 4 مانند مثال قبل نوشته شده، با این تفاوت که بردار شتاب a_C

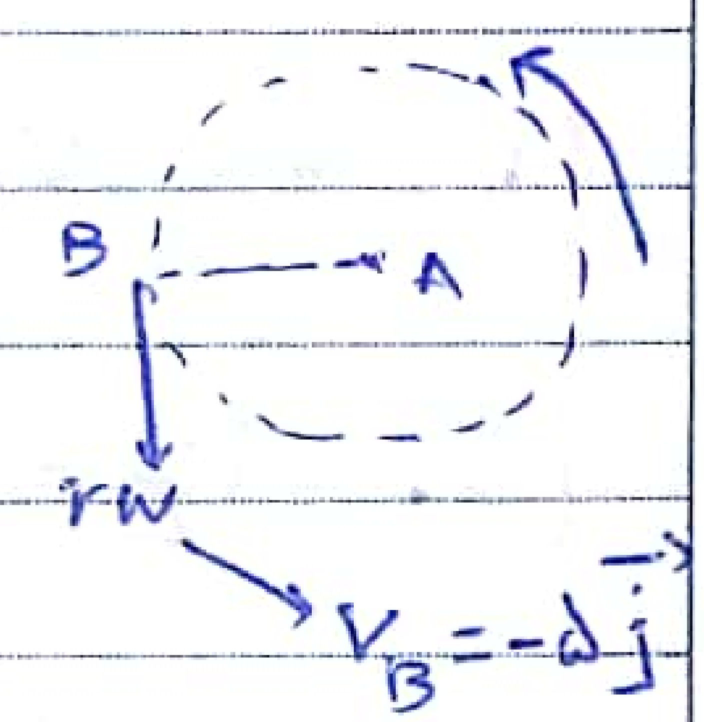
به صورت زیر نوشته می‌شود $a_t(\sin\beta\,\vec{i} - \cos\beta\,\vec{j}) + a_n(\cos\beta\,\vec{i} + \sin\beta\,\vec{j})$

که مقدار a_t، a_n و α_{BC} مجهول اند. ولی مقدار a_n از رابطه زیر

$\boxed{a_n = \frac{|v_c|^2}{R}}$ (فرض) به دست می‌آید، $\begin{cases} i: & a_t ✓ \\ j: & \alpha_{BC} ✓ \end{cases}$

مثال 3: اگر لینک AB با سرعت زاویه‌ای $5\,\frac{rad}{s}$ حول پین A دوران نماید، مطلوبست محاسبه‌ی سرعت اجسام C و E در لحظه نشان داده شده.





$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{\rho}_{BC}$

$-V_C\vec{i} = -5\vec{j} + (\omega_{BC}\vec{k}) \times (2)(\cos 30\,\vec{i} + \sin 30\,\vec{j})$

$2\omega_{BC}\cos 30\,\vec{j} - 2\omega_{BC}\sin 30\,\vec{i}$

چون حرکت در صفحه x-y ← w عمود بر صفحه

$\begin{cases} i: & -V_C = -2\omega_{BC}\sin 30 \\ j: & 0 = -5 + 2\omega_{BC}\cos 30 \end{cases}$

$$\boxed{\omega_{BC} = ۲/۸۸۷ \ \frac{rad}{s}} \quad , \quad \boxed{v_C = ۲/۸۹ \ \frac{ft}{s}}$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{r}_{BD}$$

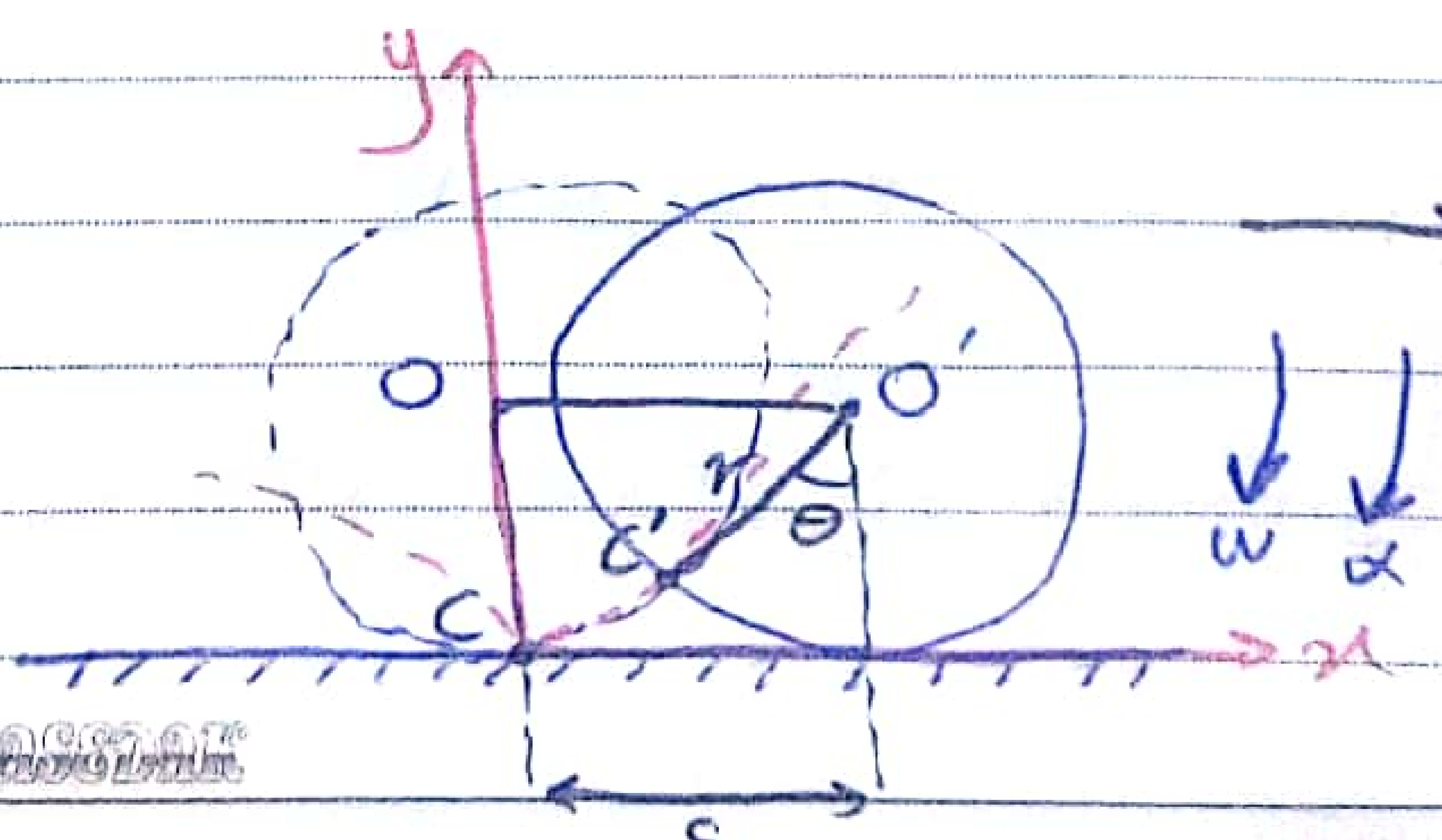
$$\vec{v}_D = -۵\vec{j} + (۲/۸۸۷\vec{k}) \times (۳)(-\sin۳۰\,\vec{i} + \cos۳۰\,\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{v}_D = -۷/۵\,\vec{i} - ۹/۳۳\,\vec{j}} \qquad \vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{DE} \times \vec{r}_{DE}$$

$$-v_E\vec{j} = -۷/۵\,\vec{i} - ۹/۳۳\,\vec{j} + \underbrace{(\omega_{DE}\vec{k}) \times (-۴\vec{j})}_{۴\omega_{DE}\vec{i}}$$

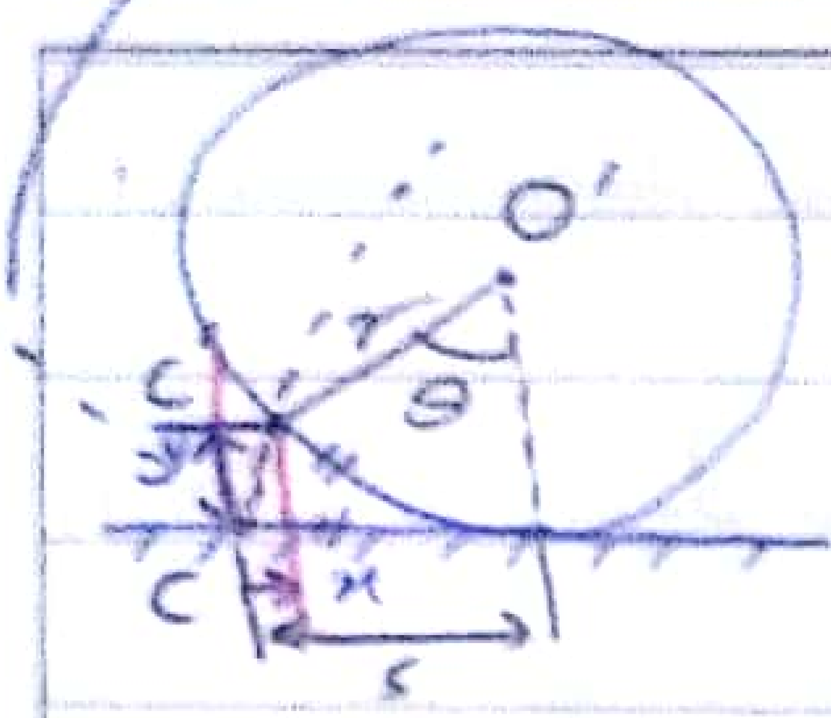
$$\begin{cases} i: & ۰ = -۷/۵ + ۴\omega_{DE} \\ j: & -v_E = -۹/۳۳ \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{l} v_E = ۹/۳۳ \ \frac{ft}{s} \\ \omega_{DE} = ۱/۸۷۵ \ \frac{rad}{s} \end{array}}$$

مثال 4: چرخی به شعاع r روی سطح هموار بدون لغزش می غلتد.
حرکت زاویه ای چرخ را برحسب حرکت خطی مرکز آن تعیین کنید، همچنین
شتاب نقطه ای واقع بر لبه ی چرخ را هنگامی که در تماس با سطح می باشد
تعیین کنید



منحنی سیکلوئید

Year. Month. Date. ( ) Subject :



حرکت چرخ غلت بدون لغزش

$s = r\theta \qquad \dot{s} = r\dot{\theta} = r\omega$

$\ddot{s} = r\ddot{\theta} = r\alpha \implies \boxed{\begin{cases} V_0 = r\omega \\ a_0 = r\alpha \end{cases}}$

$x = s - r\sin\theta \qquad y = r - r\cos\theta$

$= r\theta - r\sin\theta \qquad = r(1-\cos\theta)$

$= r(\theta - \sin\theta)$

مکان هندسی نقطه C (منحنی سیکلوئید)

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$\dot{x} = r(\dot{\theta} - \dot{\theta}\cos\theta) \qquad \dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta$

$\boxed{\dot{x} = r\omega(1-\cos\theta) = V_0(1-\cos\theta)} \qquad \dot{y} = r\omega\sin\theta$

$\boxed{\dot{y} = V_0\sin\theta}$

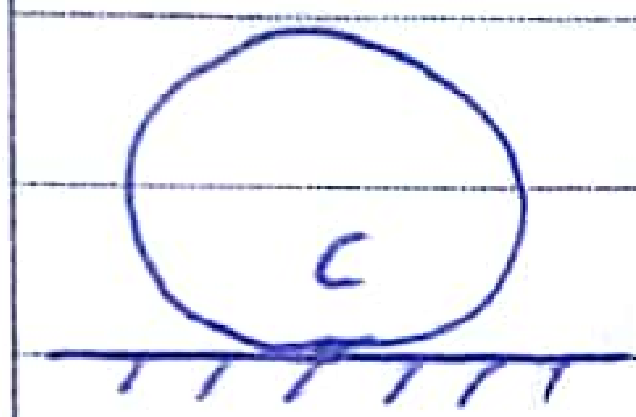
$\ddot{x} = \dot{V}_0(1-\cos\theta) + V_0\dot{\theta}\sin\theta \qquad \ddot{y} = \dot{V}_0\sin\theta + V_0\dot{\theta}\cos\theta$

$\boxed{\ddot{x} = a_0(1-\cos\theta) + r\omega^2\sin\theta} \qquad \boxed{\ddot{y} = a_0\sin\theta + r\omega^2\cos\theta}$

برای نقطه در شرف تماس با زمین $\boxed{\theta = 0}$

۱- سرعت نقطه تماس با زمین صفر است.

۲- شتاب نقطه تماس با زمین $\boxed{a = r\omega^2}$



$\boxed{v_c = 0}$ $\boxed{\vec{a}_c = r\omega^2 \vec{j}}$

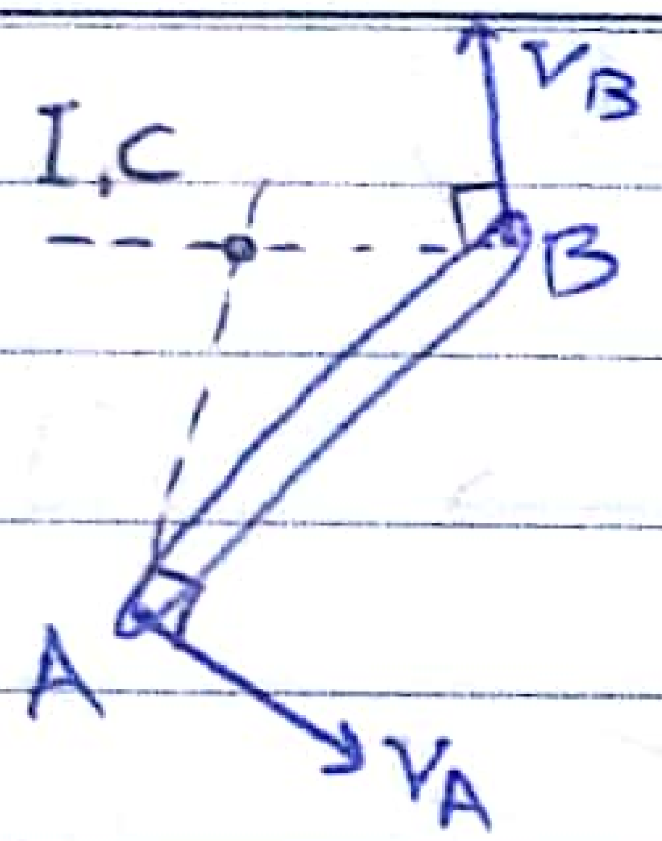
مثال: دیسکی به شعاع r در صفحه xy روی سطح افقی با غلت بدون لغزش حرکت می کند. اگر سرعت مرکز دیسک برابر v_0 باشد سرعت زاویه ای دیسک را تعیین کنید. حرکت: غلت بدون لغزش

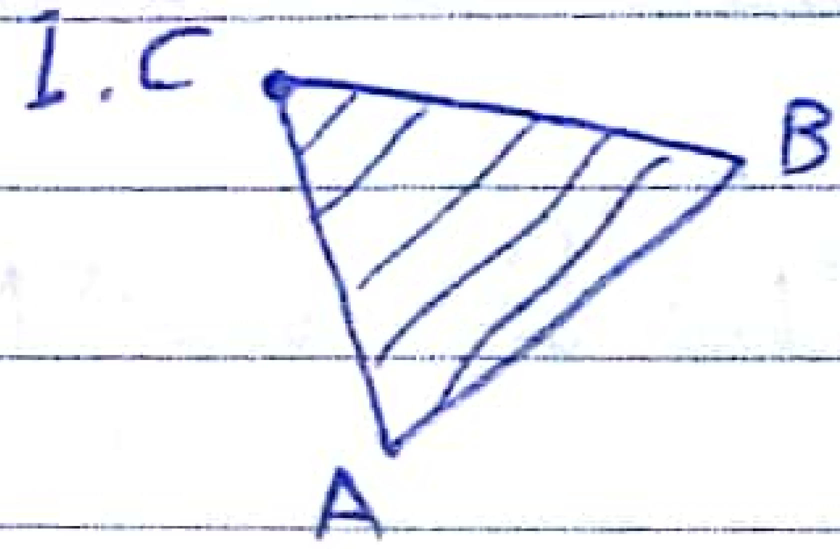
$$\vec{v}_c = \vec{v}_p + \vec{\omega}_{pc} \times \vec{r}_{pc}$$

$$v_0 \vec{i} = 0 + (\omega \vec{k}) \times (R \vec{j}) \qquad v_0 \vec{i} = -R\omega \vec{i}$$

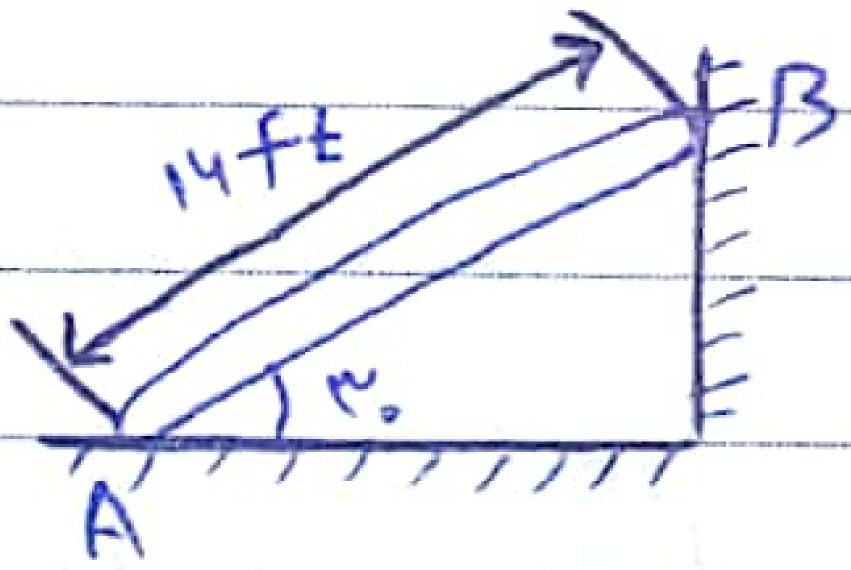
$$v_0 = -R\omega \Rightarrow \boxed{\omega = -\frac{v_0}{R}}$$

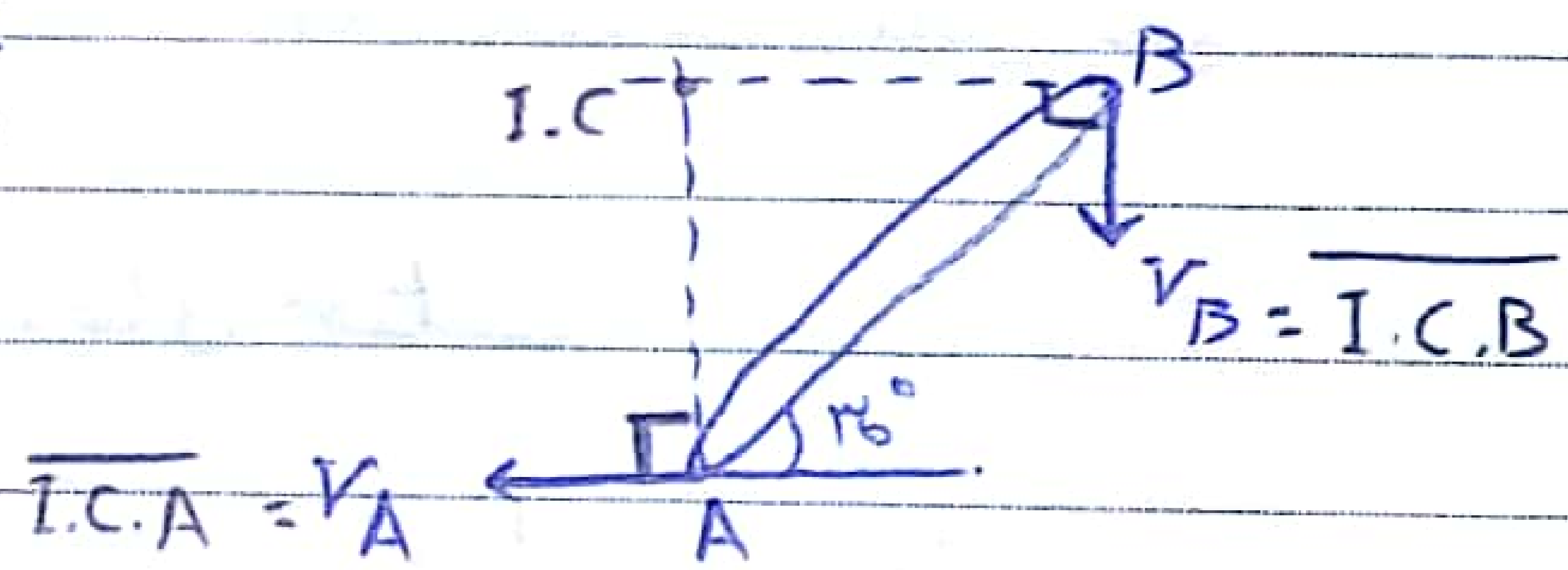
مرکز آنی دوران: نقطه ای است فرضی که سرعت آن برابر با صفر ولی شتاب آن برابر با صفر نمی باشد و جسم در هر لحظه حول آن در حال دوران می باشد. مرکز آنی دوران می تواند بر روی جسم و یا خارج از آن باشد.





مثال: سرعت نقطه B از میله نشان داده شده دارای سرعت $4\ \frac{ft}{s}$ و شتاب $2\ \frac{ft}{s^2}$ به سمت پایین می باشد. مطلوبست محاسبه شتاب نقطه A در لحظه نشان داده شده، با استفاده از مرکز آنی دوران.





$v_B = \overline{I.C.B}\,\omega \qquad \omega = \frac{v_B}{\overline{I.C.B}} = \frac{4}{14\cos 30^\circ} \qquad \omega = 0.288\ \frac{rad}{s}$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BA} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega}_{BA} \times (\vec{\omega}_{BA} \times \vec{r}_{BA})$$

$$-a_A\vec{i} = -2\vec{j} + (\alpha\vec{k}) \times (14)(-\cos 30^\circ\,\vec{i} - \sin 30^\circ\,\vec{j}) + (-0.288\vec{k})$$
$$\times \left[(-0.288\vec{k}) \times (14)(-\cos 30^\circ\,\vec{i} - \sin 30^\circ\,\vec{j})\right]$$

$$\begin{cases} i: -a_A = 8\alpha + 1.1547 \qquad j: 0 = -2 - 13.856\alpha + 0.6667 \end{cases}$$

$$\alpha = -0/0942\,\frac{rad}{s^2} = 0/0942\,\frac{rad}{s^2}\ \circlearrowright$$

$$a_A = -0/385\,\frac{ft}{s^2} = 0/385\,\frac{ft}{s^2} \longrightarrow$$

«۹۵/۰۹/۱۵»

سینتیک ذره   بررسی حرکت ذره با درنظر گرفتن عوامل حرکت که این

علم مبتنی بر رابطه تجربی زیر: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\sum \vec{F}$: برآیند نیروهای خارجی

M : جرم ذره $\vec{a}$: شتاب مطلق ذره

قانون نیوتن در دستگاه های مختلف

۱- دستگاه دکارتی

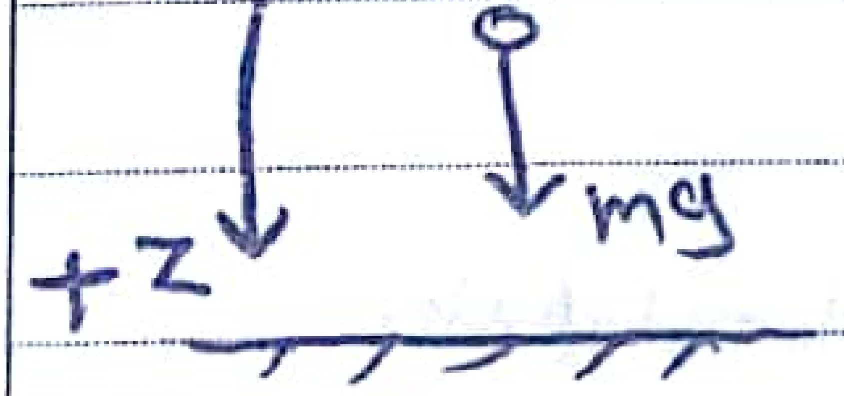
$$\sum F_x = ma_x = m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = ma_y = m\frac{dv_y}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y}$$

$$\sum F_z = ma_z = m\frac{dv_z}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\ddot{z}$$

جهت سادگی محاسبات نیروها به چهار دسته زیر تقسیم بندی می‌شوند:

۱- نیروهای ثابت (مانند نیروی وزن)



مثال ۱: جسمی به جرم m در خلأ تحت تأثیر نیروی وزن سقوط آزاد می‌کند. معادلات حرکت آن را بیابید.

$F=ma$

$+mg=ma$ $\boxed{a=+g}$ $a=\frac{dv}{dt}=+g$

$\boxed{v=+gt+c_1}$ $v=\frac{dz}{dt}=+gt+c_1$

$$\boxed{z=+\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2}$$

شرایط مرزی $\{t=t_0 ,\ z=z_0 ,\ v=v_0\}$

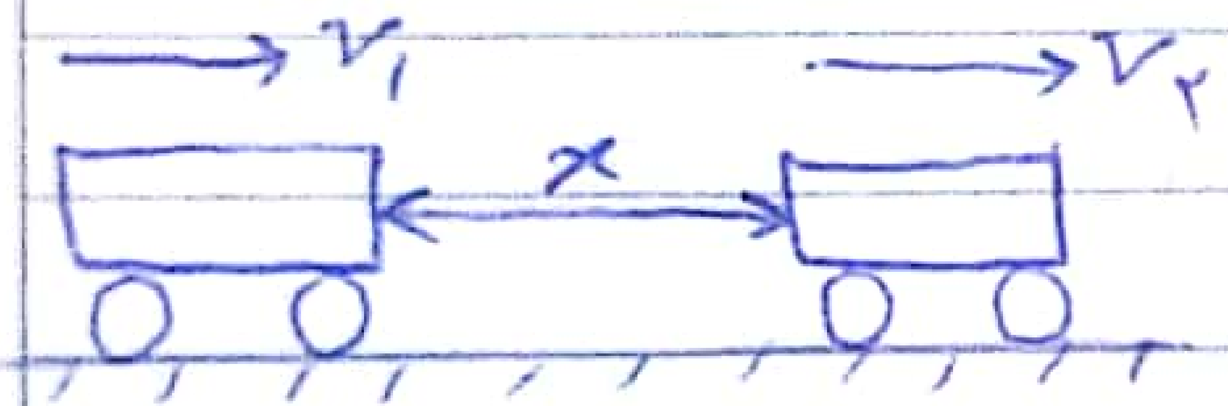
2. نیروهای تابع سرعت (مانند نیروی اصطکاک و نیروی مقاومت هوا)

$F=ma$ $f(v)=m\frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dv}{f(v)}=\frac{1}{m}dt$

$$\boxed{\int\frac{dv}{f(v)}=\frac{1}{m}t+c}$$

مثال 2: واگنی به جرم m روی یک ریل با اصطکاک حرکت می‌کند. نیروی اصطکاک از رابطه‌ی $F=-kv$ به دست می‌آید. مطلوبست مسافت طی‌شده بین دو سرعت v_1 و v_2. v سرعت در هر لحظه است.



$F=-kv \qquad F=ma$

$$-kv=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt}$$

$$-k\cancel{v}=m\cancel{v}\frac{dv}{dx} \qquad \int_{x_1}^{x_2}dx=\int_{v_1}^{v_2}-\frac{m}{k}dv$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{m}{k}(v_1-v_2)}$$

3- نیروهای تابع زمان (مانند نیروهای ضربه)

$$F=ma \qquad f(t)=m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{m}f(t)\,dt \qquad v-v_0=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}f(t)\,dt$$

$$\boxed{v=v_0+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}f(t)\,dt}$$

$$\boxed{v=v_0+\frac{1}{m}\ (\text{سطح زیر نمودار } f-t)}$$

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$$

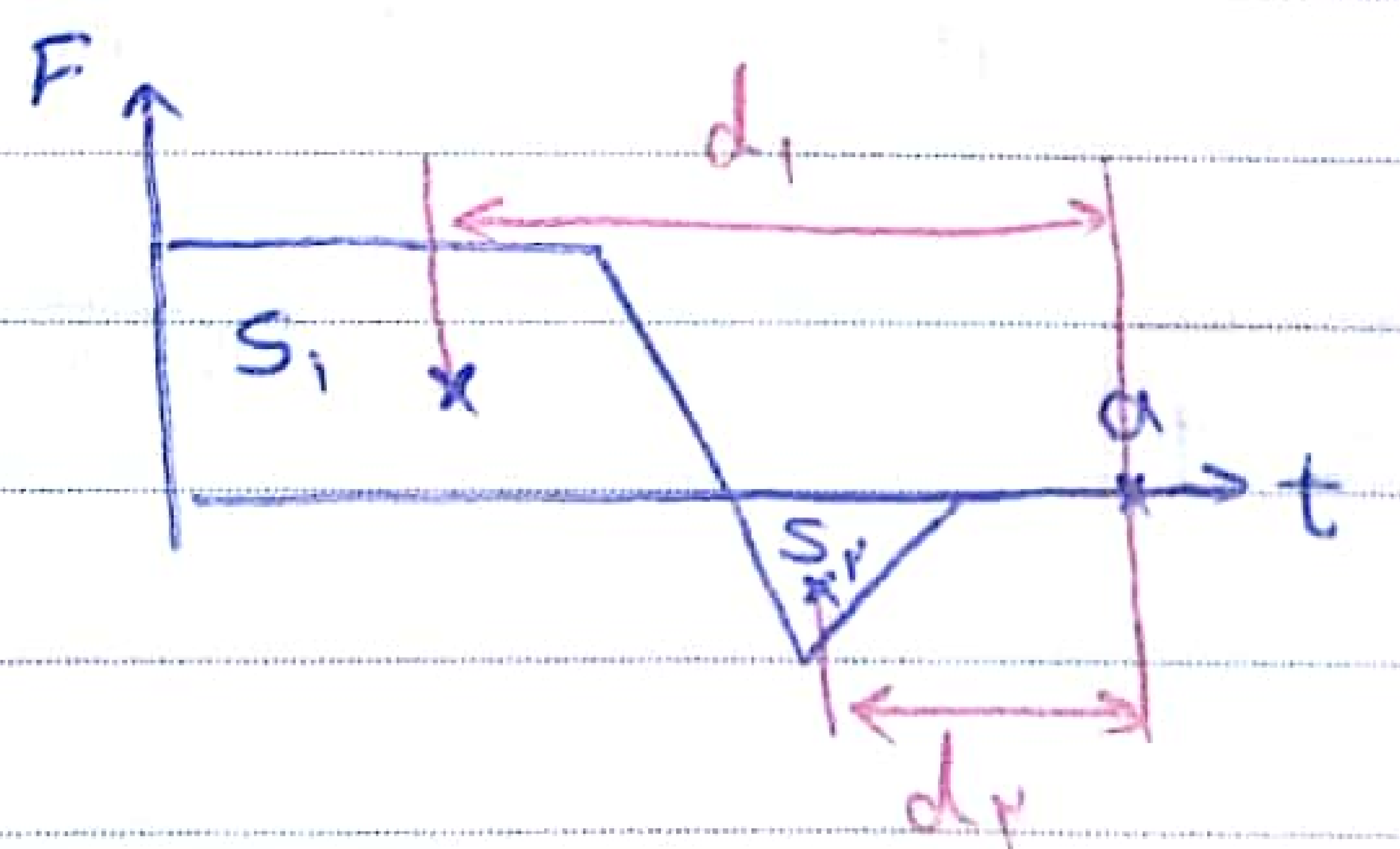
$$\int_{x_0}^{x} dx=\int_{t_0}^{t} v_0\,dt+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt\right)dt$$

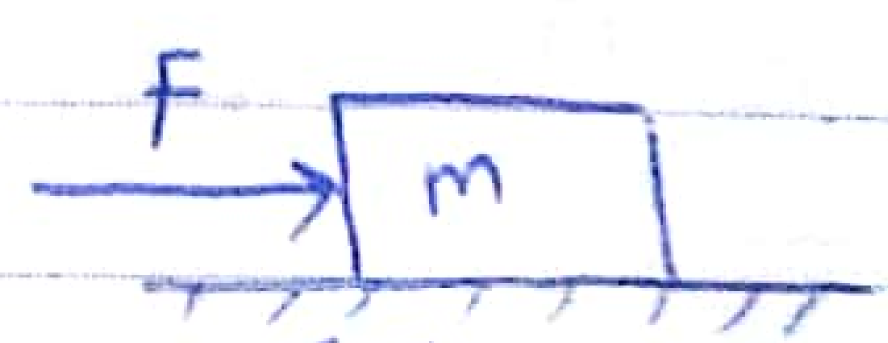
$$x-x_0=v_0(t-t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt\right)dt$$

$$\boxed{x=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt\right)dt}$$

$x=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{1}{m}$ (انتگرال سطح زیر منحنی نمودار F_t نسبت به نقطه t)

مثال 3 : جرم m روی زمین بدون اصطکاک در حالت سکون قرار دارد. در این لحظه نیروی زمانی f به آن اثر می کند. مطلوب است سرعت جرم و جابجایی آن در لحظه $t=a$.





صفر

$$v=\cancel{v_0}+\frac{1}{m}(S_1-S_2+0)$$

$$\boxed{v=\frac{1}{m}(S_1-S_2)}$$

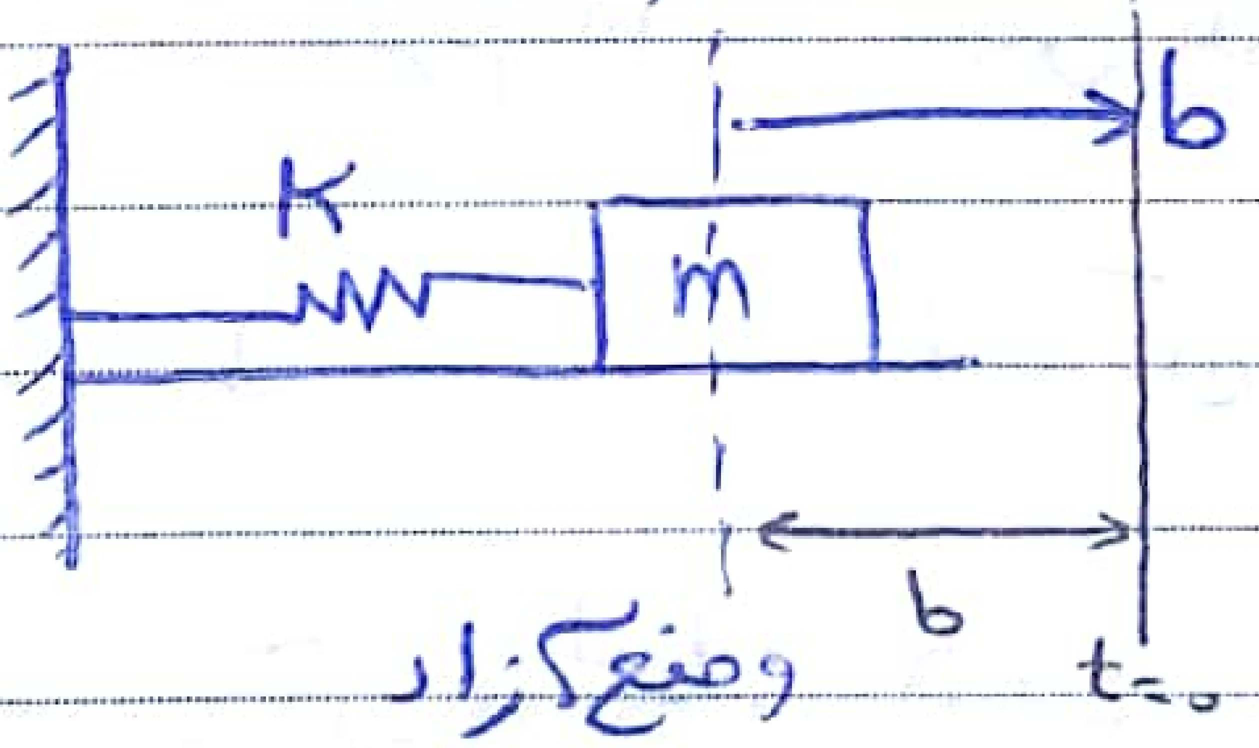
$x = \cancel{x_0} + \cancel{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{m}$ (مساحت هر سطح x فاصله افقی
مرکز هر سطح تا نقطه $t=0$
با حفظ علامت سطح)

$$\boxed{x = \frac{1}{m}(s_1 d_1 - s_2 d_2)}$$

$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$ مرکز سطح

4- نیروهای تابع مکان (مانند نیروی جاذبه عمومی و نیروی فنر)

مثال 4: جرم m به انتهای فنری با ضریب k جوش شده است. فنر را به اندازه اولیه b از وضعیت آزاد منحرف می کنیم و بدون سرعت اولیه رها می شود. مطلوبست معادله حرکت جرم.



$$-kx = ma = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \to r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i$$

$$\boxed{x = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}$$

$$\boxed{v = -c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

شرایط مرزی / $t=0 \quad v=0 \quad x=b$

$t=0 \longrightarrow v=0 \Rightarrow \boxed{C_2=0}$

$t=0 \longrightarrow x=b \Rightarrow \boxed{C_1=b}$

$$\Rightarrow \boxed{x=b\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}$$

2_ قانون نیوتن در دستگاه استوانه‌ای

$$\Sigma F_r=ma_r=m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)$$

$$\Sigma F_\varphi=ma_\varphi=m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})$$

$$\Sigma F_z=ma_z=m\ddot{z}$$

3_ قانون نیوتن در دستگاه هرنه

$$\Sigma F_t=ma_t=m\frac{d^2s}{dt^2}$$

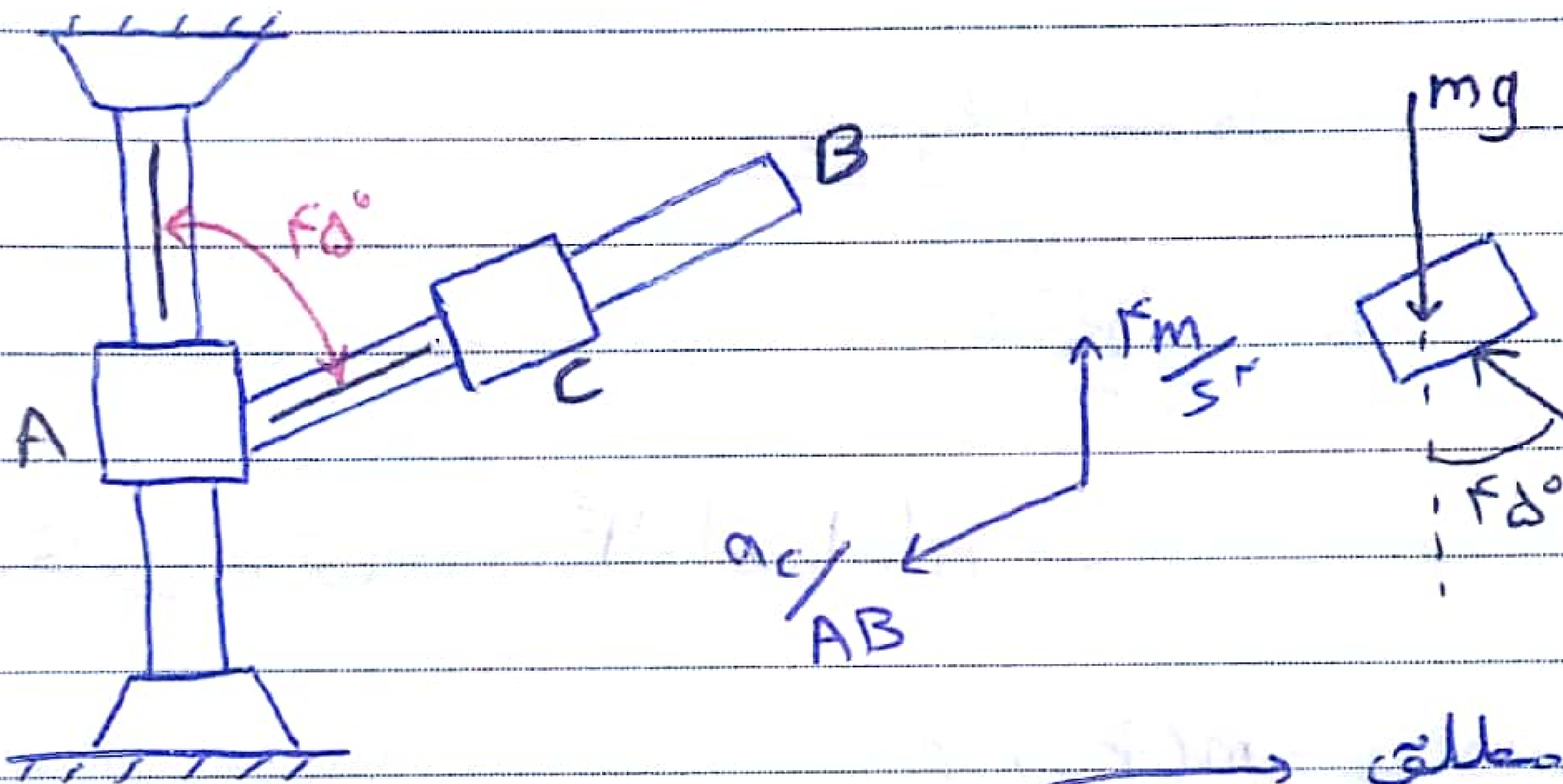
$$\Sigma f_n=ma_n=m\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho}$$

مثال 5) طوقه c به جرم 2kg می‌تواند آزادانه بر روی میله ی ab

Year. Month. Date. ( ) Subject :

حرکت نماید. مطلوبست محاسبه‌ی شتاب طوقه‌ی C اگر طوقه‌ی C

دارای شتاب $4 \frac{m}{s^2}$ به سمت بالا باشد



شتاب مطلق

$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = m a_x$

$N \sin 45^\circ = m(a_{C/AB} \sin 45^\circ)$ $\boxed{N = 2 a_{C/AB}}$

$+\uparrow \Sigma F_y = m a_y$ $N \cos 45^\circ - mg = m(4 - a_{C/AB} \cos 45^\circ)$

