



کانال مهمات شریف

  @SHARIF_IE

@SHARIF_IE

تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

(سری پنجم)

۸ اردیبهشت ۱۳۹۸

تمرین ۱: حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(2n)^3} \right) \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) \quad (\text{ب})$$

تمرین ۲: فرض کنید f و g دو تابع پیوسته روی $[a, b]$ باشند که $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$. ثابت کنید $c \in [a, b]$ موجود است که $f(c) = g(c)$.

تمرین ۳: فرض کنید f و g بر $[a, b]$ پیوسته بوده و g بر این بازه تغییر علامت ندهد.

(الف) نشان دهید نقطه‌ای مانند $c \in [a, b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

(ب) مطلوب است تعیین نقطه c در فرمول فوق به نحوی که

$$a = 0, \quad b = \pi/2, \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x.$$

تمرین ۴:

(الف) فرض کنید $f(x) \geq 0$ یک تابع صعودی پیوسته روی $[1, \infty)$ است. نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=2}^n f(k)$$

(ب) اگر $f(x) = \ln x$ نامساوی زیر را نتیجه بگیرید:

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq (n+1)^{(n+1)} e^{-n}$$

تمرین ۵: فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. برای هر $x \in \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$g(x) = f(x) \int_0^x f(t)dt.$$

نشان دهید اگر g تابعی نزولی باشد، در این صورت f تابع صفر است.

تمرین ۶: تابع F روی اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است:

$$F(x) = \int_0^{2x-x^2} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt.$$

ماکزیمم و مینیمم F را تعیین کنید.

تمرین ۷: می‌دانیم تابع $f(x) = 1/x^2$ روی دامنه‌اش پیوسته و مثبت است. بنابراین انتگرال آن روی هر بازه دلخواه از دامنه، مقداری نامنفی خواهد بود. از طرفی، با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مشاهده می‌کنیم که

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left. \frac{-1}{x} \right|_{x=-1}^{x=1} = -2.$$

دلیل این تناقض را بیان کنید.



$$\rightarrow \frac{1}{n} \left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^r} + \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^r} + \dots + \frac{1}{(1+\frac{n}{n})^r} \right) \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^r}$$

$$\rightarrow = -\frac{1}{r} (1+x)^{-r} \Big|_0^1 = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{e^r} \right), \quad \frac{r}{n}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \rightarrow \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow l \\ f-g \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad , \quad fh \approx gh \quad , \quad fh = \frac{f}{g} hg = \underline{gh}$$

$$\sin x \sim x \rightarrow \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1, \quad \sin x - x \rightarrow 0$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{\cos x}{1 - \frac{x^2}{2}} \rightarrow 1, \quad \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \rightarrow 0$$

$$1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n} \rightarrow \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right)$$

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = \infty$$

$$\int_a^b f-g = 0 = (b-a)(f-g)_{\text{avg}} \rightarrow (f-g)_{\text{avg}} = 0$$

$$\rightarrow f(x), g(x)$$

$$\int_0^1 g(x) dx \rightarrow \text{approx} \left(\frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{6} p_2 + \frac{1}{3} p_3 \right)$$

$$\int g \neq 1 \rightarrow h(x) = \frac{g(x)}{\int g} \Rightarrow \int h = 1 \rightarrow \int f(x) h(x) dx = f(c)$$

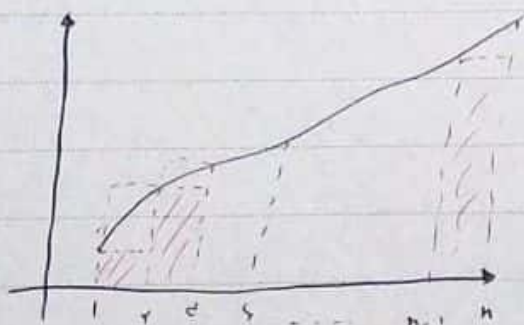
$$m \leq f \leq M \rightarrow m \leq \frac{\int f g}{\int g} \leq M \rightarrow m \leq f(c) \leq M \quad \text{Mid-Value}$$

$$m \leq f \leq M \rightarrow m' = \int_0^1 m' \leq \left(\int_0^1 f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 M' \leq M' \quad \text{Jensen's Inequality}$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^1 f^2 \right)^{\frac{1}{2}} = f(c)$$

$$m \leq f \leq M \rightarrow e^m \leq e^f \leq e^M \rightarrow m \leq \ln \int e^f \leq M$$

$$\Rightarrow \ln \int e^f = f(c)$$



(21) (5)

$$\rightarrow f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n) \approx \int_1^n f(x) dx \approx f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \approx \int_1^n f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} \approx \int_1^n \frac{dx}{x} \approx 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \rightarrow \frac{1}{n} + \ln n \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n + \frac{1}{n}$$

قصر

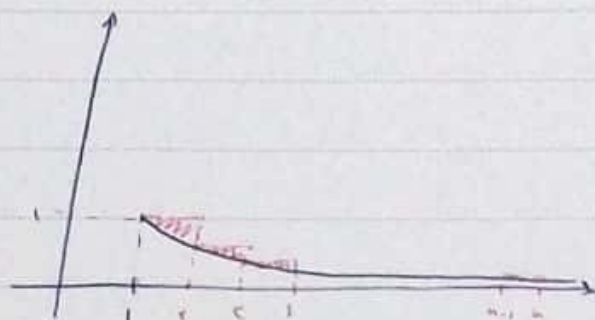
مراکز

مراکز

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n \quad \text{و} \quad \frac{1}{n} \approx 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \approx 1$$

مراکز

$$e_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \rightarrow ?$$



$$\rightarrow e_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

discrete $\Rightarrow$ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$

$$1 + \frac{1}{1^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$$

! G.F

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n \leq \int_1^n \ln x dx \leq \ln 2 + \dots + \ln n$$

(-)

$$\rightarrow \ln(n-1)! \leq n \ln n - n! \leq \ln n!$$

$$\rightarrow (n-1)! \leq n^n \cdot e^{-n} \leq n!$$

$$\rightarrow n^n e^{-n} \leq n! \leq n^n e^{-n}$$

تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

(سری ششم)

۱ اردیبهشت ۱۳۹۸

تمرین ۱: فرض کنید تابع f روی $[0, a]$ انتگرال‌پذیر است.

$$\text{الف) نشان دهید } \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx;$$

ب) با استفاده از قسمت قبل، مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

تمرین ۲: فرض کنید $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. مقدار انتگرال $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$ را به دست آورید.

