«محاسبات عددی»

منبع درس: کتاب محاسبات عددی تألیف دکتر مهری و دکتر نخعی

یادگیری نرم‌افزار Free Mat برای حل برخی تمارین و انجام پروژه ضروری است.

نمره درس: تکالیف (۲)، میان‌ترم (۶)، پایان ترم (۱۵)، پروژه (۲)

در درس محاسبات عددی می‌خواهیم با الگوریتم‌های محاسباتی بر روی تقریب زدن مسائل پیوسته بطور گسسته آشنا شویم. در واقع در مسائل وجودی و مسائل ساختنی در ریاضیات می‌خواهیم جواب‌ها را بطور عددی و با دقت مناسب پیدا کنیم.

مثلاً اگر f تابعی پیوسته باشد و روی $[a,b]$ داشته باشیم: $f(a).f(b)<0$، آنگاه $f(x)=0$ دارای یک ریشه‌ی s در $[a,b]$ است یعنی $f(s)=0$. در اینجا وجود ریشه ثابت می‌شود ولی در محاسبات عددی می‌خواهیم با الگوریتم‌های مناسب این جواب را تقریب بزنیم.

در این درس با معادلات غیرخطی شروع می‌کنیم و به معادلات دیفرانسیل مثلاً بصورت $y'=f(x,y)$ می‌رسیم که در اینجا می‌خواهیم تابع را بطور عددی تقریب بزنیم. مباحثی که در این درس ارائه می‌شود:

- آشنایی اولیه و مسئله خطا
- معادلات غیرخطی
- دستگاه‌های معادلات خطی
- درون‌یابی
- مشتق و انتگرال‌های عددی
- حل عددی معادلات دیفرانسیل
- برازش (کاربردهای هندسی: حل جواب بصورت یک خم)

خطا:

در الگوریتم‌های جدید، جواب مسائل پیوسته را (عمدتاً) تقریب می‌زنیم. لذا جواب بدست آمده با جواب واقعی فاصله‌ای دارد که آن را خطای ناشی از قطع کردن عملیات می‌نامیم؛ یعنی اگر جواب واقعی برابر s باشد و جواب تقریبی برابر x_n، آنگاه $|x_n - s|$ میزان خطای محاسبه است. دقت می‌کنیم که در مسائل عددی، معمولاً الگوریتم مورد نظر در یک حالت حدی به جواب واقعی می‌رسد. مثلاً $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} s$؛ ولی در یک مرحله‌ی nام، با قطع عملیات، x_n را تقریبی از s می‌گیریم؛ لذا

خطای قطع کردن عبارتست از: $E = |x_n - S|$. معمولاً در الگوریتم‌ها باید بتوانیم یک کران بالا برای این خطا پیدا کنیم؛ چون S را نداریم.

منشأ دیگر خطا، گرد کردن است. لازم به یادآوری است که روی دستگاه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ محاسبات را انجام می‌دهیم. همانطور که می‌دانیم اولاً $\mathbb{R}$ با یک محور بطور هندسی، نمایش داده می‌شود. یعنی بین نقاط محور و اعداد حقیقی تناظر ۱-۱ وجود دارد. ثانیاً می‌دانیم هر عدد حقیقی بصورت یک عدد اعشاری متناهی یا متناوب و یا یک عدد اعشاری نامتناهی نمایش داده می‌شود. دو دسته‌ی اول، عدد گویا و دسته‌ی سوم عدد اصم نامیده می‌شود. در محاسبات عددی در هر صورت با تعداد ارقام اعشاری متناهی سروکار داریم.

متناهی بودن تعداد ارقام اعشاری، خود موجب نوعی خطا می‌گردد که خطای گرد کردن نام دارد. در الگوریتم‌های عددی، عمدتاً بررسی خطای قطع کردن مدنظر است.

حل عددی معادلات غیرخطی:

می‌خواهیم چند روش برای پیدا کردن ریشه(های) یک معادله‌ی غیرخطی $F(x) = 0$ را مورد بررسی قرار دهیم.

۱ـ روش تکرار ساده

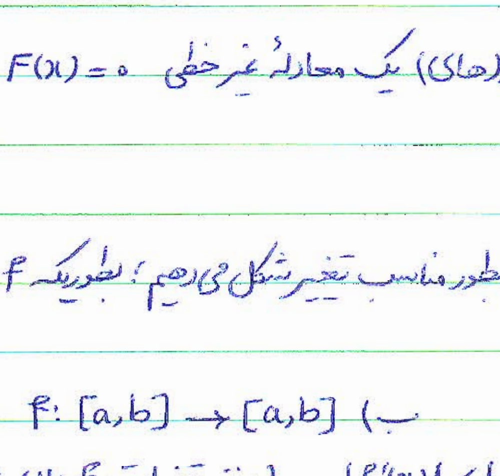
معادله‌ی مورد نظر را بصورت $x = f(x)$ بطور مناسب تغییر شکل می‌دهیم؛ بطوریکه f شرایط زیر را داشته باشد:

الف) f پیوسته باشد ب) $f: [a,b] \to [a,b]$

ج) f مشتق‌پذیر باشد و $|f'(x)| \le L < 1$ (نرخ تغییرات f ملایم باشد)

آنگاه دنباله‌ی $\{x_n\}$ که $x_n = f(x_{n-1})$ ، با انتخاب دلخواه x_0 به سمت جواب یکتای $S = f(S)$ همگرا می‌گردد. {دو چیز باید اثبات شود: همگرا بودن و یکتایی}

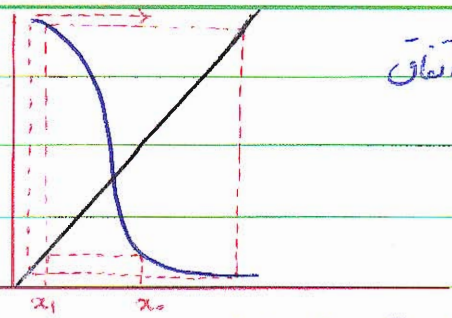
بررسی هندسی:



$x_1 = f(x_0)$

$x_2 = f(x_1)$

$\vdots$



واگرایی : اگر شیب $f(x)$ ملایم نباشد، واگرایی اتفاق می‌افتد:

همگرایی : می‌خواهیم ثابت کنیم $\lim_{n\to\infty} x_n = s$ تحت شرایط فوق. بدین منظور نشان می‌دهیم: $\lim_{n\to\infty} |x_n - s| = 0$.

$$|x_n - s| = |f(x_{n-1}) - f(s)|$$

قضیهٔ میانگین:

اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه یک نقطهٔ $c\in(a,b)$ وجود دارد که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

بنابراین داریم:

c_1 : نقطه‌ای بین s و x_{n-1} : $|x_n - s| = f'(c_1)\,|x_{n-1} - s| < L\,|x_{n-1} - s|$

حد بالای f'

$$= L\,|f(x_{n-2}) - f(s)| < L^2\,|x_{n-2} - s| \cdots < L^n \underbrace{|x_0 - s|}_{\text{عدد متناهی}}$$

$$L<1 \to \lim_{n\to\infty} L^n = 0 \Rightarrow |x_n - s| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

یکتایی : برهان خلف : فرض کنید دو جواب داشته باشیم؛ مثلاً $s_1 = f(s_1)$ و $s_2 = f(s_2)$.

$$|s_1 - s_2| = |f(s_1) - f(s_2)| = |f'(c^*)|\,|s_1 - s_2| < |s_1 - s_2|$$

چون $|f'(c^*)|<1$. به تناقض رسیده‌ایم و در نتیجه جواب یکتا است.

بررسی خطا :

فرض کنید x_n را تقریبی از S بگیریم . می‌خواهیم یک کران بالا برای $|x_n - S|$ پیدا کنیم . بدین منظور $|x_n - x_m|$ را در نظر می‌گیریم . و داریم $x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} S$. بنابراین داریم :

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_{m+1} - x_m|$$

از طرفی :

$$|x_{k+1} - x_k| \leqslant L^k |x_1 - x_0|$$

$$\mapsto |x_n - x_m| \leqslant L^{n-1} |x_1 - x_0| + L^{n-2} |x_1 - x_0| + \dots + L^m |x_1 - x_0|$$

$$= |x_1 - x_0| (L^{n-1} + L^{n-2} + \dots + L^m)$$

تصاعد هندسی با $L<1$

$$\leqslant |x_1 - x_0| (L^n + L^{n-1} + L^{n-2} + \dots)$$

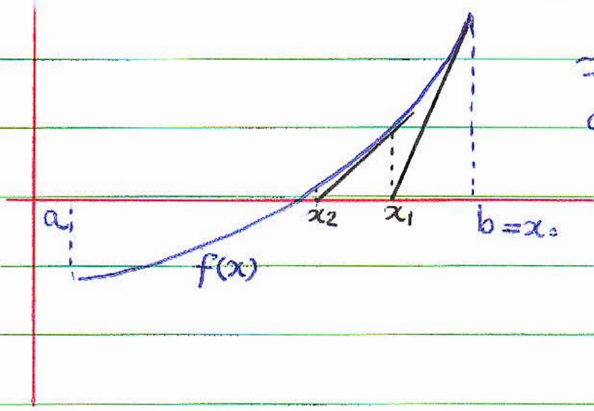
$$\text{if } m \to \infty : |x_n - S| \leqslant |x_1 - x_0| \frac{L^n}{1 - L}$$

یعنی خطای محاسبه کوچکتر یا مساوی است از : $E \leqslant |x_1 - x_0| \dfrac{L^n}{1 - L}$

مثال : ریشه‌ی معادله‌ی $xe^x - 1 = 0$ را بیابید .

۲ـ روش نیوتن

می‌خواهیم ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ را پیدا کنیم. فرض می‌کنیم f پیوسته بوده روی بازه $[a,b]$ و $f(a).f(b)$ عددی منفی است یعنی: $f(a).f(b)<0$. همچنین فرض می‌کنیم، f صعودی یا نزولی بوده و جهت تقعر آن نیز روی $[a,b]$ ثابت است. آنگاه بوسیله‌ی مماس‌های متوالی، جواب را تقریب می‌زنیم.



اگر $f(a).f(b)<0$ باشد، بنابر قضیه مقدار میانی، لااقل یک عدد s بین a و b وجود دارد که $f(s)=0$.

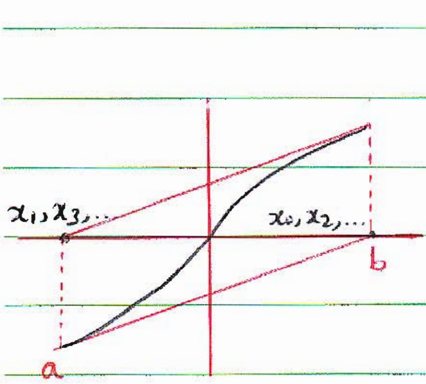
فرض ۱) مشتق f روی $[a,b]$ علامت یکسانی داشته باشد تا $f(x)$ در $[a,b]$ تنها یک ریشه‌ی s داشته باشد.

الگوریتم نیوتن:

$$f'(x_0) = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0} \mapsto x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

درحالت کلی داریم:

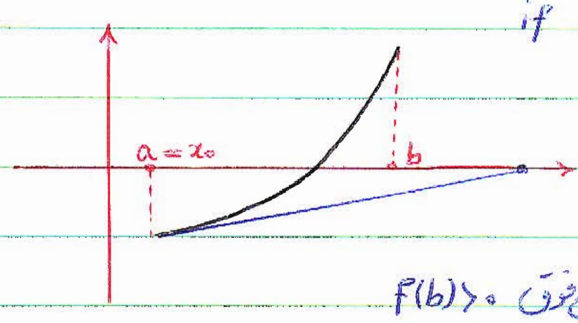
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



فرض 2) فرض می‌کنیم $f'(x)$ روی $[a,b]$ غیرصفر باشد.

فرض 3) درحالت زیر، واگرایی رخ می‌دهد. لذا این فرض را می‌کنیم که f روی $[a,b]$ تغییر جهت تقعر ندهد. این شرط لازم و کافی نیست چون ممکن است باوجود این شرط هم جواب پیدا شود، یعنی f'' تغییر علامت بدهد اما باز هم جواب یافت شود.

فرض 4) x_0 باید نقطه‌ای تعیین شود که مماس رسم شده بر نمودار f از نقطه $(x_0, f(x_0))$، محور xها را بین a و b قطع کند. درحالت زیر رخ ندهد.



در این حالت: واگرایی $\longleftarrow$ if $x_0=a$

بدین منظور، باید مد راسین a و b، آن نقطه‌ای بگیریم که مقدار تابع در آن نقطه، علامتش با مشتق دوم یکی باشد. در مثال فوق $f(b)>0$ بوده و تقعرهم مثبت است پس: $x_0=b$.

تحت شرایط ذکر شده، دنباله $\{x_n\}$ که $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ به جواب یکتای S معادله $f(x)=0$ همگرا می‌شود.

مثال. وارون یک عدد $c\neq 0$ (یعنی $\frac{1}{c}$) را تقریب بزنید.

بدین منظور ریشه معادله $\frac{1}{x}-c=0$ را تقریب می‌زنیم. $f(x)=\dfrac{1}{x}-c$

$$\rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2} \qquad x_{n+1}=x_n-\frac{\frac{1}{x_n}-c}{-\frac{1}{x_n^2}}=x_n(2-cx_n)$$

تقریبی برای $\frac{1}{3}$ است: if $c=3$; $x_0=0.3$ $\qquad \lim_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{c}$

مثال. جذر یک عدد را تقریب بزنید.