$\Rightarrow \boxed{a_{C/AB} = 9.765 \frac{m}{s^2}}$

$\vec{a}_C = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{C/AB}$ $\vec{a}_{Cx} = 0 + 9.765 \sin 45^\circ$

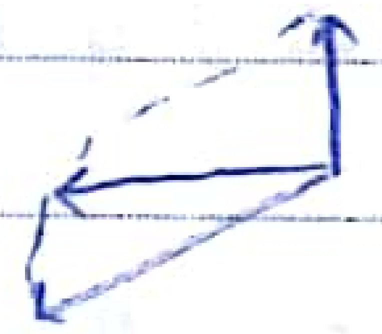
$\vec{a}_{Cy} = 4 + (-9.765 \cos 45^\circ)$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

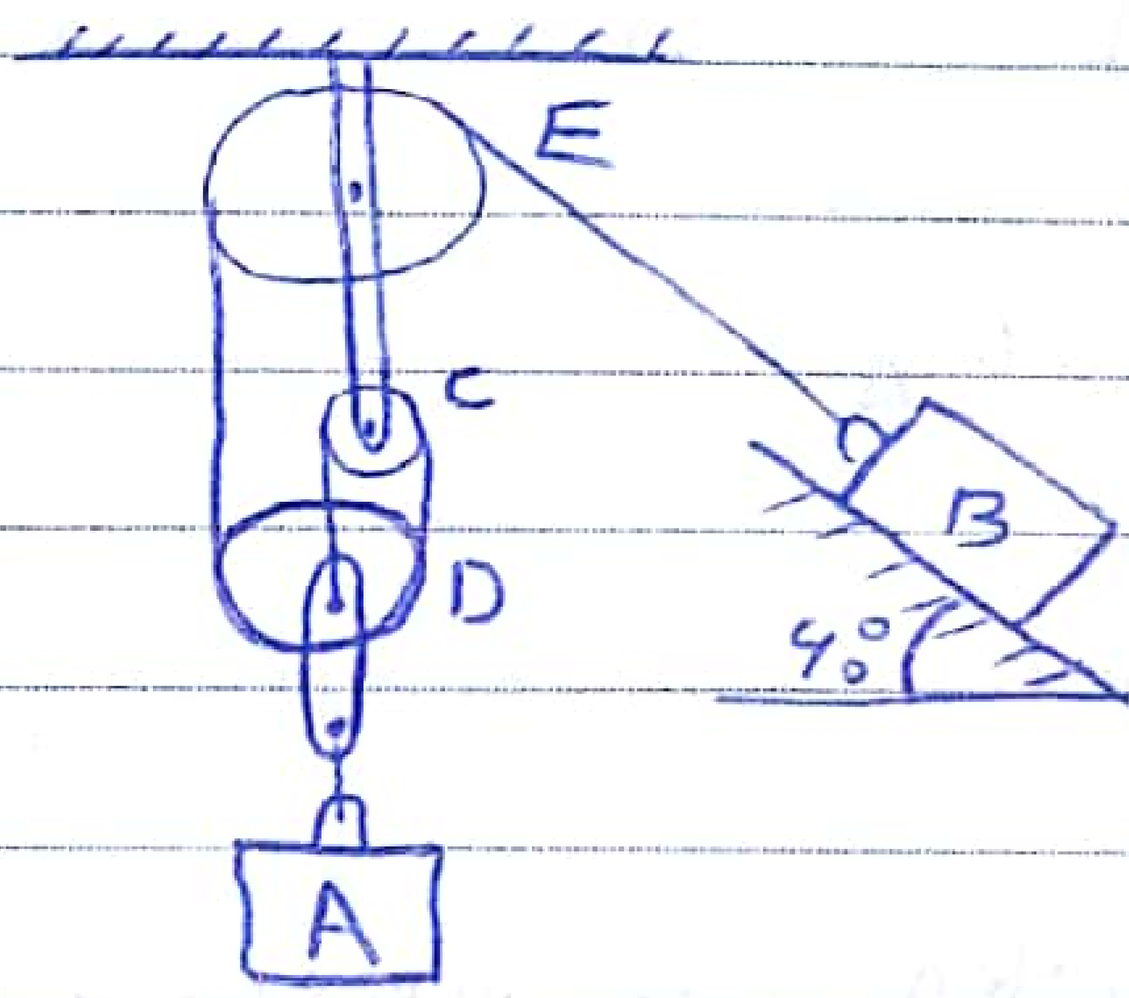
$a_{Cx} = 4/905 \leftarrow$ ، $a_{Cy} = 2/905 \downarrow$

$a_C = \sqrt{(4/905)^2 + (2/905)^2} = 7/49 \, \frac{m}{s^2}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{2/905}{4/905} = 22/8^\circ$



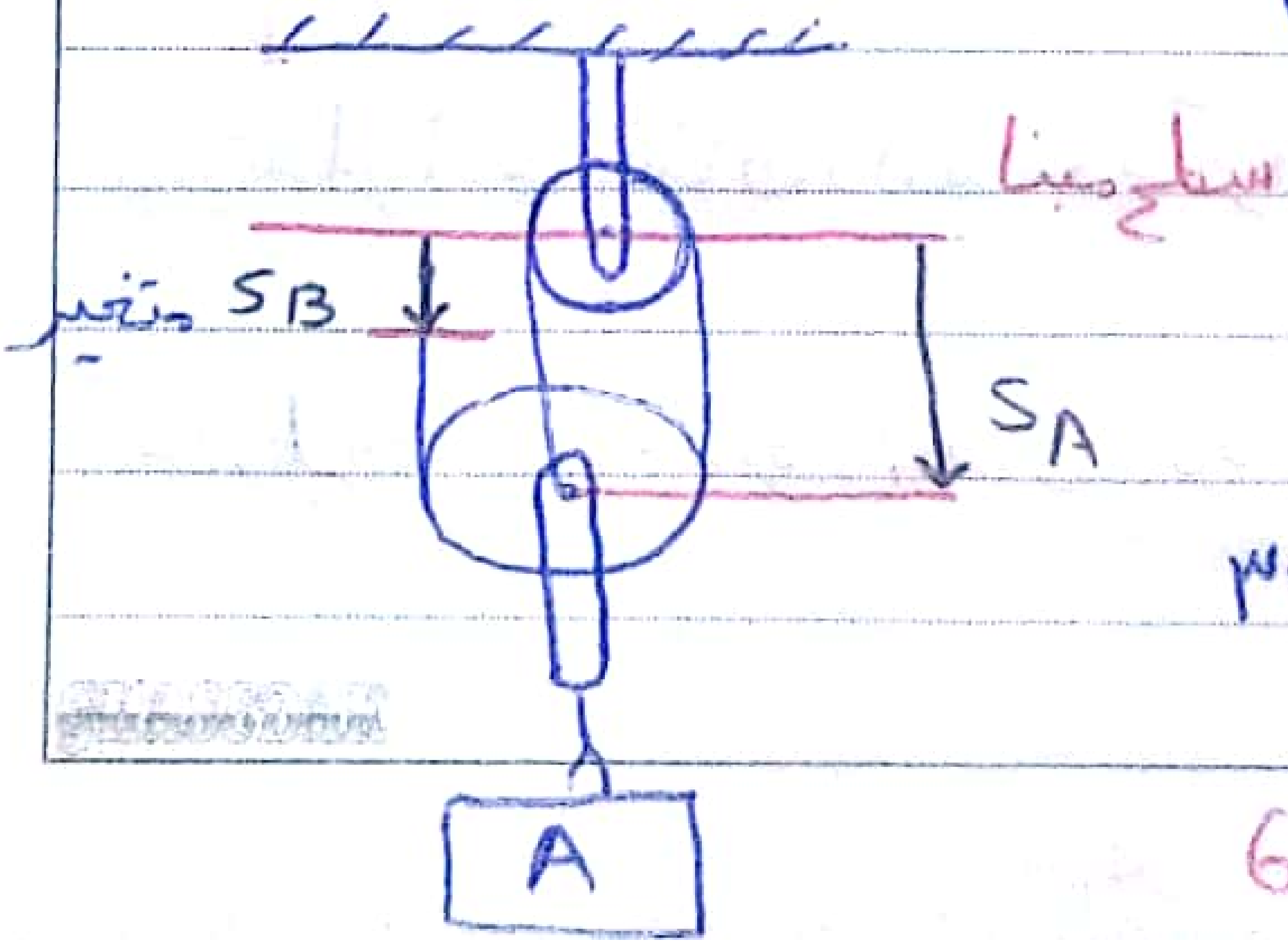
مثال ۶) مطلوبست محاسبه‌ی جرم مورد نیاز جسم A به طوری که وقتی که از حالت سکون رها می‌شود جسم B را (به جرم 5kg) در زمان t=2s به مقدار 0/75m بر روی سطح شیبدار به سمت بالا جابجا نماید. از جرم پولی و طناب‌ها صرف نظر شود.



$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a_B t^2$

$0/75 = 0 + 0 + \frac{1}{2} a_B (2)^2$

$\boxed{a_B = 0/375 \, \frac{m}{s^2}}$



$2S_A + (S_A - S_B) = L$

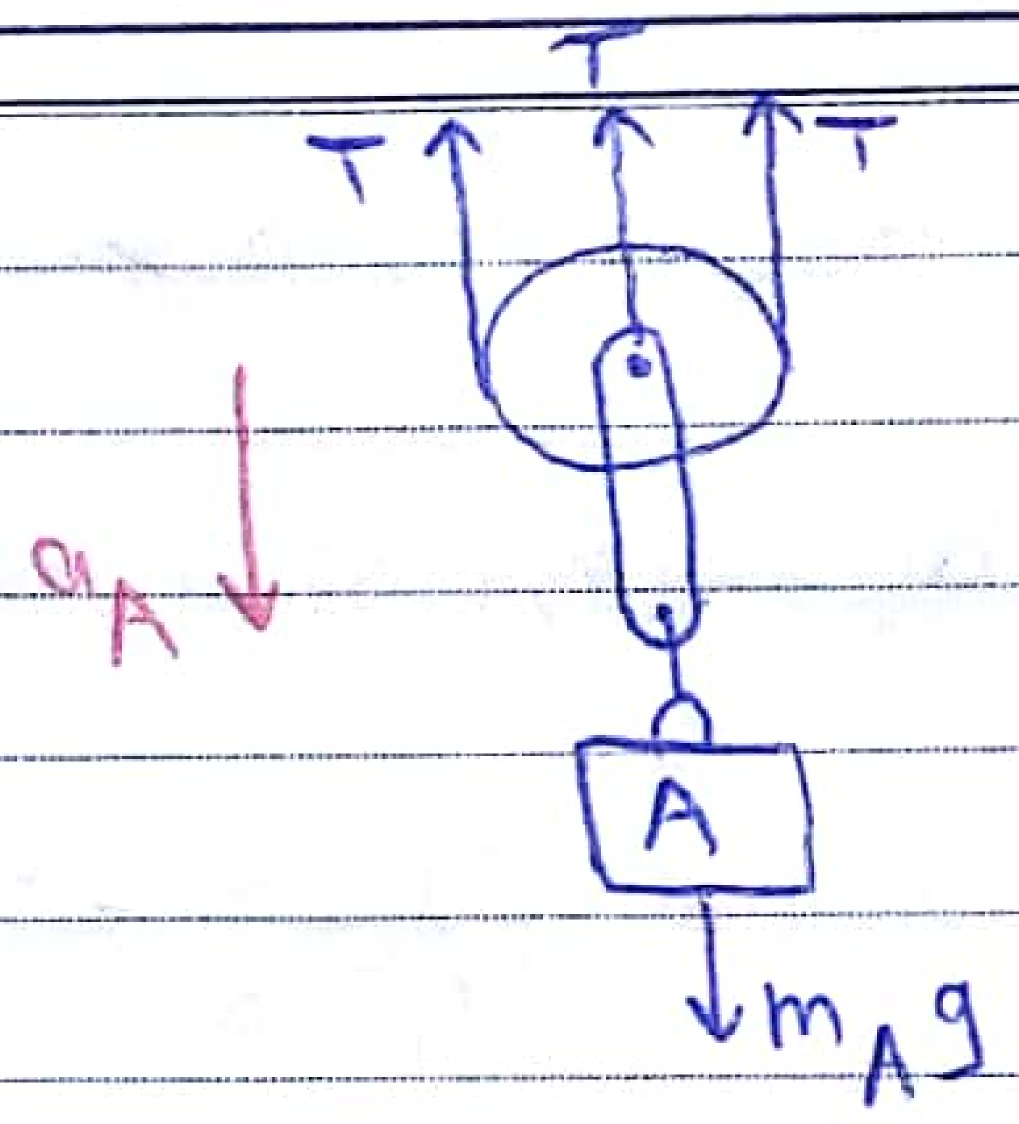
$3S_A - S_B = L$

$\boxed{3a_A = a_B}$

Scanned by CamScanner

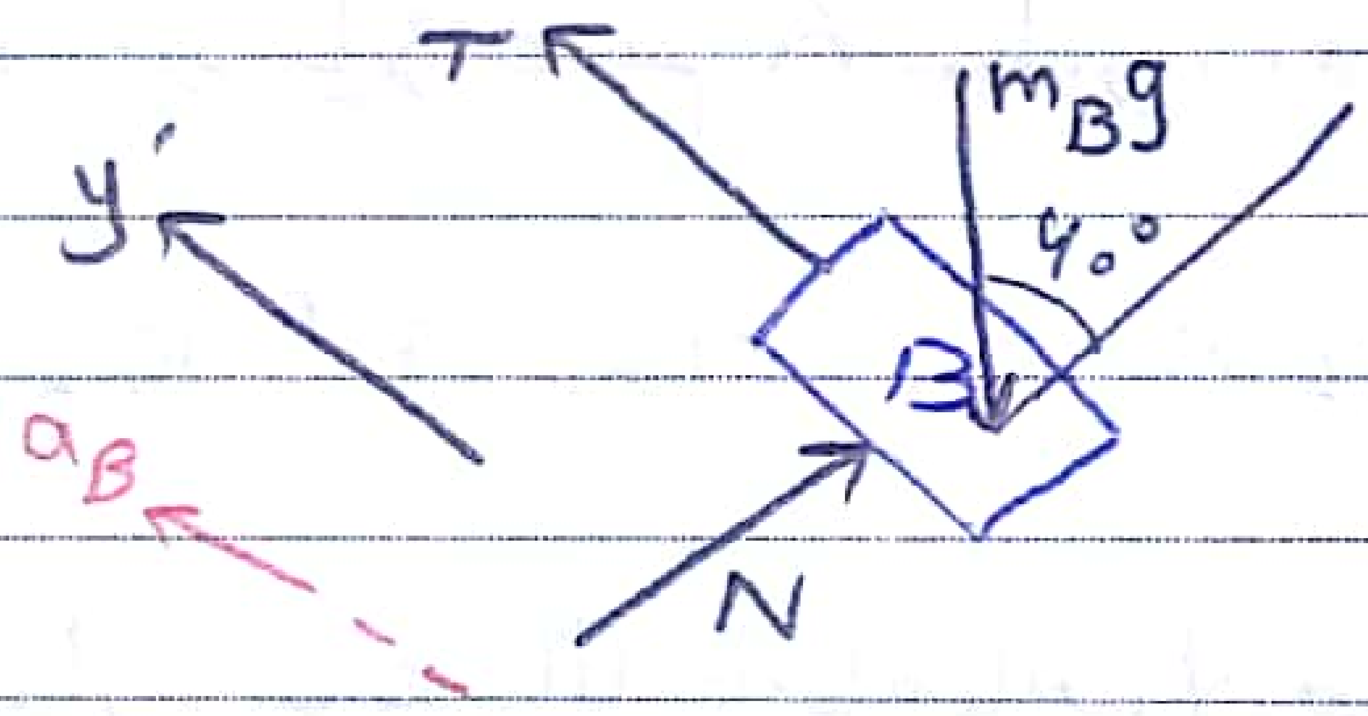
Year. Month. Date. ( ) Subject :

$$\Longrightarrow \boxed{a_A = 0/125 \ \frac{m}{s^2}}$$



$$+\downarrow \ \Sigma F_y = m a_y$$

$$\boxed{m_A g - 3T = m_A a_A}$$



$$\Sigma F_{y'} = m a_{y'}$$

$$T - m_B g \sin 60° = m_B a_B$$

$$T - 5(9/8)\sin 60 = 5(0/375)$$

$$\boxed{T = 44/35 N}$$

$$m_A(9/81) - 3(44/35) = 0/125 \, m_A$$

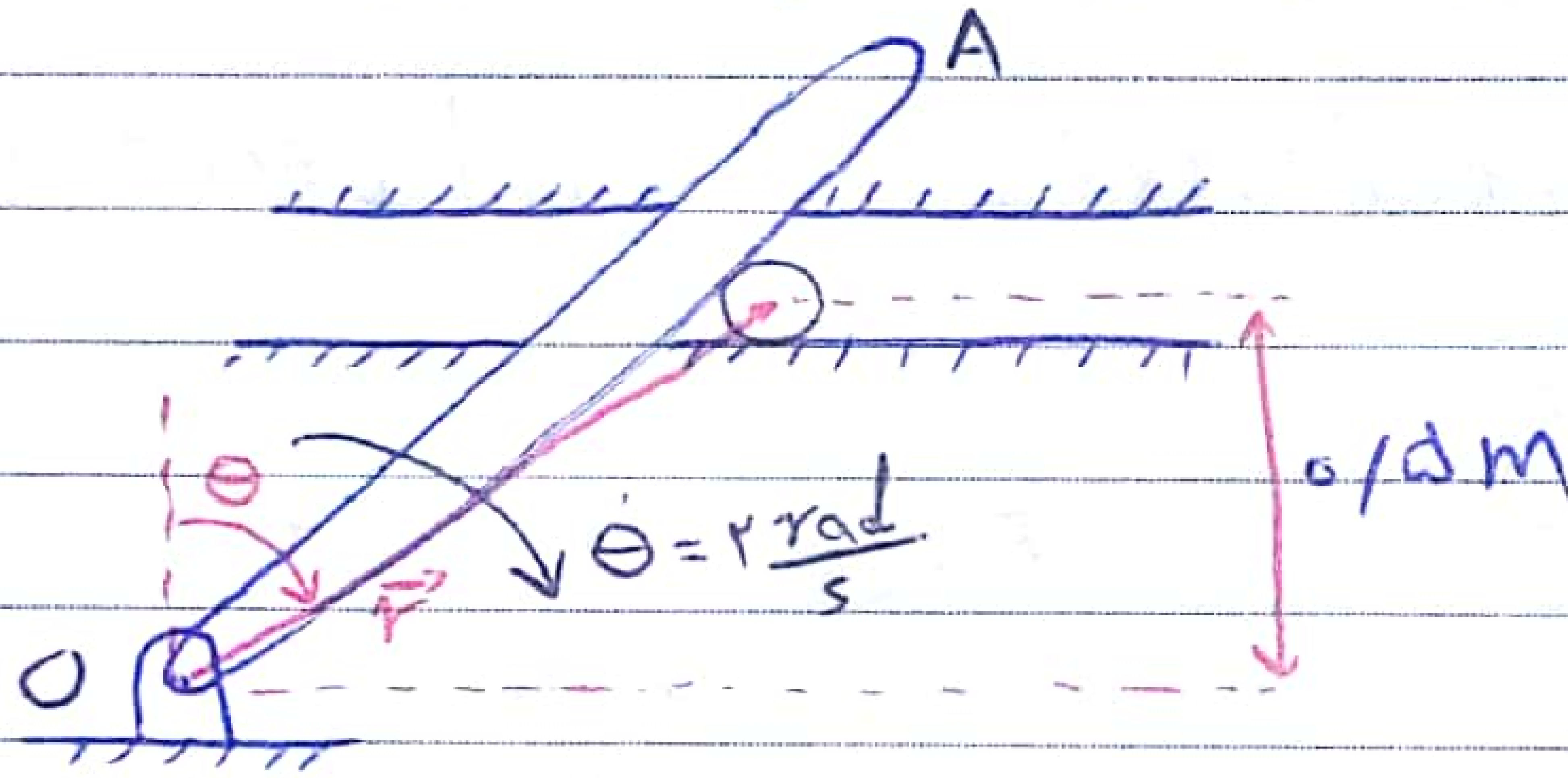
$$\boxed{m_A = 13/7 \ kg}$$

مثال ۶) ذره‌ای به جرم 15kg، با استفاده از دوران میله OA بر روی سطح افقی نشان داده شده حرکت می‌نماید. مطلوبست محاسبه نیروی که از طرف میله به ذره وارد می‌شود و همچنین محاسبه نیروی عمودی که از

Year. Month. Date. ( ) Subject :

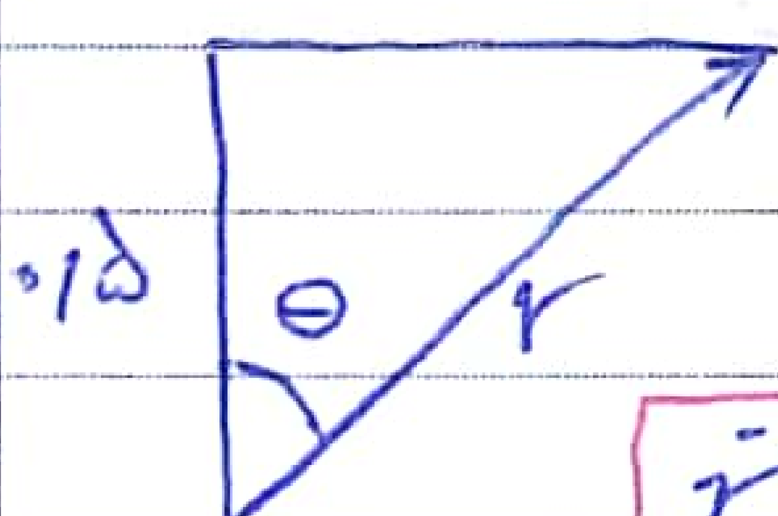
طرف سطح راهنما بر ذره وارد می‌شود وقتی که $\theta = 30^\circ$ است.

میله OA دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = 2\,\frac{rad}{s}$ می‌باشد



$$\Sigma F_r = m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\Sigma F_\theta = m a_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$



$$\cos\theta = \frac{0.5}{r} \qquad \boxed{r = \frac{0.5}{\cos\theta} = 0.5\sec\theta}$$

$$\boxed{\dot{r} = 0.5\sec\theta\tan\theta\,\dot{\theta}}$$

$$\ddot{r} = 0.5\Big\{\big[(\sec\theta\tan\theta\,\dot{\theta})\tan\theta + \sec\theta(\sec^2\theta\,\dot{\theta})\big]\dot{\theta} + \sec\theta\tan\theta\,\ddot{\theta}\Big\}$$

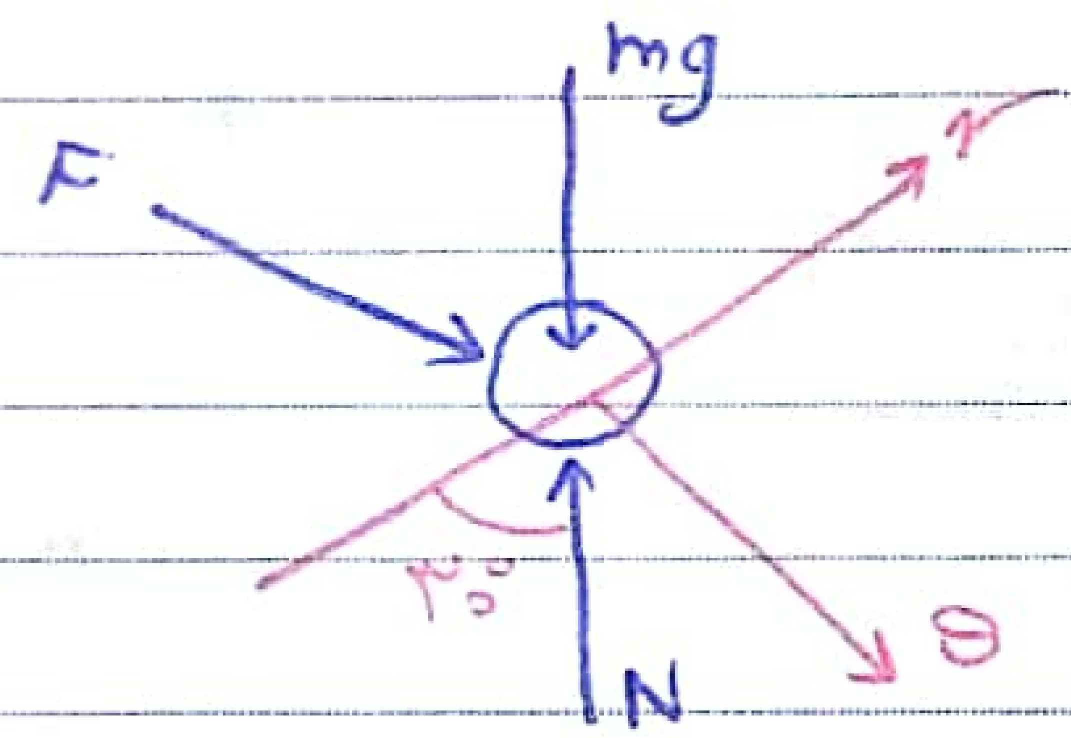
$$\boxed{\ddot{r} = 0.5\left[\sec\theta\tan^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \sec^3\theta\,\dot{\theta}^2 + \sec\theta\tan\theta\,\ddot{\theta}\right]}$$

$\theta = 30^\circ$, $\dot{\theta} = 2\,\frac{rad}{s}$, $\ddot{\theta} = 0$

$r = ۰/۵ \sec ۳۰^\circ = ۰/۵۷۷ \, m$

$\dot{r} = ۰/۵ \sec ۳۰^\circ \tan ۳۰^\circ (۲) = ۰/۴۷ \, \frac{m}{s}$

$\ddot{r} = ۰/۵ [\sec ۳۰ \tan^۲ ۳۰ (۲)^۲ + \sec^۳ ۳۰^\circ (۲)^۲ + \sec ۳۰ \tan ۳۰ (۰)] = ۳/۸۵ \, \frac{m}{s^۲}$



$\overset{+}{\nearrow} \; \Sigma F_r = N \cos ۳۰^\circ - mg \cos ۳۰^\circ = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲)$

$$\boxed{N = ۵/۷۹ \, N}$$

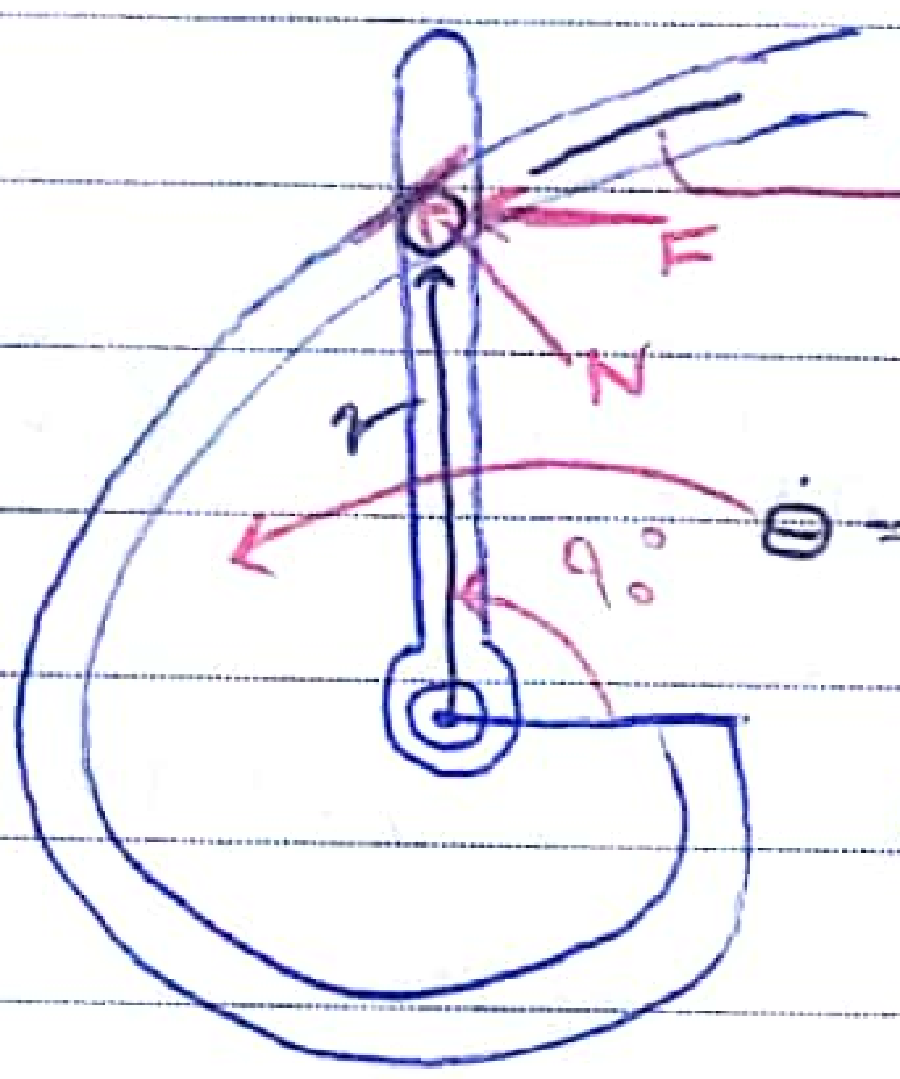
$\underset{+}{\searrow} \; \Sigma F_\theta = F - N \sin ۳۰^\circ + mg \sin ۳۰ = m(r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta})$

$$\boxed{F = ۱/۷۸ \, N}$$

مثال ۵: بازوی نشان داده شده در لحظه ای که $\theta = ۹۰^\circ$ است دارای سرعت زاویه ای $\dot{\theta} = ۵ \, \frac{rad}{s}$ و شتاب زاویه ای $\ddot{\theta} = ۲ \, \frac{rad}{s^۲}$ می باشند.

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مطلوبست محاسبه‌ی نیروی عمودی که بر ذره‌ی $0/5\ Kg$ نشان داده شده وارد می‌شود. اگر ذره مقید باشد بر روی منحنی مارپیچ هذلولی افقی با رابطه‌ی $r\theta = 0/2\,m$ حرکت نماید.



$$r = \frac{0/2}{\theta}$$

$$\dot{\theta} = 5\,\frac{rad}{s}\ ,\quad \ddot{\theta} = 2\,\frac{rad}{s^2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} = 90°\ ,\quad \dot{\theta} = 5\,\frac{rad}{s}\ ,\quad \ddot{\theta} = 2\,\frac{rad}{s^2}$$

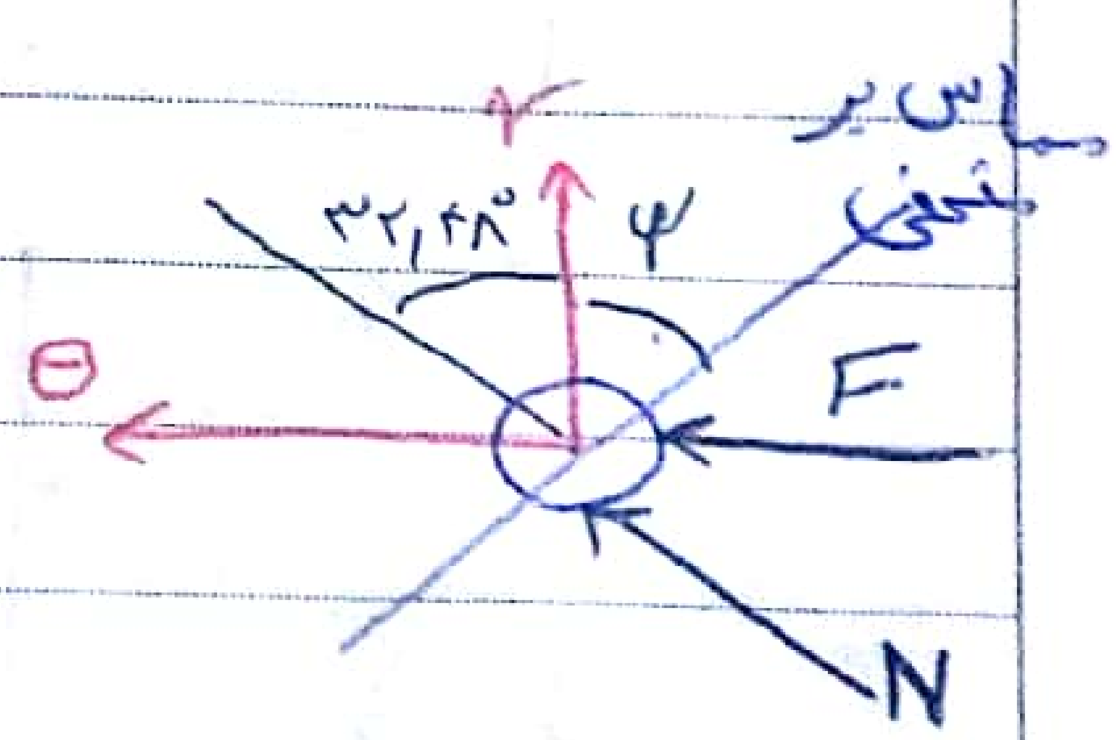
$$r = \frac{0/2}{\theta} = 0/127\,m$$

$$\dot{r} = -0/2\,\theta^{-2}\dot{\theta} = -0/405\,\frac{m}{s}$$

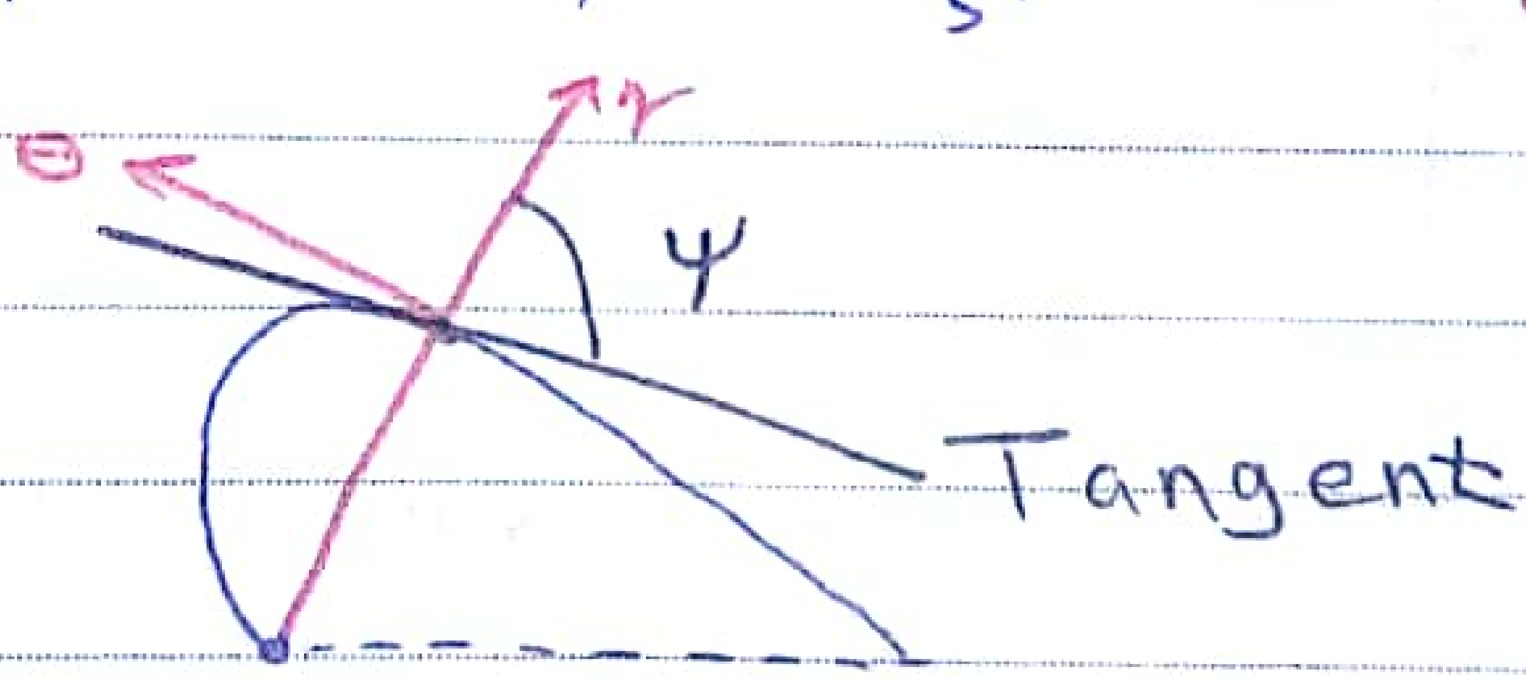
$$\ddot{r} = -0/2\left[-2\theta^{-3}\dot{\theta}^2 + \theta^{-2}\ddot{\theta}\right] = 2/418\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -0/765\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -3/798\,\frac{m}{s^2}$$



یادآوری:



$$\boxed{\tan\psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}}$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

$\tan\psi = \dfrac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \dfrac{\frac{0/2}{\theta}}{-0/2\,\theta^{-2}}$ $\boxed{\psi = \tan^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -57/52^\circ}$

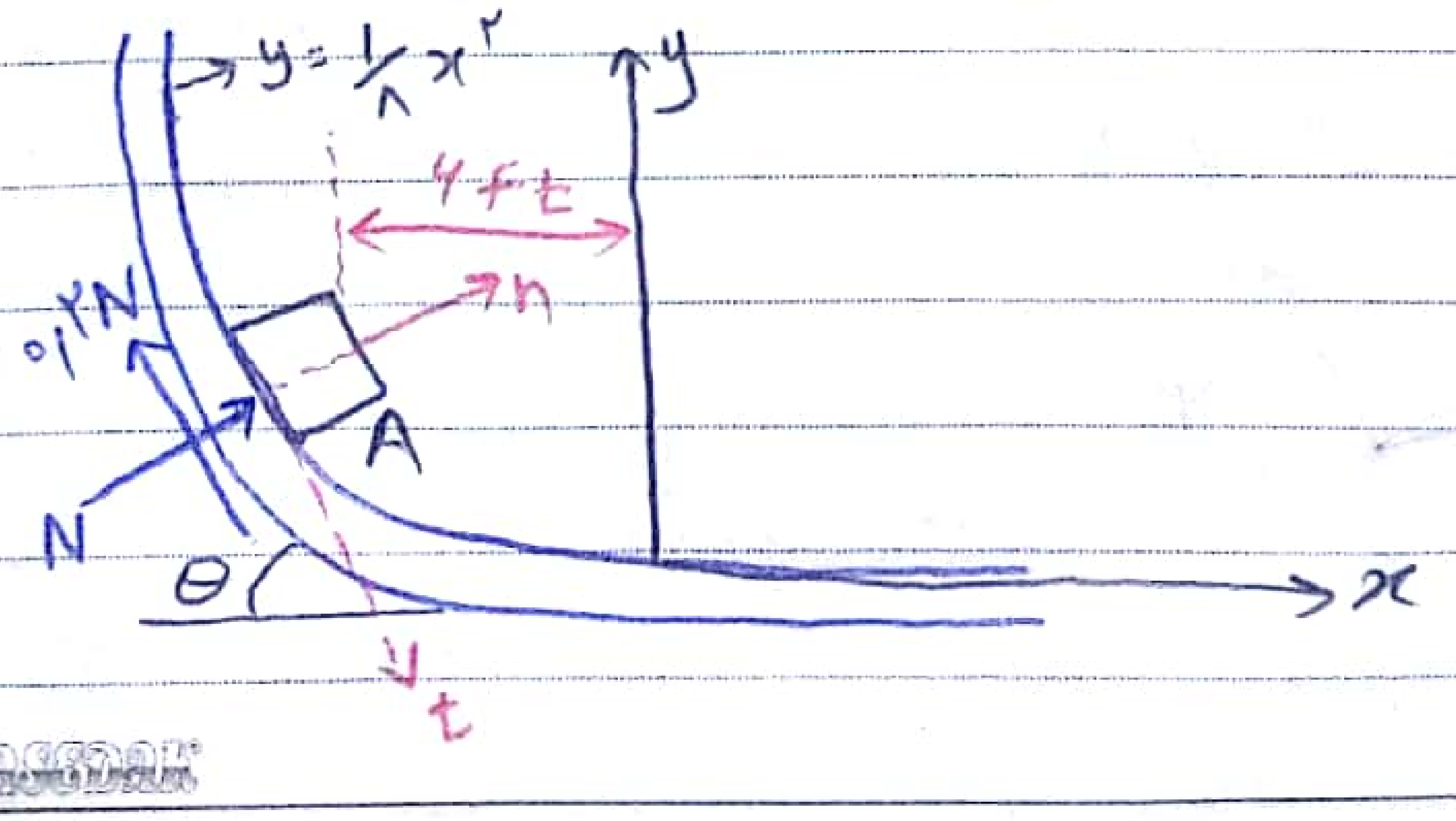
$+\uparrow \Sigma F_r = ma_r \Rightarrow N\cos 32/48^\circ = 0/5(-0/765)$

$\boxed{N = -0/453\ N}$

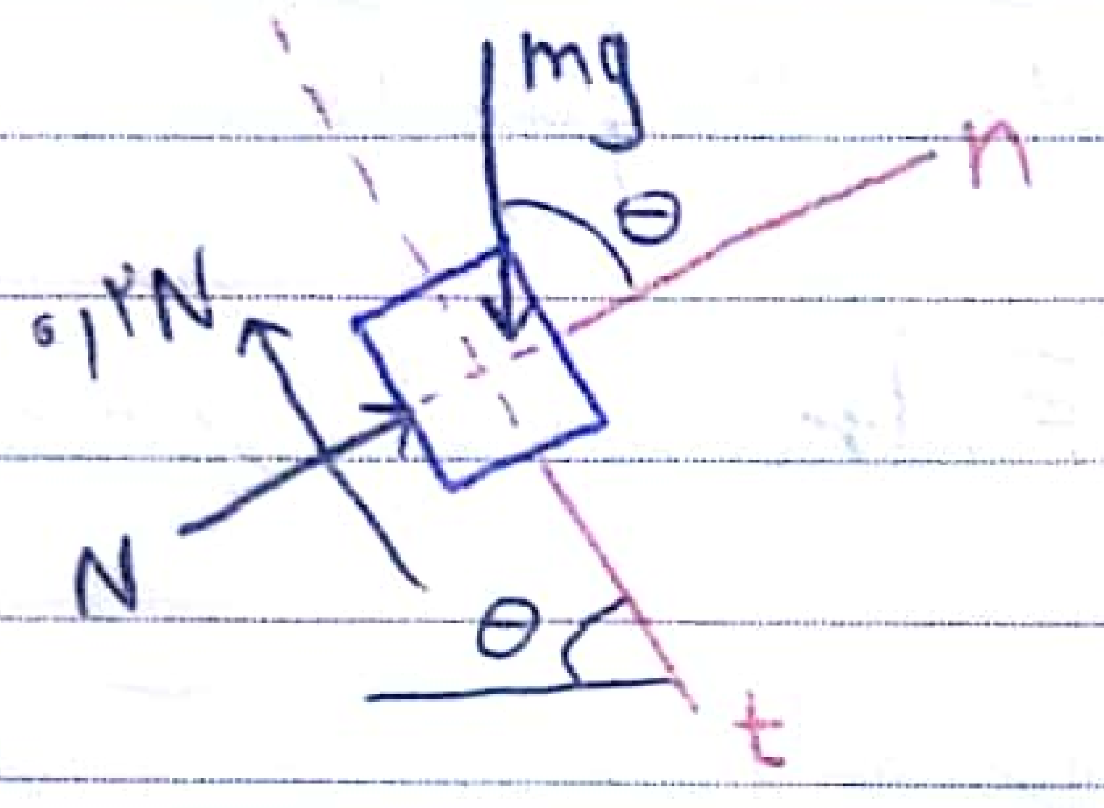
$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_\theta = ma_\theta \Rightarrow F + N\sin 32/48^\circ = 0/5(-3/798)$

$\boxed{F = -1/66N}$ «۹۵/۰۹/۲۲»

مثال: جسمی به وزن 1b ۱۰ بر روی مسیر نشان داده شده حرکت می‌نماید. و ضریب اصطکاک لغزشی بین جسم و سطح برابر با $\mu_K = 0/2$ می‌باشد. اگر جسم در نقطه A دارای سرعت $\frac{ft}{s}$ ۵ باشد، مطلوبست محاسبه نیروی عمودی سطح و نرخ افزایش سرعت در این لحظه.