تمرین ۳: حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید:

$$\text{خ) } \int_0^{3\pi/2} |\cos \theta| d\theta$$

$$\text{ث) } \int \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}} dx$$

$$\text{الف) } \int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$$

$$\text{د) } \int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\text{ج) } \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{ب) } \int \frac{dx}{(2x^2+1)(x^2-1)}$$

$$\text{ذ) } \int_0^1 x\sqrt{1-x^4} dx$$

$$\text{چ) } \int \frac{dx}{2^x+3}$$

$$\text{پ) } \int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx$$

$$\text{و) } \int_1^7 \sqrt{\frac{9-x}{1+x}} dx$$

$$\text{ح) } \int \frac{\sin(\ln x)}{x^2} dx$$

$$\text{ت) } \int x \sin^{-1} x dx$$

تمرین ۴: در همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های ناسره زیر بحث کنید:

$$\text{الف) } \int_0^\infty \frac{dx}{e^x - x}$$

$$\text{ب) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2+6x+\sin x}$$

$$\text{پ) } \int_0^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

تمرین ۵: نشان دهید تابع زیر برای $x > 0$ موجود و متناهی است:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

هم‌چنین، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.



Subject :

Year Month Date

مدرسی

(1)

(2)

(3)

$$* \int \sqrt{1-x^2} dx \xrightarrow{x = \sin \theta} \int \cos \theta d\theta \rightarrow \int \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) d\theta \quad \text{اند تریگونومیتر}$$

$$\rightarrow \left(\frac{e^{i\theta}}{2i} - \frac{1}{2i} e^{-i\theta} \right) \frac{1}{2} = \left(\sin \theta \cos \theta + \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{2}$$

$\cos \theta = \sqrt{1-x^2}$

$$* \int \sqrt{1-x^2} dx \xrightarrow{x = \sin \theta} \int \cos \theta d\theta \xrightarrow{x = \sin \theta} \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta \rightarrow \int \frac{d\theta}{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} e^{i\theta} = \int \frac{d\theta}{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} e^{i\theta}$$

PAPCO

@SHARIF_IE

$$e^{i\theta} = z \rightarrow \int \frac{dy}{y(y' + y^{-c} \cdot y' + y^{-c})} = -c' \int \frac{y' dy}{y^{c'+1} + y^{c'} + y^{c'}}$$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx \xrightarrow{x = \cosh t} \int \sinh^2 t dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \xrightarrow{x = \cos \theta} \int \frac{-\sin \theta d\theta}{\sin \theta} = -\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \xrightarrow{x = \sinh t} \int \frac{\cosh t}{\cosh t} dt = t$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \xrightarrow{x = \cosh t} \cosh t - \sinh t = 1$$

$$\int \frac{d\theta}{1 + \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{r} + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{r}} = \int \frac{r d\theta}{r + e^{i\theta} - e^{-i\theta} + e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \int \frac{r e^{i\theta} d\theta}{r e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$$

$$e^{i\theta} = y \rightarrow \int \frac{r dy}{r y + y^2 - 1 + y' + i} = \int \frac{r dy}{(1+i)y^2 + r y - 1+i} = \frac{r}{1+i} \int \frac{dy}{y^2 + \frac{r}{1+i} y - \frac{1}{1+i}}$$

$$\rightarrow \frac{r}{1+i} \int \frac{dy}{(y-z_1)(y-z_2)} = \frac{r}{1+i} \cdot \frac{1}{z_1-z_2} (\ln(y-z_1) - \ln(y-z_2))$$

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \rightarrow \int \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2} dx}{1 + \tan^2 \frac{x}{2} + \tan^2 \frac{x}{2} - 1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{r dy}{r y^2 + r y}$$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} dy = \ln y - \ln(y+1) = \ln \frac{y}{y+1}$$

Subject:

Year

Month

Date

$$\xrightarrow{x=y^2} \int \sqrt{\frac{1+y}{y^2}} y dy = \int \sqrt{1+y} dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} (1+y)^{3/2} \quad (✓)$$

$$\xrightarrow{\text{5}} \int \frac{A}{x^{n+1}} + \int \frac{B}{x^{n+1}} \xrightarrow{A = -\frac{1}{n}, B = \frac{1}{n}} \quad (✓)$$

$$\xrightarrow{\text{10}} \int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{1}{-y^2-1} = -i \int \frac{dy}{y^2+1} = -i \tan^{-1} y = -i \tan^{-1} ix$$

$$\xrightarrow{\text{10}} \theta = \tan^{-1} z \rightarrow \tan \theta = z \rightarrow \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = z$$

$$\xrightarrow{e = \frac{1}{t + \frac{1}{e}}, iz} \Rightarrow t = e^{i\theta}, \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}} \Rightarrow \theta = -i \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

$$\Rightarrow -i \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}} = \tan^{-1} z$$

$$\Rightarrow -i \tan^{-1} iz = -\ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{1}{i} \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$\xrightarrow{x=eu^2} \int \ln u du = \frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{2} u \quad (✓)$$

$$\xrightarrow{\int \frac{\ln u}{e^{2u}} du} \int \frac{\ln u}{e^{2u}} du = \int \frac{\ln u}{e^{2u}} du = -\ln u \quad (✓)$$

$$\xrightarrow{\ln u = \int \frac{1}{u} du} \int \frac{1}{u} e^{-u} du = \int e^{-u} \frac{1}{u} du = \int e^{-u} \frac{1}{u} du \quad (✓)$$

$$\int e^{-u} \left(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} \right) du = \int \frac{e^{(-1-i)u} - e^{(-1+i)u}}{2i} du$$

(ع) (د)

مسلم

(二)

(5)



2. 2. 2.

تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

(سری هفتم)

۱۴ اردیبهشت ۱۳۹۸

تمرین ۱: اگر $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دو بار مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b) = 0$ ، نشان دهید

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx = 2 \int_a^b f(x)dx$$

تمرین ۲: فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که $\int_0^1 f(x)dx = 1$. نشان دهید $c_1, c_2 \in [0, 1]$ وجود دارد به طوری که:

$$f(c_1) = 2c_1 \quad , \quad f(c_2) = 3c_2^2$$

تمرین ۳: فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $\int_0^1 f(xt)dt = 0$. ثابت کنید f تابع ثابت صفر است.

تمرین ۴: فرض کنید f و g دو تابع انتگرال پذیر در بازه $[a, b]$ باشند. نشان دهید

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{1/2}.$$

تمرین ۵: فرض کنید $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0.$$

تمرین ۶: درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (\text{پ}) \quad \int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + c \quad (\text{الف})$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \quad (\text{ت}) \quad \int \frac{x}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - a^2| + c \quad (\text{ب})$$

تمرین ۷: ثابت کنید تابع زیر خاصیت مقدار میانی را دارد ولی مشتق چیزی نیست.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ \alpha \neq 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$\rightarrow \int_a^b \underbrace{(x-a)(x-b)}_u \underbrace{f''(x)}_{dv} dx$$

(1)

$$\rightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

$$\Rightarrow (x-a)(x-b) f'(x) \Big|_a^b - \int_a^b (x-a-b) f''(x) dx$$

$$\rightarrow - [(x-b-a) f'(b) + (x-a-b) f'(a)] + 2 \int_a^b f''(x) dx = 2 \int_a^b f''(x) dx$$

10

$$\rightarrow h(x) \cdot f(x) - 2c_1 \Rightarrow \int_0^1 h(x) dx + \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 2x dx$$

(2)

$$\Rightarrow \int_0^1 h(x) dx + 1 - x^2 \Big|_0^1 = 0$$

* چون $h(x)$ تابعی پیوسته است پس با برقراری مقدار مناسب c_1 کنترل وجود دارد
 $c_1 \in [a, b]$

15

$$\int_0^1 h(x) + (1-x) \delta_{c_1}$$

تکلیف می

$$f(c_1) - 2c_1$$

از طرف $\int_0^1 h(x) + (1-x) \delta_{c_1}$ پس $h(c_1) = 0$ پس

1

20

ادامه

$$\rightarrow a \rightarrow \int_0^1 f(x,0) dx \rightarrow f(0) \int_0^1 (1-x) dx \rightarrow f(0) \cdot \frac{1}{2}$$

(3)

$$\Rightarrow \epsilon a = x, a dt = dx \rightarrow dt = \frac{dx}{a}$$

$$a \neq 0 \rightarrow 0 = \int_0^1 f(at) dt = \int_0^a f(x) \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^a f(x) dx = 0 \Rightarrow 0 = y(a) = \int_0^a f(x) dx \xrightarrow{\text{دو طرفه}} 0 = y'(a) = f(a)$$

✓ $f(x) = 0$ چون a ، x هر چه باشد برای x

$$\rightarrow h = \lambda |f| + |y|$$

(4)

$$\rightarrow h^2 = \lambda^2 f^2 + y^2 + 2\lambda |f| |y| \rightarrow \Delta \int_a^b h^2$$

از طرفی داریم :

$$\rightarrow \Delta \int_a^b h^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + \int_a^b y^2 + 2\lambda \int_a^b |f| |y|$$

15

$$\rightarrow \Delta \int_a^b h^2 = 0 \text{ برای هر } \lambda \text{ و } y \rightarrow \left(2 \int_a^b |f| |y| \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b y^2 \right) \checkmark$$

$$\rightarrow \int_a^b |h(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

هم چنین واضح است که

(5)

25

$$f = \frac{dx}{dt} \rightarrow f \cdot P$$

$$\int \frac{1}{r^2} dx = \frac{1}{r} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{r})^2} dx \xrightarrow{u = \frac{x}{r}} \frac{1}{r} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{r} \tan^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) + C$$

$$G(x) = f(x)$$

(نویس مخالف) نوی کتب تابع $G(x)$ و $f(x)$ در حد اول است

$$C + G(x) = \int f(x) dx + C$$

و این G یکتا است

$$(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

پس $F(x) - G(x)$ یک تابع ثابت است

$$0 = F(x) - G(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h f(x+t) dt}{h}$$

$$\rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h \sin\left(\frac{1}{n}\right) dt}{h} \xrightarrow{u = \frac{1}{n}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h \sin(u) du}{h(u^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h \sin(u) du}{h(u^2)}$$

$$\xrightarrow{\int \sin t dt = -\cos t} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[-\cos u \right]_0^h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[-\cos h + \cos 0 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - \cos h)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\cos u}{u^2} du \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{h} \left[-\frac{1}{u} \right]_0^h = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{0} \right)$$

= 0

تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

(سری هشتم)

۱۵ اردیبهشت ۱۳۹۸

تمرین ۱: مساحت واقع بین پیچ‌های اول و دوم پیچ ارشمیدس $r = a\theta$ که $a > 0$ را به دست آورید.