برای یک عدد $c>0$، $\sqrt{c}$ را تقریب می‌زنیم. $f(x)=x^2-c$

$$\rightarrow f'(x)=2x \qquad x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-c}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)$$

مثلاً برای $c=10$ و $x_0=3$، تقریبی از $\sqrt{10}$ حاصل می‌شود.

یادآوری: برای حل معادله $F(x)=0$ آن را بصورت $x=f(x)$ تبدیل کرده و دنباله $\{x_n\}$ که $x_n=f(x_{n-1})$ را تشکیل داده که تحت شرایط مناسب برای تابع f و با انتخاب مناسب x_0، $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s$ که s ریشه‌ی معادله $x=f(x)$ است.

شرایط f: f پیوسته و مشتق پذیر در $[a,b]$ و $f:[a,b]\to[a,b]$ و $|f'(x)|\leq L<1$. آنگاه داریم:

1) وجود جواب برای $x=f(x)$

2) یکتایی جواب برای $x=f(x)$

3) همگرایی x_n به جواب s

1) وجود جواب: $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته $\to \exists s\in[a,b] : f(s)=s$

s: نقطه ثابت

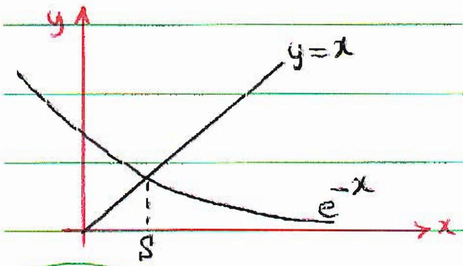
اثبات: $\Phi(x)=f(x)-x \to$ $\Phi(x)$ پیوسته است

$$\Phi(a)=f(a)-a \quad ; \quad a\leq f(a)\leq b \to \begin{cases} f(a)=a \ \checkmark \\ f(a)>a \to \Phi(a)>0 \end{cases}$$

$$\Phi(b)=f(b)-b \quad ; \quad a\leq f(b)\leq b \to \begin{cases} f(b)=b \ \checkmark \\ f(b)<b \to \Phi(b)<0 \end{cases}$$

$\Phi(x)$ پیوسته است و $\Phi(a).\Phi(b)<0$ پس طبق قضیه مقدار میانی در $[a,b]$ حتماً جوابی برای $\Phi(x)=0$ وجود دارد: $\exists s\in[a,b] : \Phi(s)=0 \to f(s)=s$

حل مثال جلسه قبل: $x=e^{-x}$



$f(x)=e^{-x}$ پیوسته و مشتق پذیر

$x\in I=[0,1]$

چک کردن شرایط: $f([0,1]) = [e^{-1}, 1] \subset [0,1]$ (تابع نزولی)

$\rightarrow f : [a,b] \rightarrow [a,b]$

$f'(x) = -e^{-x} \longrightarrow \mathrm{Max}\, |e^{-x}| \, \{x \in [0,1]\} = 1$

پس در بازه‌ی $[0,1]$ از این الگوریتم نمی‌توان استفاده کرد.
بازه‌ی دیگری در نظر می‌گیریم:

$J = [\frac{1}{2}, \ln 2] \qquad f(J) = J$

$L = |f'(\frac{1}{2})| = e^{-1/2} \simeq 0.6 < 1$ عددی در بازه‌ی J: $x_0 = \frac{1}{2}$

n	x_n
0	0.5
1	0.606
2	0.545
⋮	⋮
14	0.567

بررسی خطا:

همانطور که دیدیم $|x_{n+1} - x_n| \leqslant L^n |x_1 - x_0|$
برای محاسبه‌ی خطا، $|x_m - x_n|$ را در نظر می‌گیریم
و با پیدا کردن کران بالایی برای آن و حد گرفتن که:
$x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} S$ و خطای $E = |x_n - S|$ تقریب زده می‌شود.

$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$

$\leqslant (L^m + L^{m-1} + \cdots + L^n) |x_1 - x_0| = L^n (1 + L + \cdots + L^{m-n}) |x_1 - x_0|$

$\leqslant L^n (1 + L + L^2 + \cdots) |x_1 - x_0| = \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$

$\longrightarrow |x_m - x_n| \leqslant \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$

if $m \to \infty : x_m \to S \quad : E = |S - x_n| \leqslant \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$

در مثال قبلی : $L=e^{-\frac{1}{2}}$: $E \leqslant \frac{L^{14}}{1-L}|x_1-x_0|$

$$= \frac{e^{-7}}{0.393469} \times 0.106531 = 0.000247$$

$$0.567119 < S < 0.567187 \longrightarrow S = 0.5671$$

سؤال. اگر $f(x)=x$ در چند نقطه جواب داشته باشد، چطور؟

نرم افزار FreeMAT :

برای Download : www.freemat.sf.net

اجزای سازنده عبارات ریاضی در freemat : متغیرها - اعداد ثابت - توابع - عملگرهای ریاضی

• متغیرها: بصورت ماتریس هستند: a = [1 1 ; 2 2] a = 25

• اعداد ثابت : 3 ، 99- ، 1.5j (مختلط) ، 150 e-20

• توابع : a = sin(pi)

جمع ستون‌های ماتریس A : sum(A) ← A : ماتریس

دسترسی به درایه‌های A : A(i,j) ترانهاده A : A′

اندیس‌ها از 1 شروع می‌شوند نه از صفر. A(:,2) = [ ]

حذف ستون دوم

$x = A(1:3 , 2)$: ستون دوم سطر 1 تا 3 $x=1:100$: 1,2,...,100

$x = 1:0.5:100$: 1, 1.5, 2, ... , 100

• عملگرها: + − * / \ ^ ()

عملکرد .+ ، .* ، .^ و ... بصورت درایه به درایه است.

$x = 0:100$

$y = x.\hat{}2$

عوض کردن فرمت نمایش اعداد؛ فرمت های مختلف بصورت زیر است: format ...

$x = [\frac{4}{3} \quad 1.2345e{-6}]$

short : 1.3333 0.0000

long : 1.33...3 0.0000012345000...

rat : کسری نشان می دهد

برای اینکه با زدن اینتر، خروجی نشان داده نشود، آخر خط "؛" می گذاریم: $x=1;$

برای ادامه ی سطر در خط بعدی ...

رسم توابع: (plot)

مثال.

$y = f(x) = \sin(x)$

```
x = 0 : pi/100 : 2*pi ;
y = sin(x);
plot (x,y)
```

راهنما: (help)

help format : راهنمای استفاده از دستور فرمت (format) را نشان می دهد.

M_file :

دستوراتی که خودمان نوشته‌ایم { اسکریپت — mfile : دستورات را یکی یکی اجرا می‌کند
{ تابع — function

function [a1, a2, ...] = funname (in1, in2, ...)

$\underbrace{[a_1, a_2, \dots]}_{\text{خروجی}} = \underbrace{\text{funname}}_{\text{اسم تابع}}\ \underbrace{(in1, in2, \dots)}_{\text{ورودی}}$

مثال: function z = sin(x)

دستورات شرطی:

```
if (شرط)
    ........
else
    .......
end
```

مثال:

```
if x>0
y=x
else
z=x
end
```

عملگرهای مقایسه‌ای: < > <= >= == ~= (عدم تساوی)

Switch : مانند چند تا if پشت سرهم است:

```
switch اسم متغیر
    case مقدار اول
        ....
    case مقدار دوم
        ...
    end
```

مثال

```
switch y
case 0
y=1
case 1
y=y+1
end
```

حلقه:

```
for i=1:n
    :        } break (از داخلی‌ترین حلقه بیرون می‌آید)
end
```

$\text{for } i=1:\underbrace{2}_{\text{step}}:n$

حلقه معکوس: for i=n:-1:1

بررسی سرعت همگرایی :

در روش های تکرر ساده و نیوتن ، دو دنباله با الگوریتم های متفاوت تشکیل داریم که تحت شرایط مفروض بسمت جواب معادله همگرا می شوند . می خواهیم سرعت همگرایی در این دو روش را مقایسه کنیم.

۱) روش تکرر ساده :

f شرایط مطلوب را دارد . S ریشه معادله است . $x = f(x)$

مقصود از سرعت همگرایی این است که رابطه بین $|S - x_n|$ و $|S - x_{n-1}|$ را مشخص کنیم.

$$|x_n - S| = |f(x_{n-1}) - f(S)| = \underbrace{f'(x^*)}_{\leq L < 1} |x_{n-1} - S|$$

$$\mapsto \underbrace{|x_n - S|}_{\text{خطای مرحله n-ام}} \equiv k \underbrace{|x_{n-1} - S|}_{\text{خطای مرحله (n-1)-ام}}$$

خطا با یک ضریب ثابت ، تغییر می کند یا همگرایی خطی است.

2) روش نیوتن :

در اینجا معادله $F(x) = 0$ مفروض بوده و F دارای شرایط مطلوب است . بسط تیلور F را حول یک نقطه ی a در نظر می گیریم :

$$F(x) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!}(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$a = x_n$ و $x = S$

$$\mapsto F(S) = F(x_n) + \frac{F'(x_n)}{1!}(S - x_n) + \frac{F''(x_n)}{2!}(S - x_n)^2 + \dots$$

$$\mapsto (S - x_n) + \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} + \frac{F''(x_n)}{2F'(x_n)}(S - x_n)^2 + \dots = 0 \; ; \; (F(S) = 0)$$

$$\mapsto \underbrace{x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}}_{x_{n+1}} - S = \frac{F''(x_n)}{2F'(x_n)}(S - x_n)^2 + \dots$$

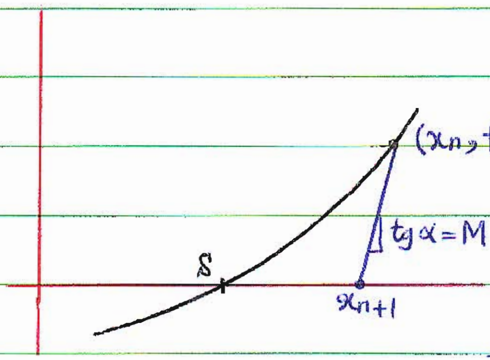
$$\mapsto |x_{n+1} - S| \equiv k' |S - x_n|^2$$

خطا در مرحله ی (n+1)ام با مجذور خطا در مرحله ی (n)ام متناسب است.

بنابراین سرعت همگرایی در روش نیوتن بیشتر است.

روش شبه نیوتن :

در این روش، شبیه به نیوتن می خواهیم معادله‌ی $F(x)=0$ را حل کنیم. ایدهٔ اصلی این روش این است که از نقطه‌ی $(x_n, f(x_n))$ خطی با شیب ثابت M رسم می کنیم تا محور xها را در نقطه‌ی x_{n+1} قطع کند.



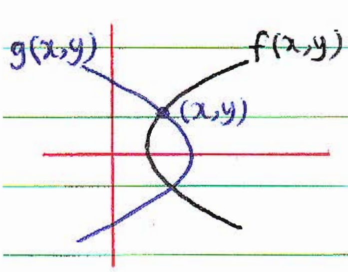
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{M}$$

در این جا دیگر درگیر محاسبه‌ی f' نیستیم.

این دنباله تحت شرایط مطلوب به S همگرا می شود. در اکثر مواقع، این روش خطای بیشتری دارد.

حل دستگاه‌های غیرخطی :

می خواهیم دستگاه غیرخطی
$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$
را حل کنیم. در واقع می خواهیم نقاطی باشد (x,y) را دارد صفر پیدا کنیم که در هر دو معادله صدق کند. (نقطه تقاطع دو خم)



در حالت کلی یک دستگاه معادلات غیرخطی بصورت $f(x)=0$ است که: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)=0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)=0 \end{cases}$$

اصولاً فرض می کنیم $m=n$ که در حالت خاص یک دستگاه n در n خطی $AX=b$ حاصل می شود که در مبحث بعدی به آن می پردازیم

در اینجا فرض می کنیم $m=n=2$. ایده‌ها در اینجا قابل تعمیم به m و n بالاتر نیز می باشد. حال به روش های تکرار ساده و نیوتن برای حل دستگاه‌های غیرخطی در صفحه $(m=n=2)$ می پردازیم:

۱) روش تکرار ساده:

دستگاه $F(X)=0$ (برداری) را بصورت $X=g(X)$ می‌نویسیم و دنباله‌ی $X_{n+1}=g(X_n)$ را با $n=0,1,2,\dots$ در نظر می‌گیریم.

$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad X=(x,y)$ $\quad g=(g_1,g_2)$

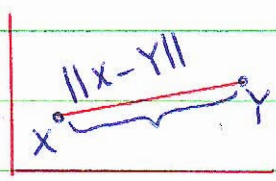
$x=g_1(x,y)$ $\quad y=g_2(x,y)$ $\quad X_n=(x_n,y_n)$

$x_{n+1}=g_1(x_n,y_n)$ $\quad y_{n+1}=g_2(x_n,y_n)$

تحت شرایط مطلوب روی g، دنباله‌ی X_n به جواب یکتای S (برداری) همگرا می‌شود. یکی از این شرایط، انقباضی بودن g است.

انقباضی بودن یعنی: $X,Y\in\mathbb{R}^2$ $\quad \|g(X)-g(Y)\|\le L\|X-Y\|$

$\|\dots\|$: فاصله دو نقطه از صفحه



ثانیاً باید مشتقات نسبی $\frac{\partial g_i}{\partial x}$ و $\frac{\partial g_i}{\partial y}$ موجود و پیوسته باشند.

همچنین L عبارتست از:

$$g_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| \qquad g_3=\sup\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right|$$

$$g_2=\sup\left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| \qquad g_4=\sup\left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right|$$

$$L=\left(\sum_{i=1}^{4}|g_i|^2\right)^{1/2}$$

بنا بر فرض $L<1$ باید باشد. تحت این شرایط همگرایی حاصل می‌شود.