دیاگرام آزاد جسم:



$$\begin{cases}\Sigma F_t = m a_t \\ \Sigma F_n = m a_n\end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x\Big|_{x=-6\,ft} \qquad \tan\theta = -1.5$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-1.5) \Longrightarrow \boxed{\theta = -56.31^\circ}$$

$$+\nearrow \Sigma F_n = m a_n \qquad N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\rho}$$

از طرفی: $\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ $\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1/4}{\left[1+(\frac{1}{4}x)^2\right]^{3/2}}\Big|_{x=-6\,ft}$

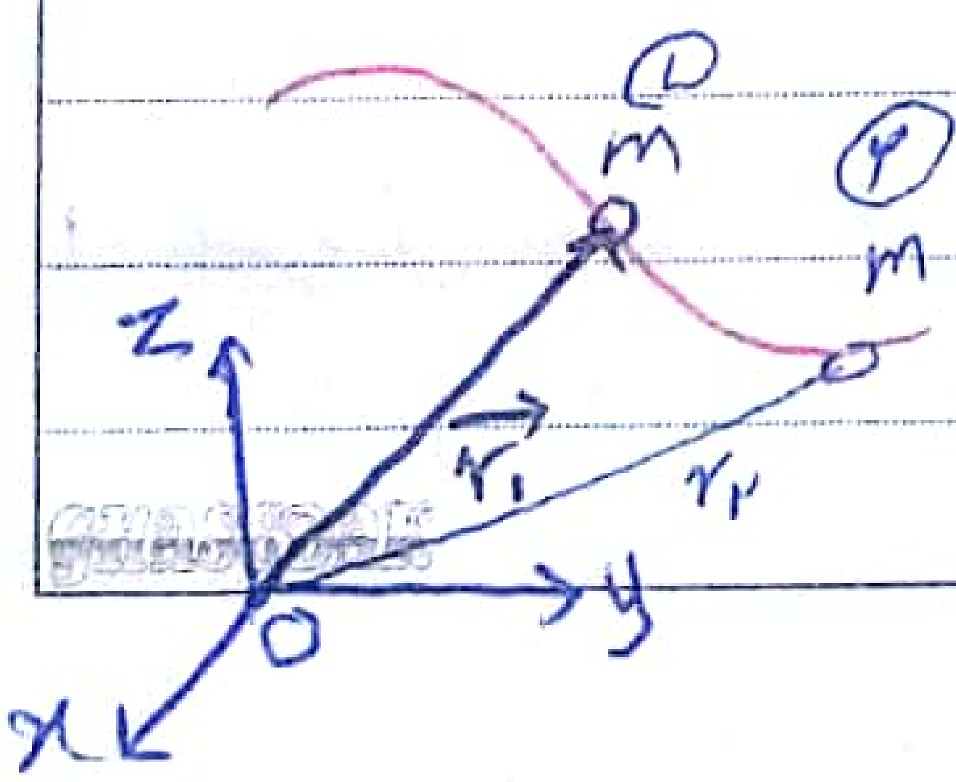
$$\boxed{\rho = 23.44\,ft} \qquad g = 9.8\,\frac{m}{s^2} \qquad g = 32.2\,\frac{ft}{s^2}$$

$$N - 10\cos 56.31 = \left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{5^2}{23.44}\right) \longrightarrow \boxed{N = 5.88\,lb}$$

$$\searrow + \ \Sigma F_t = m a_t \qquad mg\sin\theta - 0.2N = m a_t$$

$$10\sin 56.31 - (0.2)(5.88) = \left(\frac{10}{32.2}\right) a_t \qquad \boxed{a_t = 23\,\frac{ft}{s^2}}$$

اصل کار و انرژی



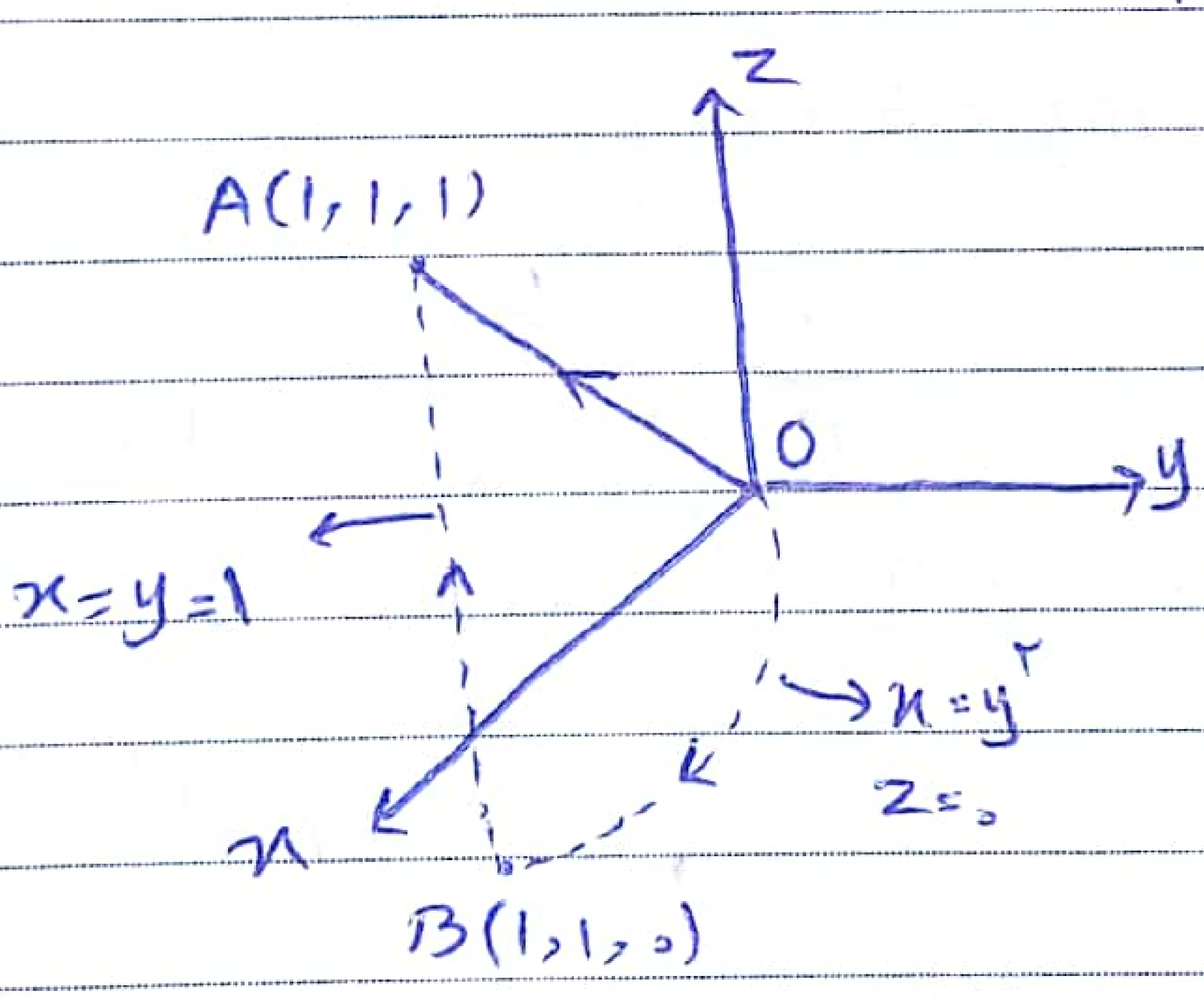
$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} m\vec{v}\cdot d\vec{v} \rightarrow \boxed{\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}$$

کار برآیند نیروهای وارد بر ذره بین دو نقطه ① و ② برابر است با تغییرات انرژی جنبشی بین آن دو نقطه.

مثال: مطلوبست کار نیروی $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ از نقطه O تا نقطه A روی دو مسیر زیر.



۱) مسیر خطی $x=y=z$

۲) مسیر خط چین OBA

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \qquad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz$$

۱- مسیر خطی OA
$x=y=z$

$$W_{OA} = \int_0^1 xy\,dx + \int_0^1 yz\,dy + \int_0^1 xz\,dz$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

$W_{OA}=\int_0^1 x^2\,dx+\int_0^1 y^2\,dy+\int_0^1 z^2\,dz=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\rightarrow \boxed{W_{OA}=1}$

۲- مسیر خط چین $W_{OBA}=W_{OB}+W_{BA}$

$W_{OB}=\int_0^1 xy\,dx+\underbrace{\cancel{\int_0^1 yz\,dy}}_{\text{صفر}}+\underbrace{\cancel{\int_0^1 xz\,dz}}_{\text{صفر}}=$ $z=0$

$W_{OB}=\int_0^1 x^{3/2}\,dx=\frac{2}{5}$

$W_{BA}=0+0+\int_0^1 xz\,dz$

$x=1$ $W_{BA}=\int_0^1 z\,dz=\frac{z^2}{2}=\frac{1}{2}$

$\left.\right\}W_{OBA}=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$

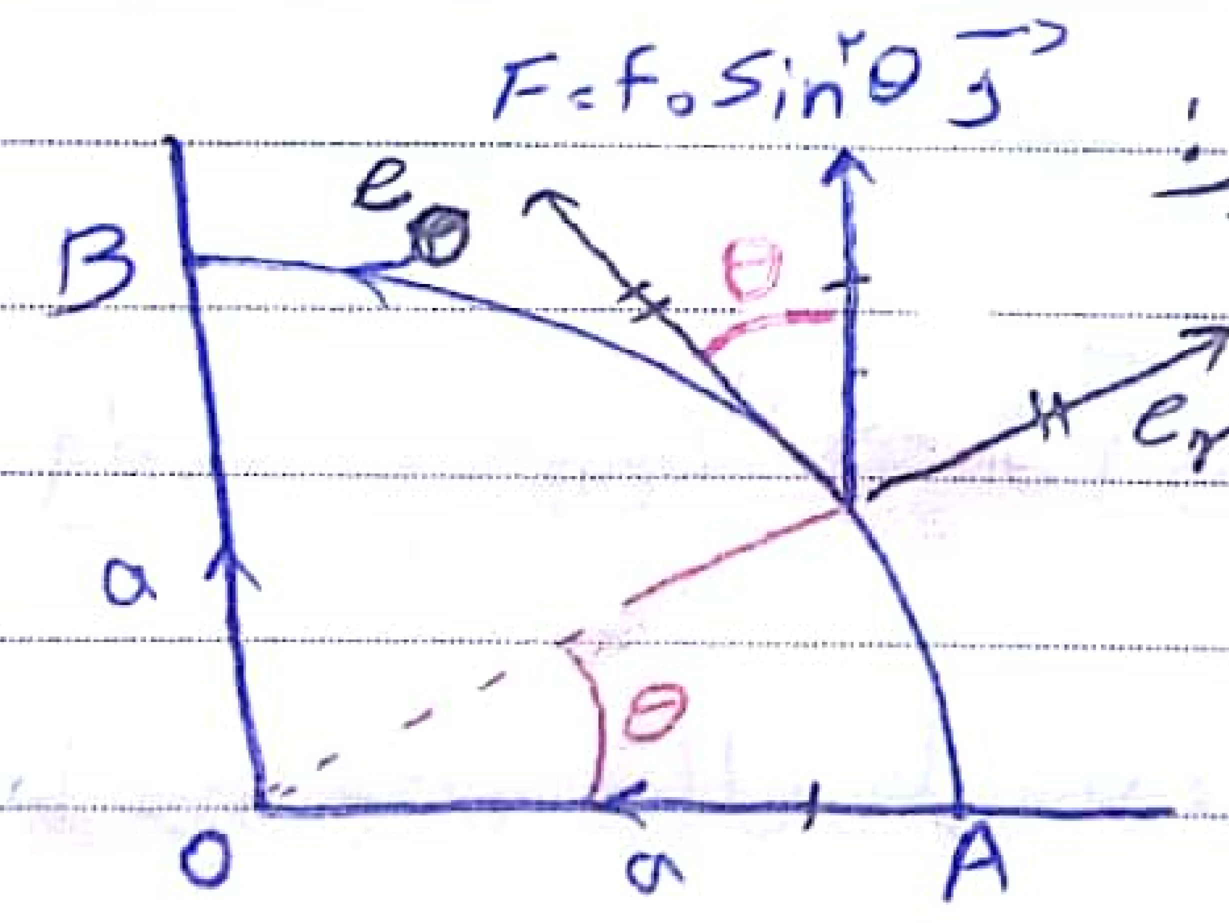
نتیجه: کار وابسته به مسیر است $W_{OBA}\neq W_{OA}$

مثال: مطلوبست کار نیروی عمودی $\vec{F}=F_0\sin^2\theta\,\vec{j}$

از نقطه A تا B روی دو مسیر زیر:

۱) مسیر منحنی AB به شعاع a

۲) مسیر خطی AOB



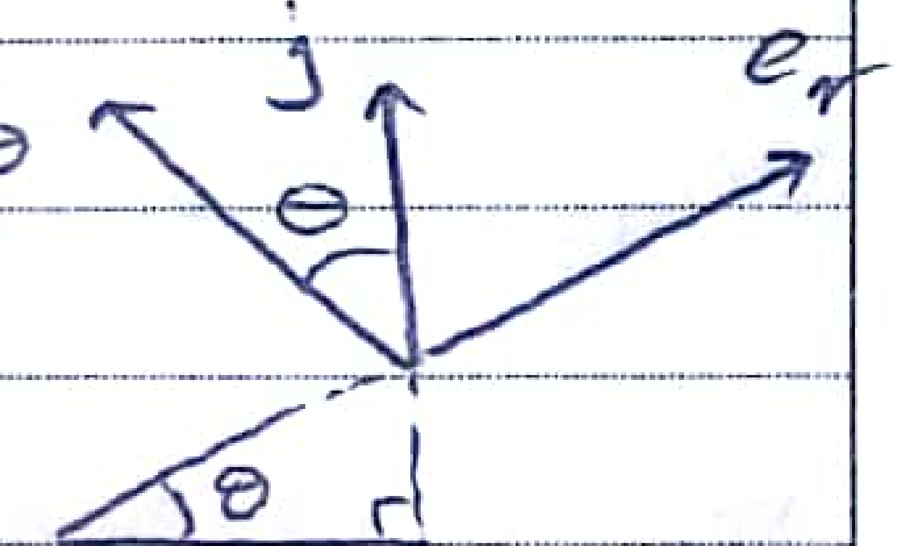
$\vec{dr}=dr\,\vec{e}_r+r\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi+dz\,\vec{e}_z$ دستگاه استوانه‌ای

دستگاه قطبی: $d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$

دایره‌ای ,, $d\vec{r} = r\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$ $\qquad W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$W_{AB} = \int_1^2 (f_0 \sin^2\theta)(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)\cdot(a\,d\theta)\,\vec{e}_\theta$$

$$W_{AB} = \int_1^2 f_0 \sin^2\theta\,(\cos\theta)(a\,d\theta)$$



$$W_{AB} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a f_0 \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta$$

$\sin\theta = u \qquad \cos\theta\, d\theta = du$

$$= \int_0^1 a f u^2\, du \longrightarrow \boxed{W_{AB} = \frac{a f_0}{3}}$$

۲- روی مسیر خطی $\qquad W_{AB} = W_{AO} + W_{OB}$

$W_{AO} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \qquad \theta = 0$

$W_{OB} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^a (f_0\vec{j})\cdot(dy\,\vec{j}) \qquad W_{OB} = \int_0^a f_0\, dy$

$\boxed{W_{OB} = a f_0}$ با توجه به دو مثال حل شده می‌توان نتیجه

گرفت که مقدار کار انجام شده وابسته به مسیر حرکت می‌باشد ولی

Year. Month. Date. ( ) Subject :

نیروهایی وجود دارند که کار آنها وابسته به مسیر حرکت نمی‌باشد که تحت عنوان نیروهای پتانسیل یا پایستار شناخته می‌شوند مانند نیروی وزن و نیروی فنر خطی.

ملاک تشخیص نیروهای پایستار

$$W=\int_1^2 \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

ا_ دستگاه کارتزی

$$\vec{F}=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+f_z\vec{k}$$

$$\vec{dr}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k} \qquad W=\int_1^2 f_x dx+f_y dy+f_z dz$$

تعریف: $f_x dx+f_y dy+f_z dz=d\varphi$

کار انجام شده به مسیر حرکت بستگی ندارد فقط به مقدار ابتدا و انتهای مسیر حرکت بستگی دارد.

$$\boxed{W=\int_1^2 d\varphi=\varphi_2-\varphi_1}$$

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$f_x dx+f_y dy+f_z dz=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$\Longrightarrow \left\{ f_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad f_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad f_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right.$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \quad و \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}}$$

به همین ترتیب: $\boxed{\frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}}$, $\boxed{\frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}}$

شرط پایستاری

کرل $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = 0$

۲_ دستگاه استوانه‌ای

شرط پایستاری

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} e_r & e_\varphi & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_r & r f_\varphi & f_z \end{vmatrix} = 0$$

به طور مثال:

الف) $\vec{F} = xy\vec{i} + xz\vec{j} + yz\vec{k}$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ نیرو ناپایستار

ب) $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ نیرو پایستار

ج) $\vec{F} = f_0 \vec{e}_\theta$ $\qquad \vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ نیرو ناپایستار

اصل بقای انرژی مکانیکی

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{N}$$ $\vec{N}$: نیروی عمودی سطح

$\vec{F}_1$: نیروی ناپایستار $\qquad \vec{F}_2$: نیروی پایستار

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_1^2 \vec{F}_1 \cdot \vec{dr} + \int_1^2 \vec{F}_2 \cdot \vec{dr} + \underbrace{\cancel{\int_1^2 \vec{N} \cdot \vec{dr}}}_{\text{صفر}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\int_1^2 \vec{F}_1 \cdot \vec{dr} + (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad , \quad \boxed{P = -\varphi}$$

انرژی پتانسیل

$$\int_1^2 \vec{F}_1 \cdot \vec{dr} = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + P_2\right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + P_1\right)$$

انرژی مکانیکی : $E = \frac{1}{2} m v^2 + P$

$$\boxed{\int_1^2 \vec{F}_1 \cdot \vec{dr} = E_2 - E_1}$$

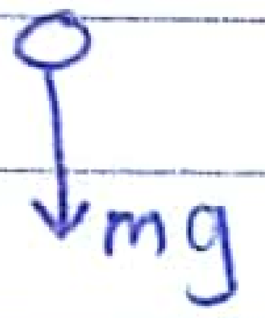
اگر در سیستمی نیروی ناپایستار وجود نداشته باشد یعنی $f_1 = 0$

یا به عبارتی سیستم پایستار باشد : $E_2 = E_1$

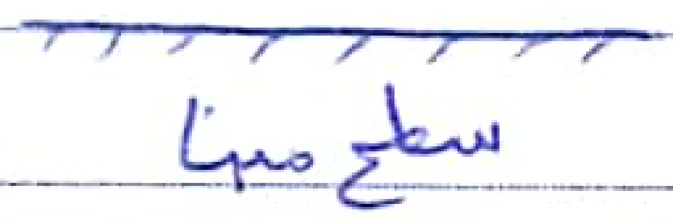
اصل بقای انرژی مکانیکی $\boxed{\frac{1}{2}mv_2^2+P_2=\frac{1}{2}mv_1^2+P_1}$

انرژی پتانسیل نیروی وزن و فنر خطی (فنر هوک)

۱- نیروی وزن



$P=-\int_1^2(-mg)(\pm dz)$ $\boxed{P=\pm mgz}$

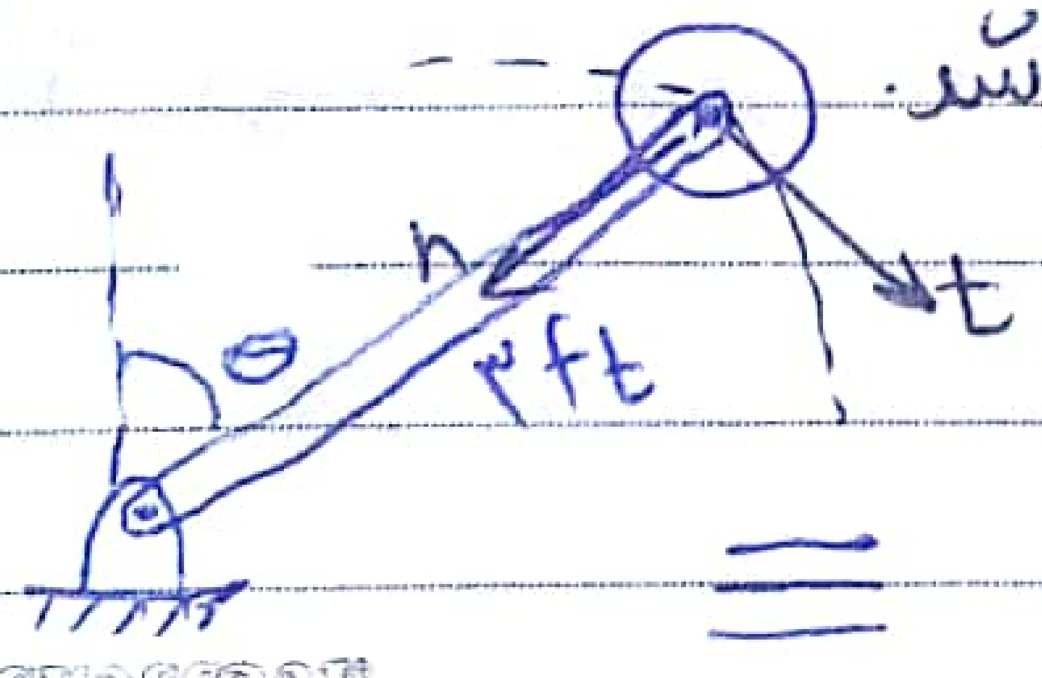


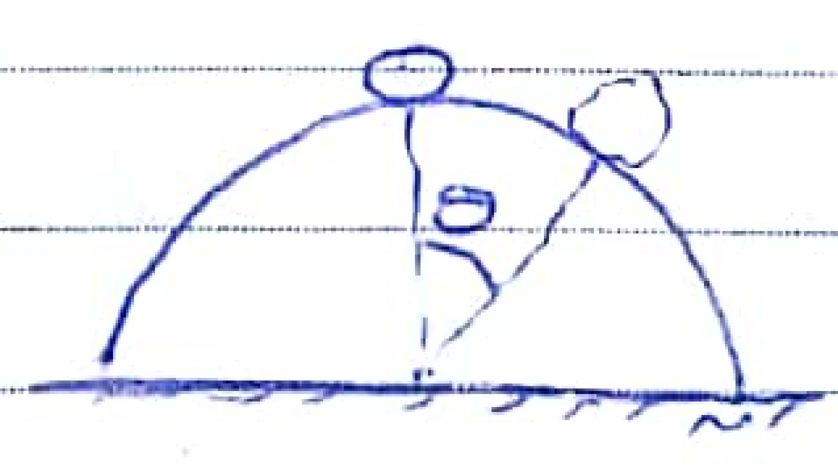
Z : فاصله عمودی تا سطح مبنا

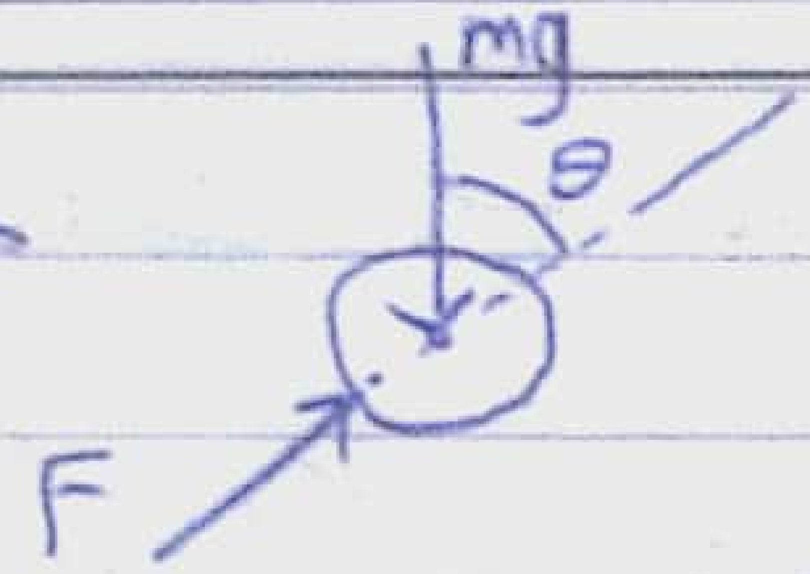
۲- نیروی فنر خطی $\boxed{P=-\int_1^2(-kx)dx=\frac{1}{2}kx^2}$

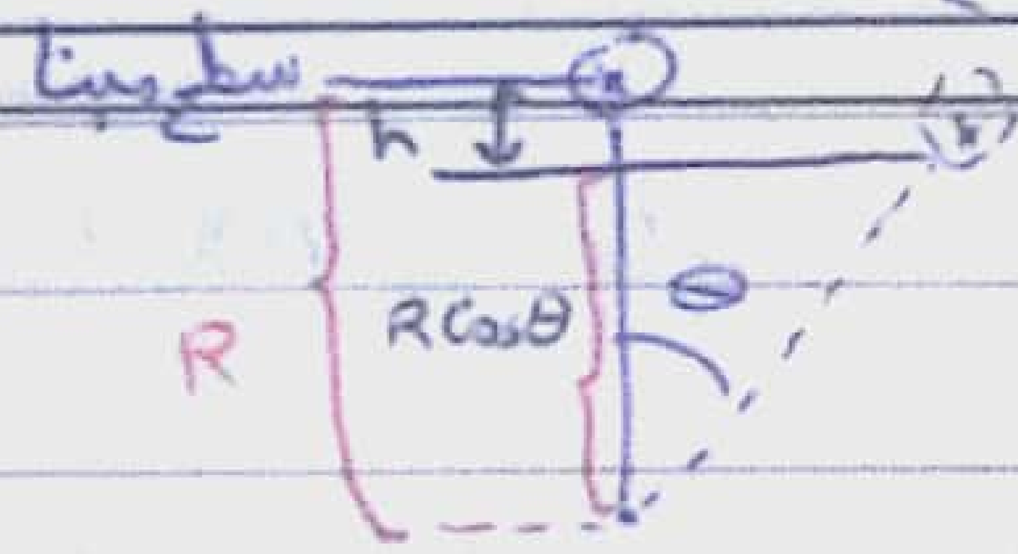
x : مقدار انحراف از وضعیت آزاد فنر

مثال: گلوله‌ای به وزن 15 lb به انتهای میله‌ای که از جرم آن صرف نظر می‌شود متصل شده است. اگر سیستم از حالت سکون در لحظه‌ای که $\theta=0°$ است شروع به حرکت نماید. مطلوبست محاسبه مقدار زاویه θ هنگامی که نیروی فشاری وارد بر میله صفر باشد.









دیاگرام آزاد ⇐

فرینه $\swarrow^{+}$ $\sum F_n = m\vec{a}_n$ $\qquad mg\cos\theta - \cancel{F} = m\frac{v^2}{R}$

$\Rightarrow \boxed{g\cos\theta = \frac{v^2}{R}}$ (1)

سیستم پایستار: $\boxed{E_2 = E_1}$ اصل بقای انرژی مکانیکی

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1$$

انرژی پتانسیل: P, V انرژی جنبشی: K, T

$\frac{1}{2}mv_2^2 - mgR(1-\cos\theta) = 0 + 0$ $\qquad \boxed{v^2 = 2gR(1-\cos\theta)}$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow \cancel{g}\cos\theta = 2\cancel{g}(1-\cos\theta)$ $\qquad 3\cos\theta = 2$

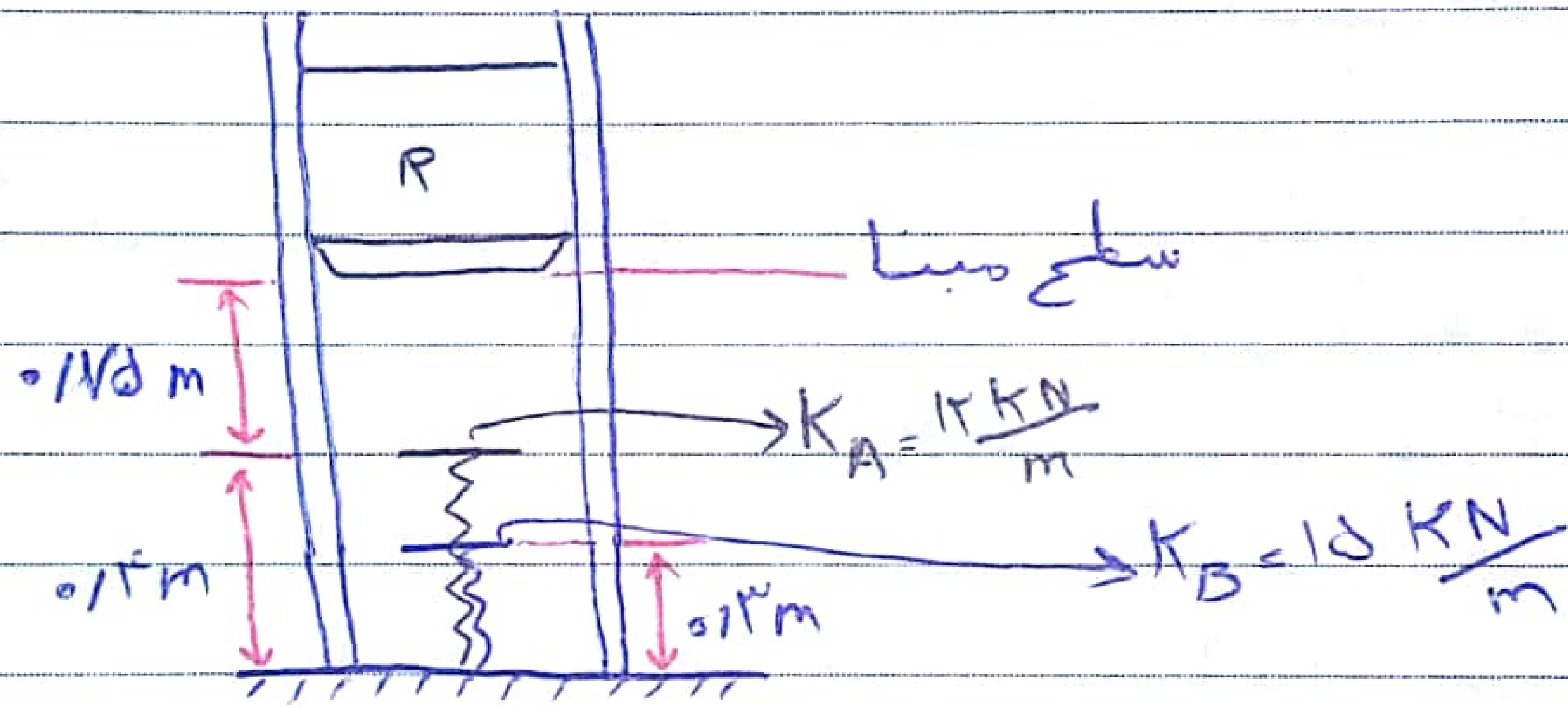
$\cos\theta = \frac{2}{3}$ $\qquad \theta = \cos^{-1}(\frac{2}{3})$ $\qquad \boxed{\theta = 48.2^\circ}$

مثال: تیک R از پرس نشان داده شده به جرم 100kg از حالت سکون واز

فاصلهی 0.75m بالای فنر A با ثابت $K_A = 12\frac{kN}{m}$ شروع به حرکت

می نماید. اگر فنر دوم B با ثابت فنر $K_B = 15\frac{kN}{m}$ داخل فنر A قرار

داشته باشد. مطلوبست محاسبه مقدار max فاصله‌ای که فنر A
فشرده می‌شود تا جک از حرکت متوقف شود. طول آزاد فنرها در
شکل نشان داده شده است و از جرم فنرها صرف نظر شود



اصل بقای انرژی مکانیکی $\boxed{E_1 = E_2}$ ⟵ سیستم پایستار

شروع حرکت جک ⟵ E_1 ، E_2 ⟵ حداکثر فشردگی فنر

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = 0 - mg(0/175 + s_A) + \frac{1}{2} K_A s_A^2 + \frac{1}{2} K_B (s_A - 0/1)^2$$

فشردگی فنر A $= s_A$ فشردگی فنر B : $s_B = s_A - 0/1$

فرض : فنر B فشرده می‌شود

$$-981(0.75+S_A)+\frac{1}{2}(12000)S_A^2+\frac{1}{2}(15000)(S_A-0.1)^2$$

$$13500S_A^2-2481S_A-660.75=0$$

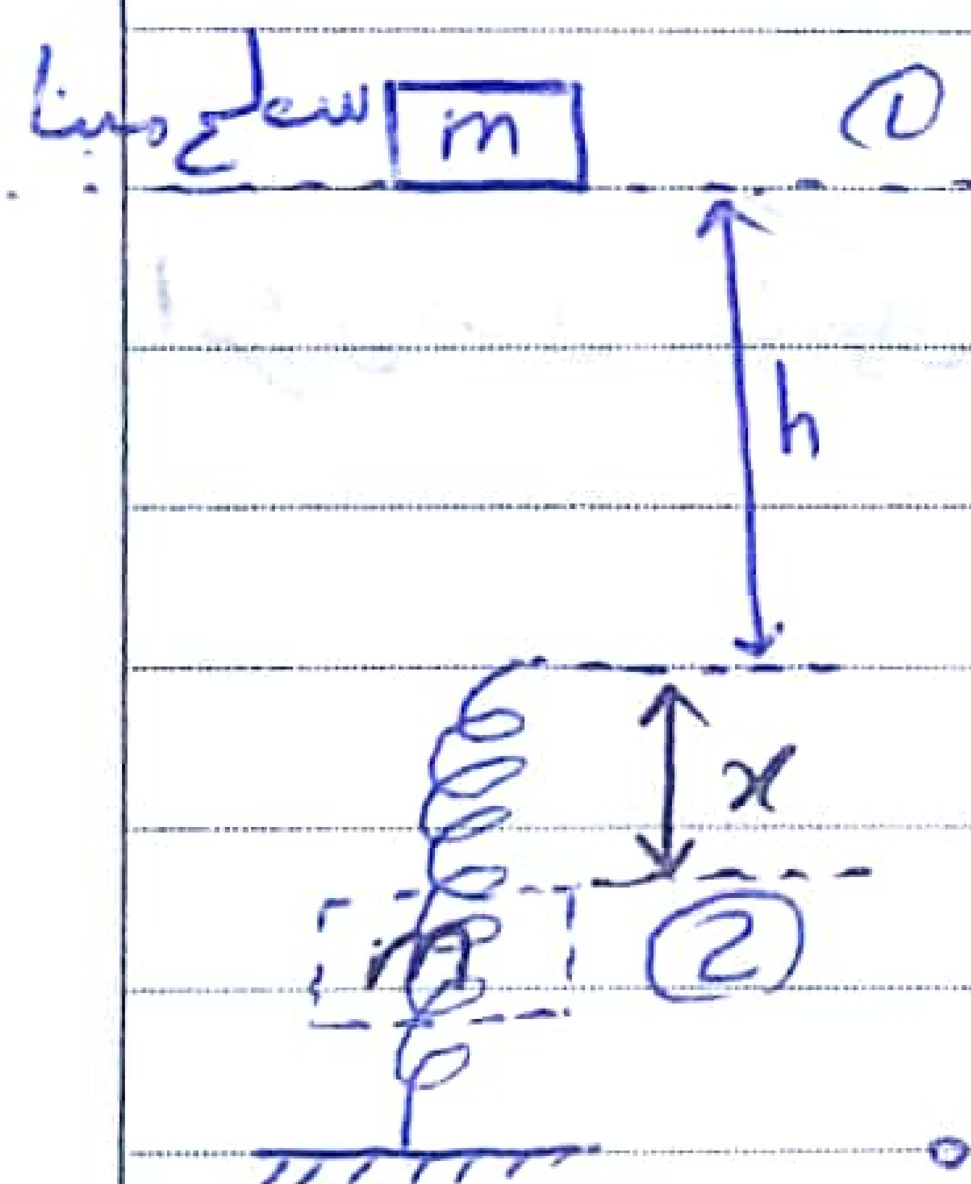
$$S_A=\begin{cases}0.331\,m \Rightarrow \boxed{S_A=0.331\,m}\\ -0.148\,m \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$S_B=0.331-0.1=0.231\,m$$

$\Downarrow$

فرض انتخاب شده درست است. «۹۵/۰۹/۲۸»

مثال: جرم m از ارتفاع h بدون سرعت اولیه روی فنری با ثابت فنر K سقوط می کند. مطلوبست محاسبه‌ی حداکثر فشردگی فنر.



سیستم پتانسیل ← اصل بقای انرژی مکانیکی

$$E_1=E_2 \qquad T_1+V_1=T_2+V_2$$

$$0+0=0+\frac{1}{2}kx^2-mg(h+x)$$

$$\boxed{kx^2-2mgx-2mgh=0}$$

x مثبت قابل قبول است.