تمرین ۲: مطلوب است محاسبه طول منحنی‌های زیر:

الف) $f(x) = x^2$ از نقطه $(0, 0)$ تا نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

ب) $f(x) = e^x$ از نقطه $(\ln \sqrt{3}, \sqrt{3})$ تا نقطه $(\ln \sqrt{8}, \sqrt{8})$

پ) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + 5$ از $x = 1$ تا $x = 2$

تمرین ۳: مطلوب است محاسبه حجم‌های زیر:

الف) دوران ناحیه محدود به محور x و نمودار $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x}}$ روی بازه $[1, 2]$ ، حول محور x

ب) دوران ناحیه محدود به محور x و نمودار $f(x) = \sqrt{1 + e^{x^2}}$ و دو خط $x = \sqrt{\ln 3}$ و $x = \sqrt{\ln 8}$ ، حول محور y

پ) دوران ناحیه محدود به محور x و نمودار $f(x) = x^4 - 2ax^2$ ، حول محور y

ت) دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، حول محور x

تمرین ۴: مطلوب است محاسبه حجم‌های زیر:

الف) دوران سطح محصور به محور y ، منحنی $y = x^3$ و خط $y = 8$ ، حول $x = 2$

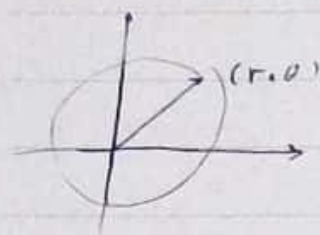
ب) دوران ناحیه محدود به نمودار معادلات $x = y^{1/2}$ و $x = \frac{1}{32}y^3$ ، حول خط $y = 4$

تمرین ۵: دایره‌ای به مرکز $(b, 0)$ و شعاع a (که $0 < a < b$) را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم جسم ایجاد شده را محاسبه کنید.

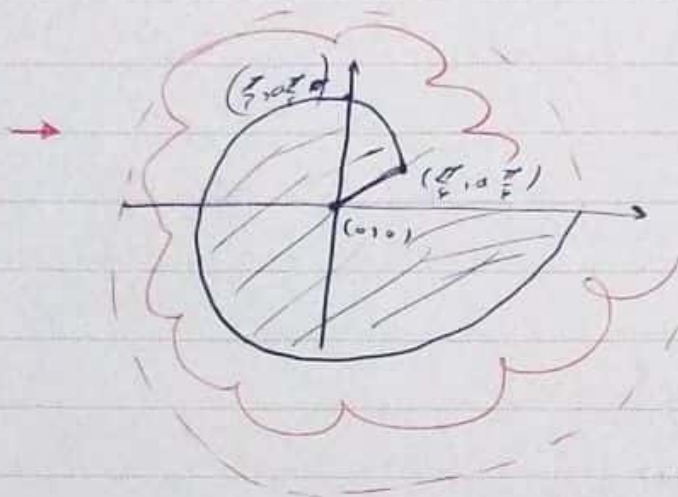


Area r, θ

(1)



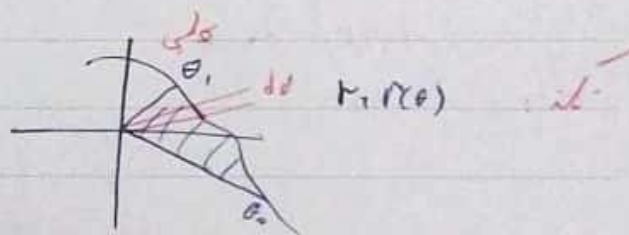
5



10

$\rightarrow S_1, S_2 - S_1$

15



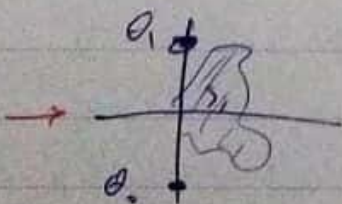
$\frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 d\theta$

20

$\Rightarrow S_1 = \int_0^{2\pi} (r(\theta))^2 d\theta$, $S_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r(\theta))^2 d\theta \Rightarrow S_2 - S_1$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $r_1 = r_2 = r$

25

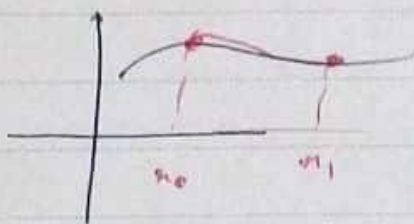


$S_1 = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r(\theta))^2 d\theta$, $S_2 = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{r} d\theta$

$\rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow S_1 = \pi$

(25) (10)



$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$\rightarrow f'(x_2) \cdot x_2$$

$$\rightarrow \int_0^{1/4} \sqrt{1 + f_n^2} dx \quad x = \frac{1}{4} \sin h(t), \quad e^t = \frac{1}{1 - 4x}, \quad e^{-t} = \frac{1}{1 + 4x}$$

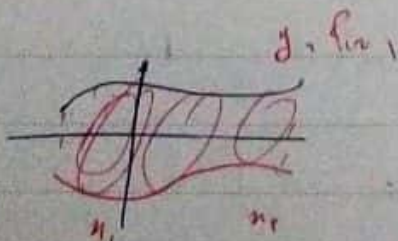
$$= \frac{1}{4} \int_0^{1/4} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{1} \right) dt = \frac{1}{4} \int_0^{1/4} \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} dt = \dots$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} \right) \Big|_0^{1/4} = \frac{1}{8} \left(\frac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{2} \right) = \frac{1}{16} (e^{1/2} - e^{-1/2})$$

$$= \int_{\ln 5}^{\ln 7} \sqrt{1 + (e^x)^2} dx = \int_{\ln 5}^{\ln 7} \sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

$$= \int_{\ln 5}^{\ln 7} \frac{u \times u}{u^2 - 1} du = \int_{\ln 5}^{\ln 7} \frac{u}{u^2 - 1} du = \int_{\ln 5}^{\ln 7} \frac{1}{(u-1)(u+1)} du$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) \Big|_{\ln 5}^{\ln 7}$$