مثال. $x_2=\frac{1}{2}(3-x_1)$ $\quad x_1=\left(\frac{5-x_2^2}{2}\right)^{1/2}$ $\quad \mathbb{R}:\ 1\le x_1\le 2\ ;\ 0.5\le x_2\le 1.5$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}=0 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_2}=\frac{-x_2}{(10-2x_2^2)^{1/2}} \ :\ \text{Max}=\frac{3}{\sqrt{22}}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}=-\frac{1}{2} \longmapsto L=\left(\frac{29}{44}\right)^{1/2}<1\ :$$ g انقباضی است و دنباله همگرا

$$x_1(n+1) = \left(\frac{5 - x_2(n)^2}{2}\right)^{1/2} \qquad x_2(n+1) = \frac{1}{2}(3 - x_1(n))$$

$(x_1(0), x_2(0)) = (1.5, 1)$

n	0	1	...	5	6
$x_1(n)$	1.5	1.414		1.487	1.488
$x_2(n)$	1	0.75		0.756	0.756

$\longmapsto S \simeq (1.48, 0.75)$

2) روش نیوتن:

دستگاه $f(x) = 0 \; (*)$ که $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ مفروض است. فرض کنید α ریشه این دستگاه باشد.

$x_m = \alpha + e_m$. در بسط تیلور داریم:

$$f_i(x_m) = e_{m,1}\frac{\partial f_i(\xi)}{\partial x_1} + \cdots + e_{m,n}\frac{\partial f_i(\xi)}{\partial x_n}$$

$e_m = X_m - X_{m+1}$ $\qquad$ $e_{m,j}$: مؤلفه‌ی j ام بردار e_m .

$$f_i(x_m) = (x_{m_1} - x_{m+1_1})\left(\frac{\partial f_i(x_m)}{\partial x_1}\right) + \cdots + (x_{m_n} - x_{m+1_n})\left(\frac{\partial f_i(x_m)}{\partial x_n}\right)$$

$$\longmapsto f(x_m) = J(x_m)(x_m - x_{m+1})$$

وارون ماتریس

$$\longmapsto X_{m+1} = X_m - [J(X_m)]^{-1} f(X_m)$$

$[J(X_m)] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right]$ $\qquad$ $[J(X_m)]$ ماتریس ژاکوبی است.

مثال:

$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 3 = 0$ (خط)

$f_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0$ (بیضی)

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$f(X) = (f_1(X), f_2(X))$$

$$J(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$X_{m+1} = X_m - [J(X_m)]^{-1} f(X_m) \qquad X_0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = X_0 - [J(X_0)]^{-1} f(X_0)$$

n	0	1	2	3
x_1	1.5	1.5	1.488	1.488
x_2	1	0.75	0.755	0.755

$$S \simeq (1.488, 0.755)$$

نکته ی ۱) با فرض اینکه f دارای مشتقات نسبی پیوسته باشد، دنباله به جواب همگرا می شود.

نکته ی ۲) در اینجا نیز در روش نیوتن همگرایی مجذور حاصل می شود. (سریع تر همگرا می شود)

پیوسته بودن مشتقات نسبی بسیار مهم است.

دستگاه های خطی:

می خواهیم دستگاه زیر را حل کنیم. معمولاً این دستگاه را بصورت $AX = b$ می نویسیم. می خواهیم الگوریتم هایی برای حل این دستگاه ارائه کنیم. بطور کلی این الگوریتم ها دو دسته اند: الگوریتم هایی که جواب دقیق می دهند و الگوریتم هایی که جواب را تقریب می زنند.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = [a_{ij}] \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

روش گاوس:

ایده روش گاوس بر تشکیل ماتریس $[A:b]$ مبتنی است و به کمک اعمال ابتدایی به قرار زیر:

- ضرب کردن یک سطر ماتریس در یک عدد غیر صفر
- اضافه کردن یک سطر ماتریس به یک سطر دیگر،

ماتریس A را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌کنیم. آنگاه x_n فوری حاصل می‌شود. با قرار دادن مقدار آن در معادله‌ی $(n-1)$ ام، مقدار x_{n-1} را محاسبه می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا کلیه x_iها بدست آیند.

تذکر. اعمال ابتدایی فوق، جوابهای دستگاه را تغییر نمی‌دهد.

مثال.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -8 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases} \qquad [A:b] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & -8 \\ 1 & 5 & -4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ابتدا a_{11} را محور عملیاتی قرار می‌دهیم و بعد a_{22}.

$$\left[\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} & \frac{11}{3} & -10 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{23}{4} & \frac{-19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-26}{5} & \frac{104}{5} \end{array}\right] \begin{array}{l} : R_1 \\ : R_2 - \frac{2}{3}R_1 \\ : R_3 - \frac{1}{3}R_1 \\ : R_4 - R_1 \end{array} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \quad x_4 = -4 \end{cases}$$

نکته‌ی ۱) در روش گاوس در هر مرحله، عنصر روی قطر اصلی را محور عملیات قرار داده و ضرایب سایر معادلات در همان ستون و زیر قطر اصلی را صفر می‌کنیم و کار را ادامه می‌دهیم تا ماتریس بالا مثلثی ایجاد شود.

نکته‌ی ۲) اگر عنصر محور عملیاتی، در یک مرحله برابر صفر باشد، برای رفع اشکال تقسیم بر صفر، جای آن سطر را (سطری که در آن هستیم) با یکی از سطرهای پایین‌تر که عنصر متناظر غیرصفر در آن وجود دارد، عوض کرده و کار را ادامه می‌دهیم.

نکته‌ی 3) اگر در یک مرحله از عملیات، عنصر روی قطر اصلی و کلیه‌ی عناصر ستون متناظر آن در زیر قطر اصلی برابر صفر باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه (یعنی $|A|$) برابر صفر است و لذا در این حالت دستگاه جواب ندارد.

یادآوری: دستگاه $AX=b$ دارای جواب یکتا است اگر و فقط اگر $|A| \neq 0$

روش گاوس - جردن:

مشابه روش گاوس است منتها برای حل دستگاه $AX=b$، ماتریس $[A:b]$ را تشکیل می‌دهیم و با استفاده از اعمال ابتدایی و محور قرار دادن عناصر روی قطر اصلی، ماتریس A را به یک ماتریس قطری تبدیل می‌کنیم و بی‌درنگ جواب‌ها حاصل می‌شود.

روش وارون:

دستگاه $AX=b$ را در نظر می‌گیریم؛ فرض می‌کنیم $|A| \neq 0$ و لذا A ماتریسی وارون‌پذیر است. در اینصورت اگر A^{-1} را داشته باشیم، نتیجه می‌شود $AX=b$.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}b \;\mapsto\; (A^{-1}A)X = A^{-1}b \;\mapsto\; IX = A^{-1}b$$

$$\mapsto X = A^{-1}b$$

پس می‌خواهیم A^{-1} را پیدا کنیم. فرض کنید A^{-1} بصورت $A^{-1}=[\alpha_{ij}]$ داریم:

$$AA^{-1} = I \qquad ; \qquad [a_{ij}] \cdot [\alpha_{ij}] = I$$

در اینجا αها مجهول اند و لذا از n^2 معادله n^2 مجهول فوق می‌توانیم αها را محاسبه کنیم. برای این کار، دستگاه فوق را بصورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix}}_{\text{ستون اول ماتریس } A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{ستون اول ماتریس همانی}}$$

این یکی از n معادله ـ n مجهول از n^2 معادله ـ n^2 مجهول است. این معادله را از روش گاوس جردن حل می کنیم:

$$\left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ & 0 \\ a_{ij} & \vdots \\ & \\ & 0 \end{array}\right]$$

حال با استفاده از عملیات ابتدایی، ماتریس a_{ij} ها را به ماتریس همانی تبدیل می کنیم. مقادیری که در ستون آخر باقی می ماند مقادیر ستون اول ماتریس $[\alpha_{ij}]$ است.

این کار را برای ستون دوم و ... هم باید انجام دهیم. تمام اعمال برای این ستون ها یکی است. پس تمام ستون های $[\alpha_{ij}]$ را کنار هم می گذاریم و عملیات را با هم انجام می دهیم. بعبارتی اعمال ابتدایی لازم برای تبدیل $[a_{ij}]$ به ماتریس همانی، در همه این ها یکسان است. پس این اعمال را می توانیم بطور یک مرتبه ای انجام دهیم؛ یعنی داریم:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]}_{A} \rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{array}\right]}_{A^{-1}}$$

مثال. همان مثال قبلی ...

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{52} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{26} & \frac{7}{52} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{52} & \frac{-4}{13} & \frac{1}{26} & \frac{15}{52} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{52} & \frac{-7}{13} & \frac{-4}{13} & \frac{23}{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{26} & \frac{7}{13} & \frac{4}{13} & \frac{-5}{26} \end{array}\right]$$

A^{-1}

نکته ۱) روش اخیر روشی مناسب برای پیدا کردن وارون یک ماتریس درصورت وجود است.

نکته ۲) از روش گاوس برای تبدیل یک ماتریس به ماتریس بالامثلثی، برای پیدا کردن دترمینان ماتریس استفاده می کنیم:

دترمینان یک ماتریس بالامثلثی = حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی

روش کرامر:

به کمک نکته اخیر برای دستگاه $AX=b$ داریم: $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$. که A_i همان A است که ستون iام با بردار b جایگزین شده است.

نکته ۱) هر دو روش گاوس و گاوس-جردن از لحاظ تعداد ضرب‌های لازم اگر با یکدیگر مقایسه شوند هر دو روش از مرتبه‌ی n^3 (an^3) به ضرب نیاز دارند. ولی روش گاوس با در نظر گرفتن ضرب‌های لازم برای اعمال بازگشتی و محاسبه جواب، تعداد ضرب‌های کمتری لازم دارد.

نکته 2) روش‌های کلاسیک برای پیدا کردن دترمینان و وارون یک ماتریس، محاسباتی از مرتبه‌ی نمایی نیاز دارند که روش‌های مبتنی بر الگوریتم‌های گاوس و گاوس-جردن با تعداد اعمال از مرتبه‌ی n^3 بر آنها بسیار ترجیح دارد.

روش گاوس و گاوس-جردن از مرتبه‌ی an^3 است ولی روش‌های کلاسیک از مرتبه‌ی $a\alpha^n$ که مرتبه‌ی نمایی پیچیدگی محاسباتی زیادی دارد.

روش‌های تکراری:

در این روش‌ها، به تقریب زدن جواب‌ها می‌پردازیم. و بطور عمده روش‌های ژاکوبی و گاوس-سایدل را بررسی می‌کنیم.

روش ژاکوبی: برای حل دستگاه $AX=b$ ، در iامین معادله، iامین مجهول را برحسب بقیه استخراج می‌کنیم و با انتخاب یک بردار اولیه، بطور تکراری جواب را تقریب می‌زنیم.

مثال.
$$2x_1 - x_2 = 1 \quad , \quad -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$-x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \quad , \quad -x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_1^{(r+1)} = \frac{1}{2}\left(1 + x_2^{(r)}\right) \qquad x_2^{(r+1)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(r)} + x_3^{(r)}\right)$$

$$x_3^{(r+1)} = \frac{1}{2}\left(3 + x_2^{(r)} + x_4^{(r)}\right) \quad , \quad x_4^{(r+1)} = \frac{1}{2}\left(4 + x_3^{(r)}\right)$$

$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$

$\mapsto x_1 = 4 \quad x_2 = 7$

$x_3 = 8 \quad x_4 = 6$

مرحله	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.5	1	1.5	2
⋮				
35	4	7	8	6
36	4	7	8	6

روش گاوس ـ سایدل : مشابه روش ژاکوبی ولی از نتایج بدست آمده در هر مرحله در همان مرحله نیز استفاده می کنیم . مثلاً برای مثال قبلی :

$$x_1^{(r+1)} = \frac{1}{2}\left(1 + x_2^{(r)}\right)$$
$$x_2^{(r+1)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(r+1)} + x_3^{(r)}\right)$$
$$x_3^{(r+1)} = \frac{1}{2}\left(3 + x_2^{(r+1)} + x_4^{(r)}\right)$$
$$x_4^{(r+1)} = \frac{1}{2}\left(4 + x_3^{(r+1)}\right)$$

مرحله	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.5	1.25	2.13	3.06
⋮				
19	4	7	8	6
20	4	7	8	6

نکته ۱) همگرایی روش گاوس ـ سایدل برای ماشین های تک پردازنده سریعتر است ولی روش ژاکوبی برای ماشین های با پردازنده های موازی مناسب تر است .

نکته 2) شرط لازم و کافی برای همگرایی روش های تکراری این است که : $Max\{|\lambda_i|\} \leqslant 1$
که λ_i ها مقادیر ویژه ماتریس ضرایب دستگاه است

بررسی بیشتر روش نیوتن در حل دستگاه های غیرخطی :

روش نیوتن در حل معادلات غیرخطی را به روش هندسی دیدیم؛ ابتدا به بررسی تحلیلی آن می پردازیم:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x)=0$; ریشه معادله S : $S = x + h$

$0 = f(S) = f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cancel{o(h^2)}$ صرفنظر می کنیم

$\to h = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$: $x+h = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$\to x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ایده فوق را برای میدان های چندمتغیره $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ نیز تعمیم می دهیم. ابتدا $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را درنظر می گیریم.