مثال: فرض کنید در مثال قبلی جرم m روی فنر خطی نگه داشته شده است و

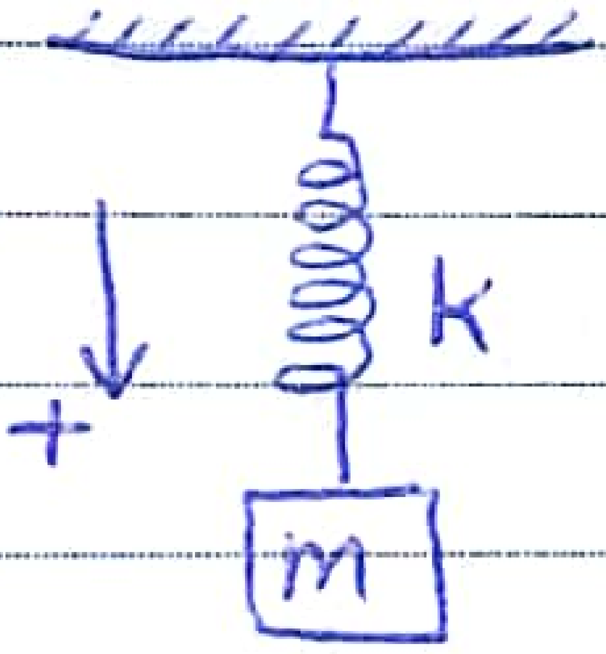
رها می‌گردد. مطلوبست محاسبه‌ی حداکثر فشردگی فنر

با توجه به مثال قبلی و با تفاوت اینکه $h=0$ است، خواهیم داشت:

$$kx^2 - 2mgx - \underset{0}{\cancel{2mgh}} = 0 \;;\; h=0 \longrightarrow kx^2 - 2mgx = 0$$

$$kx - 2mg = 0 \longrightarrow \boxed{x = 2\frac{mg}{k}}$$ انحراف دینامیکی

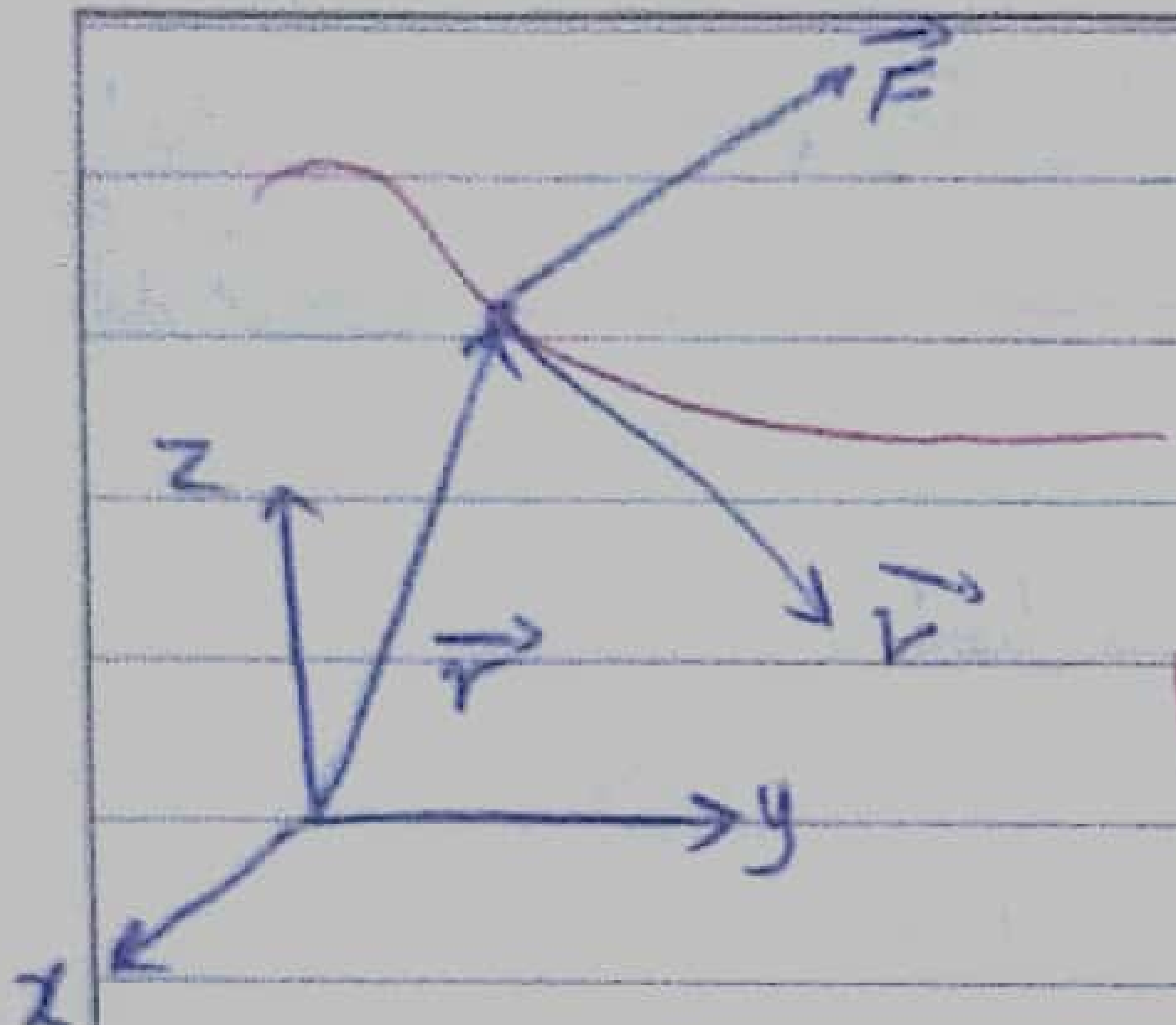
در باسکول ها که تعادل استاتیکی داریم:



$$mg - kx = 0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{mg}{k}} \rightarrow$$ انحراف استاتیکی

انرژی های دینامیکی تقریباً ۲ برابر انرژی های استاتیکی است.

اصل بقای لنگر حرکتی



$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}} \quad ①$$

صفر

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}) = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}} + \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}) = \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}} \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow \boxed{\vec{r}\times\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})}$$

$\vec{H}_o = \vec{r}\times m\vec{v}$ لنگر حرکتی ذره نسبت به نقطه ثابت o

$\Rightarrow \vec{M}_o = \frac{d\vec{H}_o}{dt}$ لنگر نیروهای خارجی وارد بر ذره نسبت به نقطه ثابت o

اگر در سیستمی $\vec{M}_o = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{H}_o}{dt} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{H}_o = cte} \text{ ثابت}$$

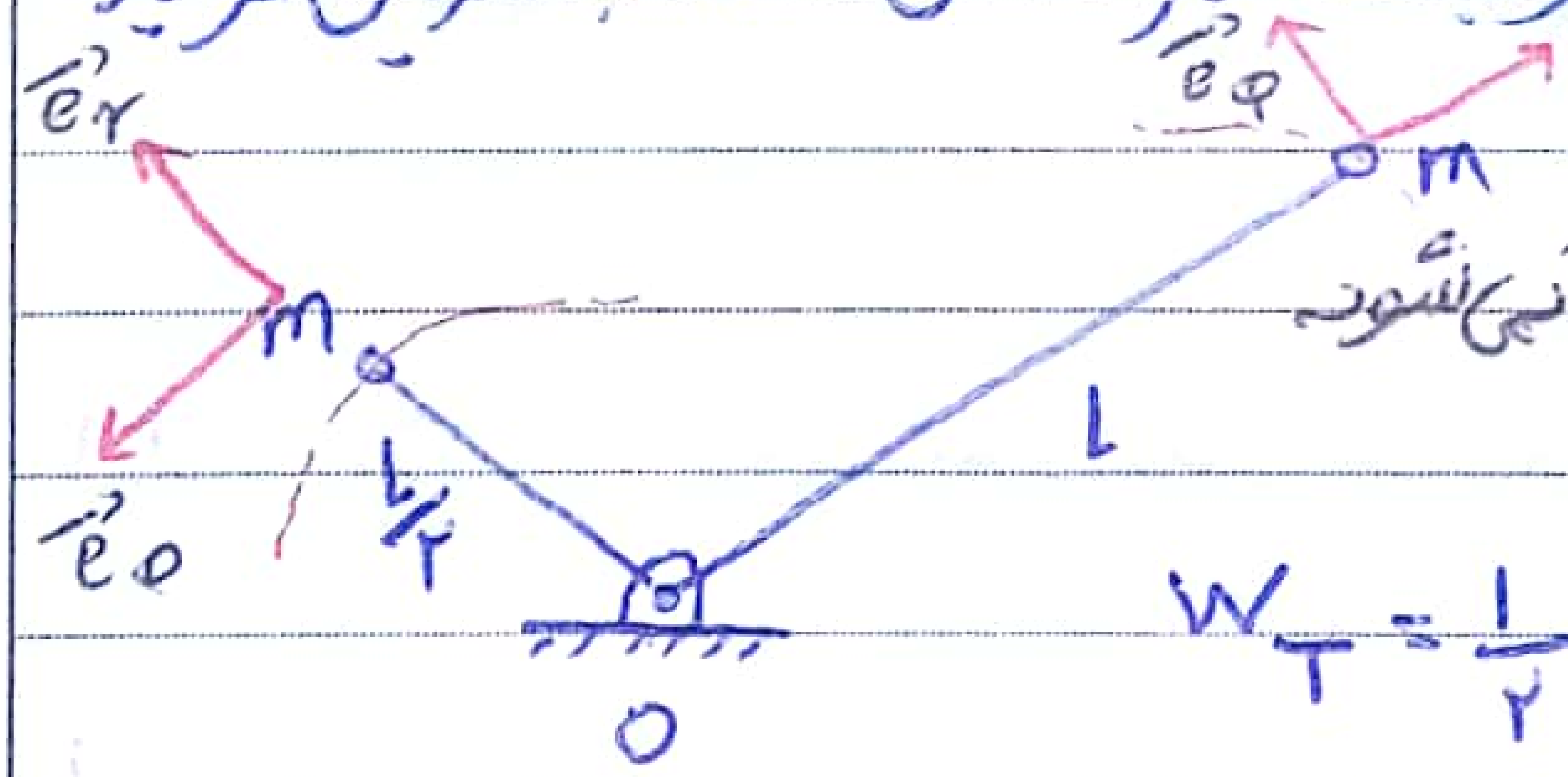
Scanned by CamScanner

اصل بقای لنگر حرکتی $\boxed{\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2}$ $\Rightarrow (\vec{H}_o)_1 = (\vec{H}_o)_2$

$\vec{r} \times \vec{F} = 0 \longrightarrow$ اصل بقای لنگر حرکتی

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \longrightarrow$ اصل بقای انرژی مکانیکی

مثال) جرم m ~~...~~ به انتهای طنابی به طول L متصل است و
سیستم در صفحه افق بی اصطکاک است و با سرعت v_1 در حال دوران می‌باشد.
به وسیله دستگاهی که در شکل مشخص نیست طناب حول نقطه O جمع می‌شود
تا طول آن به نصف برسد مطلوبست کار کشش طناب در این فرآیند.



★: در صفحه افق وزن در نظر گرفته نمی‌شود

$W_T = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

$\vec{M}_o = 0 \longrightarrow \boxed{H_o = cte}$ $\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$

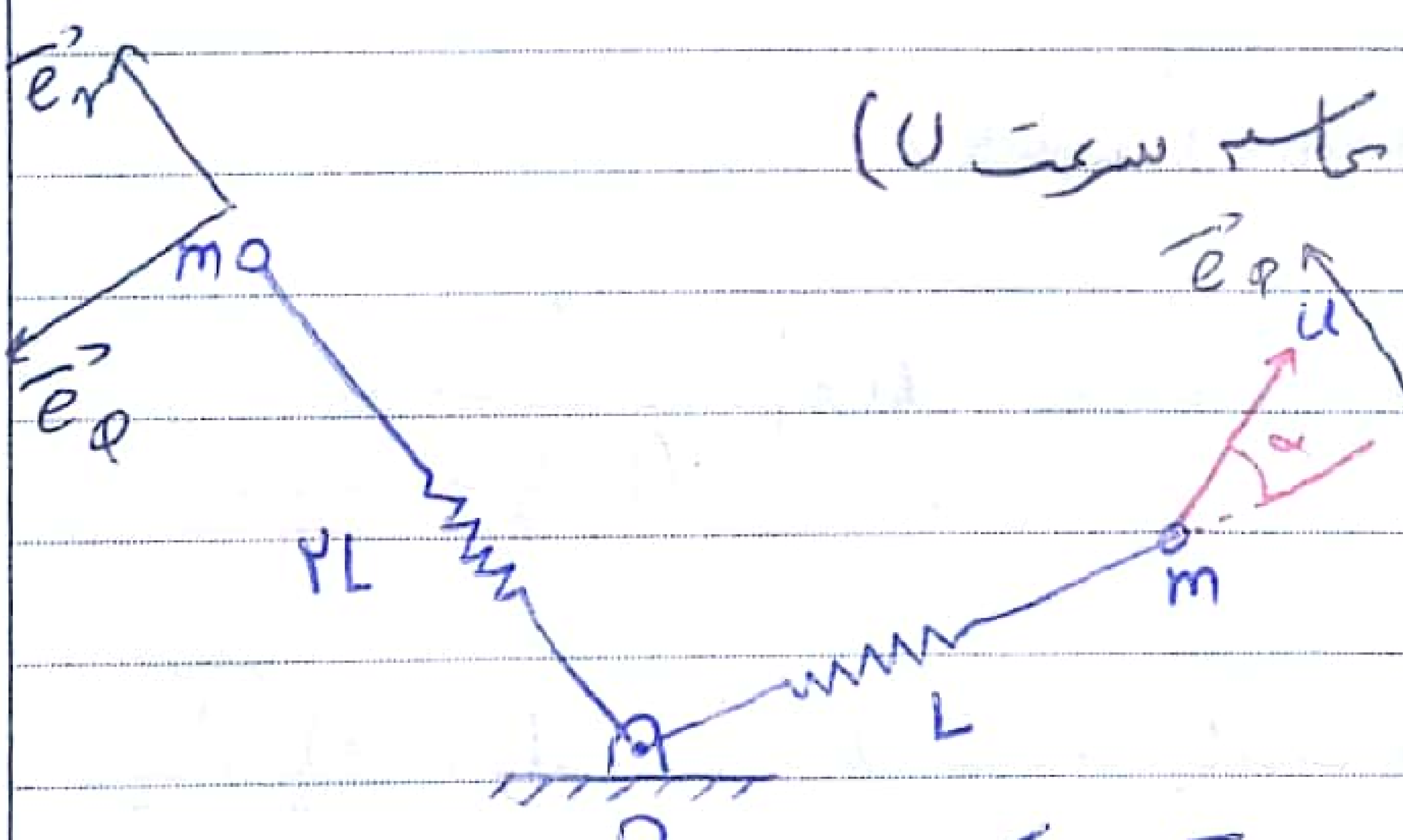
قطبی $L\vec{e}_r \times m v_1 \vec{e}_\phi = \frac{L}{2} \vec{e}_r \times m v_2 \vec{e}_\phi$

$mLv_1 \vec{e}_z = m\frac{L}{2} v_2 \vec{e}_z$ $mLv_1 = m\frac{L}{2} v_2$

$$\boxed{V_2 = 2V_1} \qquad W_T = \frac{1}{2}m(2V_1)^2 - \frac{1}{2}mV_1^2$$

$$\boxed{W_T = \frac{3}{2}mV_1^2}$$

مثال) جرم m به انتهای فنری به طول L و ضریب k متصل شده است.
و سیستم در صفحه افقی بی اصطکاک است. جرم در صفحه افق با سرعت
اولیه u که نسبت به امتداد اولیه فنر زاویه α دارد پرتاب و رها
می شود ضمن حرکت حداکثر طول فنر 2L است (L طول آزاد اولیه
فنر است) مطلوبست محاسبه سرعت v)



سیستم پتانسیل

اصل بقای انرژی مکانیکی

$$E_1 = E_2 \qquad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2}mu^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(2L-L)^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kL^2} \quad (1)$$

$\vec{M}_0 = 0 \rightsquigarrow \vec{H}_0 = cte$

اصل بقای لنگر حرکتی $\quad \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$

$$L\vec{e}_r \times mu(\cos\alpha\,\vec{e}_r + \sin\alpha\,\vec{e}_\varphi) = 2L\vec{e}_r \times mv\,\vec{e}_\varphi$$

$$mLu\sin\alpha\,\vec{e}_z = 2mLv\,\vec{e}_z$$

$$\cancel{mL}u\sin\alpha = 2\cancel{mL}v \qquad \boxed{v = \frac{1}{2}u\sin\alpha} \quad ②$$

با جایگذاری رابطه ② در رابطه ① داریم:

$$\cancel{\frac{1}{2}}mu^2 = \cancel{\frac{1}{2}}m\left(\frac{1}{2}u\sin\alpha\right)^2 + \cancel{\frac{1}{2}}kL^2$$

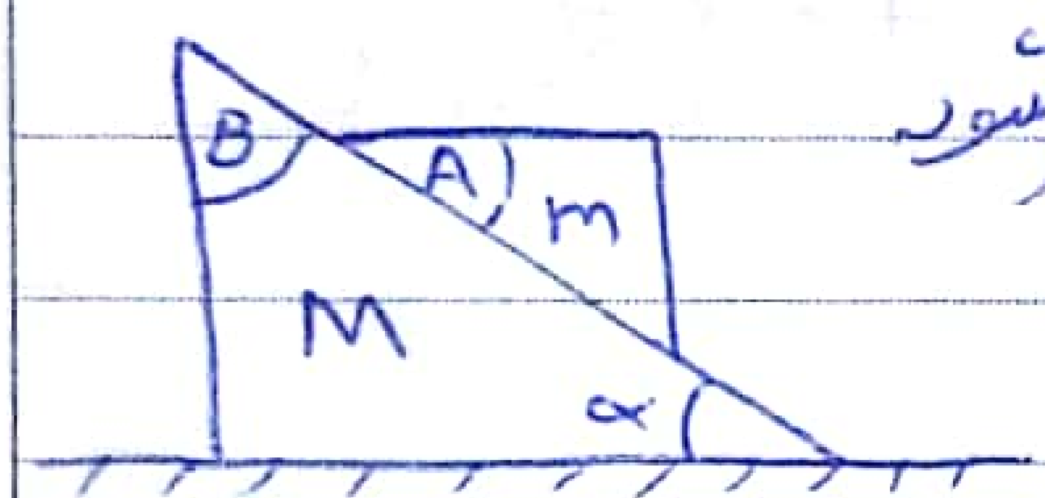
$$mu^2 - \frac{1}{4}mu^2\sin^2\alpha = kL^2 \qquad \boxed{u = \left[\frac{kL^2}{m(1-\frac{1}{4}\sin^2\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

دینامیک ذرات: کاملاً شبیه به دینامیک ذره می باشد با این تفاوت که نمودار آزاد هر یک از ذرات رسم شده و معادله نیوتن برای هر یک از ذرات نوشته می شود تا تعداد معادلات و مجهولات با یکدیگر برابر شوند.

* مثال: جرم m روی جرم M قرار دارد و کلیه سطوح بدون اصطکاک است

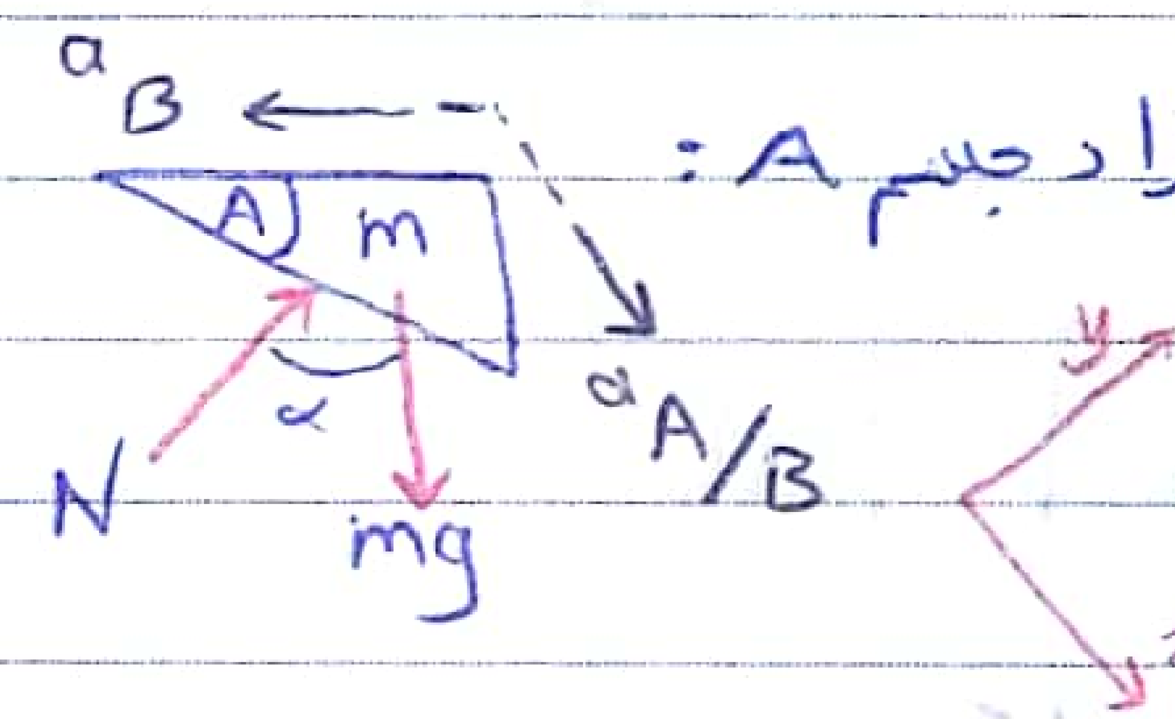
Year. Month. Date. ( ) Subject :

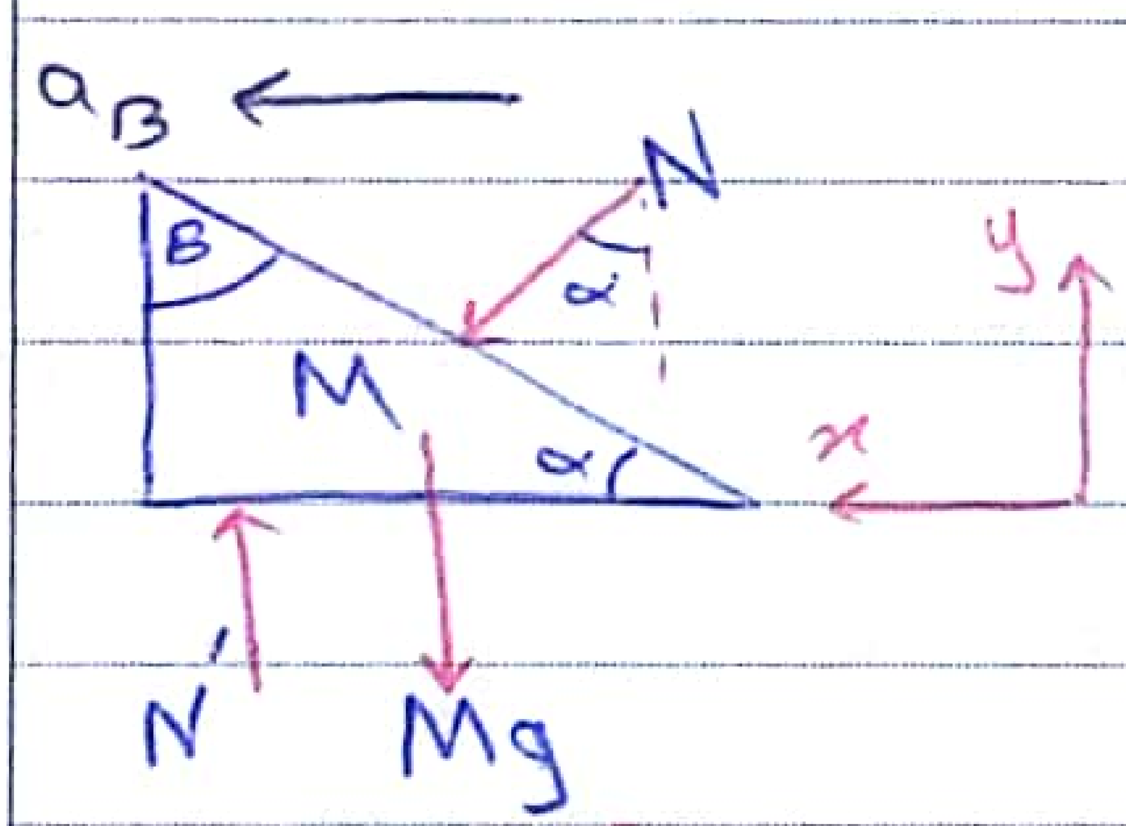
سیستم از حالت سکون رها می‌شود. مطلوبست شتاب جسم A نسبت به جسم B و همچنین شتاب مطلق جسم B.



برای هر جسمی که جرم داشته باشد باید یک نمودار آزاد رسم شود

نمودار آزاد جسم A:



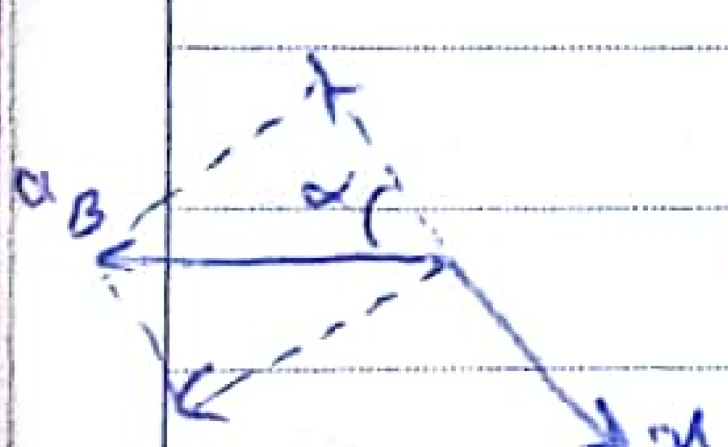


نمودار آزاد جسم B:

جسم A:

$\searrow^{+} \ \Sigma F_x = m a_x \Rightarrow mg\sin\alpha = m(a_{A/B} - a_B\cos\alpha)$ ①

$\nearrow^{+} \ \Sigma F_y = m a_y \Rightarrow N - mg\cos\alpha = m(-a_B\sin\alpha)$ ②

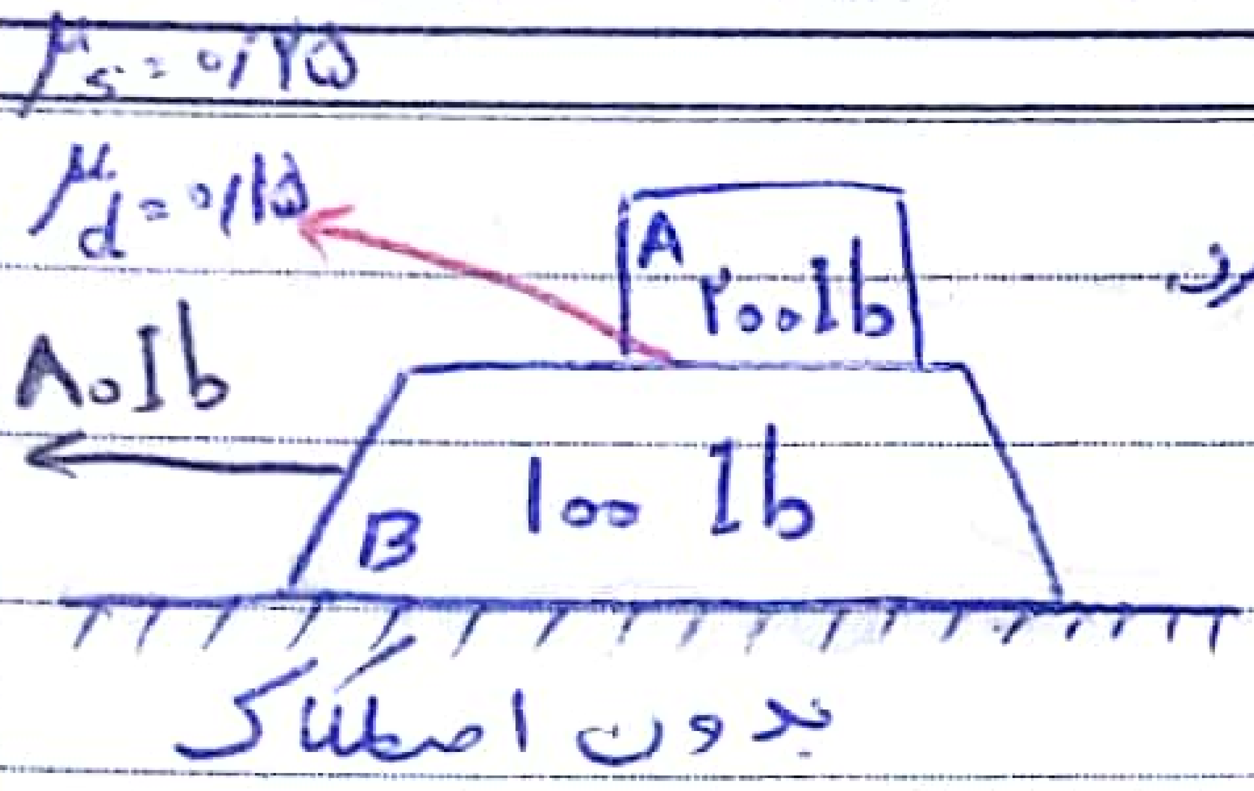


جسم B: $\overset{+}{\leftarrow} \ \Sigma F_x = M a_x$

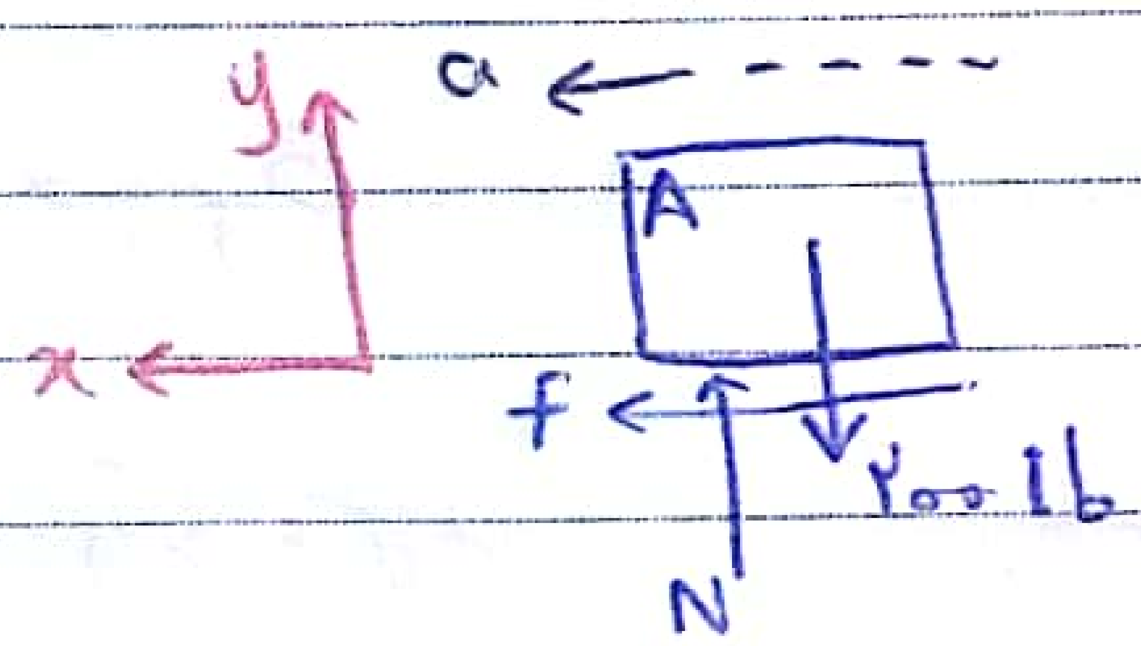
$\boxed{N\sin\alpha = M a_B}$ ③

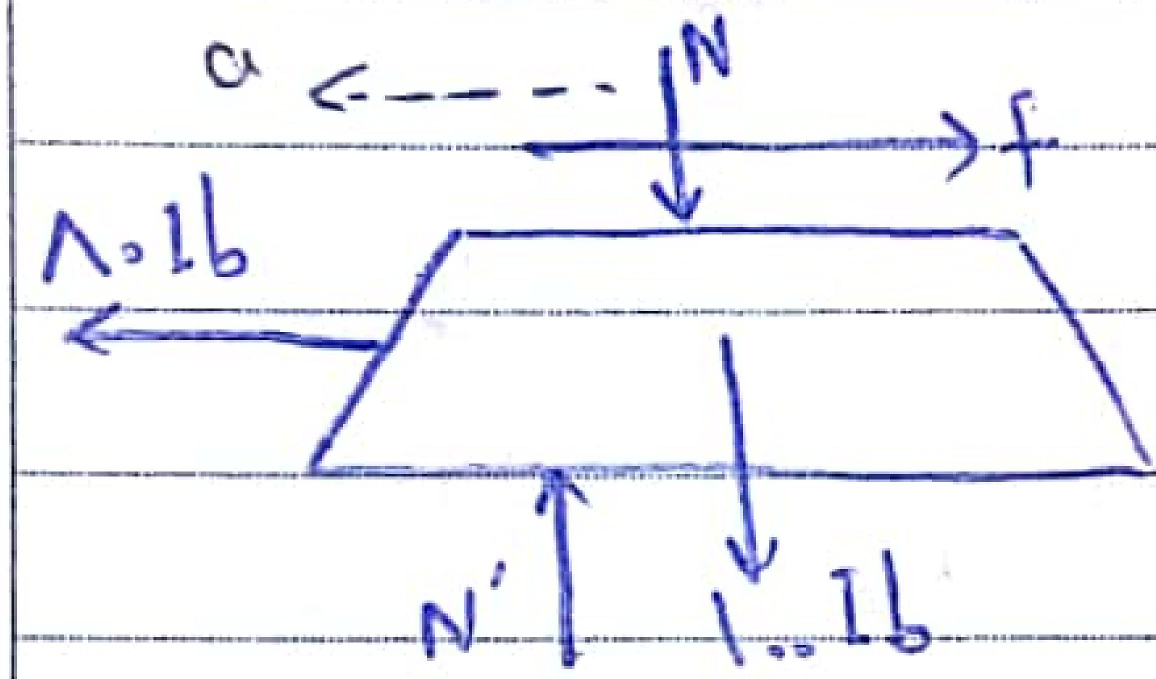
$N, a_{A/B}, a_B$ ؟

مثال) در سیستم نشان داده شده مطلوبست شتاب مطلق اجسام A و B.



فرض: جسم A نسبت به جسم B حرکت ندارد





جسم A: $\overset{+}{\leftarrow} \sum F_x = m a_x \rightarrow \boxed{f = \frac{200}{32.2} a}$ (1) $\qquad g = 32.2 \ \frac{ft}{s^2}$

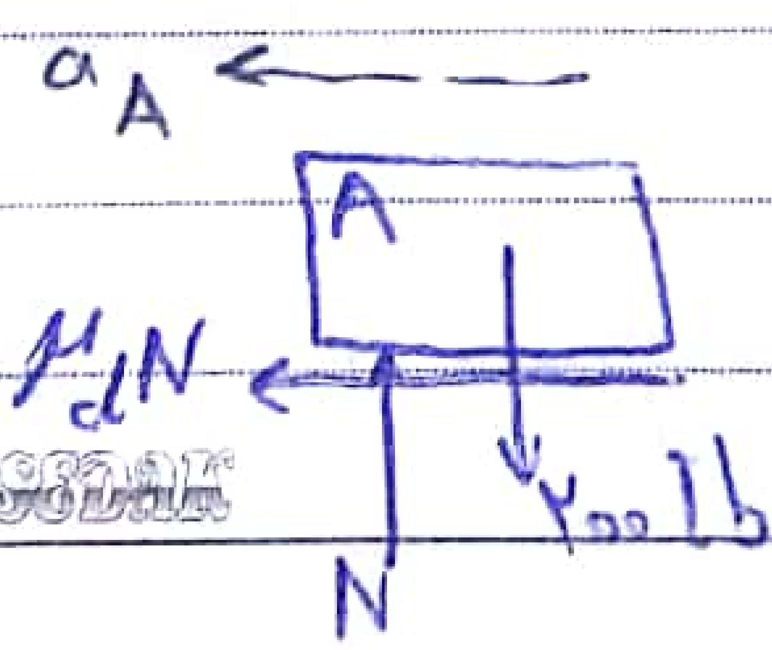
$+\uparrow \sum F_y = m a_y \rightarrow \boxed{N - 200 = 0}$ (2)

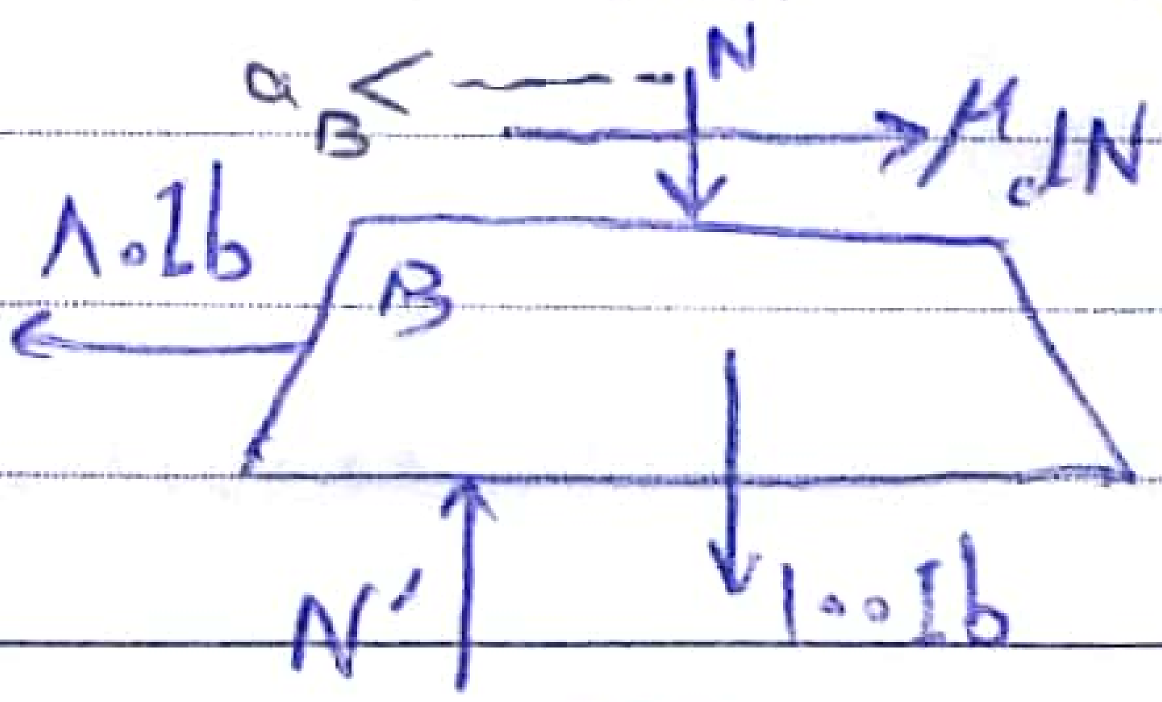
جسم B: $\overset{+}{\leftarrow} \sum F_x = m a_x \qquad \boxed{80 - f = \frac{100}{32.2} a}$ (3)

$\rightarrow \begin{cases} f = 53 \ lb \\ N = 200 \ lb \end{cases} \qquad f_{max} = \mu_s N = (0.25)(200) = 50 \ lb$

★ اگر $f \leq f_{max}$ باشد فرض صحیح و مسأله حل شده است.

ولی اگر مثل این مسئله $f > f_{max}$ مسأله مجدداً با اصطکاک لغزشی باید حل شود





$\mu_d N = \frac{۲۰۰}{۳۲,۲} a_A$ $\qquad$ $۸۰ - \mu_d N = \frac{۱۰۰}{۳۲,۲} a_B$

$N - ۲۰۰ = ۰$ $\qquad$ $\boxed{N = ۲۰۰\ lb \quad a_A = ۴,۸۳\ \frac{lb}{s^۲}}$ $\qquad$ $\boxed{a_B = ۱۶,۱\ \frac{lb}{s^۲}}$

اصل بقای اندازه حرکت : $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

تکانه یا اندازه حرکت $\boxed{\vec{G} = m\vec{v}}$ یا $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$: تعریف

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$

اگر در سیستمی برآیند نیروهای خارجی برابر با صفر باشد $\vec{F} = ۰$ اگر

$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = ۰ \Rightarrow \vec{P} = cte$

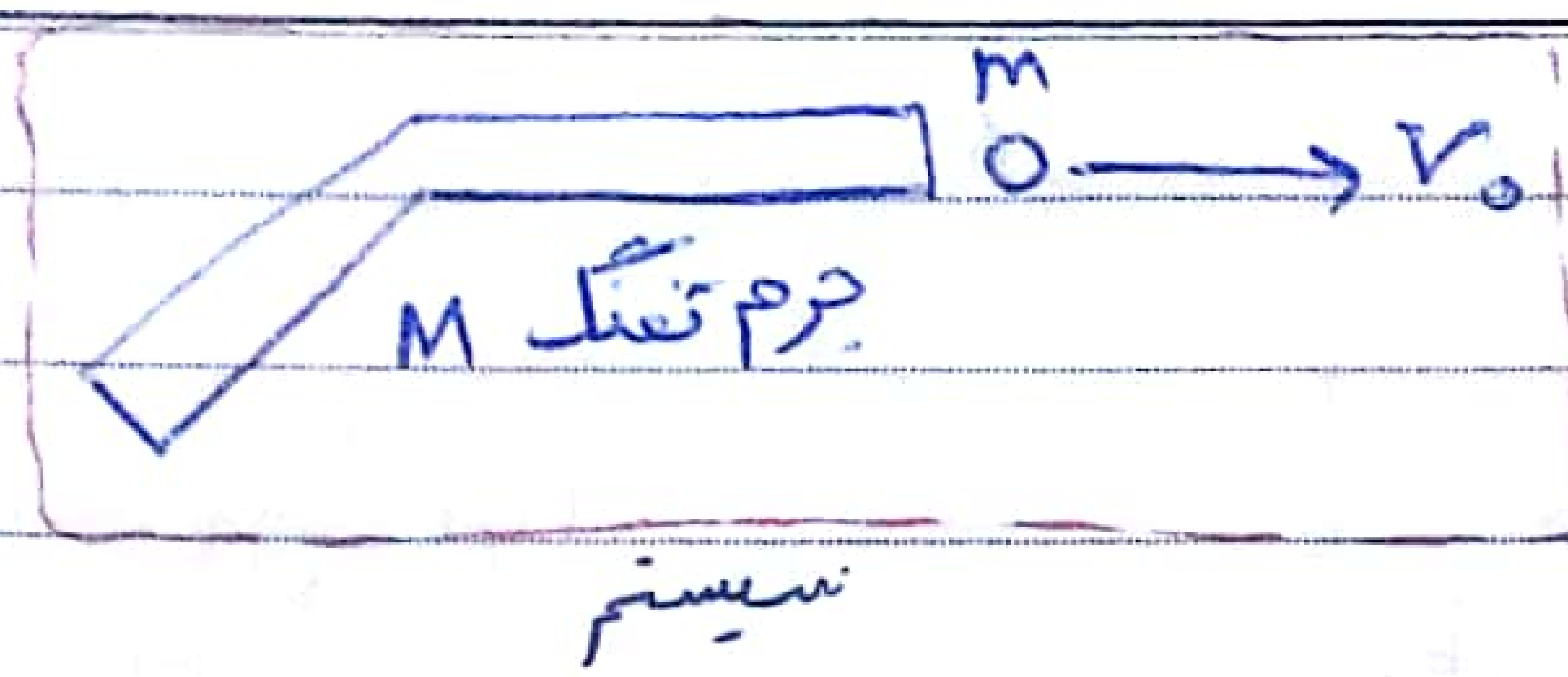
اصل بقای اندازه حرکت $\boxed{\vec{P}_۱ = \vec{P}_۲}$

اگر $f_x = ۰ \longrightarrow P_{۱x} = P_{۲x}$

اگر $f_y = ۰ \longrightarrow P_{۱y} = P_{۲y}$

مثال) گلوله‌ای به جرم m با سرعت مطلق افقی $v_۰$ از دهانه تفنگی شلیک

می‌شود، مطلوبست سرعت حرکت تفنگ در لحظه شلیک.