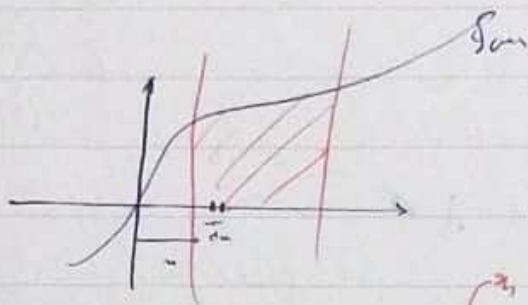
$$x_2 = \frac{1}{4} \sin h(t), \quad e^t = \frac{1}{1 - 4x}, \quad e^{-t} = \frac{1}{1 + 4x}$$

$$V_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$V, \int_1^r \left(\frac{1}{n \sqrt{1+n}} \right) dn \approx \int_1^r \frac{1}{n^2 (1+n)} dn \approx \int_1^r \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) dn$$

ادامہ لکھ

میں نے یہاں پر لکھا



یہ ہے، اس کے

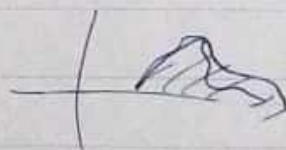
$$V, \int_{x_0}^{x_1} x f(x) dx$$

$$\rightarrow V, \int_{\sqrt{\ln e}}^{\sqrt{\ln A}} x f(x) \cdot \sqrt{1+e^{x^2}} dx \xrightarrow[\text{دوسرا پارتا}]{u=x^2} \int_{\ln e}^{\ln A} \sqrt{1+e^u} du$$

f(x)

→

$$\rightarrow V, x \int_{x_0}^x f(x) dx$$

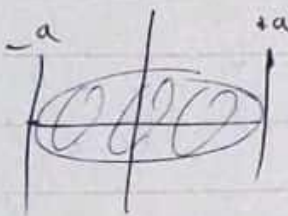


→

$$\rightarrow f(x) = 0 \rightarrow n^2 (n^2 - x_0^2) \rightarrow x_0^2$$

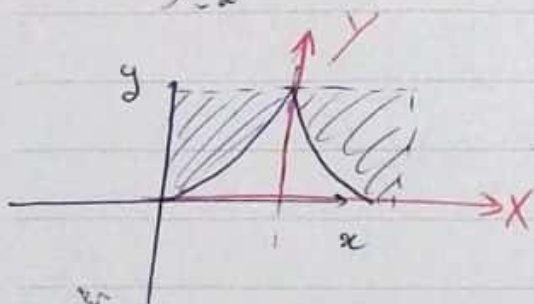
n = \sqrt{x_0}

$$\rightarrow V, x \int_0^{\sqrt{x_0}} x (n^2 - x_0 n^2) dx \rightarrow$$



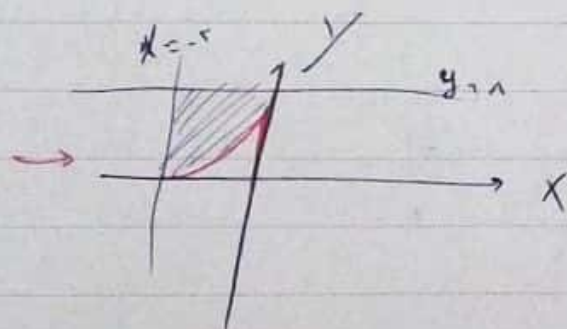
$$\frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = 1 \rightarrow y = +b \sqrt{1 - \frac{x^r}{a^r}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^r - x^r} \quad (-)$$

$$\rightarrow V = \pi \int_{-a}^{+a} \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^r - x^r} \right)^r dx = \pi \int_{-a}^{+a} \frac{b^r}{a^r} (a^r - x^r) dx$$

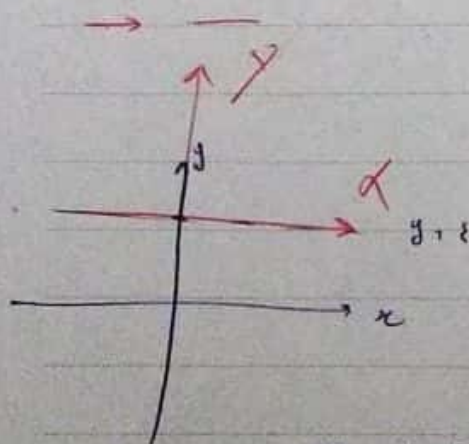


$$\begin{aligned} X &= x - r \\ Y &= y \end{aligned}$$

$$\rightarrow y = x^r \rightarrow Y = (X+r)^r$$

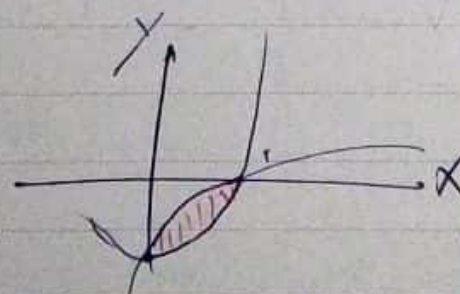


$$\rightarrow V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^r dx = \pi \int_{-r}^0 (x+r)^r dx \xrightarrow[\text{drop}]{u, v, t} = \pi \int_0^r t^r dt$$