$f(X) = (f_1(X), f_2(X))$ or $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$f(X) = 0$ (*) یادآوری بسط تیلور توابع دو متغیره :

$$\Phi(x,y) = \Phi(a,b) + \Phi_x(a,b)(x-a) + \Phi_y(a,b)(y-b) + R_2$$

فرض می کنیم $X+h$ ریشه معادله * باشد. برای معادله i ام $(i=1,2)$ داریم:

$$f_i(X+h) = f_i(X) + (\nabla f_i(X) \cdot h) + o\|h\|^2$$

$$\nabla f_i(X) = (f_{ix}(x,y), f_{iy}(x,y)) \quad ; \quad h = (h_1, h_2)$$

$$\to \nabla f_i(X) \cdot h = f_{ix}(x,y)h_1 + f_{iy}(x,y)h_2$$

پس برای f داریم:

$$f(X+h) = f(X) + \underbrace{J(X)}_{\text{ماتریس ژاکوبی}} \cdot \underbrace{h}_{\text{بردار}} + o(\|h\|^2)$$

حال اگر $\delta = X + h$ ریشه باشد : $f(\delta) = f(X+h) = 0$

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow h = -(J(X))^{-1} f(X)$$

$$\rightarrow X + h = X - (J(X))^{-1} f(X) \rightarrow X_{n+1} = X_n - (J(X))^{-1} f(X)$$

حالت دو متغیره را بصورت زیر بیشتر بررسی می کنیم :

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (S,t) = (x+\delta, y+\varepsilon)$$

$$\rightarrow F(x+\delta, y+\varepsilon) = F(x,y) + F_x(x,y)\delta + F_y(x,y)\varepsilon + \cancel{o\left(\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}\right)^2}$$

$$\rightarrow G(x+\delta, y+\varepsilon) = G(x,y) + G_x(x,y)\delta + G_y(x,y)\varepsilon + \cancel{o(\;"\;)}$$

$\|h\|^2$

$$\rightarrow \begin{cases} F_x(x,y)\delta + F_y(x,y)\varepsilon = -F(x,y) \\ G_x(x,y)\delta + G_y(x,y)\varepsilon = -G(x,y) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{bmatrix} = J^{-1}\left(\frac{F,G}{x,y}\right) \begin{bmatrix} -F(x,y) \\ -G(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X_{n+1} = X_n - (J(X_n)^{-1}) f(X_n) \qquad f(X) = (F(X), G(X))$$

مثال .

$$\begin{cases} x - 0.7 \sin x - 0.2 \cos y = 0 \\ y - 0.7 \cos x + 0.2 \sin y = 0 \end{cases}$$

n	x_n	y_n
0	0	0
1	0.66	0.58
2	0.53	0.50
3	0.52	0.50
4	0.52	0.50

$x = 0.52 \quad y = 0.5 \leftarrow$

حل دستگاه خطی به روش تجزیه مثلثی (LU) :

در این روش برای حل دستگاه $AX=b$ ، A را به حاصلضرب دو ماتریس پایین مثلثی و بالا مثلثی تجزیه می کنیم.

$$\underset{\text{پایین مثلثی}}{A = L}\ \underset{\text{بالا مثلثی}}{U} \rightarrow \begin{cases} Ly = b & * \\ Ux = y & ** \end{cases}$$

$$Ly = b \rightarrow L(Ux) = b = (LU)x = b \rightarrow Ax = b$$

پس ابتدا دستگاه * را حل می کنیم و چون L پایین مثلثی است، به سهولت y بدست می آید و از معادله دوم نیز به سهولت x بدست می آید.

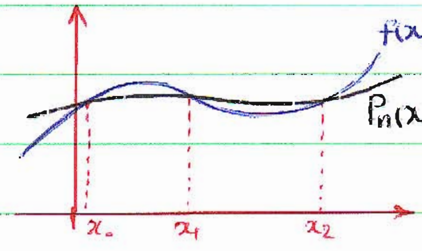
تجزیه $A=LU$ به کمک دستگاه های زیر صورت می گیرد:

$$[a_{ij}] = [l_{ij}] * [u_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ l_{ij} & & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{11} & & u_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

درون یابی:

فرض کنید مقادیر تابع f در $(n+1)$ نقطه x_0 ، x_1 ، ... ، x_n معروف است و به ترتیب برابر است با: f_0 ، f_1 ، ... ، f_n .

می خواهیم یک چندجمله‌ای درجه n مانند $P_n(x)$ پیدا کنیم که: $P_n(x_i) = f_i$. آنگاه $P_n(x)$ را تقریبی برای $f(x)$ می گیریم.



هرچه درجه بالاتر باشد، تقریب بهتر خواهد بود.

نکته: در اینجا نقاط هیچ ترتیب خاصی ندارند:

قضیه: یک چندجمله‌ای یکتای P از درجه کوچکتر یا مساوی n وجود دارد که $P(x_k) = f_k$.

اثبات وجود.

L_k را یک چندجمله‌ای از درجه کوچکتر یا مساوی n می‌گیریم که:

ضرایب درونیابی لاگرانژ $L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

چندجمله‌ای درونیابی لاگرانژ تابع f $\quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$

$$P(x_i) = f_0 \cancel{L_0}(x_i) + f_1 \cancel{L_1}(x_i) + \dots + f_i \underbrace{L_i(x_i)}_{1} + \dots + f_n \cancel{L_n}(x_i) = f_i$$

ولی L_kها را بصورت زیر منظور می‌گیریم:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{n} \frac{x - x_m}{x_k - x_m}$$

$$= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

یکتایی: فرض می‌کنیم P و Q دو چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشند که در شرایط مطلوب صدق می‌کنند.

$$D(x) = P(x) - Q(x) \quad : D(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = f_k - f_k = 0$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

$D(x)$ حداکثر باید از درجه n باشد چون P و Q حداکثر از درجه n بود. اما در اینجا $D(x)$ از درجه $(n+1)$ بدست آمد. بعبارتی D که حداکثر از درجه n است، $(n+1)$ ریشه پیدا می‌کند که تناقض است.

مثال. فرض کنید:

k	0	1	2	3
x_k	2	3	-1	4
f_k	1	2	3	4

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x+1)(x-4)}{(-1)\ (3)\ (-2)} = \frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{1}{4}(x-2)(x+1)(x-4) \qquad L_2(x) = -\frac{1}{60}(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x+1)$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4) + \frac{1}{2}(x-2)(x+1)(x-4) - \frac{1}{20}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{4}{10}(x-2)(x-3)(x+1)$$

بررسی خطا: فرض کنید I کوچکترین بازه مشتمل بر x_0 ، ... ، x_n باشد. هم چنین فرض کنید f ، $(n+1)$ مرتبه مشتق پذیر باشد و مشتق $(n+1)$ ام نیز پیوسته باشد. برای هر $x \in I$ ، یک نقطه C_x در I وجود دارد که:

چندجمله‌ای لاگرانژ (مقدار تقریبی)

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} L(x) f^{(n+1)}(C_x)$$

مقدار واقعی

$$L(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

نکته: برای بررسی خطا، به کمک نتیجه فوق، باید برای $|f^{(n+1)}(C_x)|$ یک کران بالایی M پیدا کنیم. در اینصورت:

$$E = |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} |L(x)| \quad ; M > 0$$

مثال. برای پیدا کردن کران بالا، باید از ویژگی های تابع استفاده کنیم. مثلاً برای تابع بسل ما داریم:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\, dt$$

$$\rightarrow J_0'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin(x \sin t)\, dt$$

$$J_0''(x) = +\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t \cos(x \sin t)\, dt$$

$$\longrightarrow J_0^{(n)}(x) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\, dt = 1 \quad : (\max(\sin t) = 1)$$

روش نیوتن: در این روش نقاط x_0، x_1 و ... x_n را متساوی الفاصله می‌گیریم و صورت کلی چندجمله‌ای بصورت زیر است:

$$P_n(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + (x-x_0)(x-x_1)a_2 + \dots + (x-x_0)\dots(x_n - x_{n-1})a_n$$

حال با صدق دادن x_iها در رابطه بالا و با استفاده از اینکه $i = 0, \dots, n$; $P_n(x_i) = f_i$ مقادیر a_0، ... ، a_n محاسبه می‌شود.

۸۷/۸/۱۲

یادآوری:

x_0	x_1	$\dots$	x_n
f_0	f_1	$\dots$	f_n

P از درجه حداکثر n بطوری که: $i = 0, 1, \dots, n$; $P(x_i) = f_i$ $\longleftarrow f(x) = P(x)$

x_iها ترتیب ندارند. با الگوریتم‌های x_iها را باید مرتب کرد. در حالت خاص نقاط را متساوی الفاصله در نظر می‌گیریم. x_iها می‌توانند صعودی، نزولی و یا دو طرف باشند.

در روش نیوتن: می‌خواهیم با فرض متساوی الفاصله بودن نقاط x_0، x_1، ... x_n یک چندجمله‌ای $P_n(x)$ با فرم ظاهری بالا برای درونیابی تابع f پیدا کنیم. از دستگاه زیر، a_iها بطور یکتا حاصل می‌شوند. می‌خواهیم فرم ظاهری را تغییر دهیم:

$$f(x_0) = a_0 \quad , \quad f(x_1) = a_0 + (x_1 - x_0)a_1$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) = a_0 + (x_n - x_0)a_1 + \dots + (x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})a_n$$

تفاضلات تقسیم شده :

برای صورت بندی جواب دستگاه اخیرالذکر، به معرفی نمادهای زیر که به " تفاضلات تقسیم شده" موسوم اند، می پردازیم:

$$f[x_k] = f(x_k) \qquad f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

$$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}}$$

$$f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \dots, x_k] = \frac{f[x_{k-j+1}, \dots, x_k] - f[x_{k-j}, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-j}}$$

نتیجه می شود که : $a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$

ولی می توانیم ضرایب فوق را از جدول زیر به سادگی پیدا کنیم:

x_0	$\overset{a_0}{\underline{f[x_0]}}$			
		$\overset{a_1}{\underline{f[x_0,x_1]}}$		
x_1	$f[x_1]$		$\overset{a_2}{\underline{f[x_0,x_1,x_2]}}$	
		$f[x_1,x_2]$		$\overset{a_3}{\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

ستون اول و دوم مفروض است و بقیه ستون ها از این دو نتیجه می شود. در واقع یال بالای مثلث ضرایب چندجمله ای درونیابی نیوتن را بدست می دهد.

مثال :

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$				
1	-3					
		$+3$				
2	0		6			
		15		1		
3	15		9		0	
		33		1		0
4	48		12		0	
		57		1		
5	105		15			
		87				
6	192					

$$P_3(x) = -3 + 3(x-1) + 6(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3)$$

عملگر تفاضل :

برای یک تابع f ، عملگر تفاضل بصورت زیر تعریف می‌شود :

تفاضل مرتبه اول جلورونده $(h>0)$: $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h)) - \Delta(f(x))$$
$$= f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)$$
$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x))$$

$$\rightarrow \Delta^0 f = f$$

$$\Delta^k f(x) = f(x+kh) - \binom{k}{1} f(x+(k-1)h) + \binom{k}{2} f(x+(k-2)h) + \dots + (-1)^k f(x)$$

رابطه فوق را می‌توان به کمک استقراء ثابت کرد.

حال فرض کنید: $x_k = x_0 + kh$ (نقاط متساوی الفاصله): $x_0, x_0+h, \dots, x_0+kh$

و داریم: $f(x_k) = f_k$ ؛ نتیجه می‌شود:

$$a_k = \frac{\Delta^k f}{k!\ h^k}$$

لذا به کمک جدول زیر می‌توانیم چندجمله‌ای درونیابی نیوتن جلورونده $(h>0)$ را پیدا کرد.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\dots$	$\Delta^n f_i$
x_0	$\underline{f_0}$				
		$\underline{\Delta f_0}$			
x_1	f_1		$\underline{\Delta^2 f_0}$		
		Δf_1			
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\underline{\Delta^n f_0}$
		Δf_2			
x_3	f_3				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^2 f_{n-1}$		
		Δf_{n-1}			
x_n	f_n				

قطر بالایی، ضرایب چندجمله‌ای درونیابی نیوتن جلورونده را برای ما حاصل می‌کند.

بطور خلاصه دیدیم که درونیابی لاگرانژ یک چندجمله‌ای $P_n(x)$ بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f_i$$

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}$$

در روش نیوتن، $P_n(x)$ را بصورت زیر در نظر گرفتیم:

$$P_n(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + \dots + (x-x_0)\dots(x_n - x_{n-1})a_n$$

$$P_n(x_i) = f_i$$

$$a_K = f[x_0, x_1, \dots, x_K] \qquad f[x_K] = f_K = f(x_K)$$

$$f[x_{K-1}, x_K] = \frac{f[x_K] - f[x_{K-1}]}{x_K - x_{K-1}}$$

$$\vdots$$

$$f[x_{K-j}, x_{K-j+1}, \dots, x_K] = \frac{f[x_{K-j+1}, \dots, x_K] - f[x_{K-j}, \dots, x_{K-1}]}{x_K - x_{K-j}}$$

ولی اگر عملگر تفاضل، Δ، روی تابع $y = f(x)$ بصورت زیر عمل کند؛ داریم:

$$i = 0, 1, \dots, n \qquad y_i = f(x_i)$$

$$\Delta^0 y_n = y_n \qquad \Delta^m y_n = \Delta^{m-1} y_{n+1} - \Delta^{m-1} y_n$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h} \quad ; \quad x_i - x_{i-1} = h$$

نقاط: x_0 ، $x_0 + h$ ، ... ، $x_0 + Kh$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\frac{\Delta y_1}{h} - \frac{\Delta y_0}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \qquad \begin{cases} \Delta y_0 = y_1 - y_0 \\ \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] = \frac{\Delta^m y_0}{m!\, h^m}$$

چندجمله ای نیوتن جلورونده بصورت زیر خواهد بود :

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

جدول تفاضل های متناهی :

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

برای بدست آمدن ضرایب ، هر جمله باید تقسیم بر : $\frac{1}{n!\cdot h^n}$ نیز شود .