$\xrightarrow{\quad} +$

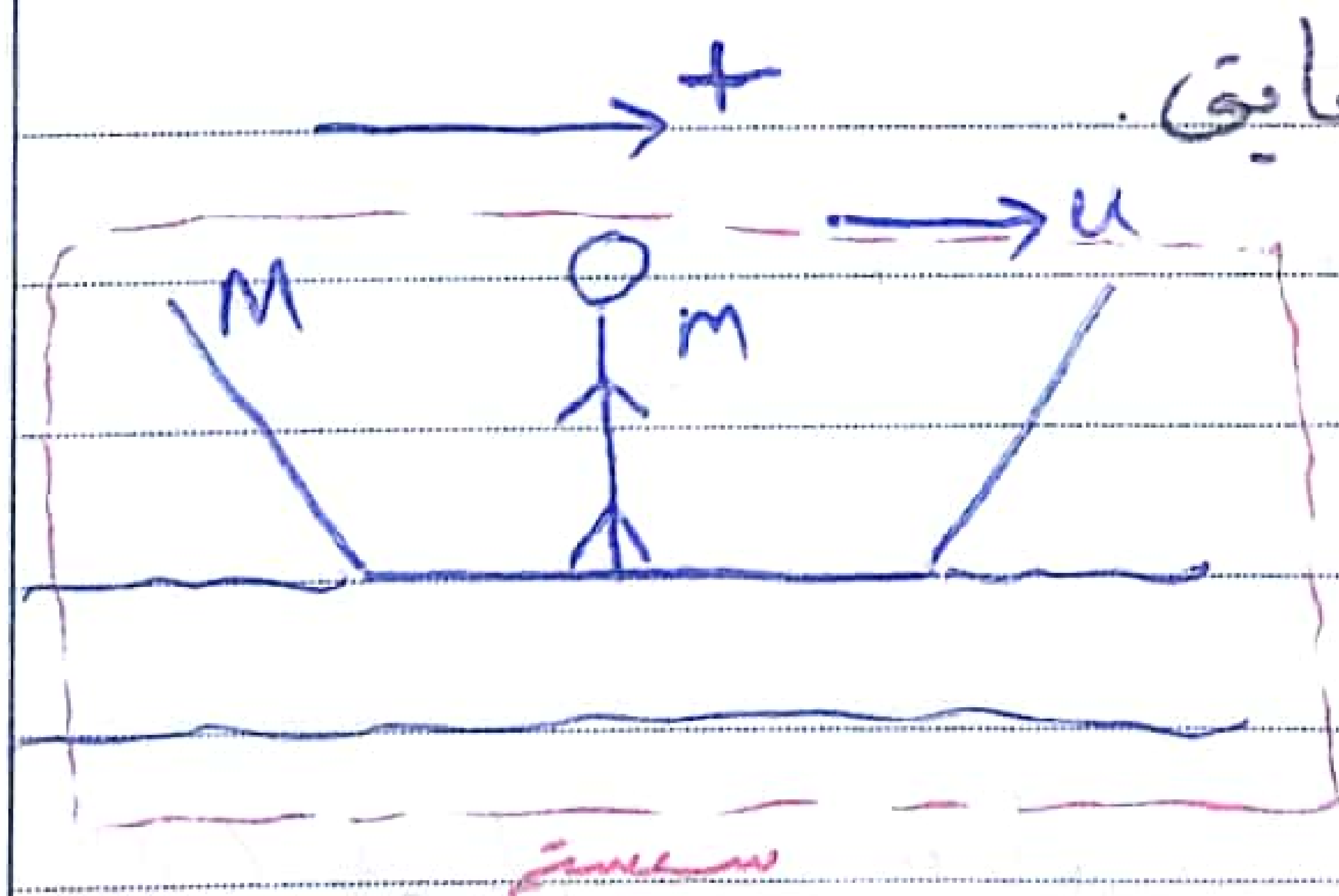
$f_x = 0 \longrightarrow P_{1x} = P_{2x}$

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

$$0 + 0 = m v_0 + M V \qquad m v_0 + M V = 0$$

$$\boxed{V = -\frac{m}{M} v_0}$$

مثال) فردی به جرم m داخل قایقی به جرم M ایستاده است و سیستم ساکن است. از اصطکاک بین آب و قایق صرف‌نظر شود. در این لحظه فرد نسبت به قایق در جهت نشان داده شده با سرعت u شروع به حرکت می‌کند. مطلوبست محاسبه سرعت حرکت قایق.



$f_x = 0 \longrightarrow P_{1x} = P_{2x}$

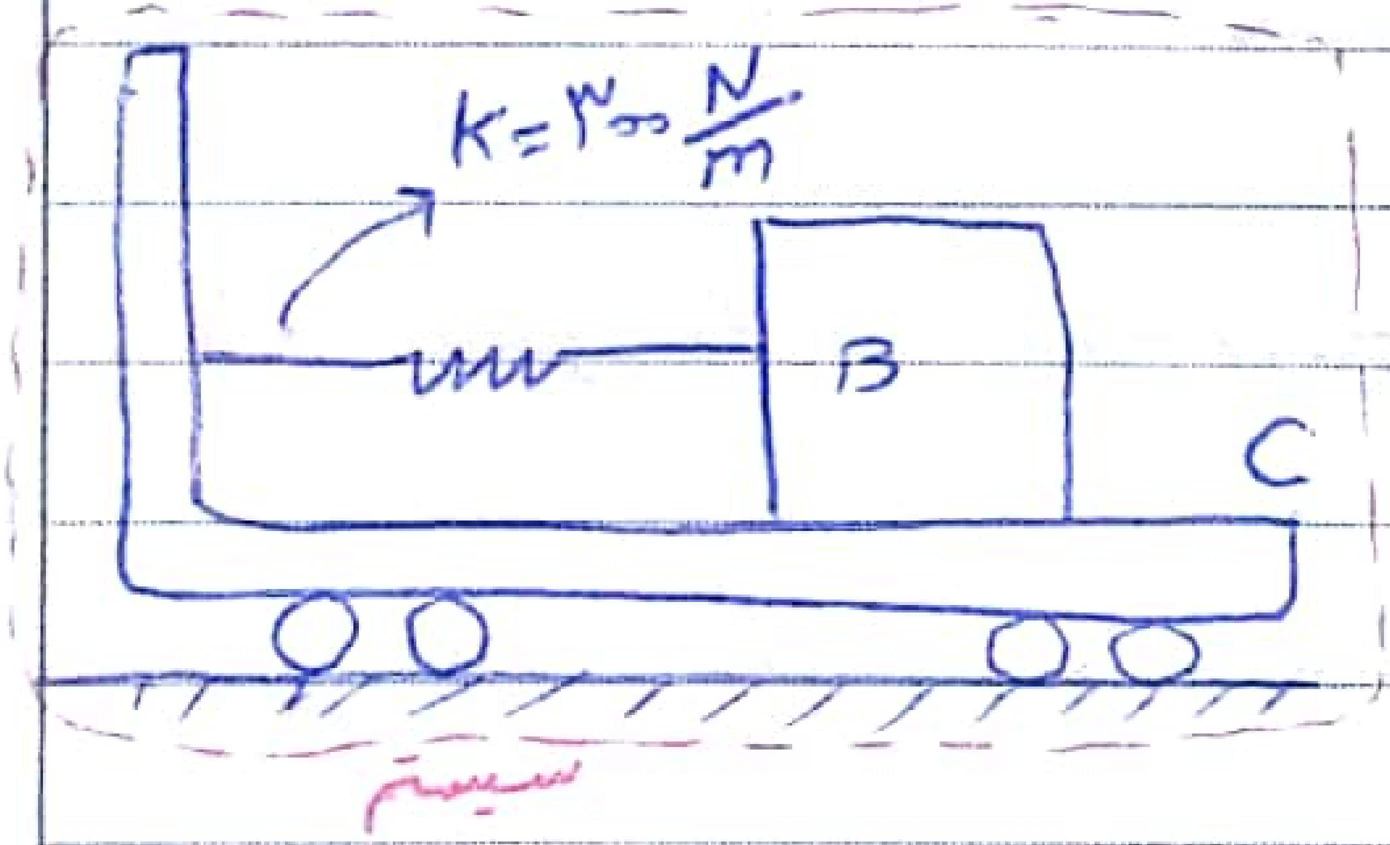
$$m_1 v_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

$$0 + 0 = M V + m(u + V)$$

مطلق فرد $\vec{V} = \vec{R} + \vec{V_r}$
$= V + u$

$Mv + m(u+v) = 0$ $\boxed{v = -\frac{m}{M+m}u}$

مثال) جسم B به جرم 50kg بر روی یک گاری به جرم 75kg قرار دارد.
اگر فنر نشان داده شده که از یک طرف به گاری جوش داده شده است توسط
جسم B ۰٫۲ متر فشرده شود و سیستم از حالت سکون رها گردد مطلوب
است محاسبه سرعت جسم B نسبت به گاری در لحظه‌ای که فنر طول آزاد
خود می‌رسد از جرم چرخ‌ها و فنر و همچنین اصطکاک در محاسبات
صرف نظر شود.

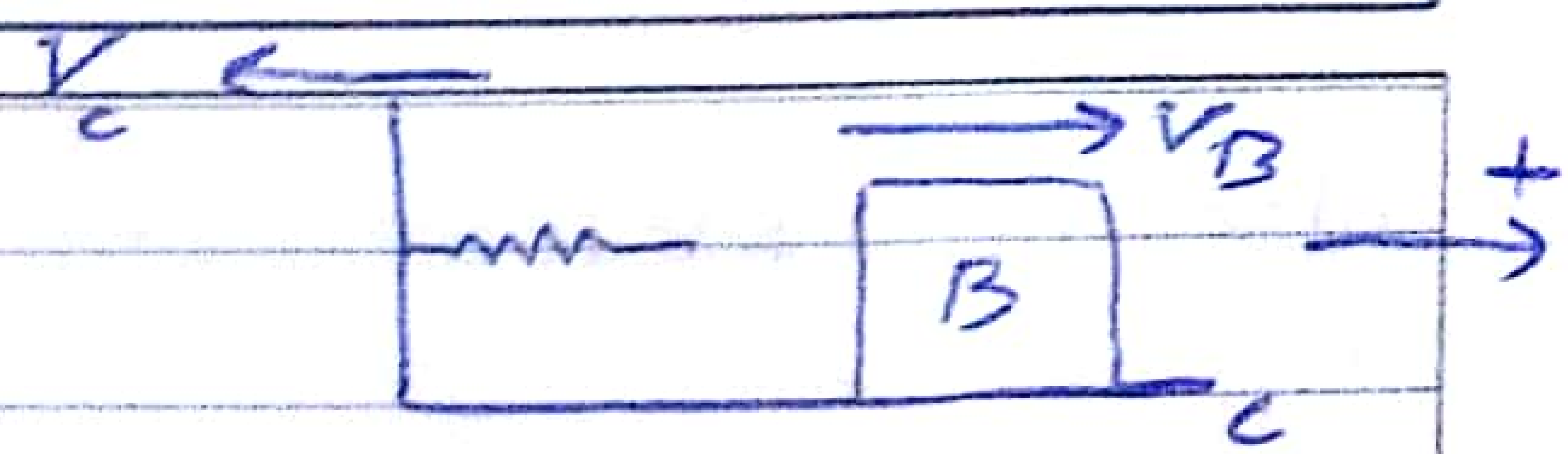


سیستم پتانسیل ← اصل بقای انرژی مکانیکی

$E_1 = E_2$ $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$0 + \frac{1}{2}(200)(0.2)^2 = \frac{1}{2}(50)v_B^2 + \frac{1}{2}(75)v_C^2 + 0$

$\boxed{50v_B^2 + 75v_C^2 = 12}$ (1)



$f_x = 0 \longrightarrow P_1 x = P_2 x$

$m_B v_{Bx} + m_C v_{Cx} = m_B v'_{Bx} + m_C v'_{Cx}$

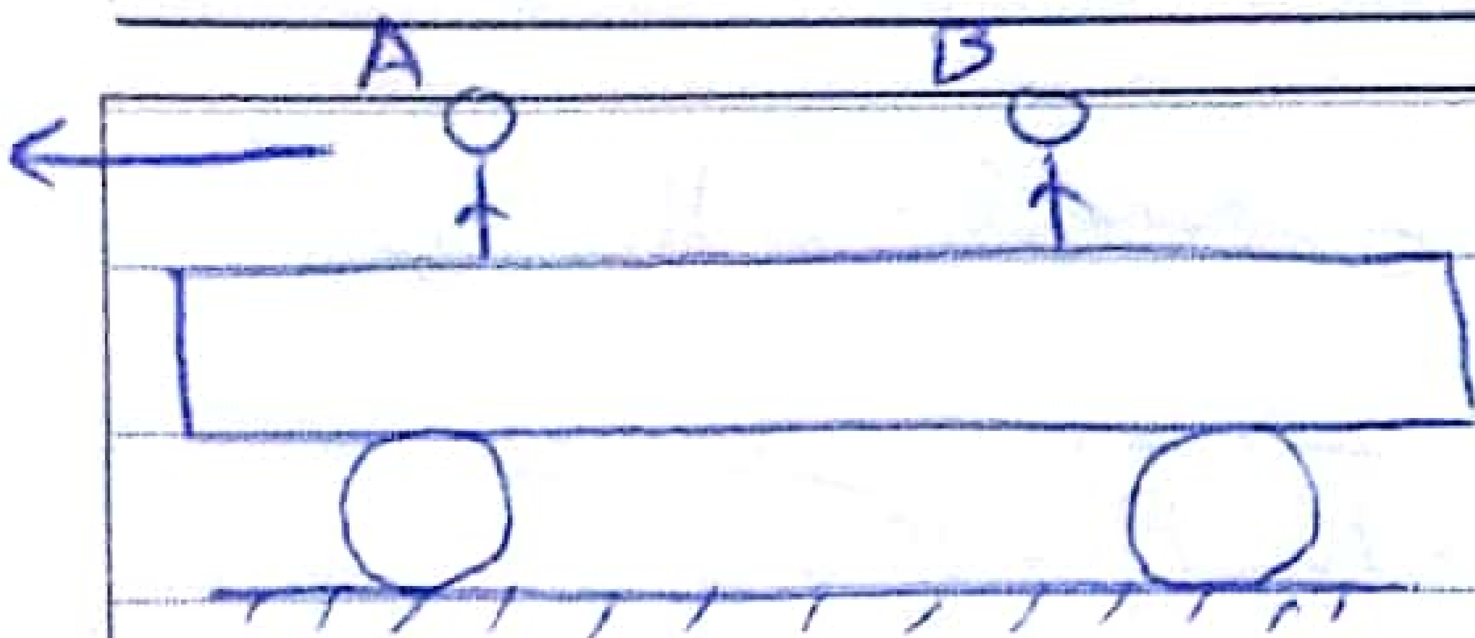
$0 + 0 = (50) v_B + (75)(-v_C)$ $\boxed{2v_B - 3v_C = 0}$ (2)

$(1),(2) \longrightarrow \begin{cases} v_C = 0/253 \ \frac{m}{s} \longleftarrow \\ v_B = 0/379 \ \frac{m}{s} \longrightarrow \end{cases}$

$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{B/C}$ $0/379 = -0/253 + \vec{v}_{B/C}$

$\vec{v}_{B/C} = 0/632 \ \frac{m}{s} \longrightarrow$

مثال: دو فرد A و B هر یک به وزن 120 lb بر روی یک گاری
به وزن 200 lb ایستاده اند، که هر یک می توانند با سرعت $3\frac{ft}{s}$ نسبت
به گاری حرکت نمایند. مطلوب است محاسبه سرعت گاری. الف) اگر فرد
A حرکت کرده و به پایین گاری بپرد، سپس فرد B حرکت کرده و به پایین
گاری بپرد. ب) هر دو فرد A و B در یک لحظه حرکت کرده و در یک لحظه از
گاری به پایین بپرند. از جرم چرخهای گاری صرف نظر کرده و فرض کنید



پرش‌ها در راستای افقی است.

اصل بقای اندازه حرکت

الف) $v_c = ۲/۲۶ \ \frac{ft}{s} \longrightarrow$

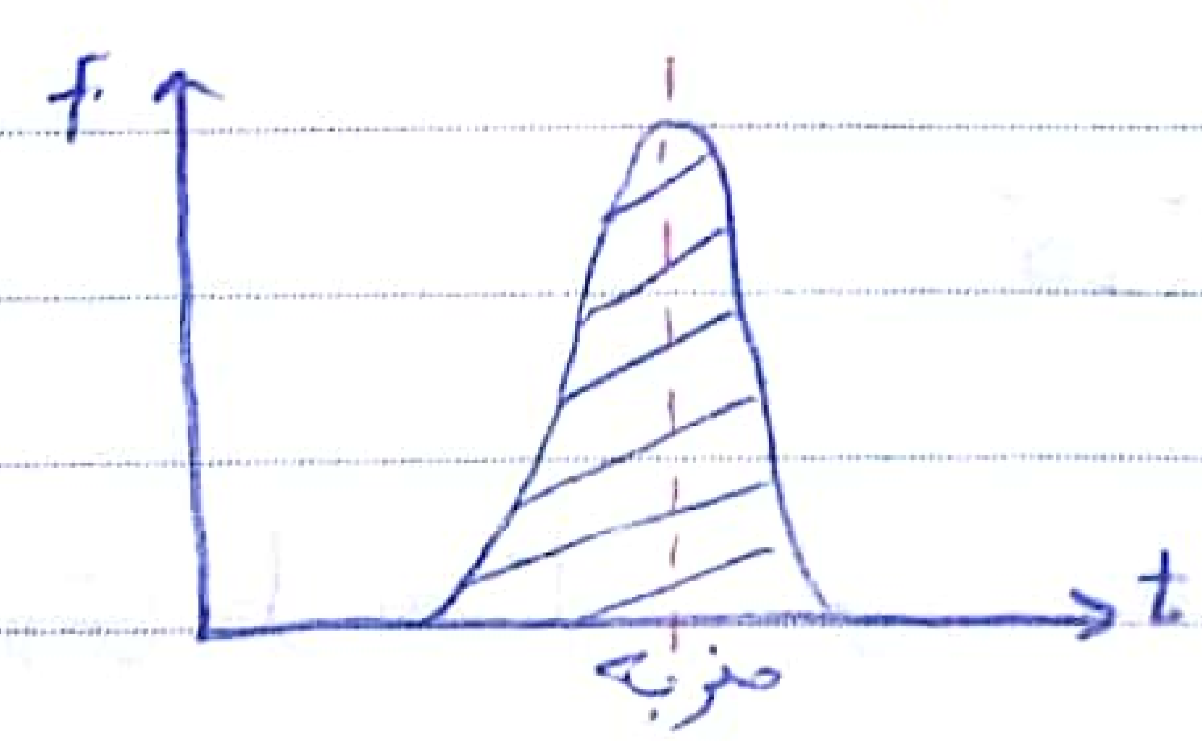
ب) $v_c = ۱/۸۵ \ \frac{ft}{s} \longrightarrow$ «۹۵/۰۹/۲۹»

برخورد یا ضربه: نیروهایی که در بازه زمانی کوتاه دارای اثر قابل ملاحظه‌ای هستند تحت عنوان نیروهای ضربه‌ای معرفی می‌شوند.

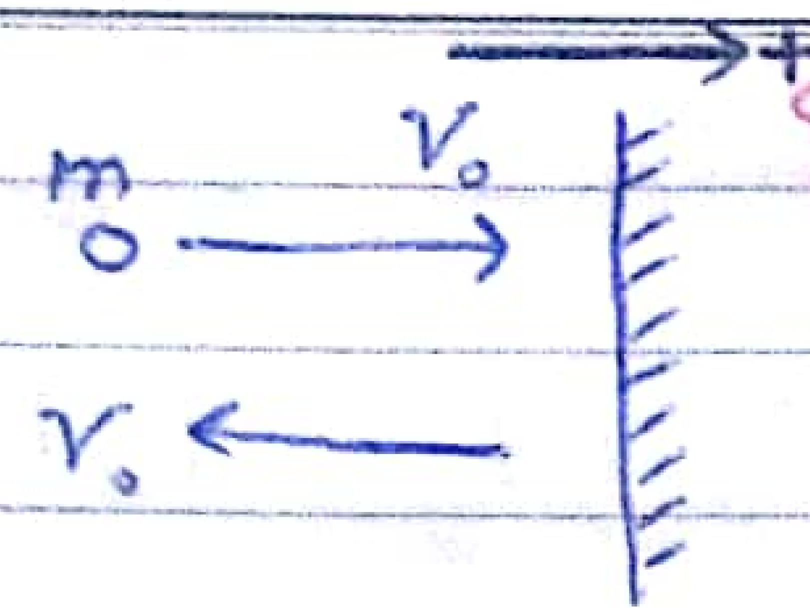
$$\vec F = m\vec a = m\frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec v)$$

تکانه یا اندازه حرکت $\boxed{\vec P \ \text{یا} \ \vec G = m\vec v}$

$$\vec F = \frac{d\vec P}{dt} \qquad \int \underbrace{\vec F . dt}_{\text{ضربه}} = \int d\vec P = \Delta \vec P = \vec P_2 - \vec P_1$$



مثال: توپی به جرم m با سرعت v_0 به دیواری برخورد کرده و با همین سرعت

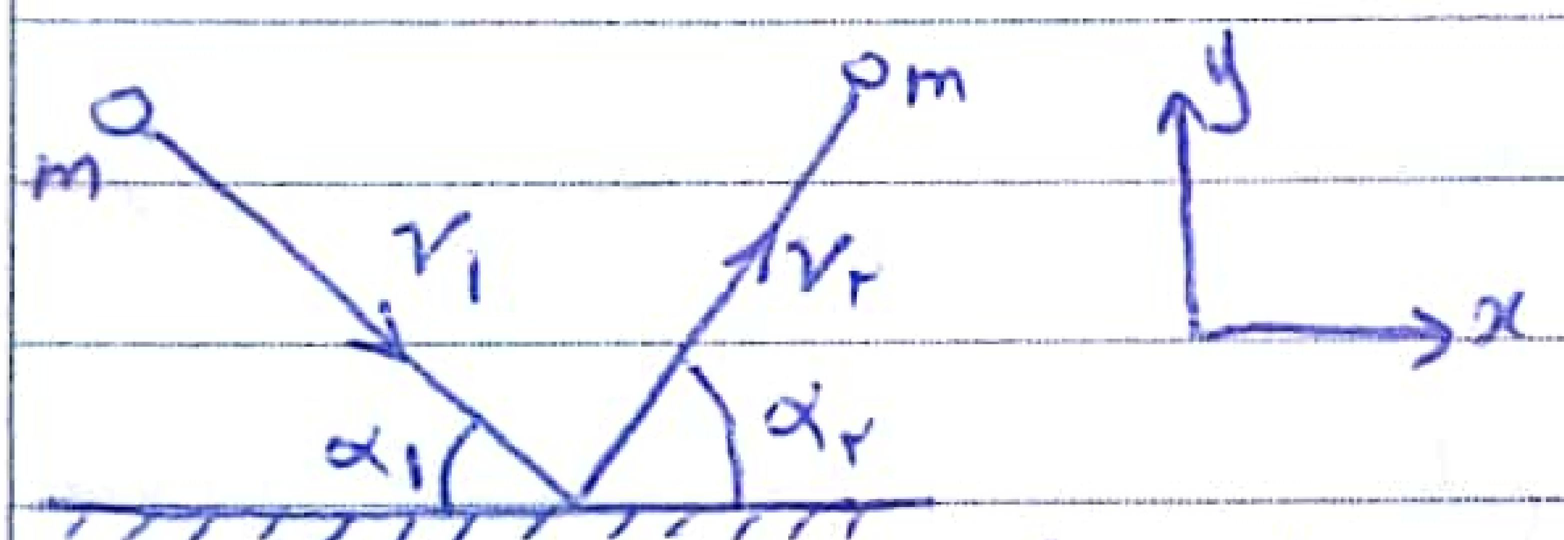


باز می‌گردد. مطلوبست محاسبه ضربه وارده بر توپ؟

$$\text{ضربه} = \int \vec{F}\cdot dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1$$

$$= m(-V_0) - m(V_0) = -2mV_0$$

مثال 2: در شکل نشان داده شده مطلوبست محاسبه ضربه وارده بر توپ؟



$$\int f_x\, dt = \Delta P_x = (P_x)_2 - (P_x)_1$$

$$\int f_y\, dt = \Delta P_y = (P_y)_2 - (P_y)_1$$

$$\int f_x\, dt = m(V_2 \cos\alpha_2) - m(V_1 \cos\alpha_1) = A$$

$$\int f_y\, dt = m(V_2 \sin\alpha_2) - m(-V_1 \sin\alpha_1) = B$$

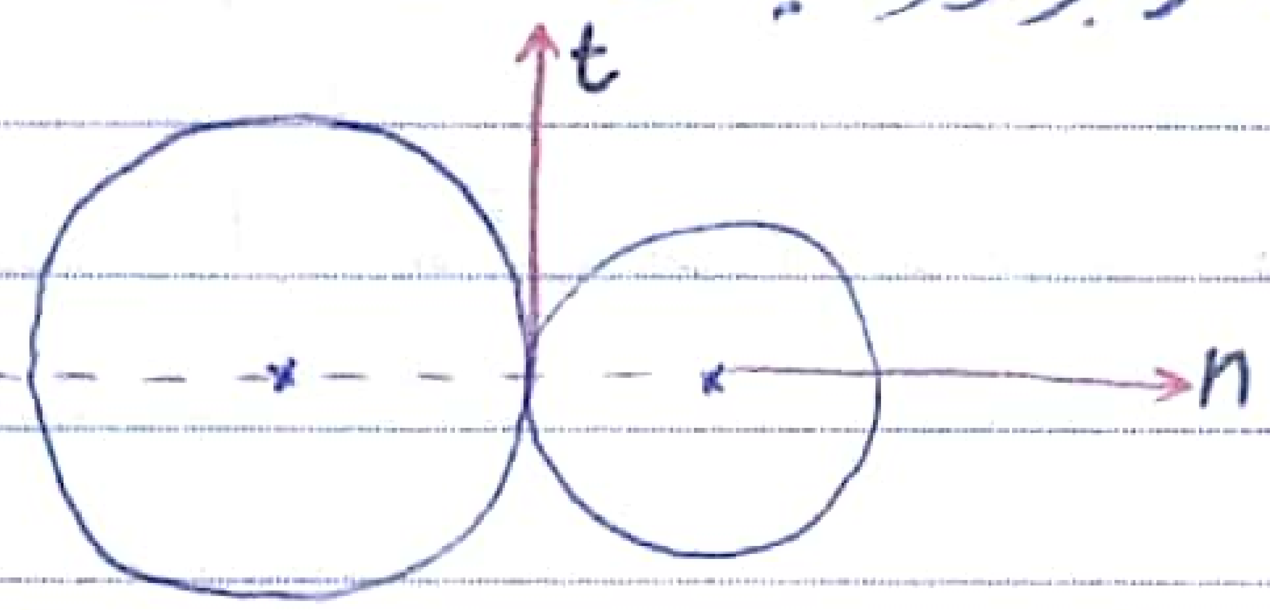
$$\int f\, dt = \sqrt{A^2 + B^2}$$

- روش حل مسائل برخورد

فرض: 1- امتداد نیروهای ضربه‌ای در امتداد خط المرکزین می‌باشد.
اعمال

Year. Month. Date. ( ) Subject :

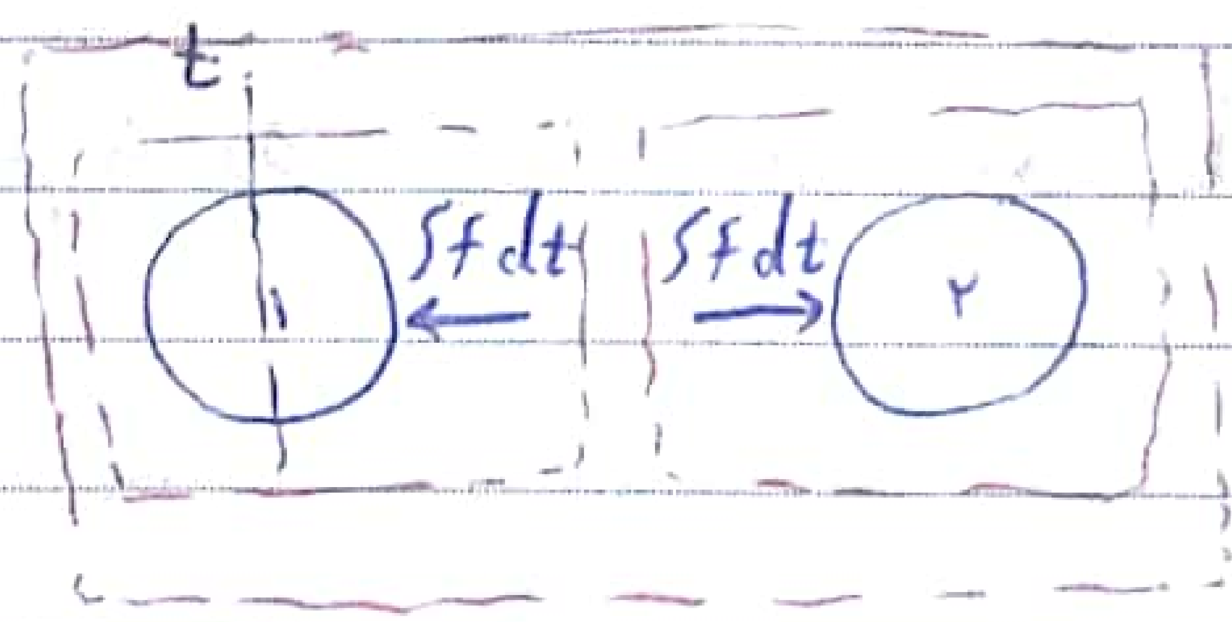
۲- صفحه حرکت اجسام قبل و بعد از برخورد یکسان است.



امتداد خط المرکزین

کلیه مسائل مربوط به برخورد با استفاده از چهار رابطه زیر حل می‌شوند:

$$\boxed{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n}} \quad ①$$



قبل $P_1 = P_2$ بعد

$m_1 v_1 t = m_1 v'_1 t$

$$\boxed{v'_1 t = v_1 t} \quad ②$$

$$\boxed{v'_2 t = v_2 t} \quad ③$$

ضریب برخورد
ضریب استرداد $e = \dfrac{\text{اندازه ضربه بازگشت}}{\text{اندازه ضربه تغییر شکل}} = \dfrac{\int_{t_0}^{t} f_r\,dt}{\int_0^{t_0} f_d\,dt} = \dfrac{v'_{1n} - v'_{2n}}{v_{2n} - v_{1n}}$ ④

برخورد الاستیک ← اتلاف انرژی نداریم. انرژی جنبشی ثابت. $e = 1$

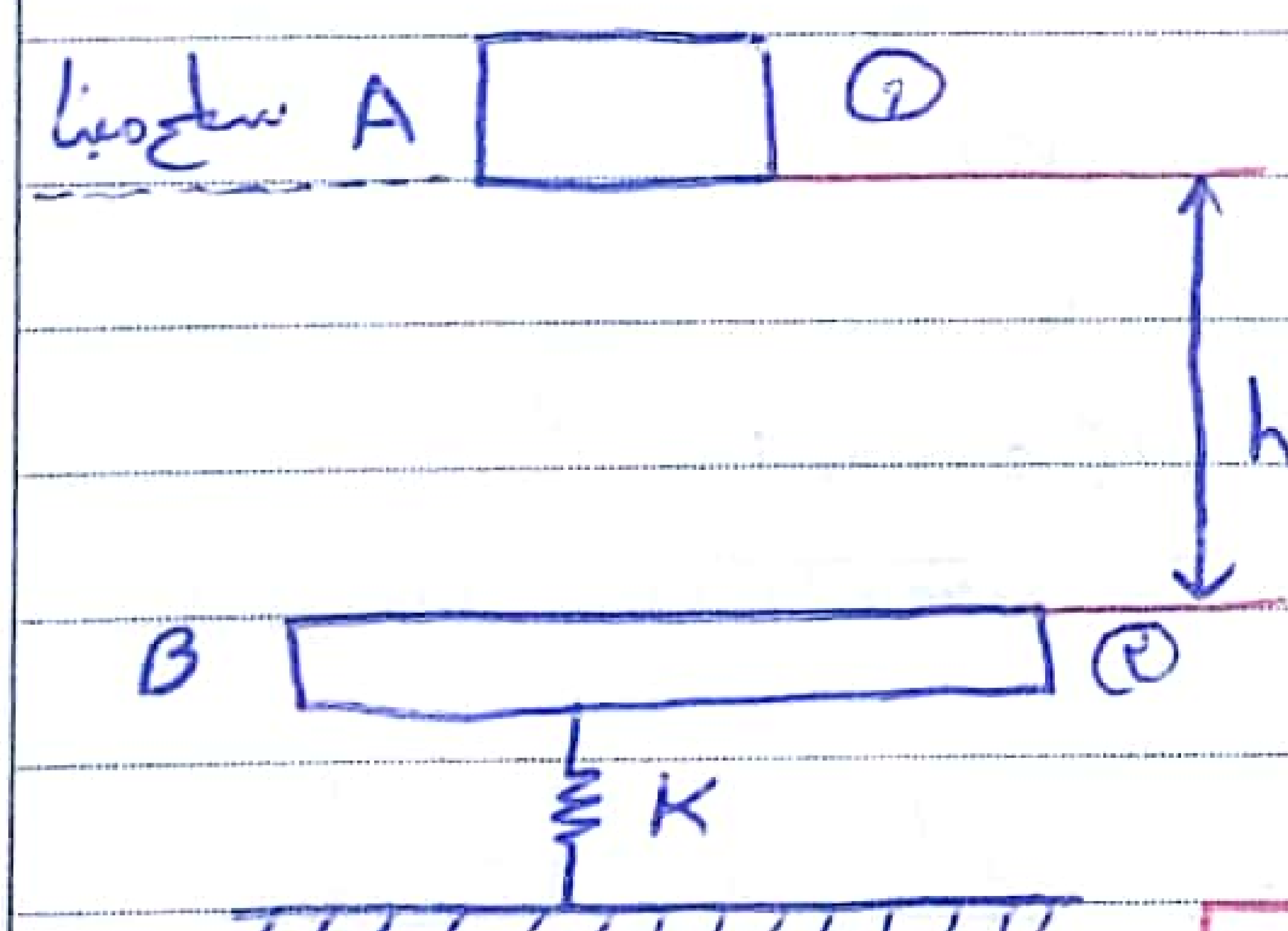
برخورد پلاستیک ← برخوردی که در آن دو جسم به هم بعد از برخورد می‌چسبند

و دارای سرعت یکسان می‌شوند و اتلاف انرژی max است $e=0$

در بقیه موارد مقدار ضریب برخورد بین دو عدد صفر و یک است.

$$\boxed{0 \leq e \leq 1}$$

مثال ۳) بلوک A به جرم m از حالت سکون و از ارتفاع h نسبت به صفحه B به جرم ۲m شروع به حرکت می‌کند (رها می‌شود). اگر ضریب برخورد بین دو جسم A و B برابر با e باشد. مطلوبست محاسبه سرعت صفحه B بعد از برخورد.



$$E_1=E_2$$

$$T_1+V_1=T_2+V_2$$

$$0+0=\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2-\cancel{m}gh$$

$$\boxed{v_2=\sqrt{2gh}}$$

$+\downarrow$

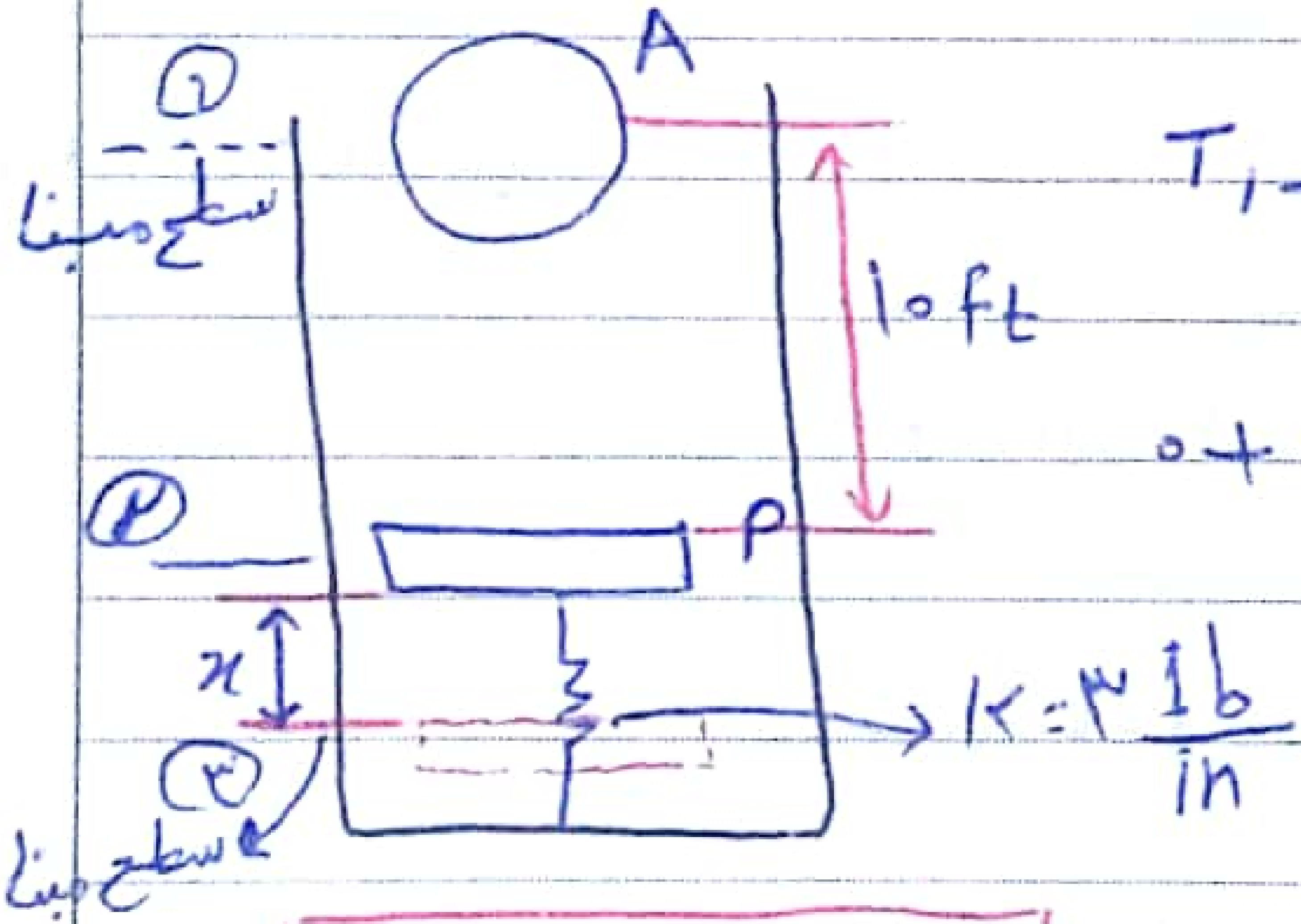
$$m_A v_{An}+m_B v_{Bn}=m_A v'_{An}+m_B v'_{Bn}$$

$$\boxed{m(\sqrt{2gh})+0=mv'_{An}+2mv'_{Bn}} \quad (1)$$

$e = \frac{v'_{An} - v'_{Bn}}{v_{Bn} - v_{An}} = \frac{v'_{An} - v'_{Bn}}{۰ - \sqrt{۲gh}}$ $\boxed{v'_{Bn} - v'_{An} = e\sqrt{۲gh}}$ ②

①,② $\longrightarrow v'_{Bn} = \frac{۱}{۳}\sqrt{۲gh}\,(۱+e)$

★مثال 4) کره‌ی A به وزن ۸lb از حالت سکون و از ارتفاع ۱۰ft نسبت به سطح صفحه P به وزن ۶lb رها می‌شود. مطلوبست محاسبه مقدار max فشردگی فنر اگر ضربه‌ی بین گوی A و صفحه P کاملاً الاستیک باشد.