$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y - r \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X = (Y+r)^{1/r} \\ X = \frac{1}{r} (Y+r)^r \end{cases}$$



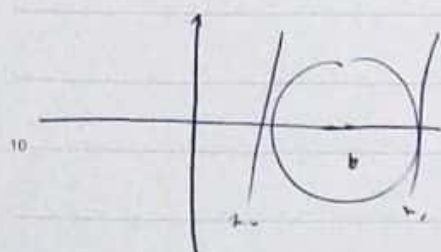
$$\rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rightarrow \vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \int_0^r (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} dr = \int_0^r (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dr$$

$$\rightarrow \vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$$\vec{r} = \int_{a_1}^{a_2} r \sin \theta dr d\theta$$

(d)

$$\rightarrow (x-b)^2 + y^2 = a^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{a^2 - (x-b)^2}$$

$$\rightarrow \vec{r} = \int_{b-a}^{b+a} \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (x-b)^2} dx d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{b-a}^{b+a} \sqrt{a^2 - (x-b)^2} dx d\theta$$

تمرین‌های ریاضی عمومی ۱ (سری نهم)

۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۸

تمرین ۱: دنباله $\{a_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_0 = 0, \quad a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a_{n-1}} + a_{n-1} \right) \quad (n \geq 1)$$

الف) جملات a_1, a_2, a_3 را در این دنباله محاسبه کنید؛

ب) نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ همگراست؛

پ) حد دنباله را در بی‌نهایت به دست آورید.

تمرین ۲: دنباله حقیقی $\{a_n\}$ در معادله $7a_{n+1} = a_n^2 + 6$ صدق می‌کند. اگر $a_1 = 1/2$ ثابت کنید این دنباله صعودی است و حد آن را در صورت وجود بیابید.

تمرین ۳: در همگرایی دنباله زیر بحث کنید:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

(راهنمایی: می‌توانید از نامساوی $\ln(1+x) < x$ برای $x > 0$ استفاده کنید.)

تمرین ۴: نشان دهید حد زیر وجود دارد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

تمرین ۵: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به طوری که برای هر m و n ، $a_{m+n} \leq a_m + a_n$. ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n$ وجود دارد.

تمرین ۶: برای هر عدد طبیعی n تعریف می‌کنیم:

$$a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

الف) نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ؛

ب) نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a_n}{1/n} = \ln 2$.



Subject

Year

Month

Date

()

تقریبی

① اند

فرض $f(x) = \frac{1}{x} (\frac{1}{x} + x) - x$ در $x = a_{n-1}$ مقدار

$$h(x) = f(x) - x \rightarrow h'(x) = \left(\frac{1}{x} (\frac{1}{x} + x) - x \right)'$$

$$= \frac{-\frac{1}{x^2} - 1}{x^2} < 0$$

در $x = a_{n-1}$

$$h(x) < h(a_{n-1}) = 0 \rightarrow x < a_{n-1}$$

10

$$\rightarrow f(x) < x \rightarrow f(a_{n-1}) < a_{n-1}$$

$$a_n < a_{n-1}$$

تقریبی

$$15 \rightarrow A + B \geq 2\sqrt{AB}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + a_{n-1} \right) \geq \sqrt{\frac{1}{a_{n-1}} \cdot a_{n-1}} = 1$$

$$a_n \rightarrow L$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} + L \right)$$

$$a_{n-1} \rightarrow L$$

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} + L \right)$$

✓

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n^2 + 2) \xrightarrow{G} \leq \frac{1}{2} (1^2 + 2) = 1$$

②

25

$$* \leq a_n \leq 1$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} (a_n^2 + 2) - a_n = \frac{1}{2} (a_n^2 - 2a_n + 2) = \frac{1}{2} (a_n - 1)^2 \geq 0$$

$$0 \geq a_n - 1 \rightarrow a_n \leq 1$$

PAPCO

@SHARIF_IE

Scanned by CamScanner

Subject:

Year:

Month:

Date:

Page:

$$\rightarrow a_n \rightarrow L \Rightarrow L = \frac{1}{r} (L^r + 1) \rightarrow \underline{L = 1} \quad \underline{L = 1}$$

$$a_{n+1} \rightarrow L$$

$$* x_{n+1} = x_n \left(\underbrace{\quad}_{\geq 1} \right)$$

$$\rightarrow x_n$$

(10)

$$\rightarrow \ln x_{n+1} = \ln x_n + \ln \left(1 + \frac{1}{r^{n+1}} \right) < \ln x_n + \frac{1}{r^{n+1}} < \ln x_n + \frac{1}{r^{n+1}}$$

$$< \dots < \ln x_0$$

10

$$+ \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n+1}} < 1$$

* برای اینکه بتوان از جمع حدس بزنیم

15

$$\rightarrow \frac{1}{r} < \frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{r}} < 1$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^n} = \ln n$$

(11)

$$\rightarrow \geq \int_1^r \frac{1}{x} + \int_r^{n+1} \frac{1}{x} + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x} = \ln n$$

20

$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x = \ln(n+1) - \ln 1 \geq 0$$

بسیار

$$\rightarrow a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{r^n} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{r^n} - \ln(n+1)$$

25

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) + \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 = 0$$

