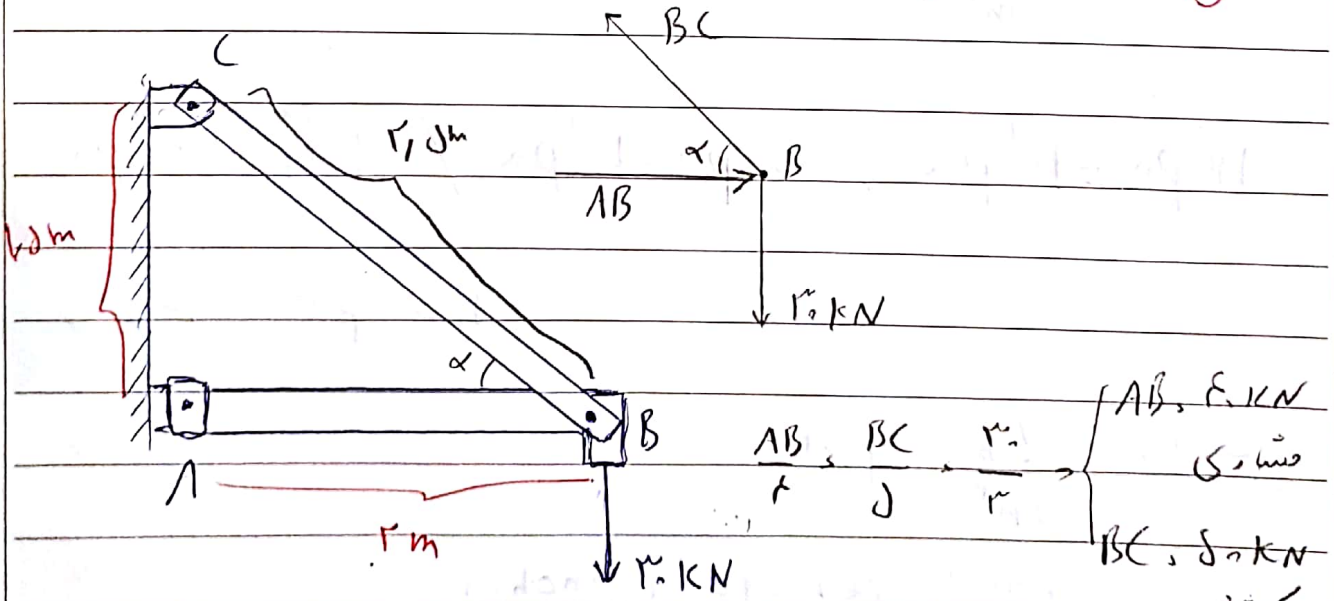
۱۳۹۶/۰۷/۰۳ «بسم الله الرحمن الرحیم»

بررسی حرکت motion
- سینماتیک Kinematics علمی است که به بررسی حرکت می پردازد بدون توجه به عوامل به وجود آورنده‌ی آن و از روی هندسه‌ی حرکت انجام می‌شود
- سینتیک Kinetics علمی است که به بررسی حرکت می پردازد با توجه به عوامل به وجود آورنده‌ی آن یعنی نیرو و گشتاور

حرکت
- حرکت صلب جسم
  - انتقال صلب
  - دوران صلب
  - انتقال + دوران صلب
- تغییر شکل (Deformation)

فصل اول: مفهوم تنش Consept of stress



Scanned by CamScanner

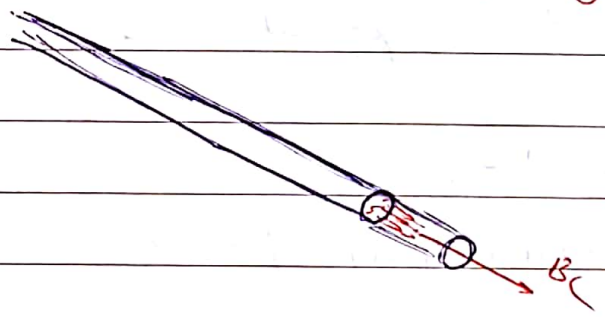
۱۳۹۶/۰۷/۰۵

ابتدا آیا یک عضو مکانیکی می‌تواند نیروی اعمالی بر خود را تحمل کند یا نه به ۳ عامل بستگی دارد:

۱- نیروی اعمالی به عضو

۲- جنس

۳- سطح مقطع یا مساحت سطح عرضی عضو



$$\text{Stress تنش} \quad \sigma = \frac{F}{A}$$

واحد تنش در سیستم SI

$$\text{واحد تنش} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

$$1Kpa = 10^3 Pa \;/\; 1Mpa = 10^6 Pa \;/\; 1GPa = 10^9 Pa$$

واحد تنش در سیستم BS

$$\text{واحد تنش} = \frac{lb}{In^2} = psi$$

pounds per square inches

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۰۵

$1\,KSi = 10^3\,psi$

psi

حرف p نوشته نمی‌شود

تنش کششی و سیدی کششی را با علامت + و تنش فشاری و سیدی فشاری را با علامت - نمایش می‌دهیم

$d = 20\,mm$

عضو BC

$$\sigma = \frac{F_{BC}}{A} \rightarrow \frac{5 \times 10^3\,N}{\frac{\pi}{4}(20)^2\,mm^2} = +15.9\,MPa$$

تنش کششی

$$1\,\frac{N}{mm^2} = 1\,MPa$$

S_{ut} ultimate strength in tension

کشش

S_{uc}

ultimate strength in compression

فشار

$S_{ut}, \frac{F_{ut}}{A}$



σ (<) S_{ut}

=

>

$\sigma_{allowable} = \frac{S_{ut}}{n}$ → factor of safety ضریب اطمینان

allowable stress

تنش مجاز

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۱۰

حاشیه امنیتی :: σ_{all} در تنش‌های کششی

$\sigma < \sigma_{all}$

طراحی Design

تحلیل Analysis

$\sigma > \sigma_{all}$ — Failure

واماندگی

a) $\sigma_{all} = 170\ MPa$ — Steel — $\sigma > \sigma_{all}$

b) $\sigma_{all} = 100\ MPa$ — Al — $\sigma < \sigma_{all}$

$$\sigma_{all} = \frac{F_{BC}}{A} \Rightarrow A = \frac{F_{BC}}{\sigma_{all}} = \frac{50 \times 10^3\ N}{100\ \frac{N}{mm^2}} = 500\ mm^2$$

میله گرد $\Rightarrow \frac{\pi d^2}{4} = 500 \Rightarrow d = 25.22\ mm \rightarrow d = 25\ mm$

همواره دقتی مقداری برای قطر بدست می‌آوریم باید به مقدار بالاتر گرد کنیم نه پایین‌تر

چون اگر پایین‌تر در تنش کششی واماندگی می‌شود

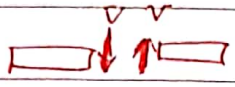
به انتخاب جنس و تعیین سطح مقطع طراحی می‌گویند