قبل از برخورد

$T_۱ + V_۱ = T_۲ + V_۲$ $g = ۳۲٫۲ \frac{ft}{s^۲}$

$۰ + ۰ = \frac{۱}{۲}mv^۲ - mgh$

$۰ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۸}{۳۲٫۲}\right)v^۲ - (۸)(۱۰)$

$\Rightarrow \boxed{v = ۲۵٫۳۷۷ \frac{ft}{s}}$

$\downarrow +$ $m_A v_{An} + m_P v_{Pn} = m_A v'_{An} + m_P v'_{Pn}$

$\boxed{\left(\frac{۸}{۳۲٫۲}\right)(۲۵٫۳۷۷) + ۰ = \left(\frac{۸}{۳۲٫۲}\right)v'_{An} + \left(\frac{۶}{۳۲٫۲}\right)v'_{Pn}}$ ①

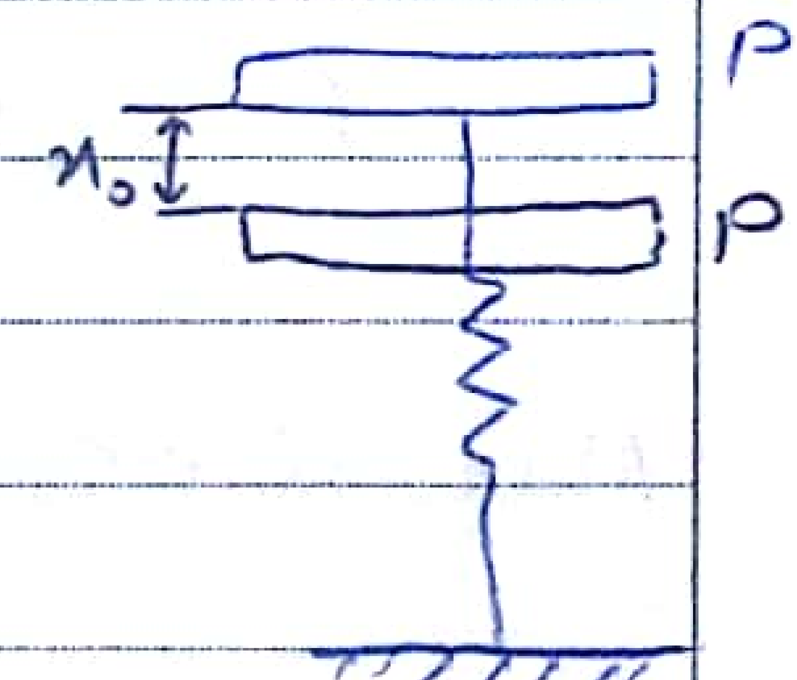
$e = \frac{v'_{An} - v'_{Pn}}{v_{Pn} - v_{An}}$ $۱ = \frac{v'_{An} - v'_{Pn}}{۰ - ۲۵٫۳۷۷}$

$\boxed{v'_{Pn} - v'_{An} = ۲۵,۳۷۷}$ (۲)

①و② $\Rightarrow \begin{cases} v'_{An} = ۳,۴۲۵ \ \frac{ft}{s} \\ v'_{Pn} = ۲۹ \ \frac{ft}{s} \end{cases}$

بعد از برخورد

$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$ $\boxed{1\ ft = ۱۲\ in}$



$\frac{1}{2}mv^2 + mgx + \frac{1}{2}Kx_0^2 = 0 + \frac{1}{2}K(x+x_0)^2$

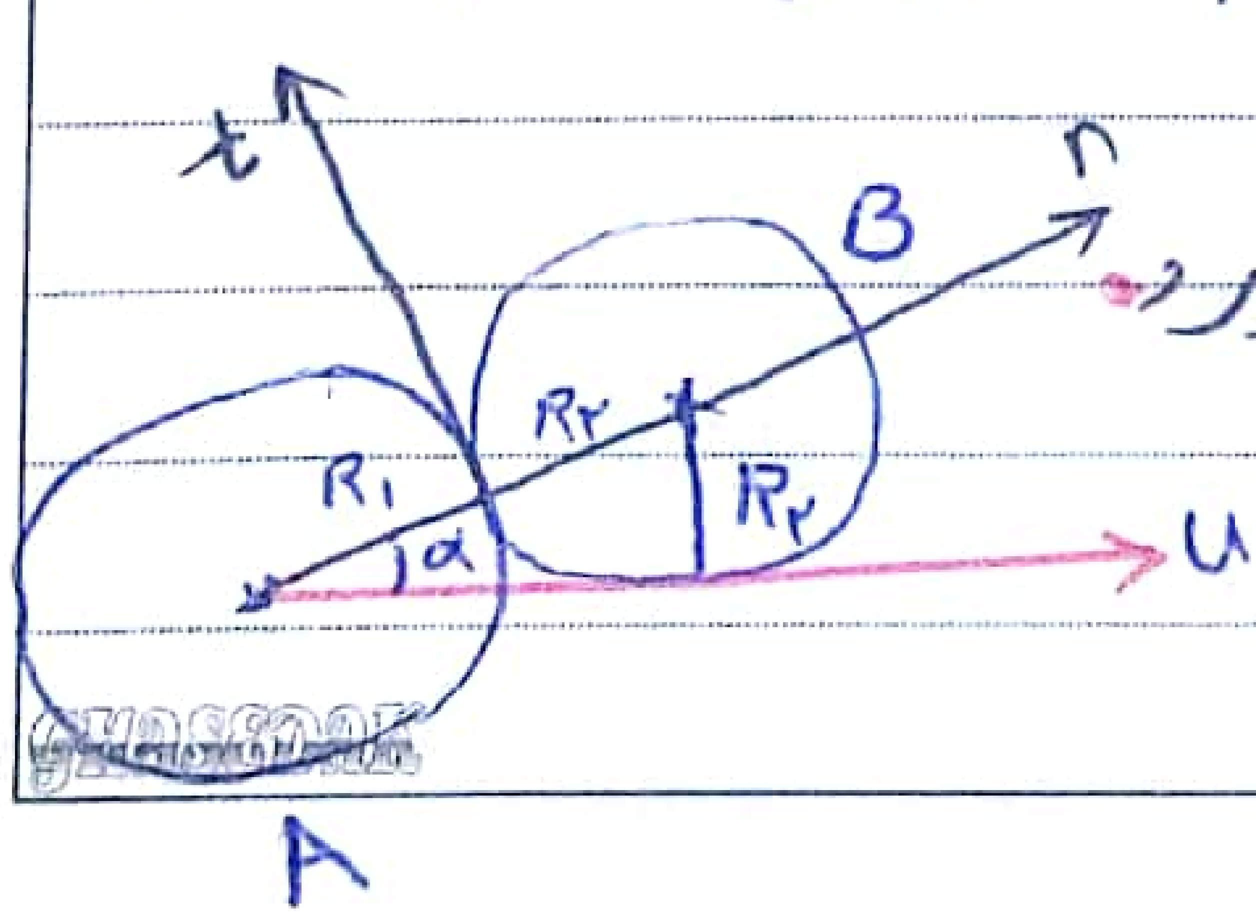
$\sum f = Kx_0 = mg \qquad x_0 = \frac{mg}{K} = \frac{۶}{۳} = ۲\,in = \frac{1}{4}\,ft$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{۶}{۳۲,۲}\right)(۲۹)^2 + ۶x + \frac{1}{2}(۳)(۱۲)\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}(۳)(۱۲)\left(x+\frac{1}{4}\right)^2$

$۱۸x^2 - ۷۸,۳۴۷ = 0$ $\boxed{x = ۲,۰۸۷\ ft}$

$\boxed{x_{max} = ۲,۰۸۷ + \frac{1}{4} = ۲,۳۵\ ft}$

مثال 5) جسم B در ابتدا ساکن است و مرکز جسم A با سرعت افقی u مطابق شکل حرکت می‌کند. ضریب برخورد برابر با e درنظر گرفته شود. مطلوب است محاسبه سرعت اجسام پس از برخورد.



A شعاع کره = R_1

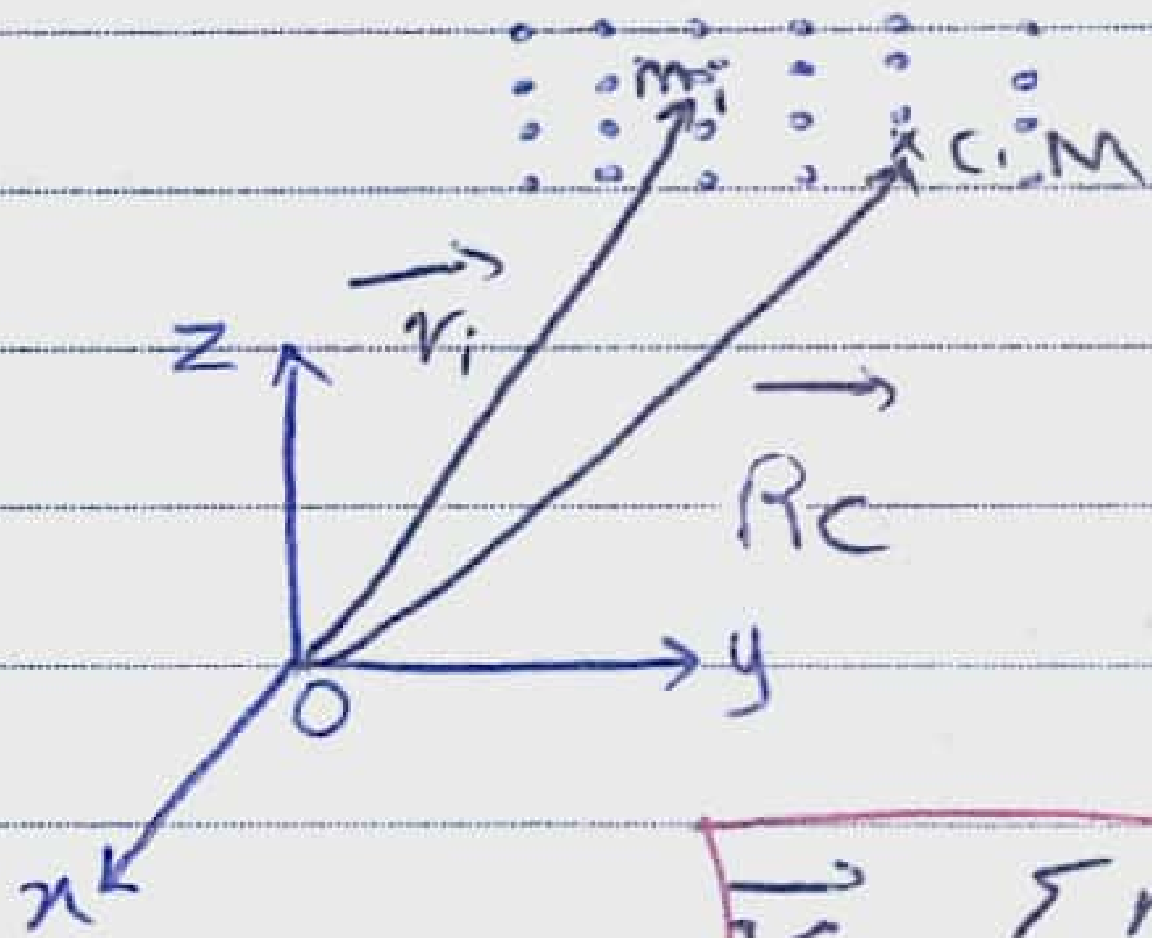
B 〃 〃 = R_2

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{R_2}{R_1+R_2}}$$

$$\begin{cases} v_{Bn} = v_{Bt} = 0 \\ v_{An} = u\cos\alpha \qquad v_{At} = -u\sin\alpha \end{cases}$$

با استفاده از ۴ رابطه مقادیر زیر به دست می آید. $v'_{An}, v'_{At}, v'_{Bn}, v'_{Bt}$

مرکز جرم دستگاه ذرات:



$$\boxed{\vec{R}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}}$$

$$\rightarrow \vec{a}_c = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i} = \frac{\vec{F}}{M} \Longrightarrow \boxed{\vec{F} = M\vec{a}_c}$$

M: جرم کل دستگاه ذرات $\qquad$ $\vec{a}_c$: بردار شتاب مرکز جرم

مثال 6) دستگاهی متشکل از دو ذره‌ی زیر مفروض است. مطلوبست مکان مرکز جرم آنها.

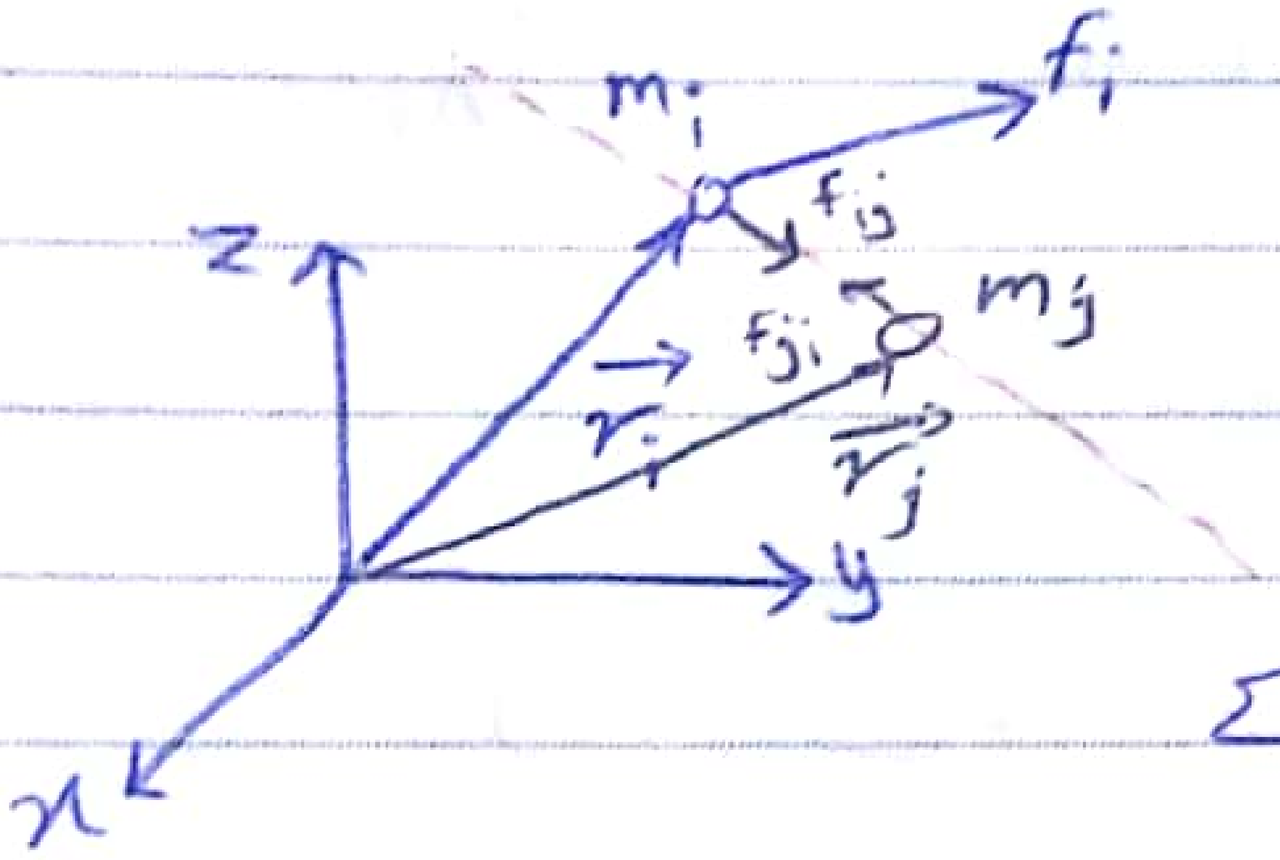
$m_1 = 4\,kg \,,\ \vec{r}_1 = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

$m_2 = 6\,kg \,,\ \vec{r}_2 = \vec{i}$

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{R}_c = \frac{(۴)(۳\vec{i} + ۵\vec{j}) + (۶)(\vec{i})}{۱۰} \qquad \vec{R}_c = ۱{,}۸\,\vec{i} + ۲\,\vec{j}$$

لنگر حرکتی دستگاه ذرات



معادله حرکت برای ذره i ام

$$\sum \vec{F} = m_i \vec{a}_i$$

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \underbrace{F_i^{\,e}}_{\text{خارجی}} + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}$$

$$\vec{r}_i \times m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,e} + \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,e} + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij}}$$

از جمع رابطه فوق برای کل نقاط مادی خواهیم داشت:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times f_i^{\,e} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} - \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij})$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>1}^{n} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0$$

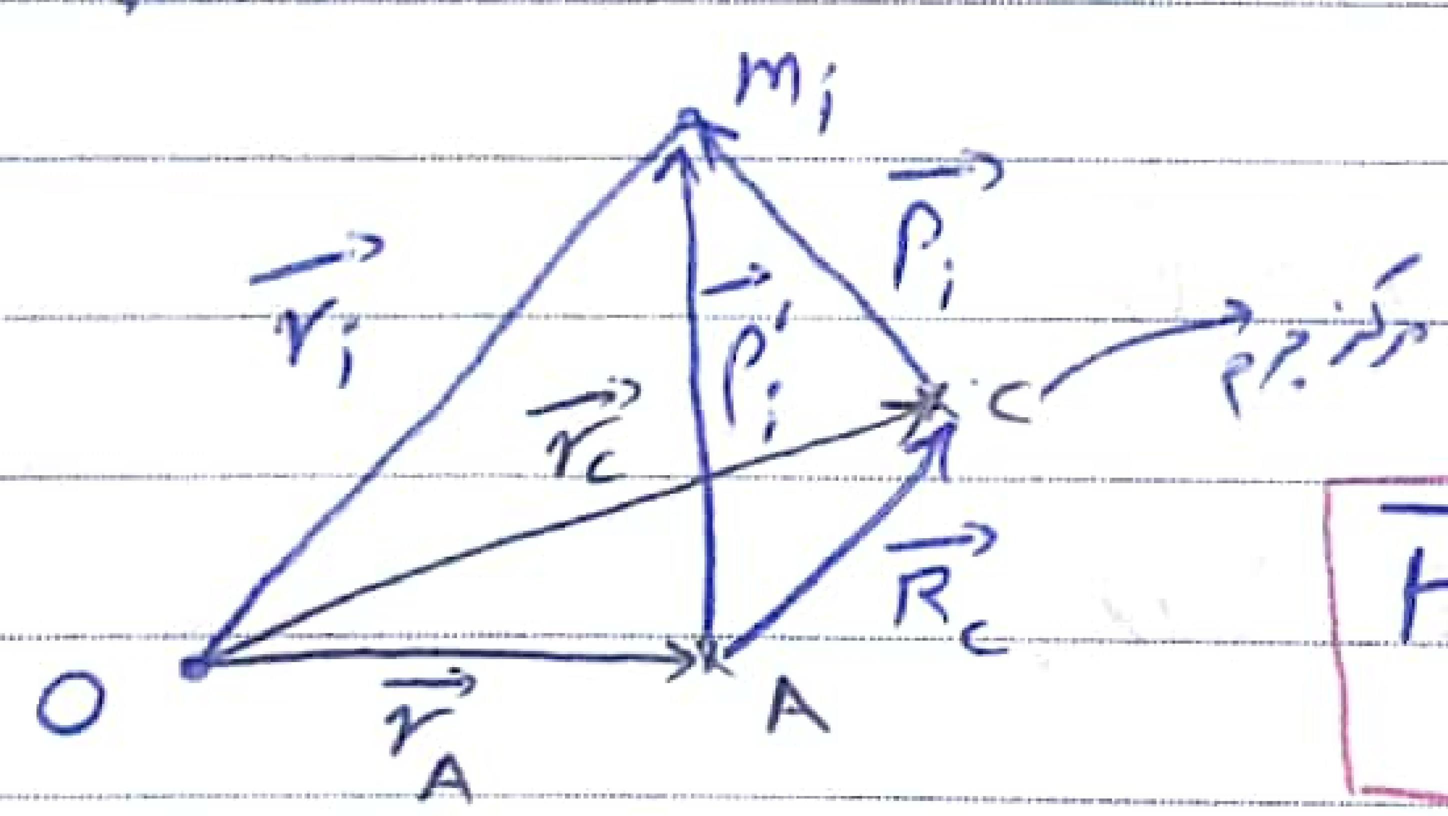
بردار $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ در امتداد بردار $\vec{f}_{ij}$ می باشد

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{\,e}} \qquad f_i^{\,e} = m_i a_i$$

تعریف : $\boxed{\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{\,e}}$ ★ گشتاور نیروهای خارجی وارد بر ذره نسبت به O

لنگر حرکتی $\boxed{\vec{H}_o = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)}$ ① ★ $\Longrightarrow \boxed{\vec{M}_o = \frac{d\vec{H}_o}{dt}} = \dot{\vec{H}}_o$ ④

مطلق حول مبدأ



لنگر حرکتی مطلق حول مرکز جرم

$$\boxed{\vec{H}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i} \quad ②$$

لنگر حرکتی نسبی نسبت به C
سرعت نسبت به A

$$(\vec{H}_c)_{rel} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_A)$$

$$\vec{r}_A + \vec{\rho}_i' = \vec{r}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i - \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_A$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i}_{\vec{H}_c} + \dot{\vec{r}}_A \times \cancel{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\sum m_i \vec{\rho}_i}{\sum m_i} = 0$$ فاصله مرکز جرم تا مرکز جرم $\Rightarrow \sum m_i \vec{\rho}_i = 0$

$$\boxed{(\vec{H}_c)_{rel}\ \text{نسبت به نقطه A} = \vec{H}_c}$$ ☆

$$(\vec{H}_c)_{rel}\ \text{نسبت به نقطه C} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_c)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i - \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_c$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i}_{\vec{H}_c} + \dot{\vec{r}}_c \times \cancel{\sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i m_i}$$

$$(\vec{H}_c)_{rel}\ \text{نسبت به نقطه C} = \vec{H}_c$$ «۹۵/۱۰/۰۴»

$$\vec{H}_c = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\dot{\vec{H}}_c = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{a}_i + \sum \dot{\vec{\rho}}_i \times m_i \vec{v}_i \qquad \vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$$

$$= \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{a}_i + \sum \dot{\vec{\rho}}_i \times m_i (\dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

صفر

$$= \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{a}_i + \sum \dot{\vec{\rho}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_c + \cancel{\sum \dot{\vec{\rho}}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i}$$

صفر

$$= \underbrace{\sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{a}_i}_{\vec{M}_c} - \dot{\vec{r}}_c \times \cancel{\sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i} \qquad \bar{\rho} = \frac{\sum m_i \vec{\rho}_i}{\sum m_i} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{M}_c = \frac{d\vec{H}_c}{dt} = \dot{\vec{H}}_c} \quad (۵)$$

لنگر حرکتی حول نقطه دلخواه A:

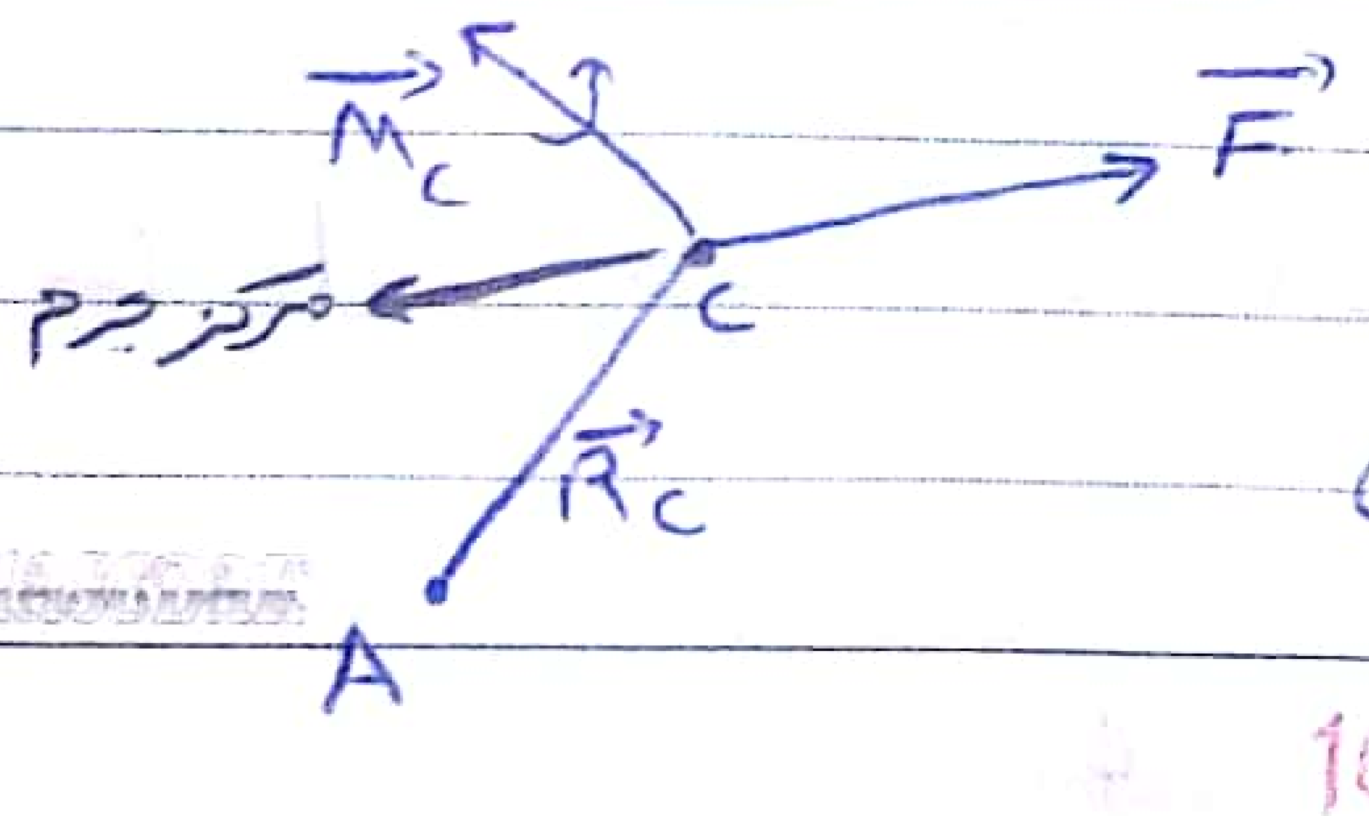
$$\boxed{\vec{H}_A = \sum \vec{\rho}_i{}' \times m_i \vec{v}_i} \quad (۶)$$

$$= \sum (\vec{R}_c + \vec{\rho}_i) \times m_i \vec{v}_i$$

$$= \sum \vec{R}_c \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$= \vec{R}_c \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i}_{m\vec{v}_c} + \underbrace{\sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i}_{\vec{H}_c} \qquad \vec{v}_c = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i}$$

$$\boxed{\vec{H}_A = \vec{H}_c + \vec{R}_c \times m \dot{\vec{R}}_c}$$

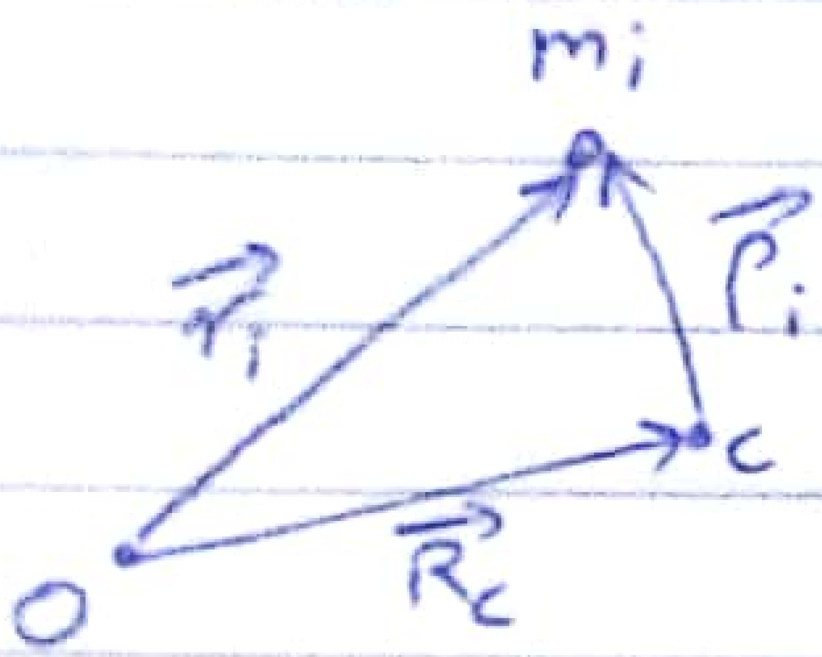


$$\vec{M}_A = \vec{M}_c + \vec{R}_c \times \vec{F}$$

از طرفی: $\vec{F} = m\vec{a}_c$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_A = \dot{\vec{H}}_c + \vec{R}_c \times m\vec{a}_c}$$

انرژی جنبشی دستگاه ذرات



$$\boxed{T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2} \quad ①$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{R}}_c + \dot{\vec{\rho}}_i = \vec{v}_c + \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_c + \dot{\vec{\rho}}_i) \cdot (\vec{v}_c + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2 + \sum m_i \vec{v}_c \cdot \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2 + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

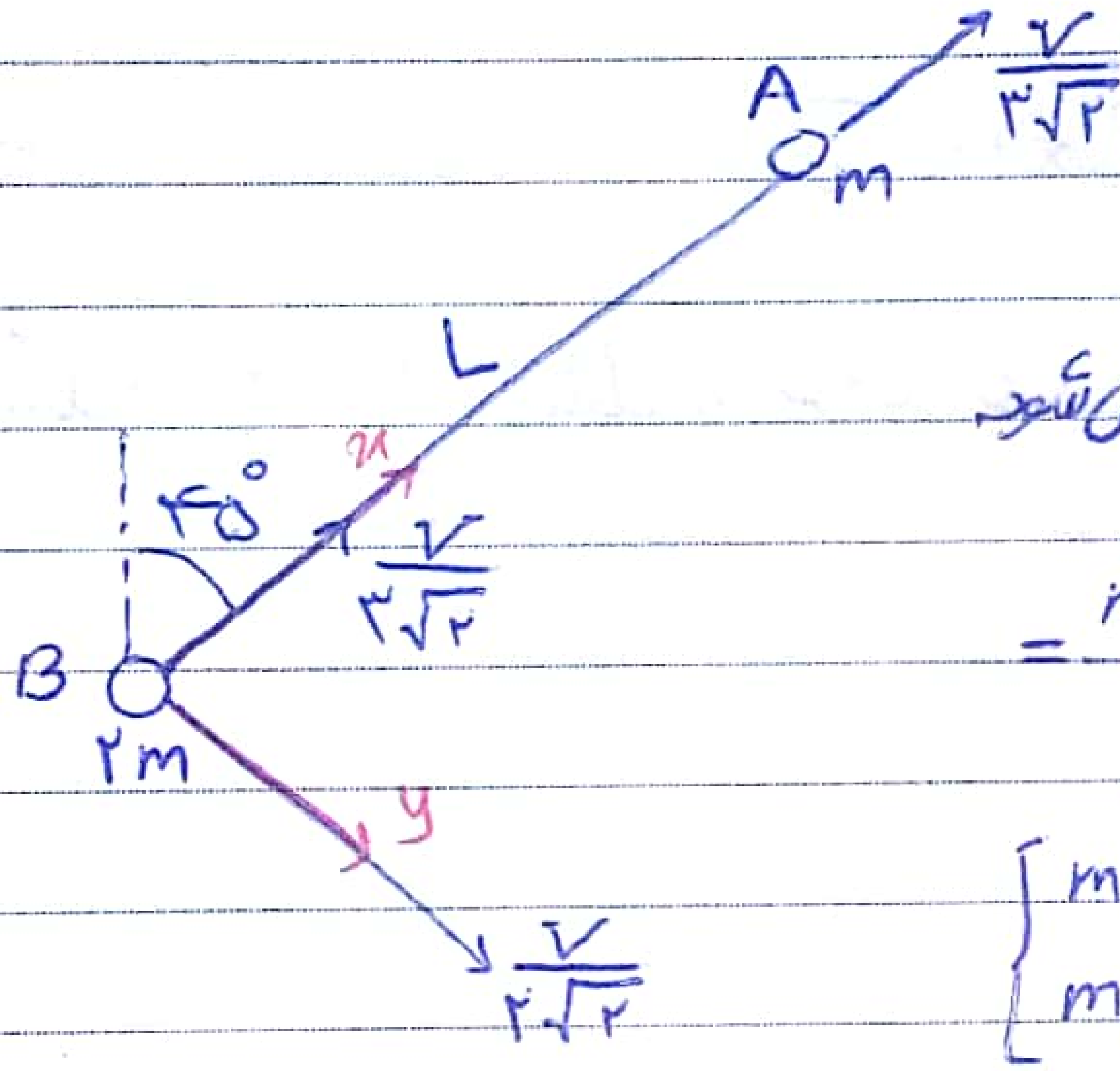
$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum m_i}_{\text{m کل دستگاه}} v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2 + \vec{v}_c \cdot \frac{d}{dt} \overset{\text{صفر}}{\cancel{\sum m_i \rho_i}} \qquad \bar{\rho} = 0$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2} \quad ②$$

مثال) دو جرم m و 2m به وسیله ی میله ی بی وزنی به طول l به یکدیگر متصل شده اند و دارای سرعت هایی مطابق شکل هستند. مطلوبست محاسبه:

الف) محل مرکز جرم ب) سرعت مرکز جرم ج) لنگر حرکتی حول

مرکز جرم   د) لنگر حرکتی حول نقطه B؟



الف) $\vec{R}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$

دستگاه xy در نقطه B درنظر گرفته می‌شود

$$= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\begin{cases} m_1 = m \quad , \quad \vec{r}_1 = L\vec{i} \\ m_2 = 2m \quad , \quad \vec{r}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_c = \frac{(m)(L\vec{i}) + (2m)(0)}{3m} \qquad \boxed{\vec{R}_c = \frac{L}{3}\vec{i}}$$

ب) $\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$

$$\begin{cases} m_1 = m \quad , \quad \vec{v}_1 = \frac{v}{3\sqrt{2}}\vec{i} \\ m_2 = 2m \quad , \quad \vec{v}_2 = \frac{v}{3\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{v}{2\sqrt{2}}\vec{j} \end{cases}$$

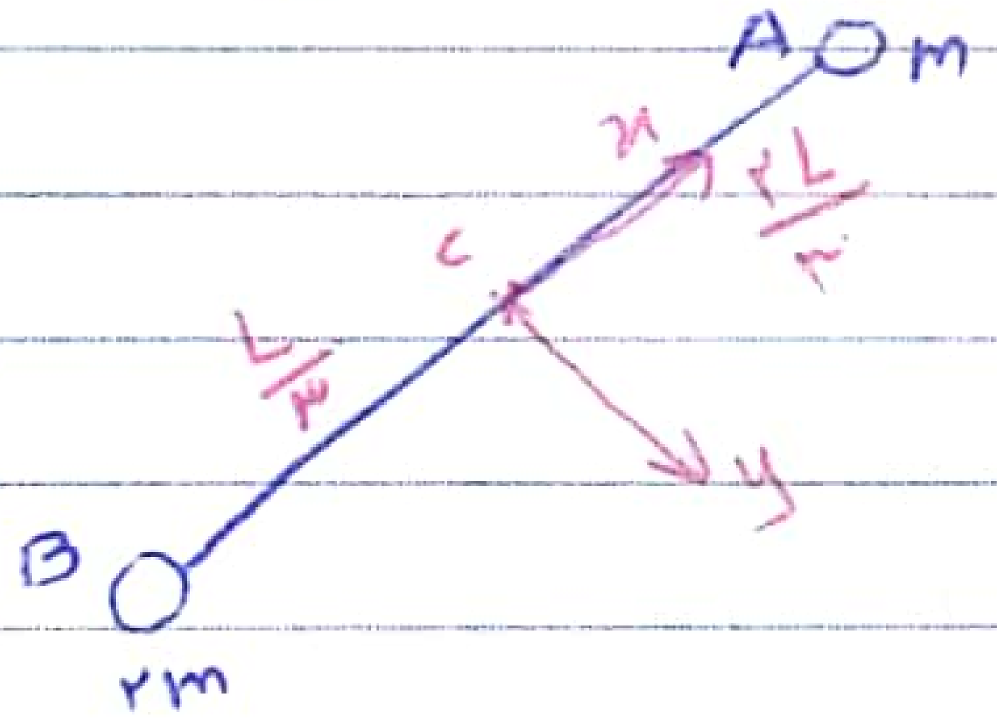
$$\vec{v}_c = \frac{1}{3m}\left[(m)\left(\frac{v}{3\sqrt{2}}\vec{i}\right) + (2m)\left(\frac{v}{3\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{v}{2\sqrt{2}}\vec{j}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{v}_c = \frac{v}{3\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{v}{3\sqrt{2}}\vec{j}}$$

ج) $\vec{H}_c = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$

$= \vec{\rho}_1 \times m_1 \dot{\vec{\rho}}_1 + \vec{\rho}_2 \times m_2 \dot{\vec{\rho}}_2$

دستگاه xy را در نقطه c به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



$$\begin{cases} m_1 = m \,,\ \vec{\rho}_1 = \frac{2L}{3}\vec{i} \,,\ \dot{\vec{\rho}}_1 = \dot{\vec{\rho}}_{A/c} = \vec{V}_A - \vec{V}_c \\ m_2 = 2m \,,\ \vec{\rho}_2 = -\frac{L}{3}\vec{i} \,,\ \dot{\vec{\rho}}_2 = \dot{\vec{\rho}}_{B/c} = \vec{V}_B - \vec{V}_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{\rho}}_1 = \frac{V}{3\sqrt{2}}\vec{i} - \left(\frac{V}{3\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{V}{3\sqrt{2}}\vec{j}\right) = -\frac{V}{3\sqrt{2}}\vec{j} \\ \dot{\vec{\rho}}_2 = \frac{V}{3\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{V}{2\sqrt{2}}\vec{j} - \left(\frac{V}{3\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{V}{3\sqrt{2}}\vec{j}\right) = \frac{V}{6\sqrt{2}}\vec{j} \end{cases}$$

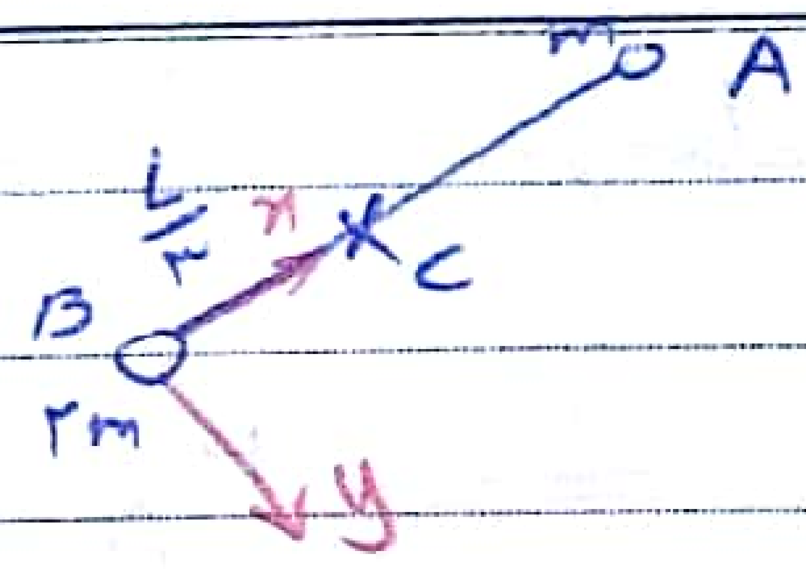
$$\vec{H}_c = \frac{2L}{3}\vec{i} \times (m)\left(-\frac{V}{3\sqrt{2}}\vec{j}\right) + \left(\frac{-L}{3}\vec{i}\right) \times (2m)\left(\frac{V}{6\sqrt{2}}\vec{j}\right)$$

$$\vec{H}_c = -\frac{2LmV}{9\sqrt{2}}\vec{k} - \frac{LmV}{9\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{H}_c = -\frac{LmV}{3\sqrt{2}}\vec{k}}$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

د) $\vec{H}_B = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$



$$\vec{H}_B = \vec{\rho}_1 \times m_1 \dot{\vec{\rho}}_1 + \vec{\rho}_2 \times m_2 \dot{\vec{\rho}}_2$$

$$\begin{cases} m_1 = m \ , \quad \vec{\rho}_1 = L \ , \quad \dot{\vec{\rho}}_1 = \dot{\vec{\rho}}_{A/B} = v_A - v_B \ \bigstar \\ m_2 = 2m \ , \quad \vec{\rho}_2 = 0 \ , \quad \dot{\vec{\rho}}_2 = \dot{\vec{\rho}}_{B/B} = 0 \end{cases}$$

$$\bigstar \Longrightarrow \frac{v}{3\sqrt{2}} i - \left(\frac{v}{3\sqrt{2}} i + \frac{v}{2\sqrt{2}} j\right) = -\frac{v}{2\sqrt{2}} j$$

$$\vec{H}_B = L\vec{i} \times (m)\left(-\frac{v}{2\sqrt{2}} j\right) = \left(-\frac{Lmv}{2\sqrt{2}} k\right)$$

روش دوم: $\boxed{\vec{H}_B = \vec{H}_C + \vec{R}_C \times M \dot{\vec{R}}_C}$

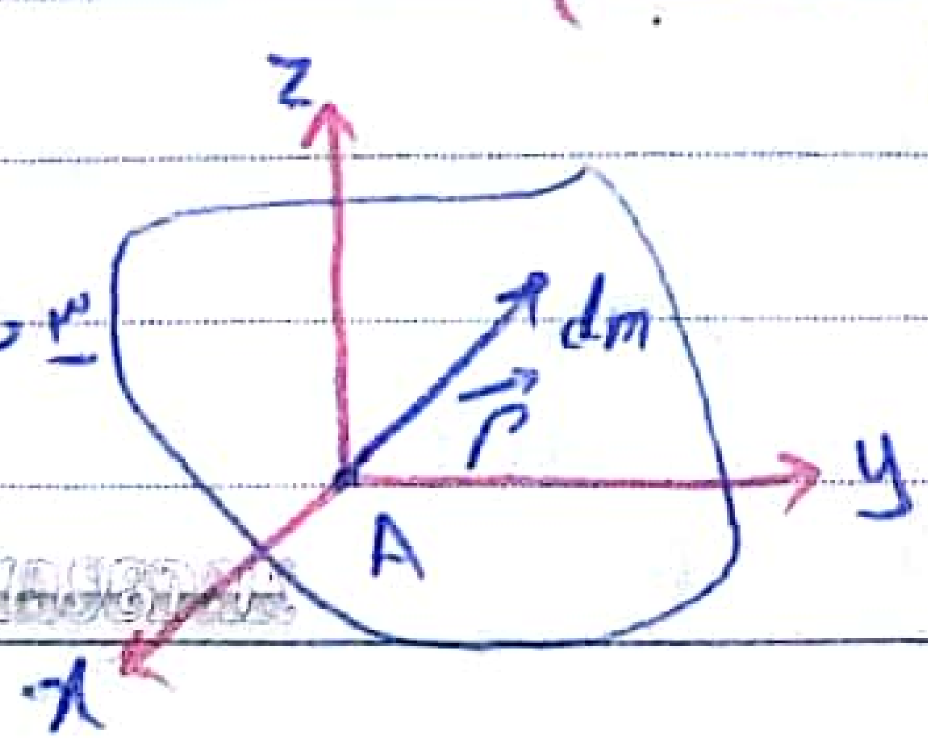
$$\vec{H}_C = -\frac{Lmv}{3\sqrt{2}} \vec{k} \ , \quad \vec{R}_C = \frac{L}{3} \vec{i}$$

$$M = 3m \ , \quad \dot{\vec{R}}_C = \vec{v}_{C/B} = -\frac{v}{6\sqrt{2}} j$$

$$\vec{H}_B = -\frac{Lmv}{3\sqrt{2}} k + \left(\frac{L}{3} \vec{i}\right) \times (3m)\left(-\frac{v}{6\sqrt{2}} \vec{j}\right) = -\frac{Lmv}{2\sqrt{2}} \vec{k}$$

- دینامیک جسم صلب (سینتیک جسم صلب)

سه بعدی



لنگر حرکتی جسم صلب

$$\vec{H}_A = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

در جسم صلب ، $\vec{\dot{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$$\Longrightarrow \vec{H}_A = \Sigma \vec{r}_i \times M_i (\omega \times \vec{r}_i)$$

جایگذاری $\begin{cases} \vec{r}_i \longrightarrow \vec{r} \\ M_i \longrightarrow dm \end{cases} \Longrightarrow \boxed{H_A = \int_v \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dm}$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{H}_A = H_{Ax}\vec{i} + H_{Ay}\vec{j} + H_{Az}\vec{k}$$

$$H_{Ax}\vec{i} + H_{Ay}\vec{j} + H_{Az}\vec{k} = \int_v (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times \left[(\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\right] dm$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} H_{Ax} \\ H_{Ay} \\ H_{Az} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس لختی}} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

I : تانسور لختی ـ ماتریس لختی

که یک ماتریس متقارن

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2)\, dm \quad , \quad I_{xy} = \int_v xy\, dm$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

$$I_{yy}=\int_{v}(x^2+z^2)\,dm \quad , \quad I_{xz}=\int_{v} xz\,dm$$

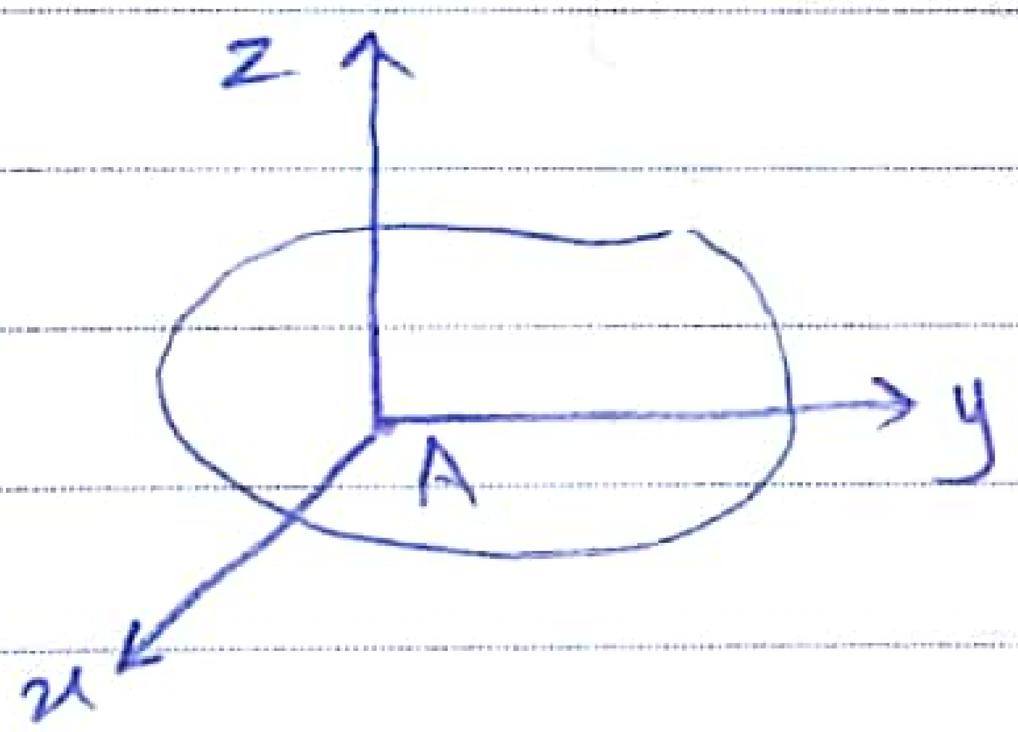
$$I_{zz}=\int_{v}(x^2+y^2)\,dm \quad , \quad I_{yz}=\int_{v} yz\,dm$$

اگر دستگاه xyz دستگاه اصلی باشد:

$$I_{xz}=I_{xy}=I_{yz}=0 \qquad I=\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{Ax}=I_{xx}\,\omega_x \\ H_{Ay}=I_{yy}\,\omega_y \\ H_{Az}=I_{zz}\,\omega_z \end{cases}$$

معادلات اویلر



$$\vec{M}=\dot{\vec{H}}$$

۱- حول نقطه ثابت O یا مرکز جرم
۲- مشتق نسبت به دستگاه مطلق

مشتق نسبت به دستگاه اینرسی است. با توجه به اینکه دستگاه xyz دارای حرکت می‌باشد خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right)_{XYZ}=\left(\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right)_{xyz}+\vec{\omega}\times\vec{H}$$

$$\vec{M}_A = \left(\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{H}_A}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{H}$$

$$\vec{M}_A = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

اگر دستگاه xyz دستگاه اصلی باشد :

$I_{xz} = I_{xy} = I_{yz} = 0$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} H_{Ax} = I_{xx}\,\omega_x \\ H_{Ay} = I_{yy}\,\omega_y \\ H_{Az} = I_{zz}\,\omega_z \end{cases}}$$

همه معادلات اویلر از رابطه $\vec{F} = m\vec{a}_c$ که حرکت انتقالی جسم صلب را مشخص می‌کند، استفاده می‌گردد

شتاب مرکز جرم جسم صلب

فرم‌های ساده شده معادلات اویلر

حرکت صفحه‌ای — فرض: جسم حول محور z دوران داشته باشد (حرکت در صفحه xy) از معادلات اویلر خواهیم داشت:

$\omega_x = \omega_y = 0 \quad , \quad \omega_z \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} M_{Ax} &= -I_{xz}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 \\ M_{Ay} &= -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xz}\omega_z^2 \\ M_{Az} &= I_{zz}\dot{\omega}_z \ * \end{aligned}}$$

$$\boxed{H_{Ax} = -I_{xz}\omega_z \quad , \quad H_{Ay} = -I_{yz}\omega_z \quad , \quad H_{Az} = I_{zz}\omega_z \ *}$$

که باید همراه معادله $\vec{F} = m\vec{a}$ برای حرکت انتقالی جسم حل شوند.