درست

$$\ln(n+1) < 1$$

PAPCO

@SHARIF_ID (u) < u-1

④ فرض کیے کہ $a_1, a_2, a_3, \dots$ ایک متناہی سلسلہ ہے جس کا حد L ہے۔

ہو تو کیا $\frac{a_n}{n}$ کا حد L ہے؟

ہاں تو ہو گا۔ $n \geq m$ لے کر

$$n = mf + r \quad 0 \leq r < f$$

$$\rightarrow a_n = a_{mf+r} = a_{(m_1 + m_2) + r} \leq \underbrace{a_{m_1} + \dots + a_{m_2}}_{\leq f} + a_r = f a_m + a_r$$

$$\rightarrow \frac{a_n}{n} \leq \frac{f a_m + a_r}{n} = \underbrace{\frac{mf}{mf+r}}_1 \cdot \underbrace{\frac{a_m}{m}}_{\leq L+\varepsilon} + \frac{a_r}{n} \leq 1 \cdot (L+\varepsilon) + \frac{\max(a_1, \dots, a_m)}{n}$$

$$\rightarrow \frac{1}{n} > \max \left\{ m, \frac{A}{\varepsilon} \right\}$$

$$L \leq \frac{a_n}{n} \leq L + \varepsilon \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = L$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \int_0^1 1 dx$$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \neq 1 \\ 1/2 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a_n}{1/n} = n(1 - a_n) = n \left(1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \right)$$

$$= n \left(\int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \right) = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln(1+x^n) \right]_0^1 = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} dx = \ln 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \ln 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 0 dx = 0$$

$$\ln(1+x^n) \rightarrow y$$

$$y = \int_0^1 0 dx = 0$$

تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

(سری دهم)

۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۸

تمرین ۱: سری‌های همگرایی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ مثال بزنید که $\sum a_n b_n$ همگرایی مطلق نباشد.

تمرین ۲: فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ مثبت و سری $\sum a_n$ واگرا باشد. ثابت کنید سری $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ واگراست.

تمرین ۳:

الف) ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x داریم $e^x > 1 + x$.

ب) نشان دهید سری زیر همگراست:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

تمرین ۴: همگرایی یا واگرایی‌های سری‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$	ث) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$	خ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$
ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! 0}{10^n}$	ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{(-2)^n}$	د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}$
پ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{1+n+n^2+n^3}$	چ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{n^2+1}$	ذ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1} \right)^n$
ت) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$	ح) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+\frac{1}{n}}}$	و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

تمرین ۵: برای هر عدد طبیعی n تعریف کنید:

$$a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ بحث کنید.



Subject :

Year :

Month :

Date :

100

①

$$\rightarrow a_n, b_n, \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{dr} 0$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{n}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{dr} 0$$

$$\rightarrow a_n, b_n, \sum \frac{1}{n} \quad \text{div}$$

10

$$\rightarrow b_n \sum \frac{a_n}{1+a_n}$$

$$+ a_n \rightarrow 0$$

②

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a_{n+1}}{1+a_{n+1}}}{\frac{a_n}{1+a_n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1+a_n}{1+a_{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

15

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{a_n} \right|, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{1+a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1+a_n} \right| = 1 \rightarrow \sum b_n \text{ diverges}$$

$$\rightarrow b_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right|, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1+a_n} \right|$$

$$+ b_n \rightarrow 0 \rightarrow \frac{a_n}{1+a_n} \rightarrow 0 \rightarrow a_n \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \sum a_n = \sqrt[n]{n}$$

25

(10) (11)

$$\ln(1+n) \approx n$$

(12)

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$$

مقدار مقدار

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n = \ln \rho$$

(13) (14)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \rightarrow \{1, 1\}$$

المقدار

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{1/2}}{1.991}}{\frac{n^{1/2}}{1.991}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^{1/2}}{n^{1/2}} \right| = \frac{1}{1.991} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{1/2}$$

= $\frac{1}{1.991}$ مقدار

$$\times \frac{1}{1.991}$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{1+n+n^2+n^3}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}} = 1 \quad \text{عند} \quad \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{1+n+n^2+n^3}$$

مقدار مقدار

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \quad \text{عند} \quad \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}}$$

مقدار مقدار

→ $\ln(\ln x) \Big|_{10}^{\infty} : \ln(\ln \infty) = \ln \infty = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x} dx$ (2)

(2)

$\sum a_n \xrightarrow{\text{مقدار}} \sum |a_n|$ (2)

→ $\sum \frac{1}{n^2} : \sum \frac{1}{n^{2-1}} \rightarrow \sum \frac{1}{n} \rightarrow \sum \frac{1}{n^{1-1}} \rightarrow \sum \frac{1}{n^0} \rightarrow \sum 1$ (2)

لکه مقدار بی‌نهایت

→ $\sum \frac{n(-1)^n}{1+n^2} \rightarrow \frac{n}{1+n^2} \rightarrow 0$ (2)

→ $\sum \frac{1}{n^2}$

→ $\sum \frac{1}{n^2} : \sum \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ (2)

→ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = A$ (2)

→ $\ln \theta : n \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \rightarrow \theta : e^{-1} < 1$ (2)

→ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \times 1 \times 2 \times \dots \times (n-1)}{n! \times 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+1} = 1$ (2)

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^n - 1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n - 1} = 1 \quad \text{Pro (5)}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{Pro}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\ 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 \end{array} \right. \quad \text{Pro (2)}$$

تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

(سری یازدهم)

۷ خرداد ۱۳۹۸

تمرین ۱: سری تیلور e^{x^2-1} را حول نقطه $x = 0$ بیابید.

تمرین ۲: الف) سری تیلور تابع $\ln(1+x)$ را حول $x = 0$ به دست آورید.

ب) به کمک قسمت الف) مقدار $\ln(0.9)$ را با خطای کم‌تر از 5×10^{-4} پیدا کنید.

تمرین ۳: الف) سری تیلور تابع $\sin x$ را حول $\frac{\pi}{4}$ حساب کنید.

ب) با استفاده از قضیه تقریب خطای تیلور نشان دهید که این سری به تابع $\sin x$ همگراست.