• درونیابی به روش نیوتن عقب رونده :

دراین روش ، صورت کلی چندجمله ای بصورت زیر است که حول x_n آن را درنظر می گیریم .

$$P_n(x) = a_0 + (x-x_n)a_1 + (x-x_n)(x-x_{n-1})a_2 + \cdots + (x-x_n)\cdots(x-x_1)a_n$$

دراینصورت ضرایب چندجمله ای فوق به کمک یال پائینی جدول تفاضل های متناهی مشخص می شود .

روش گاوس :

درروش گاوس جدول مقادیر بصورت زیر است :

x_i	y_i		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{-1}	y_{-1}		$\delta^2 y_{-1}$
		$\delta y_{-1/2}$	
x_0	y_0		$\delta^2 y_0$
		$\delta y_{+1/2}$	
x_1	y_1		$\delta^2 y_{+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

صورت کلی چندجمله‌ای بصورت زیر است:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_{-1}) + a_3(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1) + \dots$$

ضرایب مربوط از روی جدول متناهی بصورت بالا بدست می‌آید.

$$\delta^0 y_k = y_k$$

$$\begin{cases} \delta^m y_{k+\frac{1}{2}} = \delta^{m-1} y_{k+1} - \delta^{m-1} y_k & (m \geq 1 \text{ ، فرد} : m) \\ \delta^m y_k = \delta^{m-1} y_{k+\frac{1}{2}} - \delta^{m-1} y_{k-\frac{1}{2}} & (m \geq 2 \text{ ، زوج} : m) \end{cases}$$

$$t(x) = \frac{x - x_0}{h}$$

$$P_n(t) = y_0 + \bar{\delta} y_0 \, t + \delta^2 y_0 \frac{t^2}{2!} + \bar{\delta}^3 y_0 \frac{t(t^2-1)}{3!} + \dots + \delta^{2k} y_0 \frac{t^2(t^2-1)\dots(t^2-(k-1)^2)}{(2k)!}$$

$$\bar{\delta}^m y_0 = \frac{1}{2}\left(\delta^m y_{1/2} + \delta^m y_{-1/2}\right)$$

صورت بندی نیوتن جلورونده :

$$t: [x_0, x_n] \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} [0, h] \qquad t(x) = \frac{x - x_0}{h}$$

$$P_n(t) = P_n(t(x)) = y_0 + \Delta y_0 \binom{t}{1} + \Delta^2 y_0 \binom{t}{2} + \dots + \Delta^n y_0 \binom{t}{n}$$

$$\binom{t}{n} = \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} = \frac{t!}{(t-n)!\,n!}$$

صورت بندی نیوتن عقب رونده :

$$\nabla^0 y_{n-k} = y_{n-k}$$

$$\nabla^m y_{n-k} = \nabla^{m-1} y_{n-k} - \nabla^{m-1} y_{n-k-1} \qquad ; \ m \geq 1$$

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-2}	y_{n-2}		
		∇y_{n-1}	
x_{n-1}	y_{n-1}		$\nabla^2 y_n$
		∇y_n	
x_n	y_n		

$$t(x) = \frac{x - x_n}{h}$$

$$t: [x_0, x_n] \longrightarrow [-h, 0]$$

$$P_n(t) = y_n + \nabla y_n \binom{t}{1} + \nabla^2 y_n \binom{t+1}{2} + \dots + \nabla^n y_n \binom{t+n-1}{n}$$

مثال. با یک چندجمله‌ای درجهٔ 2، $P(x)$، تابع $f(x)=\sin\pi x$ را در نقاط $x_0=0$، $x_1=\frac{1}{6}$ و $x_2=\frac{1}{2}$ تقریب بزنید و خطای مربوط را بررسی کنید.

x_i	0	1/6	1/2
f_i	0	1/2	1

نقاط هم فاصله نیستند و از لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$P(x)=L_0f_0+L_1f_1+L_2f_2=\frac{1}{2}L_1+L_2$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)(x-1/2)}{(1/6-0)(1/6-1/2)}=-9x(2x-1)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-1/6)}{(1/2-0)(1/2-1/6)}=x(6x-1)$$

$$\longrightarrow P(x)=-3x^2+\frac{7}{2}x$$

$$E(x)=\frac{(x-0)(x-1/6)(x-1/2)}{3!}f'''(c_x)\quad ; \quad f(x)=\sin\pi x$$

$$f'''(x)=-\pi^3\cos\pi x \longrightarrow |f'''(c_x)|\leqslant\pi^3$$

$$\longrightarrow |E(x)|\leqslant\frac{\pi^3}{6}\left|x(x-\tfrac{1}{6})(x-\tfrac{1}{2})\right| \qquad g(x)=x(x-\tfrac{1}{6})(x-\tfrac{1}{2})$$

به کمک $g'(x)=0$، مقدار max آن در بازه $[0,\frac{1}{2}]$ حاصل می‌شود

$$\max\{g(x)\}=0.009<0.01$$

$$\longrightarrow |E(x)|<\frac{\pi^3}{6}\times 0.01 \longrightarrow |E(x)|<\frac{\pi^3}{600}$$

بررسی بیشتر درونیابی نیوتن:

چندجمله‌ای درونیابی نیوتن جلورونده، صورت کلی زیر را دارد:

$$P(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\dots+(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})f[x_0,\dots,x_n]$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{\Delta f_0}{h} \qquad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}$$

نقاط هم فاصله اند: $x_0, x_0+h, \dots, x_0+nh$ ،

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}$$

برای ساده‌تر کردن، تغییر متغیر می‌دهیم:

$$t = \frac{x-x_0}{h} \quad : x - x_0 = ht$$

$$\longrightarrow x - x_1 = x - x_0 - h = (t-1)h \qquad \longrightarrow x - x_{n-1} = (t-n+1)h$$

$$\longrightarrow P(x(t)) = f_0 + t\,\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

or

$$P(x(t)) = f_0 + \binom{t}{1}\Delta f_0 + \binom{t}{2}\Delta^2 f_0 + \dots + \binom{t}{n}\Delta^n f_0$$

برای نیوتن عقب رونده نیز مشابهاً داریم:

$$P(x(s)) = f_n + s\,\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

$$\frac{x-x_n}{h} = s$$

خطا: چون چندجمله‌ای یکتاست، همان رابطهٔ لاگرانژ است اما می‌توان آن را ساده‌تر کرد:

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x) \qquad t = \frac{x-x_0}{h}$$

$$E(x(t)) = \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(c_{x(t)})$$

مثال. به کمک جدول مقادیر زیر، $f(0.3)$ را با روش نیوتن جلورونده تقریب بزنید.

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8
f_i	0	0.199	0.389	0.565	0.717

f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0				
	0.199			
0.199		−0.009		
	0.190		−0.005	
0.389		−0.014		−0.005
	0.176		−0.010	
0.565		−0.024		
	0.152			
0.717				

$$t = \frac{x - x_0}{h}$$

$$x = 0.3$$

$$t = \frac{0.3 - 0}{0.2} = 1.5$$

$$f(0.3) \sim P(0.3) = 0 + (1.5)(0.199) + \frac{1.5 \times 0.5}{2}(-0.009)$$

$$+ \frac{1.5 \times 0.5 \times (-0.5)}{6}(-0.005) + \frac{1.5 \times 0.5 \times (-0.5) \times (-1.5)}{24}(-0.005)$$

$$= 0.295$$

در ادامه $f(0.3)$ را با یک چندجمله‌ای درجه 5 و با استفاده از نیوتن عقب رونده تقریب می‌زنیم. بصورت α عمل می‌کنیم چون درجه‌ی 5 است:

$$s = \frac{x - x_4}{h} = \frac{0.3 - 0.8}{0.2} = -2.5$$

$$f(0.3) \sim P(0.3) = 0.717 + (-2.5)(0.152) + \frac{(-2.5)(-1.5)}{2}(-0.024)$$

$$+ \frac{(-2.5)(-1.5)(-0.5)}{6}(-0.01) + \frac{(-2.5)(-1.5)(-0.5)(0.5)}{24}(-0.005)$$

$$= 0.295$$

اگر از درجه 4 می‌خواستیم، جمله‌ی آخر یعنی $\frac{(-2.5)(-1.5)(-0.5)(0.5)(-0.005)}{24}$ را هم می‌نوشتیم.
یعنی ضریب مربوط به $\nabla^4 f_1$.

مثال (درونیابی وارون): یعنی f^{-1} را تقریب می‌زنیم و از این طریق ریشه تابع را تقریب می‌زنیم. در مسئله درونیابی، مقادیر تابع $y=f(x)$ را در نقاط x_0، x_1، ...، x_n مفروض گرفتیم.
با فرض 1-1 بودن f، می‌خواهیم با جابجا کردن x_iها و y_iها، f^{-1} را با درونیابی تقریب بزنیم و می‌توان به کمک آن صفر تابع را تقریب زد.

مثلاً به کمک درونیابی وارون روی نقاط $x=0, 0.5, 1$ ریشه معادله $x^3+x^2+x-1=0$ را بین صفر و یک تقریب می‌زنیم.

$y=x^3+x^2+x-1$ $\quad y'=3x^2+2x+1>0 \rightarrow$ صعودی و یک به یک

$f(0)=-1, \quad f(1)=2 \rightarrow$ فقط یک ریشه در $[0,1]$ داریم.

x_i	0	0.5	1
y_i	-1	$-\frac{1}{8}$	2

جای x_i و y_i را عوض کرده و از درونیابی لاگرانژ، $f^{-1}(0)$ را تقریب می‌زنیم.
ریشه تقریبی $\frac{199}{257}$ می‌شود. (در حالت وارون، نقاط هم‌فاصله نیستند).

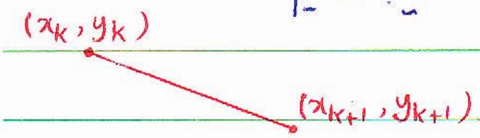
اسپلاین:
در اینجا نیز مقادیر تابع را در $(n+1)$ نقطه داریم. می‌خواهیم تابع را تقریب بزنیم؛ اما از تقریب‌های موضعی استفاده می‌کنیم.
مثلاً در تقریب خطی، تابع را دو نقطه، دو نقطه در نظر می‌گیریم و هر دو نقطه را با یک خط تقریب می‌زنیم. می‌توان با سهمی‌های متوالی و با در نظر گرفتن سه نقطه، سه نقطه این کار را کرد.

بعبارتی در اسپلاین درجه دوم، 3 نقطه، 3 نقطه تابع را در نظر گرفته و در هر 3 نقطه، آن را با یک سهمی تقریب می‌زنیم. به همین ترتیب اسپلاین درجه بالاتر هم داریم.

اسپلاین خطی:

نقاط (x_0,y_0)، ...، (x_n,y_n) که $x_0<x_1<\dots<x_n$ مفروضند. در هر زیربازه‌ی $[x_i,x_{i+1}]$ تابع را با یک خط (چندجمله‌ای درجه اول) تقریب می‌زنیم.

مثلاً برای قطعه k ـ ام داریم:



$$S_k(x) = y_k \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + y_{k+1}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \; ; \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}$$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x_0 \leq x \leq x_1 \\ S_1(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

$S_i(x)$ معادله خط واصل بین نقاط (x_i,f_i) و (x_{i-1},f_{i-1}) است.

۸۷/۸/۲۶

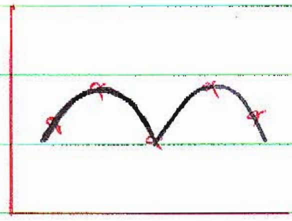
در یک اسپلاین، مقادیر تابع در $n+1$ نقطه x_0، x_1، ...، x_n به ترتیب f_0، f_1، ...، f_n مفروضند. در اینجا به جای اینکه مشابه روش درونیابی با یک چندجمله‌ای درجه n بطور سرتاسری روی x_0 تا x_n تقریب بزنیم، از تقریب‌های قطعه به قطعه استفاده می‌کنیم.

یعنی روی هر زیربازه‌ی $[x_i,x_{i+1}]$، $i=0,\dots,n-1$ تابع جواب را با یک خط، با یک سهمی، با یک تابع درجه سه و... تقریب می‌زنیم.

اسپلاین درجه دوم:

تعداد فرد نقطه x_0، x_1، ...، x_{2n} را در نظر می‌گیریم. یک چندجمله‌ای درجه دوم در هر یک از زیربازه‌های $[x_{2k},x_{2k+2}]$ می‌سازیم و $S(x)$ حاصل شده برای تقریب مورد نظر بکار می‌رود.

معایب اسپلاین درجه دوم این است که ممکن است انحنا در نقاط زوج بطور ناگهانی تغییر کند و این موجب ناهمواری خم جواب گردد.