* اگر دستگاه xyz دستگاه اصلی باشد:

نکته: دستگاه مختصات طوری انتخاب می‌شود که صفحه xy بر صفحه تقارن منطبق باشد

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

$H_{Ax}=0 \quad , \quad H_{Ay}=0 \quad , \quad H_{Az}=I_{zz}\,w_z$

$M_{Ax}=0 \quad , \quad M_{Ay}=0 \quad , \quad M_{Az}=I_{zz}\,\dot{w}_z$

$\Longrightarrow \boxed{\vec{H}=I\,\vec{\omega}} \quad , \quad \boxed{\vec{M}=I\,\vec{\alpha}}$

«۹۵/۱۰/۱۲» سینتیک جسم صلب:

$\boxed{\begin{matrix} H=I\omega \\ M=I\alpha \end{matrix}} \longrightarrow$

۱. حول نقطه ثابت

۲. حول مرکز جرم

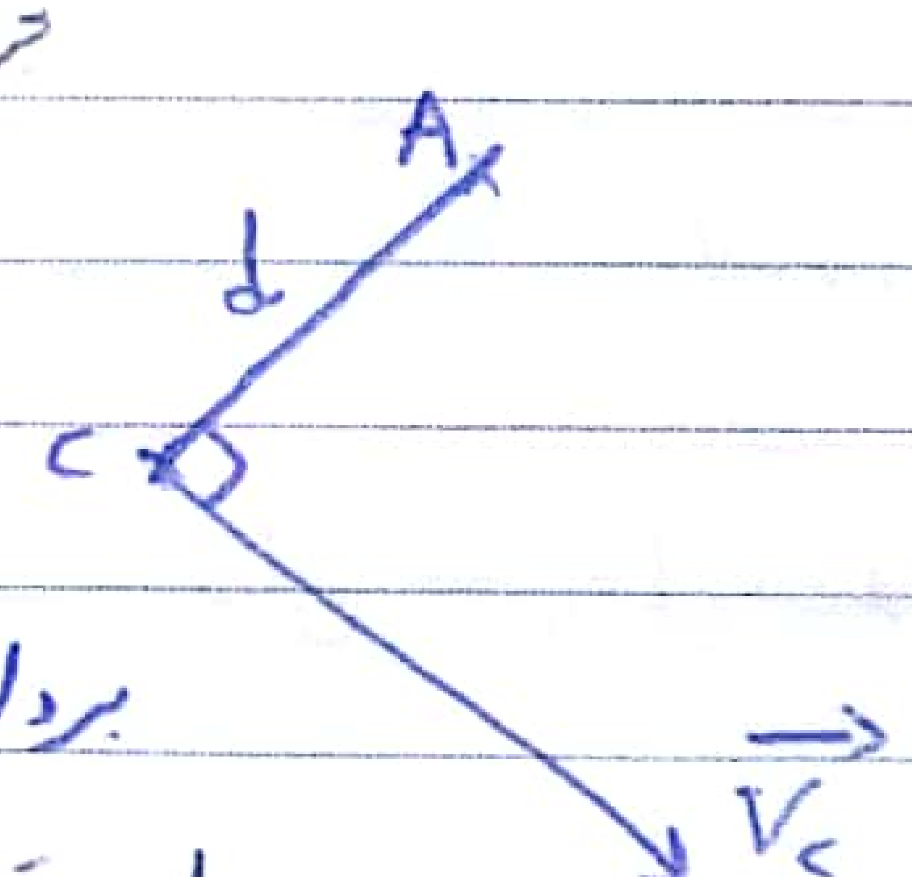
A: نقطه دلخواه

برداری $\boxed{\vec{H}_A=\underbrace{I_c}_{\text{مرکز جرم}}\,\underbrace{\vec{\omega}}_{\text{سرعت}}+\vec{r}\times\underbrace{m}_{\text{جرم جسم صلب}}\,\vec{V}_c}$

بردار سرعت

اسکالر $\boxed{\vec{H}=I_c\,w+d\,(m\,V_c)}$

ممان اینرسی

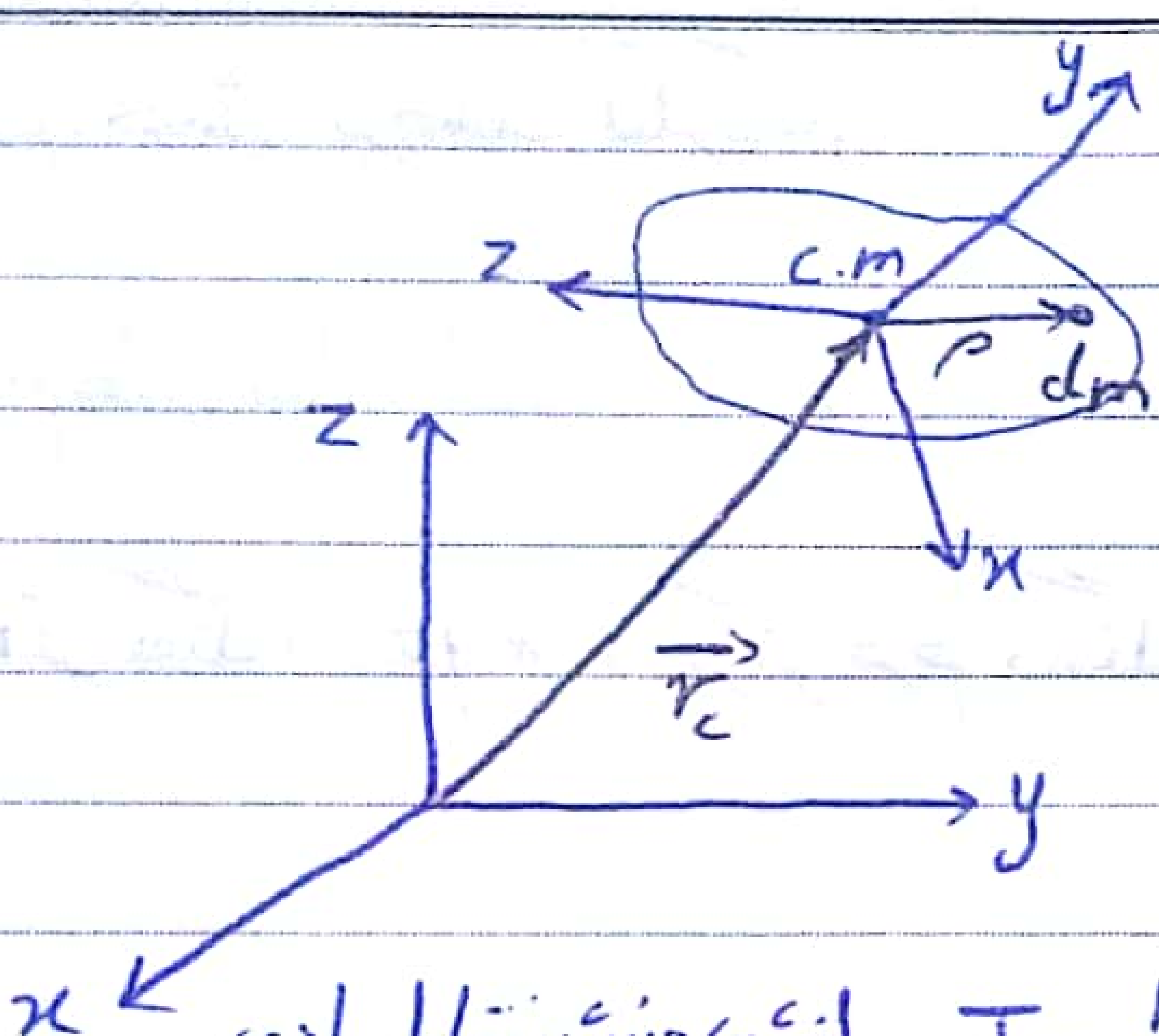


$\boxed{M_A=I_c\,\vec{\alpha}+\vec{r}\times m\,\vec{a}_c}$ برداری

بردار موقعیت بین نقطه A و C

$\boxed{\vec{M}_A=I_c\,\alpha+d\,(m\,a_c)}$ اسکالر

- انرژی جنبشی جسم صلب :



انرژی جنبشی نقاط مادی $\quad T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\sum m_i\dot{\rho}_i^2$

$$\dot{\rho}_i=|\vec{\omega}\times\rho_i| \longrightarrow T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\int|\vec{\omega}\times\vec{\rho}|^2\,dm$$

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\int_V(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\,dm$$

$$\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}$$

$$\vec{\rho}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\int_V\left[(\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k})\times(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\right]$$

$$\cdot\left[(\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k})\times(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\right]dm$$

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\{\omega_x\ \omega_y\ \omega_z\}\begin{vmatrix}I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz}\\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz}\\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{vmatrix}$$

انرژی جنبشی برحسب لنگر حرکتی

$$\boxed{T=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}(\vec{\omega}\cdot\vec{K})}$$

- فرم های ساده انرژی جنبشی:

۱- اگر دستگاه xyz در مرکز جرم دستگاه اصلی باشد:

$$I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2+I_{yy}\omega_y^2+I_{zz}\omega_z^2\right)}$$

★ ۲- اگر جسم دارای حرکت صفحه‌ای در صفحه xy یا دارای دوران حول محور z باشد:

$$\omega_x=\omega_y=0 \quad , \quad \omega_z\neq 0$$

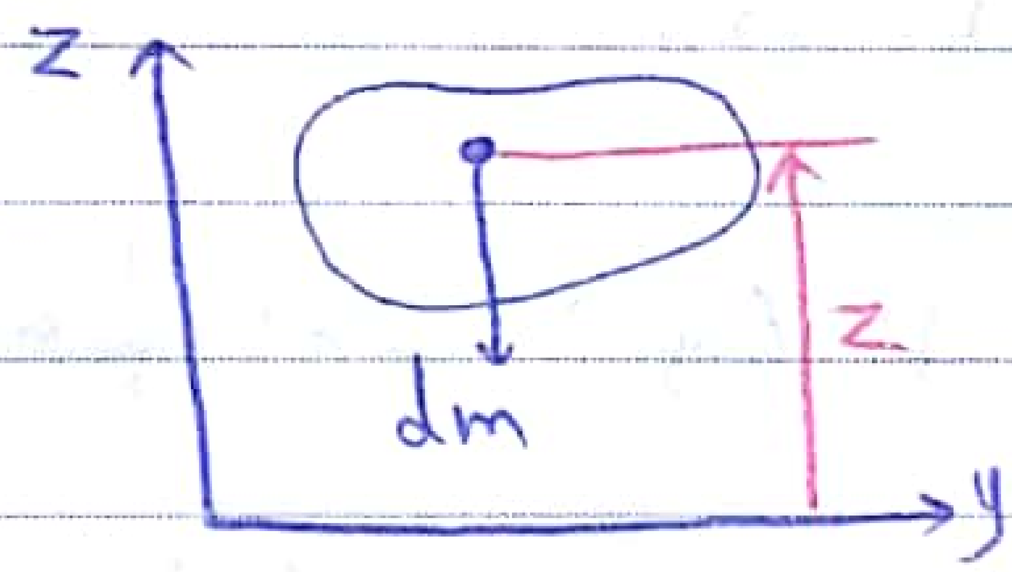
برای انتقال $\boxed{T=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2}$

برای دوران $\boxed{T=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2}$ یا

برای امتحان از مسائل سه بعدی سؤالی طرح نمی‌شود و فقط از فرمول ها و مسائل دو بعدی می آید. در این بحث دو فرمول بالا فقط

مورد استفاده امتحان است.

- انرژی پتانسیل جسم صلب:



$$dp = g\,z\,dm$$

$$P = \int_V g\,z\,dm = g\int_V z\,dm$$

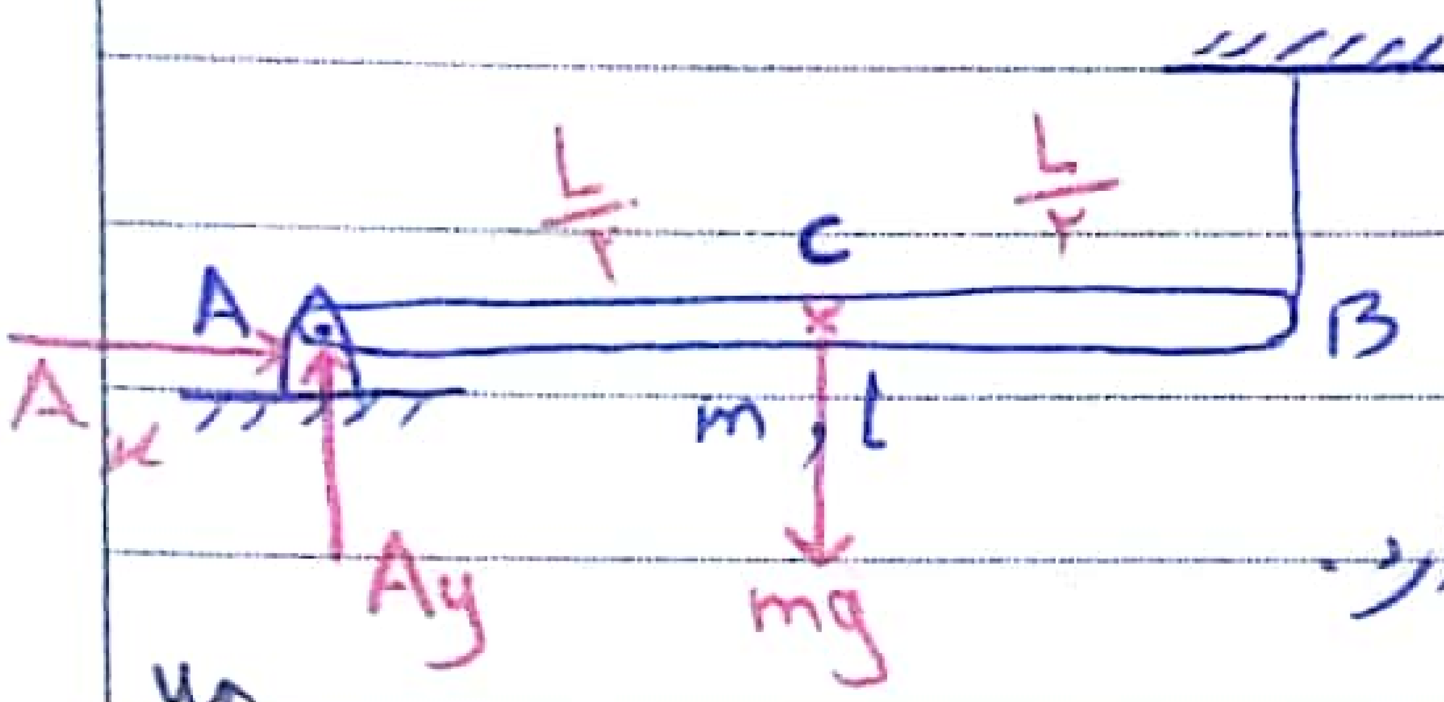
$$\bar{z} = \frac{\int_V z\,dm}{M} \qquad \int_z z\,dm = M\bar{z} \qquad \boxed{P = mgz_c}$$

Z_c: فاصله عمودی مرکز جرم تا یک سطح مبنا

مثال ۱: میله نشان داده شده در صفحه قائم است. و طناب نگهدارنده ناگهان پاره می‌شود. مطلوبست عکس العمل ها در نقطه A درست در لحظه پارگی طناب؟

$\bar{I} = I_c = \frac{1}{12} m L^2$ صفحه قائم: وزن در محاسبات وارد می‌شود.

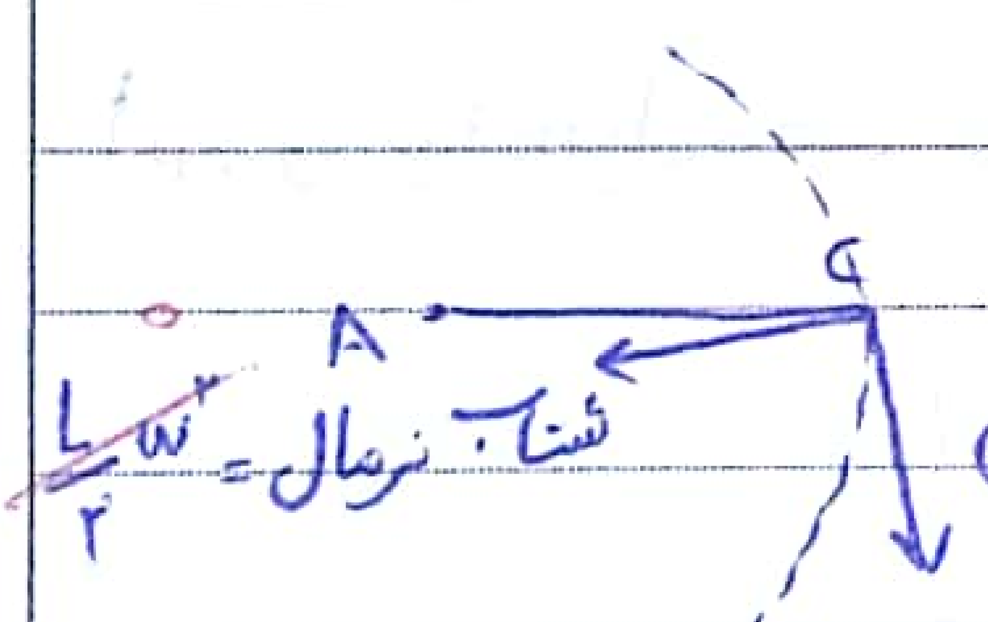
درست در لحظه شروع حرکت:



۱- جسم سرعت اولیه ندارد ولی شتاب دارد.

۲- جسم سرعت زاویه‌ای ندارد ولی شتاب زاویه‌ای دارد.

$\vec{F} = m\vec{a}_c$ $A_x\vec{i} + (A_y - Mg)\vec{j} = M(-\frac{L}{2}\alpha)\vec{j}$



$$\begin{cases} i: & \boxed{A_x = 0} \\ j: & A_y - Mg = -M\frac{L}{2}\alpha \quad (1) \end{cases}$$

II «$\vec{M}_A = I_A\vec{\alpha}$» ★«$I_A = \bar{I} + md^2$» $= \frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{L}{2})^2$

$I_A = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{mL^2}{4}$ $\boxed{I_A = \frac{1}{3}mL^2}$

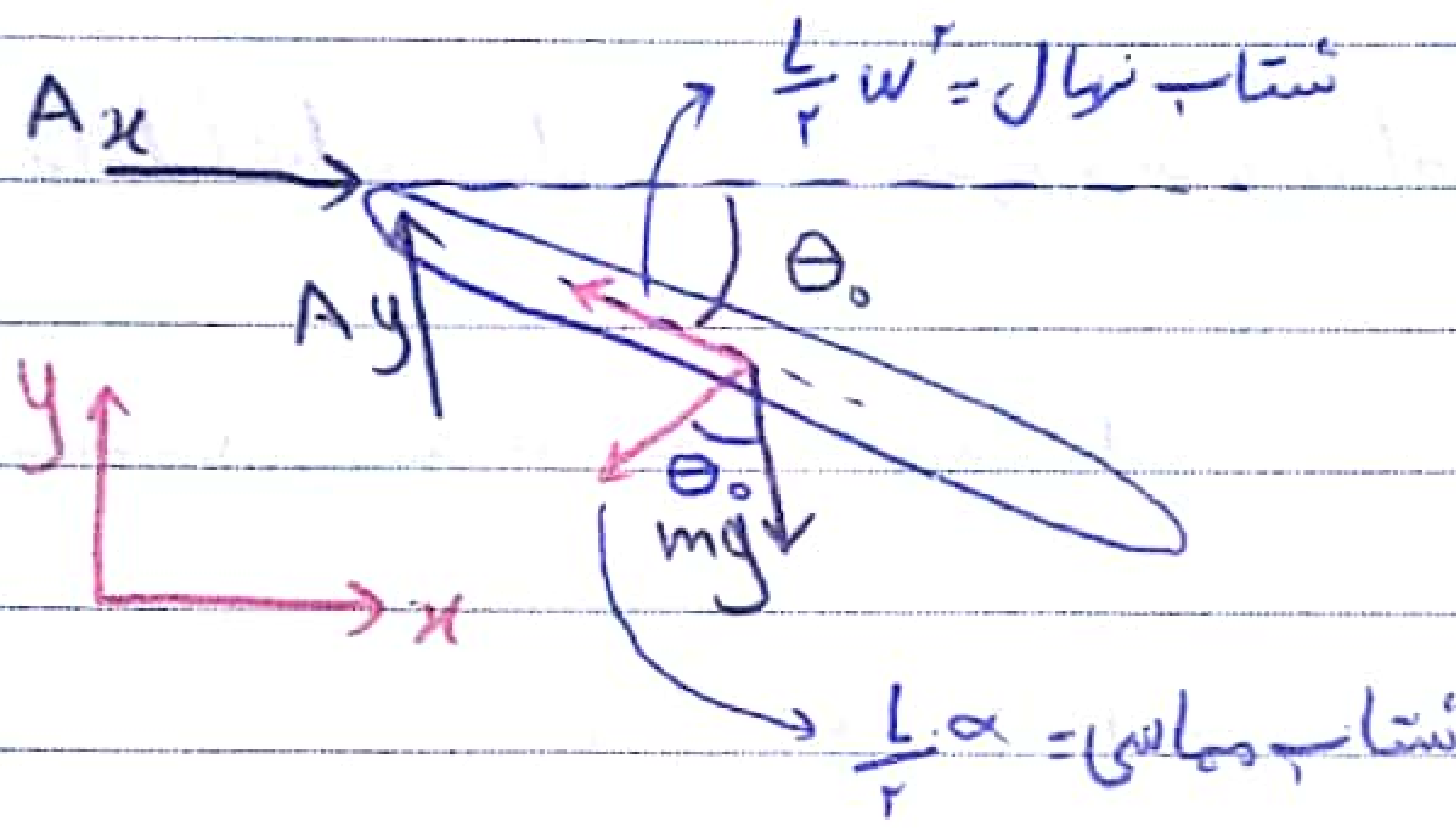
II $\Rightarrow -(mg)(\frac{L}{2})\vec{k} = (\frac{1}{3}mL^2)(-\alpha\vec{k})$ ★: قضیه محورهای موازی.

$mg\frac{L}{2} = (\frac{1}{3}mL^2)(\alpha)$ $\boxed{\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L}}$ (2)

(1),(2) $\longrightarrow A_y - mg = (-m\frac{L}{2})(\frac{3}{2}\frac{g}{L})$

$$A_y - mg = -\frac{3}{4}mg \longrightarrow \boxed{A_y = \frac{1}{4}mg}$$

مثال 2: مطلوبست محاسبه عکس العمل ها در نقطه A وقتی میله با اندازه معلوم θ_0 چرخیده است؟



$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

$$\star\ \theta = 0 \longrightarrow \omega = 0 \longrightarrow \boxed{c = 0}$$

$$A_x\vec{i} + (A_y - mg)\vec{j} = m\Big[\left(\frac{L}{2}\omega^2\right)(-\cos\theta_0\vec{i} + \sin\theta_0\vec{j})$$
$$+ \left(\frac{L}{2}\alpha\right)(-\sin\theta_0\vec{i} - \cos\theta_0\vec{j})\Big]$$

$$\vec{M}_A = I_A\vec{\alpha} \longrightarrow -(mg)\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)\vec{k} = \left(\frac{1}{3}mL^2\right)(-\alpha\vec{k})$$

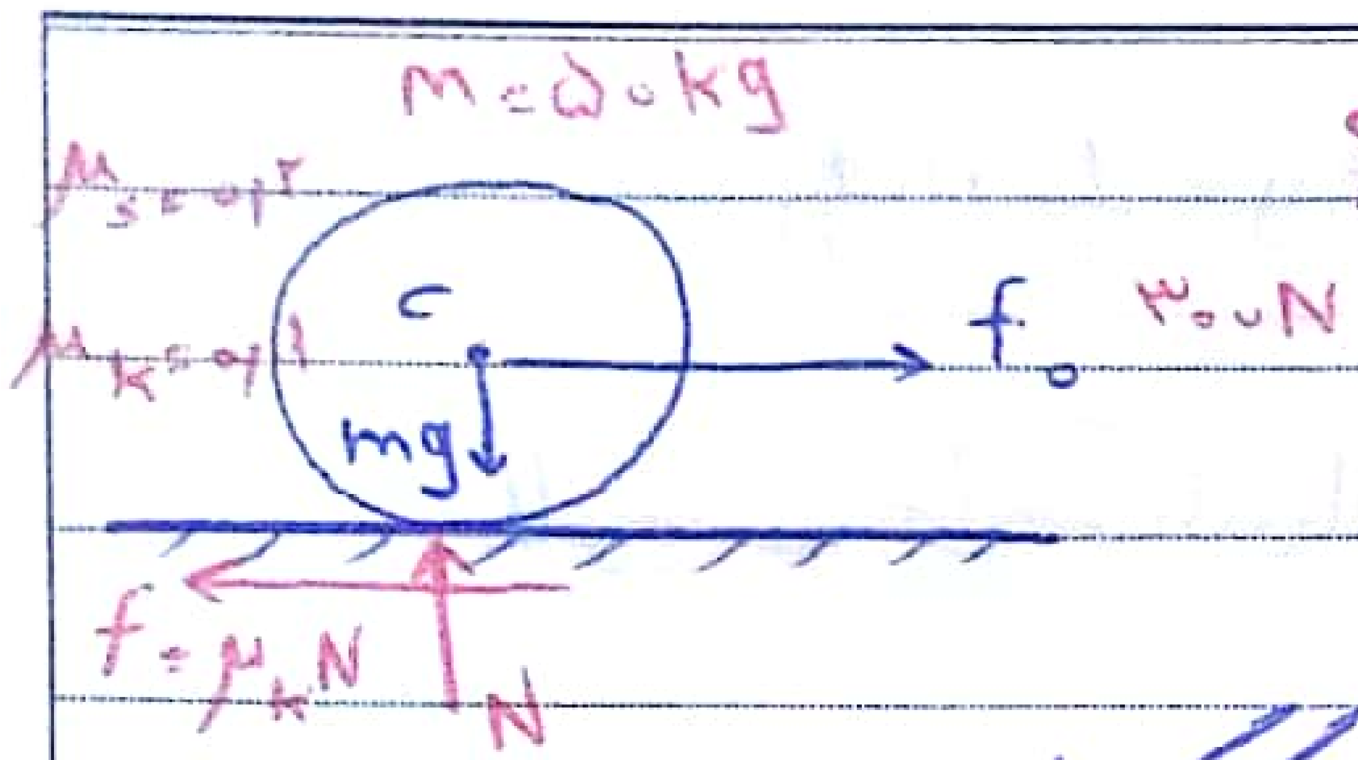
$$mg\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{1}{3}mL^2\alpha \qquad \boxed{\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \longrightarrow \boxed{\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega}$$

$$\longrightarrow \int \alpha\, d\theta = \int \omega\, d\omega \longrightarrow \star\ \boxed{\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta + c = \frac{1}{2}\omega^2}$$

مثال 3: دیسکی به جرم m و با شعاع R مطابق شکل به حرکت در می آید

Year. Month. Date. ( ) Subject :



مطلوبست محاسبه شتاب مرکز جرم دیسک؟

فرض: حرکت دیسک غلت بدون لغزش

عامل اصلی در غلت بدون لغزش نیروی اصطکاک است.

غلت بدون لغزش ⟸ سینماتیک $\boxed{V_c = R\omega \ , \ a_c = R\alpha}$

$\xrightarrow{+} \vec{F} = m\vec{a}_c$ $\boxed{f_0 - f = m(R\alpha)}$ ①

$\boxed{N - mg = 0}$ ② $\vec{M}_c = I_c\vec{\alpha} \Rightarrow -fR\vec{k} = I_c(-\alpha\vec{k})$

$\Rightarrow \boxed{fR = I_c\alpha}$ ③ از روابط ① و ③ مقادیر α و f به دست

می‌آید. نیروی اصطکاک محاسبه شده (f) با حداکثر نیروی اصطکاک مقایسه

می‌شود: 1) اگر $f \le f_{max} = \mu_s N$ فرض انتخاب شده درست و مسأله حل شده است.

2) اگر $f > f_{max}$ فرض انتخاب شده صحیح نیست و مسأله دوباره

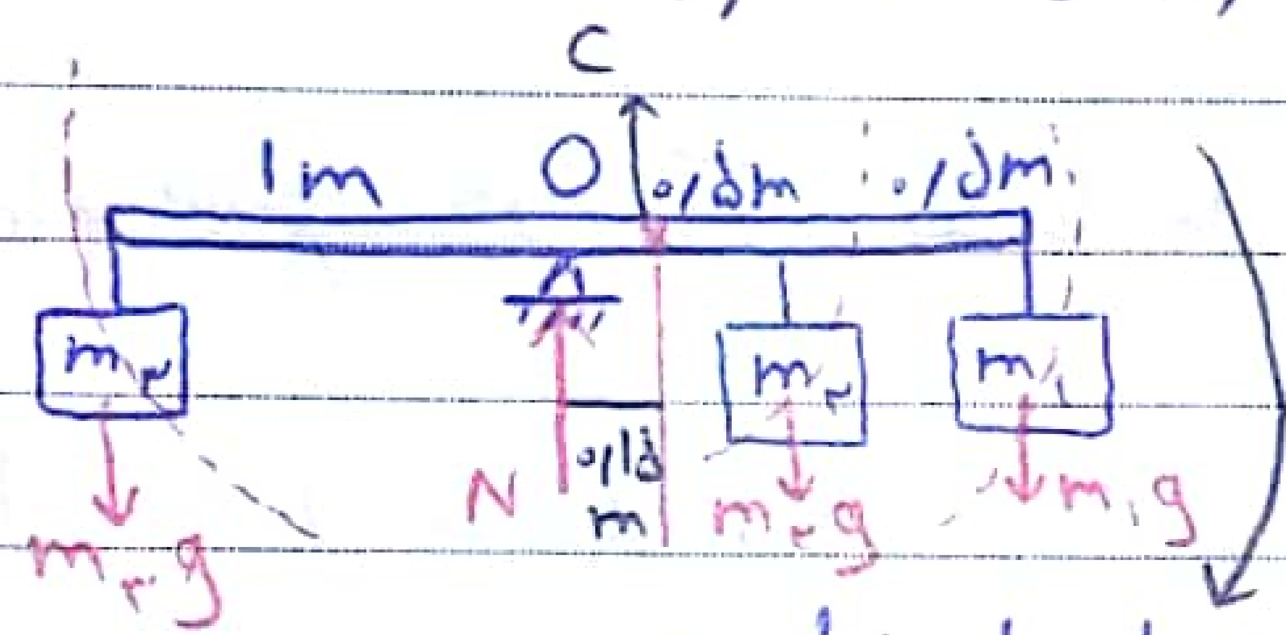
باید حل شود (با اصطکاک لغزشی)

$$\begin{cases} f_0 - \mu_k N = m a_c \\ N - mg = 0 \longrightarrow \boxed{N = mg} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_0 - \mu_K(mg) = ma_c$ $\boxed{a_c = \frac{f_0}{m} - \mu_K g}$

★ مثال 4) سیستم نشان داده شده از حالت سکون رها می‌شود. مطلوبست

محاسبه عکس العمل در نقطه O هنگام رهایی سیستم؟



$m_1 = 5kg$ $m_2 = 1kg$

$g = 10\frac{m}{s^2}$ $m_3 = 4kg$

★ در لحظه رهایی سیستم سرعت زاویه‌ای برابر با صفر است.

$+\uparrow \vec F = m\vec a_c$ $N - (10)(10) = 10\vec a_c$

$\vec R_c = \frac{\sum m_i \vec r_i}{\sum m_i} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2 + m_3\vec r_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$\vec R_c = \frac{(5)(\vec i) + (1)(0.5\vec i) + (4)(-\vec i)}{10} \rightarrow$ (2) $\boxed{R_c = 0.15\vec i}$

$\boxed{N - (10)(10) = 10(-R_c\alpha)}$ (1) (1),(2) $\Rightarrow$ $\boxed{N - 100 = -1.5\alpha}$ (3)

$\vec M_o = \frac{d\vec H_o}{dt}$ $M = r \times F$ $H = r \times mv$

$\vec r_1 \times \vec f_1 + \vec r_2 \times \vec f_2 + \vec r_3 \times \vec f_3 = \frac{d}{dt}(\vec r_1 \times m_1\vec v_1 + \vec r_2 \times m\vec v_2 + \vec r_3 \times m\vec v_3)$

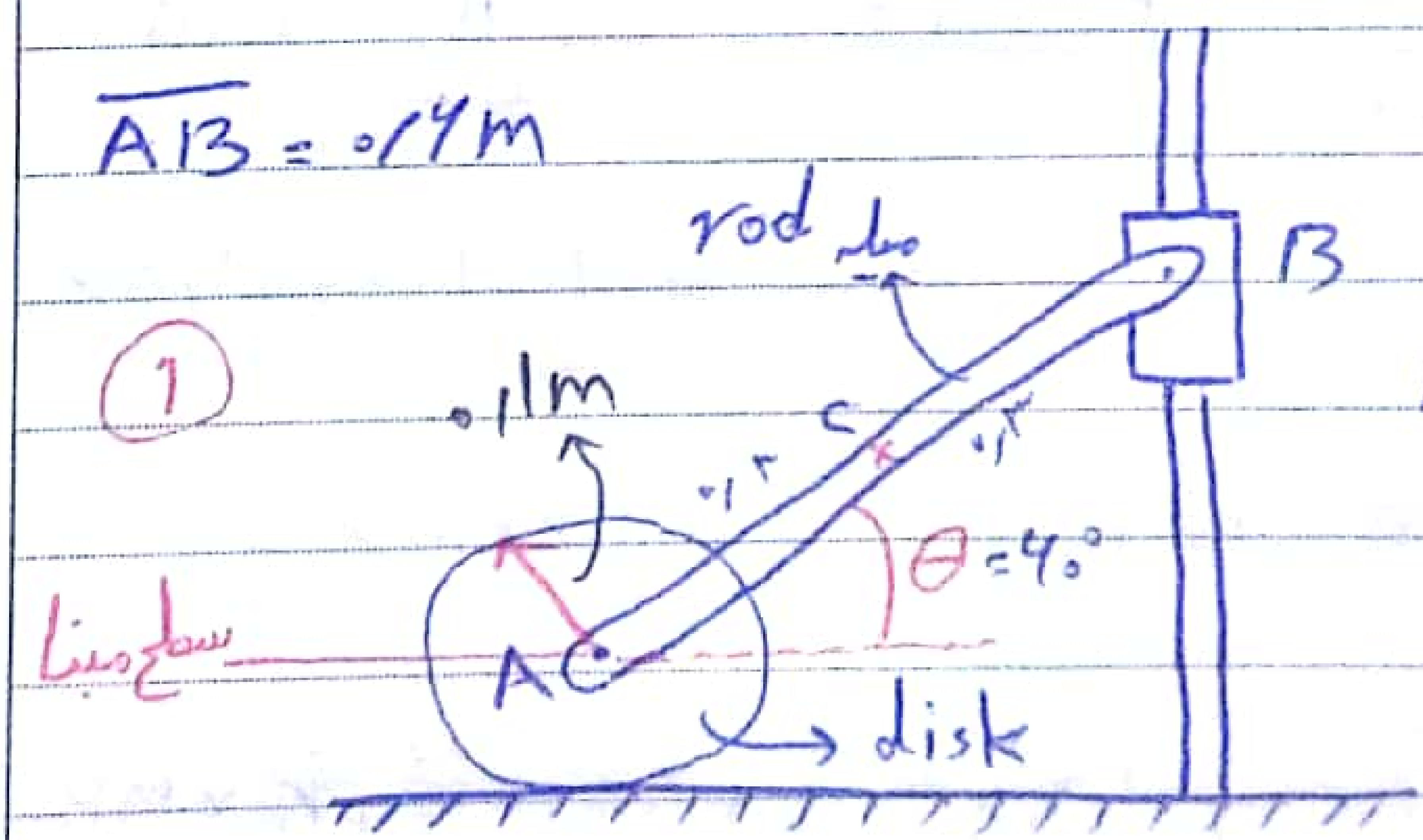
$\vec r_1 = \vec i$, $\vec f_1 = -m_1 g\vec j$, $m_1 = 5kg$, $\vec v_1 = -r_1\omega\vec j$

$\begin{cases} r_2 = 0.5\, i \ , \ \vec{F}_2 = m_2 g \vec{j} \ , \ m_2 = 1\,kg \ , \ v_2 = -r_2 \omega \vec{j} \\ r_3 = -i \ , \ \vec{F}_3 = -m_3 g \vec{j} \ , \ m_3 = 4\,kg \ , \ v_3 = r_3 \omega \vec{j} \end{cases}$

ω صفر است ولی برای مشتق گیری که از آن α به دست می‌آید در روابط بالا می‌نویسیم بعد در آخر هر جا ω بود صفر قرار می‌دهیم.