تمرین ۴: شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری‌های توانی زیر را محاسبه کنید:

الف) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-1)^n$

پ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n(n+1)} (x-1)^n$

تمرین ۵: مجموع سری‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$

تمرین ۶: الف) برای $|x| < 1$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ با چه تابعی برابر است؟

ب) بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{\pi(2n+3)}$ را به دست آورید.

پ) تعیین کنید که در داخل فاصله همگرایی، سری فوق با چه تابعی برابر است؟



$$\rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \rightarrow e^{n!} = 1 + n! + \frac{(n!)^2}{2!} + \frac{(n!)^3}{3!} + \dots$$

(1)

$$\rightarrow e^{n!-1} = \frac{1}{e} + \frac{n!}{e^2} + \frac{(n!)^2}{e^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^{n+1}} \quad \checkmark \text{ی بلور}$$

fixing function

(2)

$$\rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+x)^n}$$

(3)

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{1} \cdot \frac{(x-0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad \checkmark \text{ی بلور}$$

10

$$x = -0.1 \rightarrow f(-0.1) = \ln(0.9)$$

(4)

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = f(x) \rightarrow |f(-0.1) - P_n(-0.1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(-0.1) (-0.1)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

جواب c و x و a و b

15

$$\text{دلیل: } \left| \frac{n!}{(1+c)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1^{n+1}} \right| = \left| \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \right| \times \left| \frac{1}{1^{n+1}} \right|$$

$$\left| \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{(1+c)^{n+1}}$$

20

$$\rightarrow \left| \frac{1}{1^{n+1}} \right| = \left| \frac{1}{1^{n+1}} \right| \cdot \frac{1}{1^{n+1}} = \frac{1}{1^{n+1}}$$

ارتقاء کافی که n را آن قدر بزرگ انتخاب کنیم که

$$\frac{1}{1^{n+1}} < 0.1 \cdot 10^{-8} \rightarrow 1^{n+1} > 10^8$$

25

$$\Rightarrow n \geq 8$$

$$f'(c) = f'(\xi) = \frac{f_1 - f_0}{\xi}$$

$$f''(c) = f''(\xi) = \frac{f_2 - f_1}{\xi^2}$$

$$f'''(c) = f'''(\xi) = \frac{f_3 - f_2}{\xi^3}$$

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{f_n - f_{n-1}}{\xi^n} \cdot (-1)^{[n/2]}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{(f_n - f_{n-1}) \cdot (-1)^{[n/2]}}{n!} (x - \xi)^{n-k}$$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(f_n - f_{n-1}) \cdot (-1)^{[n/2]}}{k!} (x - \xi)^{n-k}$$

با توجه به اینکه ξ و c در یک بازه هستند، پس داریم:

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - \xi)^{n+1} \right|$$

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$$

که می دانیم

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \left| \frac{M (x - \xi)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)| = 0$$

نتیجه می گیریم که $f_n(x)$ به $f(x)$ همگرا می شود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n^{n+1}}{(n+1)!} \cdot (n+1)}{\frac{n^n}{n!}} \right| = |n| < 1 \quad (*) \text{ اند }$$

لذا $|n| < 1$ سلسله متقارب است

$$\text{انتقال دالبر} \quad \textcircled{1} \quad \sum \frac{1}{n!} \quad \rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.5x < 1$$

$$\text{مجموع متقارب} \quad \textcircled{-1} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}}{\frac{n^n}{e^n}} = \left| \frac{n+1}{e} \right| < 1 \quad (*)$$

سلسله متقارب است e هم هست

$$\text{انتقال دالبر} \quad \sum \ln(n) \quad \rightarrow \quad \sum \ln(n) \cdot (-1)^n$$

$$\ln(n) \neq 0$$

$$(-1)^n \ln(n) \neq 0$$

سلسله متقارب است

$$\rightarrow x \in (-e+1, e+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\sqrt{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}}{r^{n+1} \cdot (n+1)!}}{\frac{\sqrt{n} \cdot n^n}{r^n \cdot n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right|$$

$$= \left| \frac{n+1}{n} \right| < 1$$

PAPCO

PAPCO

$$\left| \frac{n-1}{2} \right| < 1 \rightarrow -2 < n-1 < 2$$

تکانه شکرایی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \quad \text{مقایسه سری دالمر}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n} \quad \text{آزمون شکرایی}$$

چون متناهی آن برای هر x شرط شکرایی را ادا کرد.

$$-2 < n-1 < 2 \quad (n=1, 2, 3)$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به روش $\frac{1}{n}$ که حل می شود، شکرایی $\frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad \frac{1}{1-x} \quad \text{در این صورت}$$

در این شکل مجموع به مجموع شکل می شود.

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \right\} \quad (5)$$

در این صورت سری دالمر را

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{r} \right)^n = -\ln(r)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \text{نمودار سری دالمر}$$

$$\sum \frac{1}{n! (n+r)!} = \sum \frac{n+1}{(n+r)!} = \sum \frac{(n+r)-1}{(n+r)!} = \sum \frac{n+r}{(n+r)!} - \frac{1}{(n+r)!} \quad (1)$$

$$= \sum \frac{1}{(n+r)!} - \frac{1}{(n+r)!} = \frac{1}{(0+r)!} = 1$$

تطبیق

5

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

(4)

10

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+r!}$$

$$\sum \frac{1}{n+r!} \quad R_n = \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \checkmark$$

$$\frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^9}{9} + \dots = 0$$

(1)

15

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \ln \frac{1}{1-x} \Rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

20

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) - \frac{1}{x}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) - \left[\frac{1}{x} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) - \frac{1}{x} \right] = x - \frac{x^2}{2} - 1$$

25



کانال مهمات شریف

  @SHARIF_IE

@SHARIF_IE