$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ \vdots & \\ S_n(x) & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n \end{cases}$$

اسپلاین درجه‌ی سوم:

مقادیر تابع f در $n+1$ نقطه $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ به ترتیب برابر $f_0, \dots, f_n$ مفروضند. می خواهیم اسپلاین درجه‌ی 3، $S(x)$ را بدست آوریم بطوریکه $i = 0, \dots, n$ ، $S(x_i) = f_i$

$S(x) = S_i(x) \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \; , \; i = 0, \dots, n-1$

که $S_i(x)$ یک چندجمله‌ای درجه 3 است. برای پیوستگی و همواری اسپلاین در نقاط x_i که بین دو زیربازه‌ی $[x_{i-1}, x_i]$ و $[x_i, x_{i+1}]$ مشترک است، فرض می کنیم برای $i = 1, 2, \dots, n-1$ شرایط زیر برقرار باشد:

(عدم پرش در x_i)

i) $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$ ii) $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ iii) $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$

برای پیدا کردن $S(x)$، از این نکته که $S''_i(x)$ یک تابع خطی است، استفاده می کنیم و به کمک روابط فوق، پارامترها را تا حد امکان مشخص می نمائیم. دقت می کنیم $S''_i(x)$ را روی $[x_i, x_{i+1}]$ در نظر گرفته ایم. لذا به کمک درونیابی لاگرانژ داریم:

$$S''_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} S''_i(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} S''_i(x_{i+1})$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$

فرض: $x_{i+1} - x_i = h_i$ (عدم متساوی الفاصله)

$$m_i = \frac{1}{6} S''_i(x_i)$$

با دوبار انتگرال گیری، $S_i(x)$ بدست می آید.

$$(*)\quad S_i(x) = -\frac{(x-x_{i+1})^3}{h_i} m_i + \frac{(x-x_i)^3}{h_i} m_{i+1} + \underset{=}{c_i}(x-x_i) + \underset{=}{d_i}$$

ثوابت انتگرال گیری

$$\begin{cases} S_i(x_i) = h_i^2 m_i + d_i = f_i \\ S_i(x_{i+1}) = h_i^2 m_{i+1} + c_i h_i + d_i = f_{i+1} \end{cases}$$

$$d_i = f_i - h_i^2 m_i \qquad c_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + h_i (m_i - m_{i+1})$$

$i = 0, 1, \ldots, n-1$

* پس اگر m_i و m_{i+1} معلوم باشد، c_iها و d_iها از دستگاه بالا و $S_i(x)$ نیز از * حاصل می شود.

از شرط پیوستگی مشتق در نقاط مرزی استفاده می کنیم:

$$S'_{i-1}(x) = -\frac{3(x-x_i)^2}{h_{i-1}} m_{i-1} + \frac{3(x-x_{i-1})^2}{h_{i-1}} m_i + c_i$$

$x \in [x_{i-1}, x_i]$

در نتیجه داریم:

$$h_{i-1} m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) m_i + h_i m_{i+1} = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$

این دستگاه شامل $n-1$ معادله و $n+1$ مجهول m_0، m_1، ...، m_n است. لذا باید مفروضات بیشتری داشته باشیم تا جواب حاصل شود:

الف) اسپلاین مکعبی طبیعی: $m_0 = m_n = 0$ یعنی $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$

ب) اسپلاین مقید: $S'(a) = f'(a)$ ، $S'(b) = f'(b)$

ج) اسپلاین متناوب : $S^{(k)}(a) = S^{(k)}(b) \quad k=0,1,2$ ؛ در اسپلاین متناوب شرط $f(a)=f(b)$ لزوماً برقرار است.

ولی در اینجا عمدتاً به اسپلاین مکعبی طبیعی می‌پردازیم. یعنی در حالت الف، دستگاه به یک دستگاه سه قطری تبدیل می‌شود و لذا دارای جواب یکتاست. و اگر نقاط را متساوی الفاصله بگیریم، یعنی $h = x_{i+1} - x_i$ داریم:

$$(**) \quad m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = 2f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_{i-1}$$
$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

مثال.

x_i	-1	0	1
f_i	0	1	0

$h=1 \quad , \quad n=2$

از ** داریم: $m_0 + 4m_1 + m_2 = \Delta^2 f_0 \qquad m_0 = m_2 = 0$

$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0 = -2 \longrightarrow m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$d_0 = 0 \qquad c_0 = \frac{3}{2} \qquad d_1 = \frac{3}{2} \qquad c_1 = -\frac{3}{2}$$

$$\longrightarrow S(x) = \begin{cases} S_0(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^3 + \frac{3}{2}(x+1) & -1 \leq x \leq 0 \\ S_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

مثال.

x_i	-1	0	1	3
f_i	0	2	9	37

$n = 3$

$h_0 = x_1 - x_0 = 1$

$h_1 = x_2 - x_1 = 1$

$h_2 = x_3 - x_2 = 2$

$f[x_0, x_1] = 2 \quad , \quad f[x_1, x_2] = 7$

$f[x_2, x_3] = 14$

$4m_1 + m_2 = 5 \qquad m_1 + 6m_2 = 7$

$\rightarrow m_1 = 1 \qquad m_2 = 1 \qquad d_0 = 0 \qquad c_0 = 1$

$d_1 = 1 \qquad c_1 = 7 \qquad d_2 = 5 \qquad c_2 = 16$

$$S(x) = \begin{cases} (x+1)^3 + x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 3x^2 + 4x + 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2} & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

برازش داده‌ها:

مجموعه‌ای از N نقطه (x_i, y_i) در صفحه مفروض است. می‌خواهیم "بهترین" خط راست $Y = a + bX$ را پیدا کنیم که این نقاط را تقریب بزند.
برای بهترین تقریب باید مقدار خطا min شود. خطا می‌تواند یکی از روابط زیر نتیجه گردد:

$$E_1 = \sum_{i=1}^{N} |y_i - Y_i| \qquad E_2 = \sum_{i=1}^{N} |y_i - Y_i|^2$$

$$E_3 = \max |y_i - Y_i| \qquad 1 \leq i \leq N$$

باید یکی از روابط E_1 ، E_2 یا E_3 را min کنیم و به کمک آن a و b حاصل شود.
در اینجا از E_2 استفاده می‌کنیم.

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{N} |y_i - Y_i|^2$$

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (a + bX_i))^2$$

min موضعی $E(a,b)$ از دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - (a + bX_i)\right) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{N} x_i\left(y_i - (a + bX_i)\right) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{N} 1\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) b = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{cases}$$

a و b از دستگاه بالا بدست می آیند.

مثال.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	1	1
2	1.5	4	3
3	1.75	9	5.25
4	2	16	8

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 10 \qquad \sum_{i=1}^{4} y_i = 6.25$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 30 \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 17.25$$

$$\begin{cases} 4a + 10b = 6.25 \\ 10a + 30b = 17.25 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 0.75 \\ b = 0.325 \end{cases} \longrightarrow Y = 0.75 + 0.325X$$

۸۷/۹/۱۰

مشتق عددی:

مقادیر تابع مشتق پذیر f در نقاط x_0 ، x_1 ، ... ، x_n به ترتیب برابر f_0 ، f_1 ، ..... ، f_n مفروضند.

و $x_i - x_{i-1} = h$. همانطور که دیدیم به کمک درونیابی نیوتن جلورونده با فرض : $t = \frac{x - x_0}{h}$

داریم :

$$P(x(t)) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

می‌خواهیم $f'(x)$ را به کمک $P'(x(t))$ تقریب بزنیم؛ یعنی: $f'(x) \simeq P'(x(t))$

$$P'(x(t)) = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dP}{dt}\cdot\frac{1}{h}$$

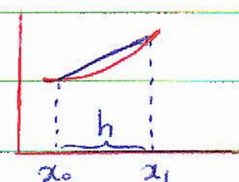
$$P'(x(t)) = \frac{1}{h}\left\{\Delta f_0 + \frac{\Delta^2 f_0}{2}(t-1+t) + \frac{\Delta^3 f_0}{6}\left[(t-1)(t-2)+t(t-2)+t(t-1)\right]+\dots\right\}$$

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{\Delta^2 f_0}{2} + \frac{\Delta^3 f_0}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}\Delta^n f_0}{n}\right)$$

نتیجه:

تقریب یک جمله‌ای:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\Delta f_0 = \frac{f_1 - f_0}{h}$$



تقریب دو جمله‌ای:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{\Delta^2 f_0}{2}\right) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h}$$

تقریب سه جمله‌ای:

$$f'(x_0) = \frac{2f_3 - 9f_2 + 18f_1 - 11f_0}{6h}$$

نتیجه: مشابهاً در x_1 داریم:

$$f'(x_1) = \frac{\Delta f_1}{h} = \frac{f_2 - f_1}{h}$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_1 - \frac{\Delta^2 f_1}{2}\right) = \frac{-f_3 + 4f_2 - 3f_1}{2h}$$

برای تقریب زدن $f'(x)$ که $x_0 < x < x_1$ (خود نقاط نباشد)، به کمک روابط ذکر شده، $f'(x_0)$ و $f'(x_1)$ را پیدا می‌کنیم سپس با استفاده از درونیابی خطی لاگرانژ، داریم:

$$f'(x) \simeq \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f'(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f'(x_1)$$

مثال.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	
1.3	3.669					
		0.813				
1.5	4.482		0.179			
		0.992		0.041		
1.7	5.474		0.220		0.007	$h=0.2$
		1.212		0.048		
1.9	6.689		0.268			
		1.480				
2.1	8.166					

تقریب $f'(1.3)$ به کمک داده‌های فوق.

$$f'(1.3) \simeq \frac{1}{0.2}\left(0.813 - \frac{0.179}{2} + \frac{0.041}{3} - \frac{0.007}{4}\right) = 3.677$$

در ادامه $f'(1.7)$ را با تقریب دوجمله‌ای پیدا می‌کنیم : (از سه جمله استفاده می‌کنیم: تقریب دوجمله‌ای)

$$f'(1.7) \simeq \frac{1}{0.4}\left(-8.166 + 4(6.689) - 3(5.474)\right) = 5.390$$

مثال. $f(x) = \sqrt[3]{10+x^2}$: $f'(0.1)$

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4
f_i	2.1552	2.1573	2.1609	2.1659

به کمک این چهار نقطه، تقریب سه جمله‌ای می‌زنیم.

$h=0.1$

$$f'(0.1) = \frac{1}{0.6}\left(2(2.1659) - 9(2.1609) + 18(2.1573) - 11(2.1552)\right) = 0.01316$$

روابط فوق برای محاسبهٔ مشتق در نقاطی است که مقدار آن را داریم وگرنه باید $f'(x)$ را درونیابی کرد.

• مشتق عددی به کمک نیوتن عقب رونده:

$$P(x(s)) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

$$s = \frac{x - x_n}{h}$$

$$f'(x_n) = P'(x_n) = \frac{1}{h}\left(\nabla f_n + \frac{\nabla^2 f_n}{2} + \frac{\nabla^3 f_n}{3} + \dots + \frac{\nabla^n f_n}{n}\right)$$

مثال. مقادیر سرعت $V(t)$ برای یک متحرک در جدول زیر آمده است. شتاب آن را در $t=240$ تقریب بزنید.

t	$V(t)$	∇V	$\nabla^2 V$	$\nabla^3 V$	$\nabla^4 V$
0	0				
		0.0824			
60	0.0824		0.1099		
		0.1923		0.0732	
120	0.2747		0.1832		0.1029
		0.3755		0.1762	
180	0.6502		0.3594		
		0.7349			
240	1.3851				

$\begin{cases} n=4 \\ h=60 \end{cases}$

$$V'(240) = \frac{1}{60}\left(0.7349 + \frac{0.3594}{2} + \frac{0.1762}{3} + \frac{0.1029}{4}\right) = 0.01665$$

خطای تقریب مشتق:

اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درونیابی $f(x)$ باشد، داریم: $f(x) - p(x) = L(x)\, g(x)$

$$L(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \qquad g(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

$$\rightarrow f'(x) - P'(x) = L'(x)\, g(x) + L(x)\, g'(x)$$

مقدار $g'(x)$ را نداریم چون $x_{n-1} < c_x < x_n$. اگر $x = x_j$ برای $j=0,\dots,n$:
در نتیجه $L(x_j)=0$ و جمله‌ی $L(x).\,g'(x)=0$.

$$\rightarrow f'(x) - p'(x) = L'(x).\, g(x)$$

$$L'(x_j) = \lim_{x \to x_j} \frac{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}{x - x_j} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_j - x_i)$$

$$E'(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_{x_j}) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_j - x_i)$$

اگر نقاط را متساوی الفاصله با فاصله h از هم بگیریم:

$$E'(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)} h^n f^{(n+1)}(c_{x_j})$$ c وابسته به x است.

انتگرال عددی:

مقادیر تابع f را در نقاط x_0، x_1، ...، x_n به ترتیب f_0، f_1، ...، f_n می‌گیریم. فرض می‌کنیم f تابعی پیوسته باشد؛ برای محاسبه‌ی انتگرال $\int_{x_0}^{x_n} f$ از درونیابی نیوتن جلورونده با فرض $x_{i+1} - x_i = h$ $(i = 0, \dots, n-1)$ استفاده می‌کنیم:

$$P(x(t)) = f_0 + t \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots$$

از رابطه فوق، دونقطه ـ دونقطه یا سه نقطه ـ سه نقطه به ترتیب زیر استفاده می‌کنیم:

ـ روش ذوزنقه (دونقطه ـ دونقطه):

$$\int_{x_0}^{x_n} f = \int_{x_0}^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f$$

$$P(x(t)) = f_0 + t \Delta f_0 \quad ; \quad t = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} h(f_0 + t \Delta f_0)\, dt = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

$$\rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \dots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

$$\rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$ (رابطه انتگرال ذوزنقه)

- روش سیمپسون (سه نقطه - سه نقطه):

$$\int_{x_0}^{x_n} f = \int_{x_0}^{x_2} f + \int_{x_2}^{x_4} f + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f$$

(تعداد نقاط، مضربی از 3 است)

$$P(x(t)) = f_0 + t\,\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

$$\rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$$\rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$\rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

(رابطه انتگرال سیمپسون)

۸۷/۹/۲۴

بررسی خطای انتگرال عددی:

- روش ذوزنقه: به کمک درونیابی نیوتن جلورونده داریم:

چون دو نقطه - دو نقطه است:

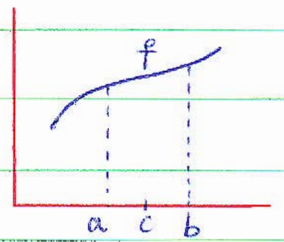
$$E(x) = \frac{t(t-1)}{2} h^2 f'''(c_x)$$

$$e(x) = \int_{x_0}^{x_1} E(x)\,dx = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2} h^3 f''(c_x)\,dt$$

$$= \frac{h^3}{2}\int_0^1 t(t-1) f''(c_{x(t)})\,dt$$

انتگرال گیری مشکل است

قضیه مقدار میانگین در مورد انتگرال :



$$\int_a^b f = f(c).(b-a)$$

چون $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$ عددی است بین $f(a)$ و $f(b)$ یعنی :

$$\exists\, c\in[a,b] : f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$$

$$\Rightarrow e(x)=\frac{h^3}{2}f''(\eta)\int_0^1 t(t-1)\,dt=-\frac{h^3}{12}f''(\eta) \;;\; x_0<\eta<x_1$$

پس $e(x)$ تابعی از h^3 است : $o(h^3)$

- روش سیمپسون: مشابهاً داریم :

$$e(x)=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta) \;;\; x_0<\eta<x_1$$

پس $e(x)$ تابعی از h^5 است : $o(h^5)$

مثال . انتگرال $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$ مفروض است:

الف) با $h=0.25$ یعنی $n=4$ ، I را به روش ذوزنقه تقریب بزنید و خطای مربوط را تعیین کنید.