مثال 5) دیسک به جرم 10kg به انتهای میله‌ی AB به جرم 5kg متصل شده است. اگر سیستم از حالت سکون در لحظه‌ای که $\theta = 60$ است شروع به حرکت نماید؛ مطلوبست محاسبه سرعت زاویه‌ای میله هنگامی که $\theta = 0$ است؟ حرکت دیسک غلت بدون لغزش فرض شود همچنین از اصطکاک صرف نظر شود.

$\overline{AB} = 0.6\,m$

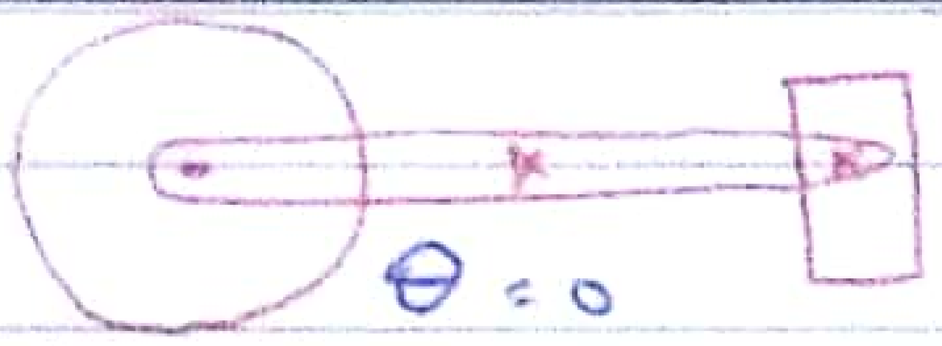


سیستم پتانسیل: $E_1 = E_2$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$T_1 = 0 \quad V_1 = \frac{L}{2} \sin\theta \, m_2 g$

(2)



$V_2 = 0$ $\quad T_2 = \frac{1}{2} m_r V_{cr}^2$

$+ \frac{1}{2} I_r \omega_r^2 + \frac{1}{2} m_d V_{cd}^2 + \frac{1}{2} I_d \omega_d^2$

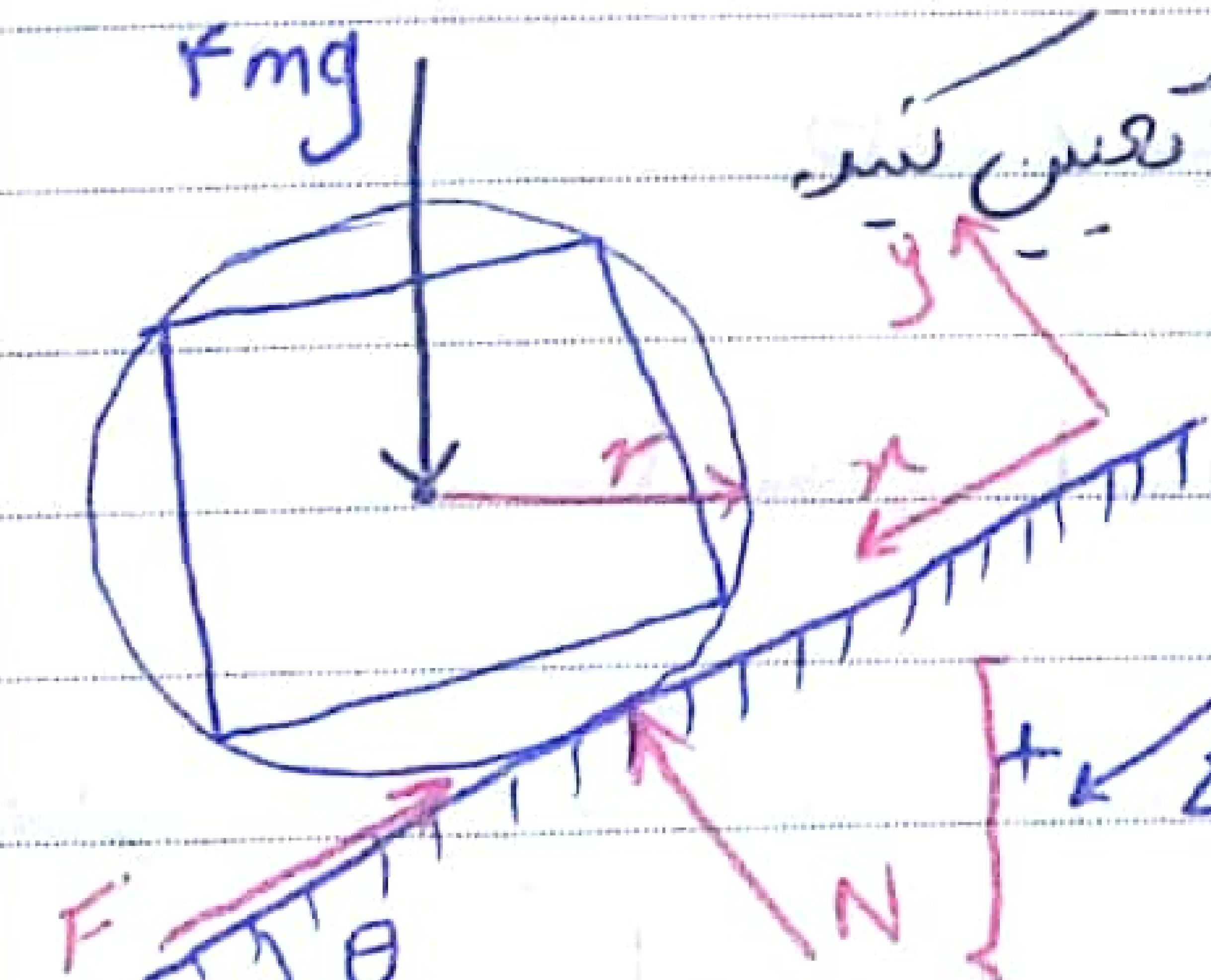
$\omega = 6.52 \frac{rad}{s}$ «۹۵/۱۰/۱۳»

$13.734 \quad 0.225\,\omega_r^2$

$0 + (5)(9.81)(0.3 \sin 90^\circ) = \frac{1}{2}(5)\left[(0.2)(\omega_r)\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(5)(0.6)^2\right]\omega_r^2 \Rightarrow \omega_r = 6.52 \frac{rad}{s}$

$0.075\,\omega_r^2$

مثال ۱) ۴ میله‌ی باریک یکنواخت هر کدام به جرم m با جوش شدن به انتهای یکدیگر به شکل مربع در آمده وسپس گوشه‌های آن داخل حلقه‌ی فلزی سبکی به شعاع r جوش داده شده‌اند. اگر مجموعه‌ی صلب میله‌ها و حلقه بر روی یک سطح شیبدار به طرف پایین بغلتد حداقل مقدار ضریب اصطکاک استاتیکی را که از لغزش جلوگیری خواهد کرد تعیین کنید.



$\vec{F} = m\vec{a}_c$

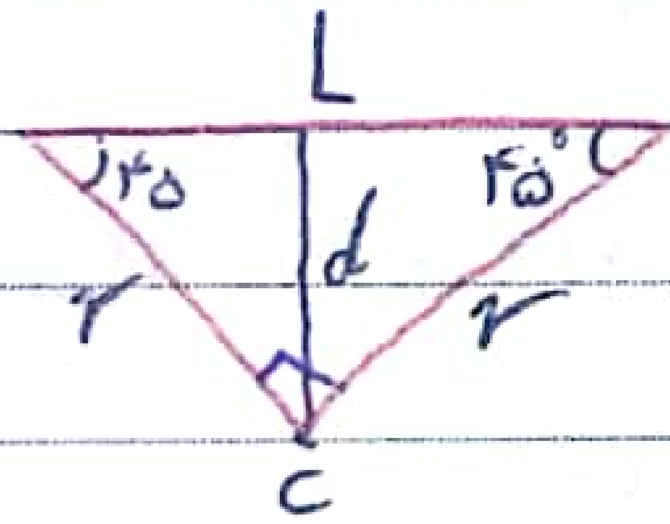
$+\swarrow \sum F_x = m a_{cx} \rightarrow \boxed{4mg\sin\theta - F = ma}$ (1)

$\nwarrow \sum F_y = m a_{cy} \rightarrow \boxed{N - 4mg\cos\theta = 0}$ (2)

$\vec{M}_c = I_c \vec{\alpha}$ میله $\bar{I} = \frac{1}{12} m l^2$

$F r \vec{k} = I_c \alpha \vec{k}$ $Fr = I_c \alpha$ $\boxed{\alpha = \frac{Fr}{I_c}}$ (3)

غلت بدون لغزش: $\boxed{a = r\alpha}$ (4)



$I_c = \bar{I} + md^2 \qquad \bar{I} \to \frac{1}{12} m l^2$

$L = 2r\cos 45^\circ = r\sqrt{2}$

$d = r\sin 45^\circ = r\frac{\sqrt{2}}{2}$

$I_c = 4\left[\frac{1}{12}(m)(r\sqrt{2})^2 + (m)\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$ $\boxed{I_c = \frac{8}{3} m r^2}$

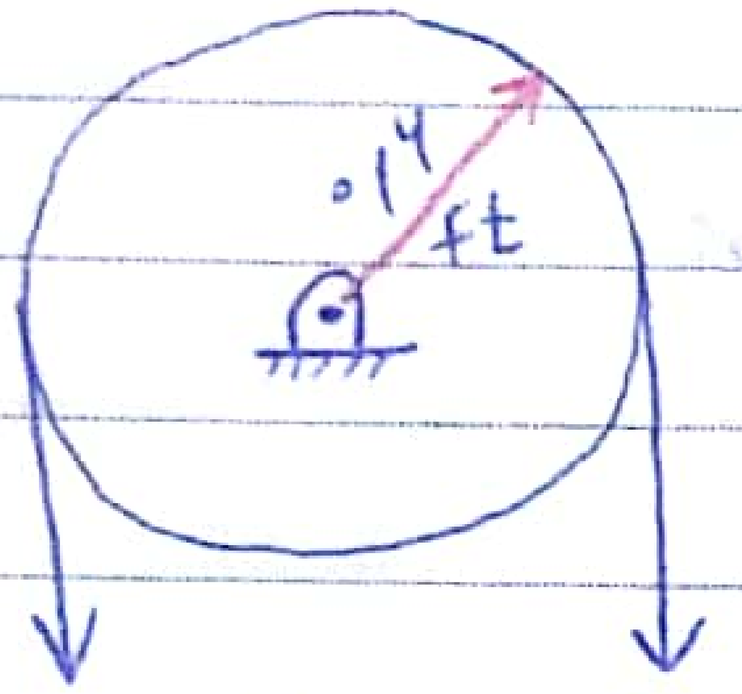
(1), (4) $\rightarrow N = 4mg\cos\theta \qquad F = \frac{8}{5} mg\sin\theta$

$a = \frac{3}{5} g\sin\theta \qquad \alpha = \frac{3}{5}\frac{g}{r}\sin\theta$

$\mu_s = \frac{F}{N} = \frac{\frac{8}{5} mg\sin\theta}{4mg\cos\theta} = \frac{2}{5}\tan\theta$

مثال ۲: در شکل نشان داده شده اگر قرقره در لحظه $t=0$ از حالت سکون شروع به حرکت نماید مطلوبست محاسبه ی سرعت زاویه‌ای

قرقره در لحظه $t=4s$ ؟



$T_B = 5\ lb$ $\qquad$ $T_A = 4\ lb$

$W = 8\ lb$ وزن قرقره $\qquad$ $g = 32.2$

$I = \frac{1}{2} m r^2$ دیسک (قرقره)

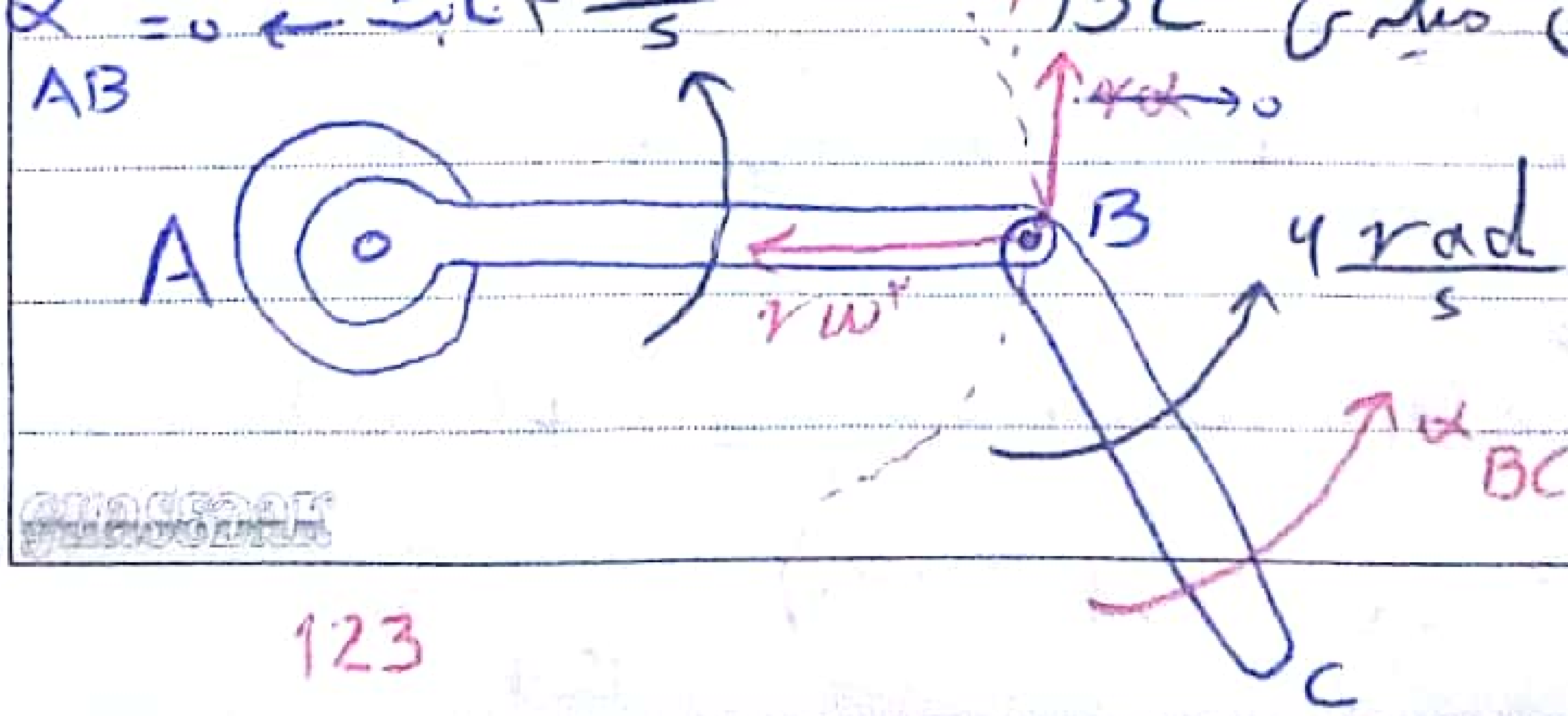
$$\vec{M}_o = I_o \vec{\alpha} \longrightarrow (5)(0.6) - (4)(0.6) = \frac{1}{2}\left[\frac{8}{32.2} \times (0.6)^2\right]\alpha$$

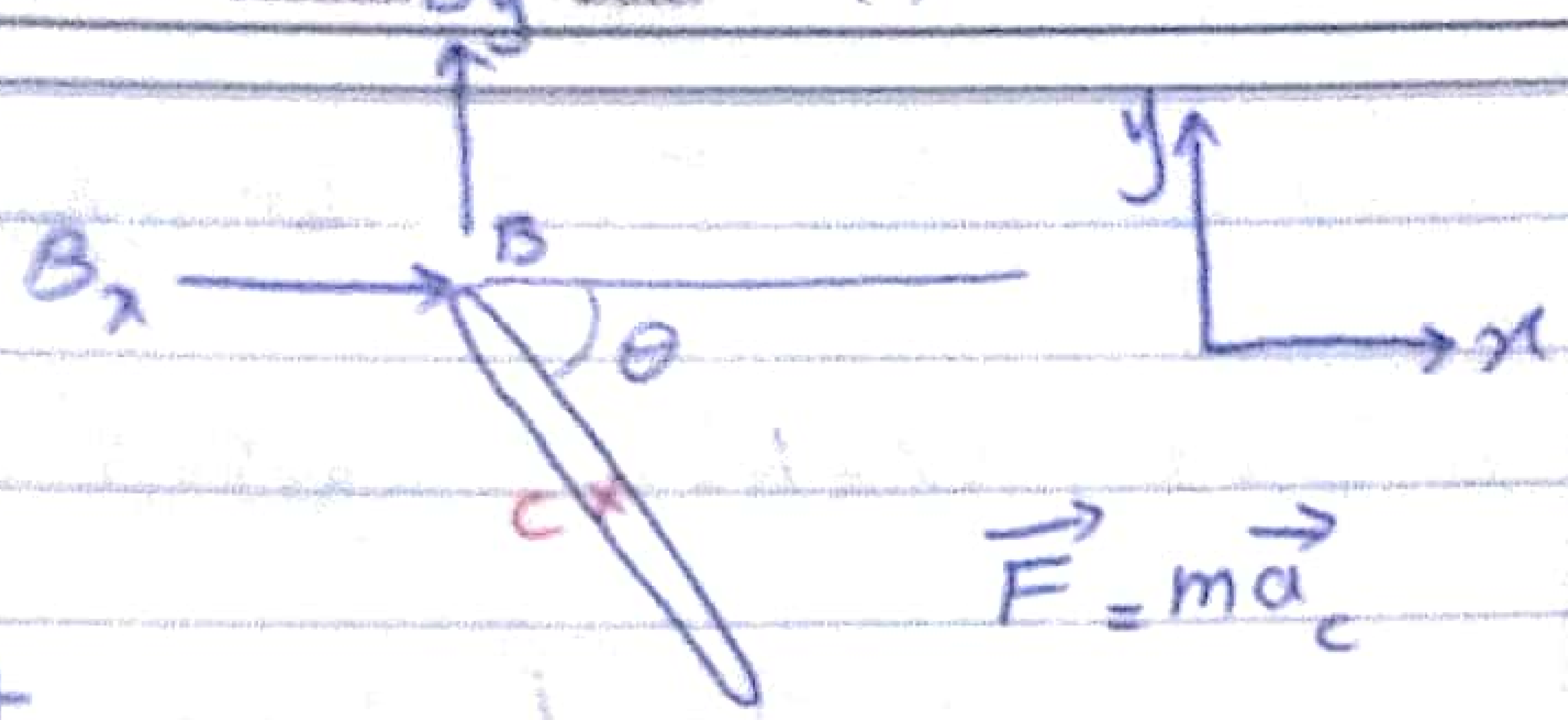
$$\longrightarrow 0.6 = 0.04472\,\alpha \qquad \boxed{\alpha = 13.41\ \frac{rad}{s^2}}$$

$$\omega = \alpha t + \omega_0 \qquad \omega = (13.41)(4) = 53.64\ \frac{rad}{s}$$

مثال 3: در شکل نشان داده شده هر یک از میله‌ها دارای طول L متر و جرم ۲ کیلوگرم می‌باشند. حرکت مجموعه در صفحه افقی است. میله AB دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $4\ \frac{rad}{s}$ پادساعتگرد و میله BC دارای سرعت زاویه‌ای $6\ \frac{rad}{s}$ در لحظه نشان داده شده می‌باشد. مطلوبست محاسبه شتاب زاویه‌ای میله BC ؟

$\alpha_{AB} = 0 \leftarrow$ ثابت $4\ \frac{rad}{s}$





$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

$\xrightarrow{+}$

$$\Sigma F_x = m a_{cx} \longrightarrow \boxed{B_x = m a_{cx}} \quad ①$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m a_{cy} \longrightarrow \boxed{B_y = m a_{cy}} \quad ②$$

$$\vec{M}_c = I_c \vec{\alpha} \qquad \boxed{-B_x(۰/۵)\sin\theta - B_y(۰/۵)\cos\theta}$$

$$\boxed{= \frac{۱}{۱۲}(۲)(۱)^۲ \alpha_{BC}} \quad ③ \qquad \bar{I} = \frac{۱}{۱۲} m L^۲$$

سینماتیک: B نسبت به A حرکت دایره‌ای دارد و $\alpha = ۰$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB})$$

$$\vec{a}_B = ۰ + ۰ + (۴\vec{k}) \times [\underbrace{(۴\vec{k}) \times (\vec{i})}_{۴\vec{j}}] \longrightarrow \boxed{a_B = -16\vec{i}}$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC} \times \vec{r}_{BC} + \vec{\omega}_{BC} \times (\vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{BC})$$

$$\vec{a}_c = -16\vec{i} + \underbrace{\alpha_{BC}\vec{k} \times (۰/۵)(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j})}_{۰/۵\,\alpha_{BC}(\cos\theta\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{i})} + (4\vec{k})$$

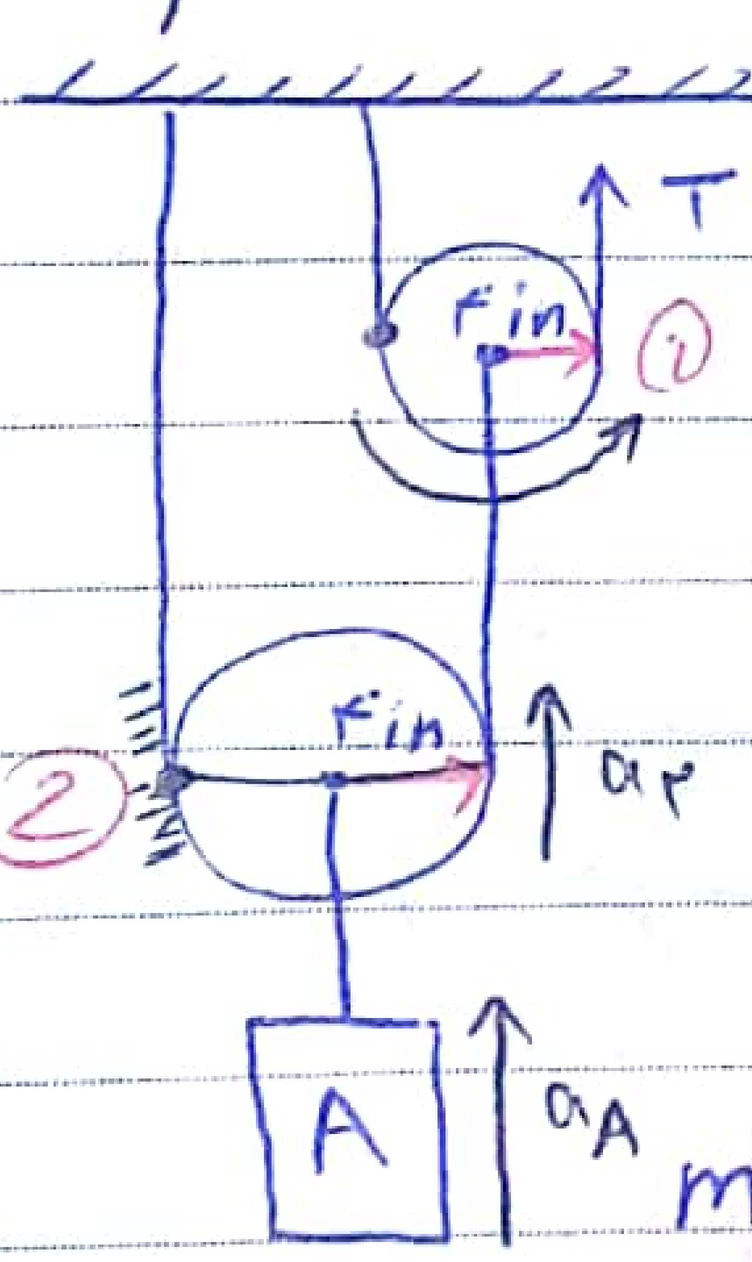
$$\times\Big[\underbrace{(4\vec{K})\times(0.5)(\cos\theta\,\vec{i}-\sin\theta\,\vec{j})}_{3(\cos\theta\, j+\sin\theta\, i)}\Big]$$

$$\vec{a}_c=-14\vec{i}+0.5\,\alpha_{BC}(\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j})+18(-\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})$$

$$\begin{cases} a_{cx}=-14+0.5\,\alpha_{BC}\sin\theta-18\cos\theta \\ a_{cy}=0.5\,\alpha_{BC}\cos\theta+18\sin\theta \end{cases}$$

$$① - ③ \Longrightarrow \boxed{\alpha_{BC}=17\ \frac{rad}{s^2}}$$

مثال 4: در شکل نشان داده شده مطلوبست محاسبه ی شتاب جسم A



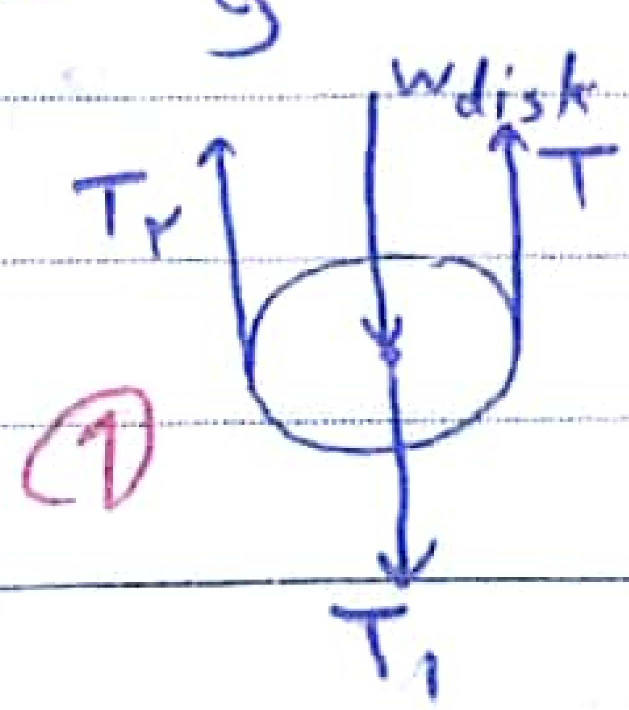
$12\,in = 1\,ft$ $\qquad g=32.2\ \frac{ft}{s^2}$

$W_A=20\,lb$ $\qquad W_{disk}=10\,lb$

$I=0.032\ slug\text{-}ft^2$ $\qquad T=15\,lb$

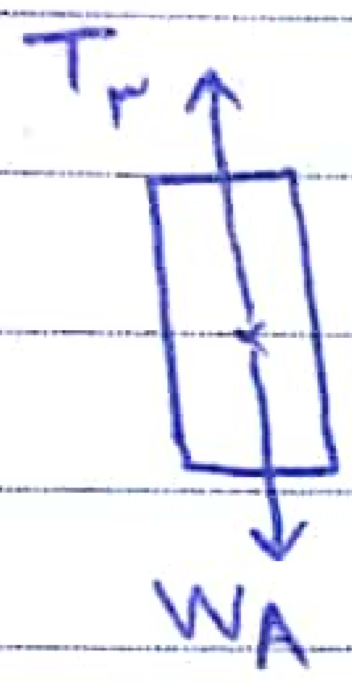
$m_A=\dfrac{W_A}{g}$ $\qquad m_{disk}=\dfrac{W_{disk}}{g}$

$R=\dfrac{4}{12}\,ft$



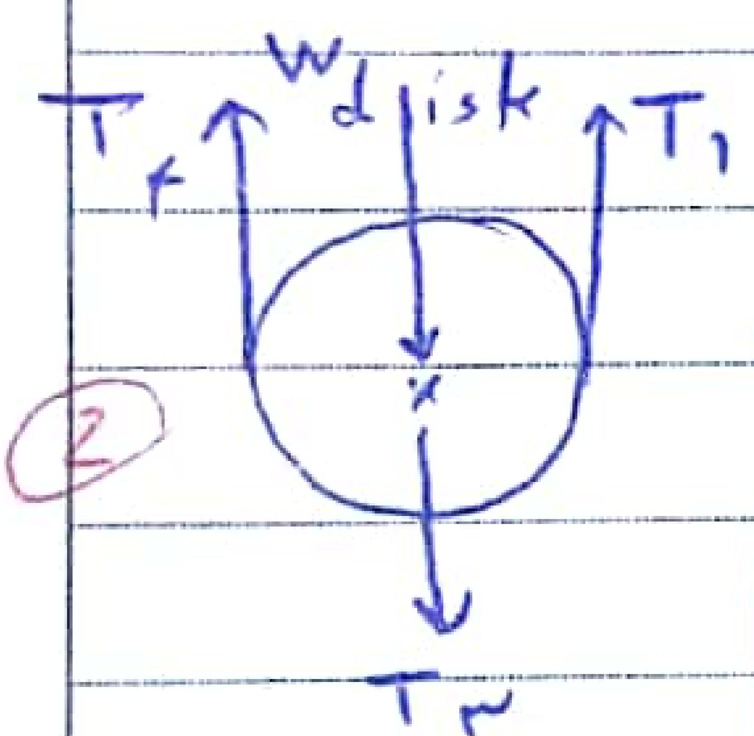
$\Sigma F_y = m a_y$

$$\boxed{T + T_2 - T_1 - W_{disk} = m_{disk}\, a_1} \quad (1)$$



$$+\uparrow \sum F_y = m a_y$$

$$\boxed{T_3 - W_A = m_A a_A} \quad (2)$$



$$+\uparrow \sum F_y = m a_y$$

$$\boxed{T_1 + T_4 - T_3 - W_{disk} = m_{disk}\, a_2} \quad (3)$$

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} \qquad \boxed{TR - T_4 R = I\alpha_1} \quad (4)$$

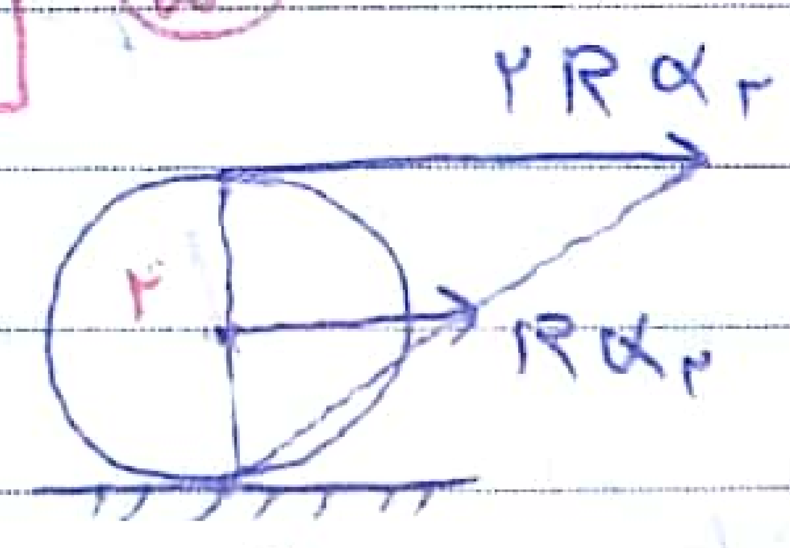
$$\vec{M} = I\vec{\alpha} \qquad \boxed{T_1 R - T_4 R = I\alpha_2} \quad (5)$$

سینماتیک:

$$\boxed{a_1 = R\alpha_1} \quad (6)$$

$$\boxed{a_2 = R\alpha_2} \quad (7)$$

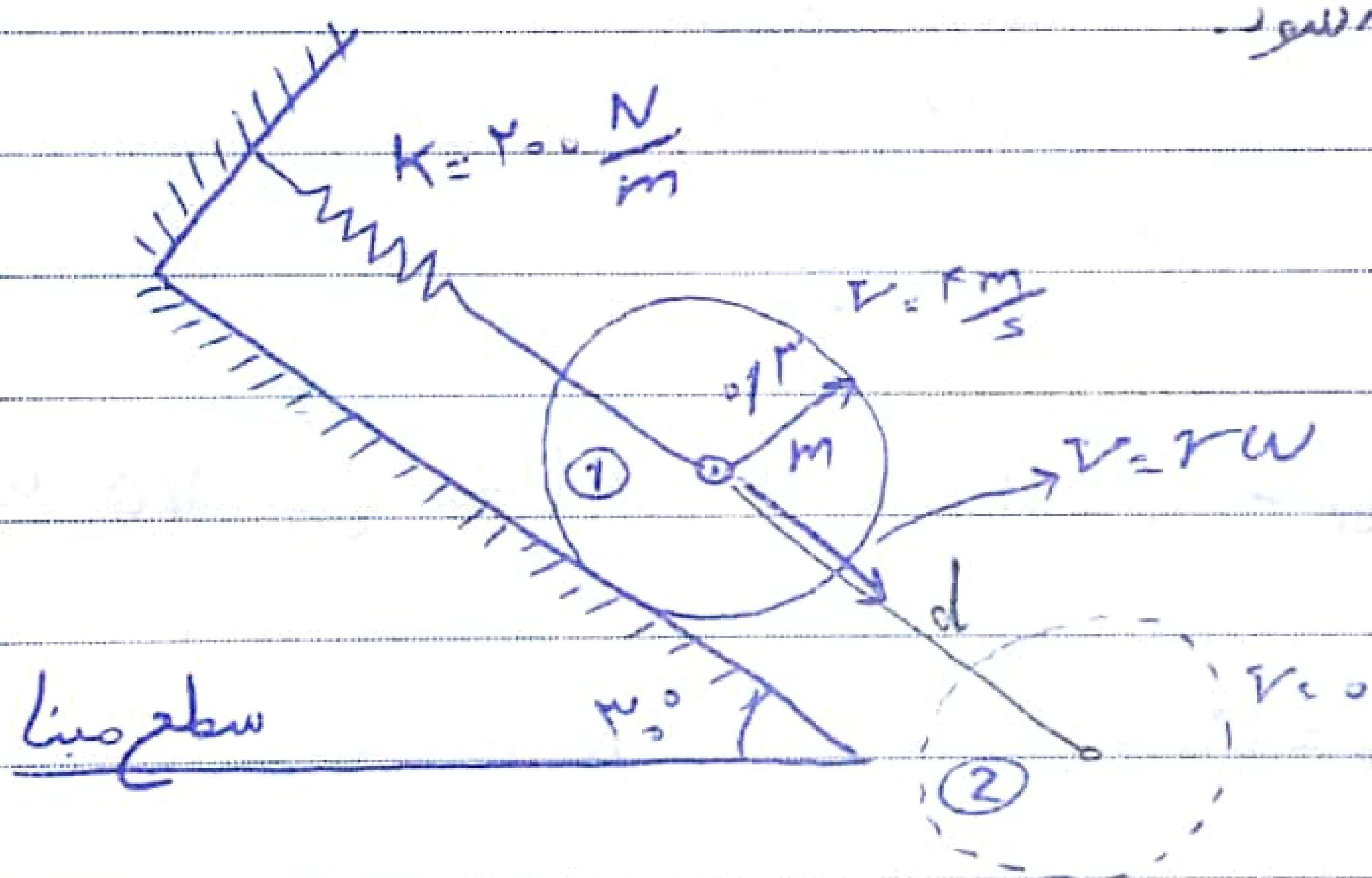
$$\boxed{a_2 = a_A} \quad (8)$$



$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_1 = 2R\alpha_2} \quad (9)$$

مثال 5: در شکل نشان داده شده مرکز جرم دیسک به جرم 40kg دارای سرعت $4\ \frac{m}{s}$ می باشد. و در لحظه نشان داده شده فنر در وضعیت آزاد قرار دارد. (بدون کشش). مطلوبست محاسبه ی مقدار فاصله d از این نقطه به طوری که دیسک به طور لحظه ای متوقف شود. حرکت دیسک حالت بدون لغزش در نظر گرفته شود.



سیستم پتانسیل

$E_1 = E_2$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \qquad V = m g z_c$

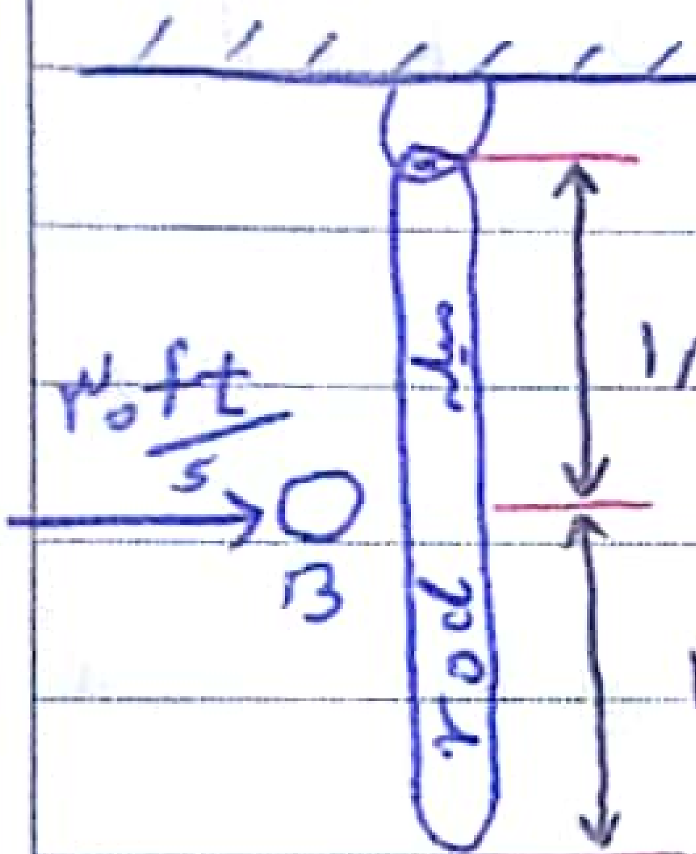
$$\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + m g z_c = 0 + \frac{1}{2} k d^2$$

$$\frac{1}{2}(40)(4)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(40)(0.3)^2\right]\left(\frac{4}{0.3}\right)^2 + (40)(9.81)(d \sin 30^\circ) = \frac{1}{2}(200) d^2$$

$$100 d^2 - 196.2 d - 480 = 0$$

$$\boxed{d = 3.38\ m}$$

مثال 6: در شکل نشان داده شده میله دارای وزن 10 lb می‌باشد. اگر ساچمه B به وزن 2 lb با سرعت افقی $30\ \frac{ft}{s}$ به مرکز میله برخورد نماید: مطلوبست محاسبه سرعت زاویه‌ای میله بعد از برخورد؟ ضریب برخورد بین ساچمه و میله $e = 0.4$ است.



$$\xrightarrow{+}\quad e = \frac{v'_{Bn} - v'_{2n}}{v_{2n} - v_{Bn}}$$

$$0.4 = \frac{v'_B - v'_2}{0 - 30}$$

$$\boxed{v'_2 - v'_B = 12}$$

از طرفی $\Leftarrow$ $v'_2 = 1.5\,\omega_2$

$$\Rightarrow \boxed{1.5\,\omega_2 - v'_B = 12} \quad (1)$$

$M_A = 0$

اصل بقای لنگر حرکتی $(H_A)_1 = (H_A)_2$

جسم صلب $\vec{H} = I\vec{\omega}$

ذره $\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$\boxed{(m_B)(1.5)(v_B) = (m_B)(1.5)\,v'_B + I_A\,\omega_2}$$

$$(-1.5\vec{j}) \times (m_B)(30\vec{i}) \longrightarrow (m_B)(1.5)(30)\,\vec{k}$$

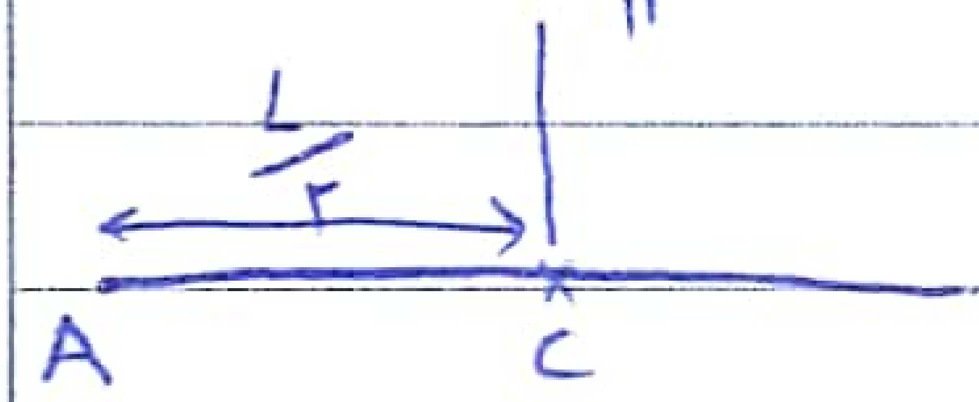
Year. Month. Date. ( ) Subject :

$$\left(\frac{۲}{۳۲٫۲}\right)(۱٫۵)(۳۰) = \left(\frac{۲}{۳۲٫۲}\right)(۱٫۵)v'_B + \left(\frac{۱}{۳}\right)\left[\frac{۱۰}{۳۲٫۲}(۳)^۲\right]\omega_۲$$

$$\boxed{۲٫۷۹۵ = ۰٫۰۹۳۱\, v'_B + ۰٫۹۳۱۷\, \omega_۲} \quad (۲)$$

$$(1),(2) \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} v'_B = -۴٫۵۲\,\frac{ft}{s} = ۴٫۵۲\,\frac{ft}{s} \leftarrow \\ \omega_۲ = ۳٫۴۵\,\frac{rad}{s} \end{array}}$$

$$\bar{I} = \frac{۱}{۱۲} mL^۲$$



$$I_A = \bar{I} + md^۲$$

$$= \frac{۱}{۱۲} mL^۲ + m\left(\frac{L^۲}{۴}\right) = \frac{۱}{۳} mL^۲$$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

این جزوه به عنوان منبع درسی
مورد استفاده قرار گیرد.

۹۶,۳,۲

سراج خانی

سراج خانی