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
f_i	1	0.93	0.77	0.56	0.36

$f(x)=e^{-x^2}$

$$I=\frac{h}{2}(f_0+2f_1+2f_2+2f_3+f_4)=0.74$$

$$e = -\frac{1}{12}(0.25)^3 f''(\eta) = -\frac{1}{192} f''(\eta) \qquad 0<\eta<1$$

$$\Rightarrow |e| \leqslant \frac{1}{192} Max|f''(\eta)| = \frac{1}{192}\times 2 \Rightarrow |e| \leqslant \frac{1}{96}$$

ب) برای اینکه انتگرال را با دقت ۶ رقم اعشار محاسبه کنیم، به چند نقطه برای تقریب زدن نیاز داریم؟

فرض: N قسمت کنیم. پس $h=\frac{1}{N}$. خطا باید کمتر از $\frac{1}{2}\times 10^{-6}$ باشد.

رقم آخر عوض نشود

$$|e| = \frac{h^3}{12}|f''(\eta)| \leqslant \frac{1}{12N^3}\times 2 < \frac{1}{2}\times 10^{-6}$$

پس حدود N معلوم خواهد شد.

مروری بر گذشته: درونیابی مرکزی یا گوس:

تنها آرایش نقاط تغییر کرده است: $x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n$

$f_{-n}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_n$

نقاط را هم فاصله فرض می‌کنیم، پس:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h \qquad i = 0, \pm 1, \dots, \pm n$$

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})$$
$$+ a_4(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + a_{2n-1}(x-x_{-(n-1)})\cdots(x-x_{-1})$$
$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) + a_{2n}(x-x_{-(n-1)})\cdots(x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

$$q = \frac{x-x_0}{h}$$

$$p(x)= y_0 + q\,\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \frac{(q+1)(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}$$

$$+\cdots+ \frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
x_{-3}	y_{-3}		
		Δy_{-3}	
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$
		Δy_{-2}	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$
		Δy_{-1}	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$
		Δy_0	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$
		Δy_1	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$
		Δy_2	
x_3	y_3		

می توان میانگین هم گرفت.

توضیح بیشتر درباره خطای مشتق:

$$E'(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_{x_j}) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i)$$

مطابق رابطهٔ بالا برای E' ، کران بالا پیدا می کنیم

حل عددی معادلات دیفرانسیل:

می خواهیم یک مسئله مقدار اولیه ی $(*)\ y' = f(x,y)$ و $y(x_0) = y_0$ را بطور تقریبی حل کنیم. اولاً فرض می کنیم f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ روی یک ناحیه مستطیل

شکل، حول (x_0, y_0) روی صفحه پیوسته باشند. آنگاه بنابر قضیه وجود و یکتایی جواب، یک بازه‌ی I حول x_0 وجود دارد که یک تابع $y = \Phi(x)$ برای $x \in I$ در معادله * صدق کند.

در حل تحلیلی معادله دیفرانسیل *، Φ را پیدا می‌کنیم ولی در حل عددی این تابع را روی یک بازه‌ی $[x_0, x_0 + nh]$ در نقاط x_0، x_0+h، ....، x_0+nh تقریب می‌زنیم. برای این منظور جواب را $y(x)$ گرفته و بسط تیلور آن را در نظر می‌گیریم:

روش اویلر:

$$y(x+h) \sim y(x) + h\,y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \quad x < \xi < x+h$$

$$\rightarrow y(x+h) \sim y(x) + h\,y'(x) \quad : \quad y_1 \sim y_0 + h\,f(x_0, y_0)$$

$$y_2 \sim y_1 + h\,f(x_1, y_1)$$

$$\vdots$$

$$\rightarrow y_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i)$$

مثال. $y' = x + y^2$ ؛ $y(0) = 1$

$f(x,y) = x + y^2$

$0 \leqslant x \leqslant 1$; $h = 0.2$

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.2	1.2
2	0.4	1.4
3	0.6	1.7
4	0.8	2.1
5	1	2.7

$y_1 \sim y_0 + 0.2\,f(x_0, y_0)$

$y_0 = 1$, $x_0 = 0$

$\rightarrow y_1 = 1 + 0.2(0+1) = 1.2$

$y(0.1)$ را با استفاده از درونیابی می‌یابیم.

خطا از مرتبه‌ی $O(h^2)$ است.

نکته: در حل عددی معادلات دیفرانسیل ← روش اویلر و روش رنگ ـ کوتا با معادلات

دیفرانسیل مرتبه اول با شرط آغازین سروکار داریم. برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر، آنها را به دستگاه‌ای مرتبه‌ی اول تبدیل می‌کنیم و با تعمیم روش‌های ذکرشده، آنها را حل می‌کنیم.

مثلاً: $y'' = f(x, y, y') \qquad y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y'_0$

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases} \qquad y(x_0) = y_0 \ , \ z(x_0) = y'_0$$

در واقع دو معادله مرتبه‌ی اول داریم.

$$\begin{cases} Y' = F(X, Y) \\ Y = f(y, z) \end{cases} \qquad Y(x_0) = (y_0, y'_0) \qquad F = (z, f)$$

دو بعدی:

شایان ذکر است که اگر دستگاه خودگردان باشد، آن را بصورت $Y' = F(Y)$ می‌گیریم و با شرط آغازین $Y(x_0) = Y_0$ که Y یک بردار بصورت (y, z) است و F یک میدان برداری.

۸۷/۱۰/۱

توضیح بیشتر درباره‌ی خطای انتگرال عددی:

درمورد انتگرال ذوزنقه دیدیم که: $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$

برای بررسی خطا، مثلاً $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$ را در نظر می‌گیریم و نتیجه را تعمیم می‌دهیم:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx$$

در بررسی خطای $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

خطای درونیابی لاگرانژ: چون از درونیابی مثلاً لاگرانژ استفاده کردیم برای تقریب f روی $[x_0, x_1]$ و از آن انتگرال گرفتیم.

$$E(x) = \frac{s(s-1)}{2} h^2 f''(\xi_x)$$

$$e(x) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{s(s-1)}{2} h^2 f''(\xi_x)\, dx \qquad s = \frac{x - x_0}{h}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال فوق از قضیه مقدار میانگین در مورد انتگرال (به شکل تعمیم یافته) استفاده می‌کنیم.

یادآوری: اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و $m \leqslant f(x) \leqslant M$ بازای هر $x \in [a,b]$ آنگاه:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b-a)$$

اثبات: $m \leqslant f(x) \leqslant M \longrightarrow \int_a^b m\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b M\, dx$

قضیه: فرض کنید f و g روی $[a,b]$ پیوسته باشند ولذا روی $[a,b]$ کراندار نیز هستند. برای $x \in [a,b]$ ، $g(x) \geqslant 0$. آنگاه نقطه‌ای مثل $c \in [a,b]$ وجود دارد که:

$$\int_a^b f.g\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

اگر $m \leqslant f \leqslant M$ پس: $m \int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x) g(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx . M$

پس $c \in [a,b]$ وجود دارد که: $\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f.g}{\int_a^b g} \leqslant M \xrightarrow[\text{مقدار میانگین}]{\text{قضیه}} \frac{\int_a^b f.g}{\int_a^b g} = f(c) \; ; \; c \in [a,b]$$

$x_0 < x < x_1$: $e_1 = \frac{h^3}{2} f''(\eta_1) \int_0^1 s(s-1)\,ds = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_1)$

خطای کل : $E = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_1) - \frac{h^3}{12} f''(\eta_2) - \dots - \frac{h^3}{12} f''(\eta_n)$

$= -\frac{h^3}{12} \left(f''(\eta_1) + f''(\eta_2) + \dots + f''(\eta_n) \right)$

از طرف دیگر : مقدار میانگین : $\frac{1}{n} \left(f''(\eta_1) + \dots + f''(\eta_n) \right) = f''(\eta)$

(با فرض پیوستگی f'' بنا بر قضیه مقدار میانی)

$\rightarrow$ خطای کل : $E = -\frac{h^3}{12} \times n \times f''(\eta)$

$nh = x_n - x_0$: خطای کل : $E = -\frac{h^2}{12} (x_n - x_0) f''(\eta)$

تجدید مثال قبلی : $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

$f(x) = e^{-x^2}$, $h = 0.25$, $n = 4$

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
f_i	1	0.93	0.77	0.56	0.36

$I \sim \frac{0.25}{2} (1 + 2\times 0.93 + 2\times 0.77 + 2\times 0.56 + 0.36) = 0.74$

$E = -\frac{1}{12} (0.25)^2 (1-0) (f''(\eta)) = -\frac{1}{192} f''(\eta)$

$|E| \leq \frac{1}{192} \operatorname{Max} |f''(\eta)| = \frac{1}{192} \times 2 = \frac{1}{96}$; $0 < \eta < 1$

می خواهیم n را طوری پیدا کنیم تا انتگرال تا 6 رقم اعشار محاسبه شود.

تعداد نقاط : $h = \frac{1}{N}$ $\quad |E| = \frac{h^2}{12} |f''(\eta)|$

$$|E| \leqslant \frac{1}{12N^2} \times 2 < \frac{1}{2} \times 10^{-6} \longrightarrow N^2 > \frac{1}{3} \times 10^6$$

$$\rightarrow N > \frac{\sqrt{3}}{3} \times 10^3 \sim 577$$

خطای انتگرال عددی سیمپسون :

برای جمله اول مشابهاً داریم : $e = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_1) \quad : x_0 < x < x_1$

خطای کل $E = -\frac{h^4}{90}(x_n - x_0) f^{(4)}(\eta) \quad ; \quad x_0 < \eta < x_n$

تذکر: تقریب $n!$ (فرمول استرلینگ) :

$$S_n = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

S_n تقریبی برای $n!$ است : $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{S_n} = 1$

اثبات کلاسیک این مطلب به کمک جهت تقعر تابع ۳ صورت می گیرد : روش زیر هم وجود دارد :

$$\ln n! = \overset{0}{\cancel{\ln 1}} + \ln 2 + \dots + \ln n$$

$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad : \quad \ln n! = \int_1^2 \frac{1}{t} dt + \int_1^3 \frac{1}{t} dt + \dots + \int_1^n \frac{1}{t} dt$

هریک از انتگرال های سمت راست را با دستور انتگرال ذوزنقه اگر تقریب بزنیم خطای

برحسب رانیز در کلیه انتگرال‌ها در نظر بگیریم و جمع کنیم و از طرفین حد بگیریم، همان رابطه‌ی استرلینگ حاصل می‌گردد؛ یعنی S_n.

حل عددی معادلات دیفرانسیل عددی مرتبه اول:

معادله $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ و $x(t_0) = x_0$ معروض است. در حل عددی می‌خواهیم مقادیر تابع جواب را در نقاط t_0، t_0+h، …، t_0+nh تقریب بزنیم.

در روش اویلر در واقع به کمک انتگرال‌گیری داریم:

$$x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t,x)\,dt$$

در فاصله $[t_0,t_1]$، $f(t,x)$ را با $f(t_0,x_0)$ تقریب می‌زنیم:

$$x_1 = x(t_1) = x_0 + f(t_0,x_0)\int_{t_0}^{t_1} dt = x_0 + h\,f(t_0,x_0)$$

$$x_2 = x_1 + h\,f(t_1,x_1) \quad \dots \quad x_n = x_{n-1} + h\,f(t_{n-1},x_{n-1})$$

مثال. $x' = t^2 + 4t - \frac{x}{2}$ ، $x(0) = 4$ ؛ $h = 0.05$ بین 0 تا 0.25 تابع جواب را تقریب می‌زنیم.

$$f(t,x) = t^2 + 4t - \frac{x}{2}$$

t_n :	0	0.05	0.1	0.15	20	0.25
x_n :	4	3.91	3.82	3.76	3.7	3.65

$$x_1 = x_0 + h\,f(t_0,x_0) = 4 + 0.05\,f(0,4) = 3.91$$

تابع جواب را در این نقاط می‌توان در وینابی کرد.

روش رُنگ ـ کوتای مرتبه‌ی چهارم :

این روش خطای کمتری نسبت به اویلر دارد .

$x' = f(x,t)$

$x'(t_0) = x_0$

$t_0, t_0+h, \ldots, t_0+nh$

تابع جواب را تقریب می‌زنیم :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = h\,f(x_n, y_n) \qquad K_2 = h\,f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h\,f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) \qquad K_4 = h\,f(x_n + h, y_n + K_3)$$

مثال . $x' = -2t - x$ ؛ $x(0) = -1$ ، $h = 0.1$

$f(t,x) = -2t - x$

n	t_n	K_1	K_2	K_3	K_4	x_n
0	0	0.1	0.08	0.08	0.07	-1
1	0.1	...	...	...	...	-0.91
⋮						

به نام خدا

سری اول مسائل محاسبات عددی

مهلت تحویل: تا ۸۷/۸/۷

۱) فرض کنید $f(x) = \circ$ را به صورت $x = g(x)$ نوشته‌ایم و در یک همسایگی از α (ریشه معادله $f(x) = \circ$) داریم $\mid g'(x) \mid \leq L < ۱$.

فرض کنید $x_\circ$ نقطه‌ای از همسایگی بالا و $\{x_n\}$ از رابطه $x_{n+۱} = g(x_n)$ حساب شده باشد ثابت کنید:

الف) اگر در همسایگی مذکور $g'(x) < \circ$ آنگاه دنباله $\{x_n\}$ یکنواست و

$$\mid x_{n+۱} - \alpha \mid \leq \frac{L}{۱ - L} \mid x_{n+۱} - x_n \mid$$

ب) اگر در همسایگی مذکور $g'(x) > \circ$ آنگاه دنباله $\{x_n\}$ در دو طرف α قرار دارند و

$$\mid x_{n+۱} - \alpha \mid \leq \frac{L}{۱ + L} \mid x_{n+۱} - x_n \mid$$

۲) روش هالی (Halley's method): با استفاده از روش نیوتن رابطه زیر را برای به دست آوردن ریشه معادله $f(x) = \circ$ اثبات کنید.

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left(۱ - \frac{f(x_n) f''(x_n)}{۲(f'(x_n))^۲} \right)^{-۱}$$

۳) در تحلیل خطا برخی اوقات به جای $e_r = \frac{\mid x - \overline{x} \mid}{\mid x \mid}$ از $\overline{e}_r = \frac{\mid x - \overline{x} \mid}{\mid \overline{x} \mid}$ استفاده می‌شود، نامساوی زیر را اثبات کنید.

$$\frac{e_r}{۱ + e_r} \leq \overline{e}_r \leq \frac{e_r}{۱ - e_r}$$

۴) دنباله بازگشتی زیر را در نظر گیرید

$$x_{n+۱} = ۱۱۱ - (۱۱۳\circ - \frac{۳\circ\circ\circ}{x_{n-۱}}) x_n, \qquad x_\circ = \frac{۱۱}{۲}, x_۱ = \frac{٦۱}{۱۱}$$

با محاسبات دقیق نشان دهید، $\{x_n\}$ دنباله‌ای صعودی و همگرا به ٦ است. این تابع را پیاده سازی کنید و $x_{۳۴}$ را محاسبه کنید ومقدار آن را با مقدار واقعی یعنی ۵/۹۹۸ (تا چهار رقم معنادار) مقایسه کنید.نتیجه را توجیه کنید.

۵) تابع نمایی e^x را می‌توان به صورت‌های زیر تعریف کرد:

$$e^x := \sum_{j=۰}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

یا

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(۱ + \frac{x}{n} \right)^n$$

در محیط Freemat، e را با هر یک از دو روش بالا محاسبه کنید و برای مقادیر مختلف n با هم مقایسه کنید.

٦) یکی از ریشه‌های تابع $f(x) = \cos(x) - \frac{x}{۴}$ را در بازه $[۰.۵, ۲.۰]$ با از روش نصف کردن محاسبه کنید.(تا ۵ رقم اعشار)

۷) برنامه‌ای بنویسید که تابع $\sin(x)$ را با حاقل ۵ رقم اعشار دقت با استفاده از سری تیلور

$$\sin(x) = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots$$

محاسبه کند. از الگوریتم ضرب هورنر و کاهش دامنه سینوس به $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ استفاده کنید.

موفق باشید.

تمرین محاسبات عددی — ۸۴۱۰۴۳۲۸ - محمود سرکاری خرمی :

۱- الف) α : ریشه

$x_0 > \alpha$ همسایگی بالا : $g(\alpha) = \alpha$

$$\alpha < c < x_0 : \quad g'(c) = \frac{g(x_0) - g(\alpha)}{x_0 - \alpha} < 1 \xrightarrow{g(\alpha)=\alpha} g(x_0) < x_0 \quad ; \quad g(x_0) = x_1$$

$$\rightarrow x_0 > x_1 \quad ; \quad x_0 > \alpha \,,\ g'(x) > 0 \xrightarrow{\text{تابع صعودی}} g(x_0) > g(\alpha) \rightarrow x_1 > \alpha$$

$$\alpha < c < x_1 : \quad g'(c) = \frac{g(x_1) - g(\alpha)}{x_1 - \alpha} < 1 \rightarrow g(x_1) < x_1 \rightarrow x_2 < x_1$$

$$x_1 > \alpha \xrightarrow{g'(x)>0} g(x_1) > g(\alpha) \rightarrow x_2 > \alpha$$

و بهمین ترتیب ادامه دارد.

یکنوایی :

$$\rightarrow x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > \alpha$$

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| = f'(c)\,|x_n - \alpha| \leq L\,|x_n - \alpha|$$

$$|x_n - \alpha| = |x_{n+1} - \alpha + x_n - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - \alpha| + |x_n - x_{n+1}|$$

$$\rightarrow |x_{n+1} - \alpha| \leq L\,|x_{n+1} - \alpha| + L\,|x_n - x_{n+1}|$$

$$\rightarrow |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{L}{1-L}\,|x_n - x_{n+1}|$$

ب)

$$\alpha < c < x_0 : \quad g'(c) = \frac{g(x_0) - g(\alpha)}{x_0 - \alpha} < 1 \rightarrow x_0 > x_1$$

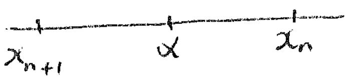
$$x_0 > \alpha \xrightarrow{g'(x)<0} g(x_0) < g(\alpha) \rightarrow x_1 < \alpha$$

x_1 : سمت چپ α

$$x_1 < \alpha \xrightarrow{g'(x)<0} g(x_1) > g(\alpha) \rightarrow x_2 > \alpha$$

x_2 : سمت راست α

بهمین ترتیب ، نقطه ها در دو طرف α هستند.



$$|x_{n+1} - \alpha| \leq L\,|x_n - \alpha|$$

$$|x_n - \alpha| \leq |x_{n+1} - x_n| - |x_{n+1} - \alpha|$$

$$\rightarrow |x_{n+1} - \alpha| \leq L\,|x_{n+1} - x_n| - L\,|x_{n+1} - \alpha| \rightarrow |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{L}{1+L}\,|x_{n+1} - x_n|$$

۸۴۱۰۴۳۲۸ - محمود سرکاری خرقی

۲)

بسط تیلور : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$$\begin{cases} x = x_{n+1} \\ x_0 = x_n \end{cases} \rightarrow f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1}-x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1}-x_n)^2$$

$x_{n+1} - x_n = h$ ، $n \rightarrow \infty$ چون به سمت ریشه همگراست برای $f(x_{n+1}) = 0$

$$\rightarrow f(x_n) + h\left(f'(x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}h\right) = 0$$

نیوتن : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow h = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$\rightarrow h = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{f''(x_n)f(x_n)}{2f'(x_n)}} \quad : \quad x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}}$$

$$\rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2}\right)^{-1}$$

---

3)

$$\bar{e}_r \geqslant \frac{e_r}{1+e_r}$$

$|\bar{x}| \leqslant |x| + |x-\bar{x}|$ (نامساوی مثلث) $\xrightarrow{\text{چون}}$ $|\bar{x}| = |\bar{x}+x-x| \leqslant |\bar{x}-x| + |x|$

$$\rightarrow \frac{|x-\bar{x}|}{|\bar{x}|} \geqslant \frac{|x-\bar{x}|}{|x|+|x-\bar{x}|} \rightarrow \frac{|x-\bar{x}|}{|\bar{x}|} \geqslant \frac{|x-\bar{x}|/|x|}{1+\frac{|x-\bar{x}|}{|x|}} = \frac{e_r}{1+e_r}$$

$$\bar{e}_r \leqslant \frac{e_r}{1-e_r}$$

$|x| = |x+\bar{x}-\bar{x}| \leqslant |x-\bar{x}| + |\bar{x}|$: نامساوی مثلث

$$\rightarrow |\bar{x}| + |x-\bar{x}| \geqslant |x| \rightarrow |\bar{x}| \geqslant |x| - |x-\bar{x}|$$

$$\rightarrow \frac{|x-\bar{x}|}{|\bar{x}|} \leqslant \frac{\frac{|x-\bar{x}|}{|x|}}{1-\frac{|x-\bar{x}|}{|x|}} = \frac{|x-\bar{x}|}{|x|-|x-\bar{x}|} = \frac{e_r}{1-e_r}$$

---

4) سؤال اشتباه است . با قرار دادن $x_{n+1} = x_n = x_{n-1} = L$ در رابطه ، $L \neq 6$ خواهد شد

یعنی به 6 همگرا نخواهد بود .

۸۴۱۰۴۳۲۸   محمود سرکاری حسینی -

سوال ۵-الف)

```
j=input('');
sum=0;
n=1;
a=1;
format   ;
while n<=(j+1)
    sum=sum+a;
    a=a/n;
    n=n+1;
end;
disp(sum);
```

$j=6 \rightarrow 2.71805$ $j=8 \rightarrow 2.71828$

$j=1000 \rightarrow e = 2.71828$

سوال ۵- ب)

```
function p=power(x,n);
p=1;
for i=1:n
    p=p*x;
end;
--------------------
n=input('        ');
x=1+1/n;
disp(power(x,n));
```

$n=8 \rightarrow e = 2.56578$

$n=1000 \rightarrow e = 2.71692$

سوال ۶)

```
function y=pos(x);
if x<0
    y=-x
else
    y=x;
end;
--------------------
function g=f(x);
g=cos(x)-x/4;
--------------------
c=1;
a=0.5;
b=2;
e=0.000001;
while pos(f(c))>=e
    if f(a)*f(b)<0
        c=(a+b)/2;
        if f(a)*f(c)<0
            b=c
        else
            a=c;
        end;
    end;
end;
disp(c);
```

$C = 1.25235$

سوال ۷)

```
y=input('[illegible]');
k=floor(y/(2*pi));
x=y-k*2*pi;
if x<(pi/2)
    y=x;
end;
if x>=(pi/2)
    if x<pi
        y=pi-x;
    end;
end;
if x<(3*pi/2)
    if x>pi
        y=x-pi;
    end;
end;
if x>3*pi/2
    y=2*pi-x;
end;
sin=y;
d=y;
k=1;
while d>=0.0000001
    d=d*y*y*(-1)/((2*k)*(2*k+1));
    sin=sin+d;
    k=k+1;
end;
if x>pi
    sin=-sin;
end;
disp(sin);
```

$y=70 \rightarrow \sin = 0.76945$

$y=3.5 \rightarrow \sin = -0.35073$

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

سری دوم مسائل محاسبات عددی   تاریخ تحویل: ۱۳۸۷/۹/۱۲

---

۱) نشان دهید

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}$$

که $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

۲) نشان دهید برای یک جند جمله‌ای با درجه کوچکتر از k، عبارت زیر برقرار است.

$$p[x_0, \cdots, x_k] = 0$$

۳) جدول تفاضلات تقسیم را برای $\log x$ در نقاط داده شده زیر تشکیل دهید و چندجمله‌ای درونیاب $\log x$ در این نقاط را محاسبه کنید.

x	$\log x$
1.0	0.0
1.5	0.17609
2.0	0.30103
3.0	0.47712
3.5	0.54407
4.0	0.60206

۴) اگر روش گاوسی با محورگزینی جزیی را برای حل دستگاه $Ax = b$ به کار بریم و $A^{(j)}$ ماتریس حاصل بعد از j مرحله در روش حذف گاوسی با محورگزینی جزیی باشد(محور گزینی جزیی: در مرحله jام بزرگترین درایه‌ی زیر قطر $A^{(j-1)}$، به عنوان محور انتخاب شود) فرض کنید $a = \max_{i,j} \mid a_{ij}^{(1)} \mid$، نشان دهید:

$$\mid a_{ij}^{(1)} \mid \leq 2^{k-1} a$$

سپس نشان دهید برای ماتریس زیر، تساوی اتفاق می‌افتد.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

۵) تعداد ضرب وتقسیم‌های لازم برای حل دستگاه $Ax = b$ به روش گاوسی با محورگزینی جزیی را محاسبه کنید.

۶) دستگاه زیر را در نظر گیرید:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الف) دستگاه بالا را محاسبات دقیق حل کنید.(با هر روشی)
ب) دستگاه بالا را به فرم ماتریسی بنویسید و درایه‌های ماتریس را تا دو رقم معنادار دقت بنویسید.
ج) دستگاه بدست آمده‌در (ب) را با روش گاوسی بدون محور گزینی جزیی حل کنید.
د) دستگاه بدست آمده‌در (ب) را با روش گاوسی با محور گزینی جزیی حل کنید.
ه) دستگاه بدست آمده‌در (ب) را بامحاسبات دقیق حل کنید.

۷) اگر $x = B^{-1}(2A + I)(C^{-1} + A)b$ و A, B, C ماتریس‌های $n \times n$ باشندبه طوریکه B, C وارونپذیرند و b یک بردار n تایی باشد، چگونه بدون محاسبه وارون ماتریس می‌توان x را محاسبه کرد؟

۸) روش حذف گاوسی با محور گزینی جزیی را در محیط FreeMAT پیاده سازی کنید وبرای یک ماتریس دلخواه تست کنید.

* * * * *فراموش نکنید روی برگه‌های پاسخنامه شماره گروه خود را یادداشت کنید.* * * * *

موفق باشید.