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۱۰

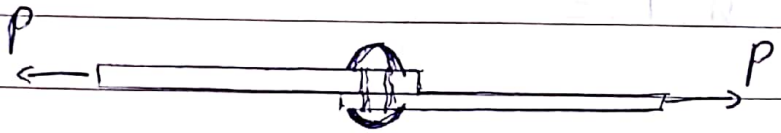
σ Normal Stress تنش عمودی

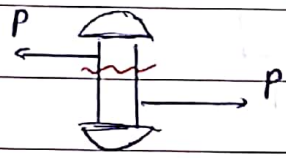


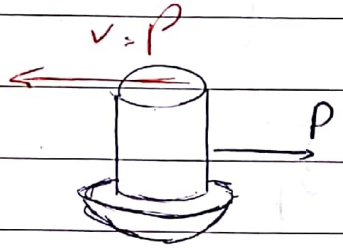


Shearing stress تنش برشی

Lap Joints اتصالات لبه ای Rivet پرچ





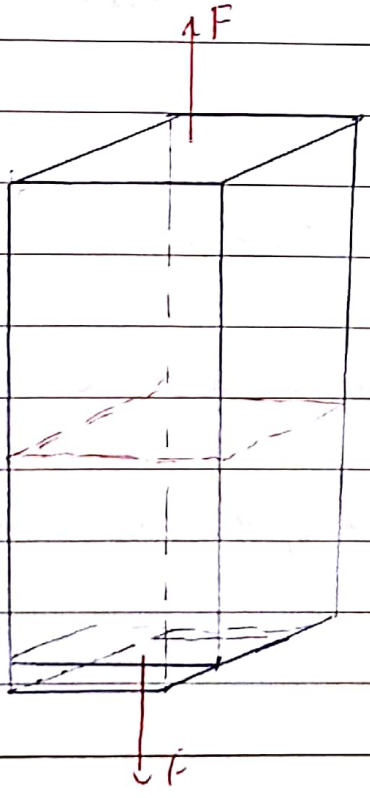


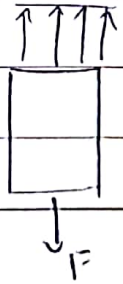
Tau

$$\tau = \frac{V}{A}$$

تنش برشی Nominal Stress

تنش اسمی





Centic load

بار مرکزی

دگر به اندازه ی کافی از محل ها اعمال نیرو داشته باشیم

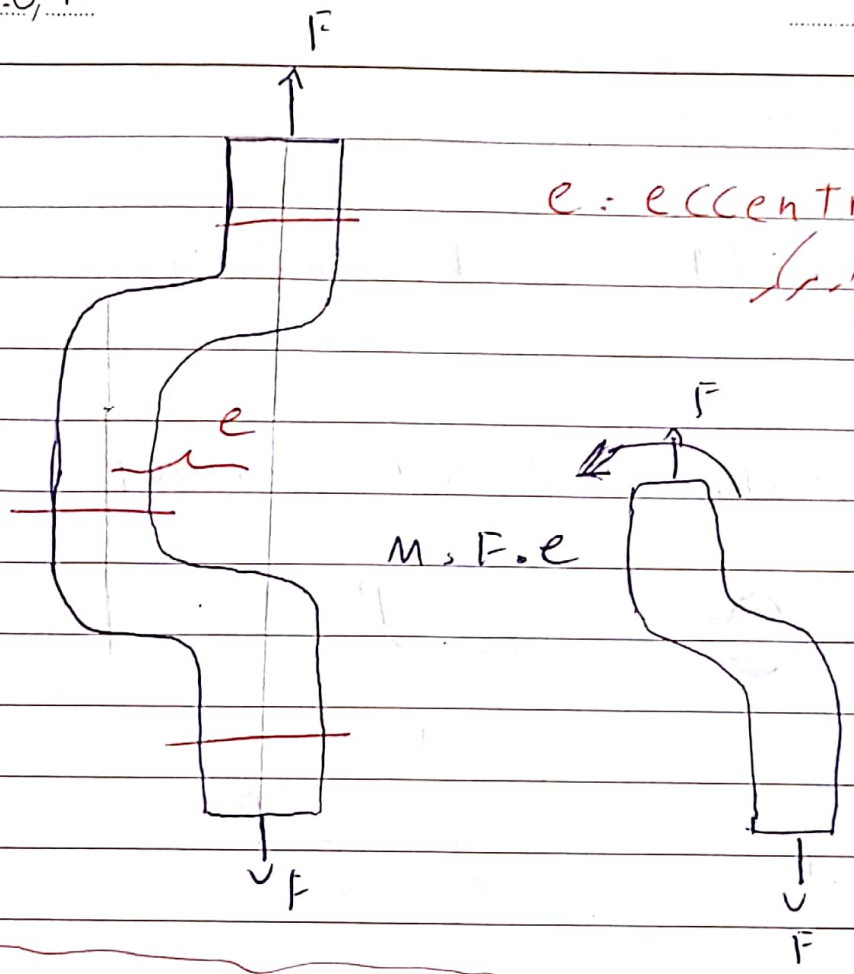
نیرو ها به طور یکنواخت توزیع می شوند

در سطحی که برشی دیم $\sigma = \frac{F}{A}$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

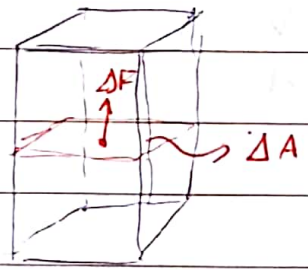
۱۳۹۶/۰۷/۱۰



e: eccentricity
خروج از مرکز

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

تنش در نقطه



$$\int dF = \int_A \sigma \, dA \Rightarrow F = \int_A \sigma \, dA$$

حجم زیر رویه ی تنش

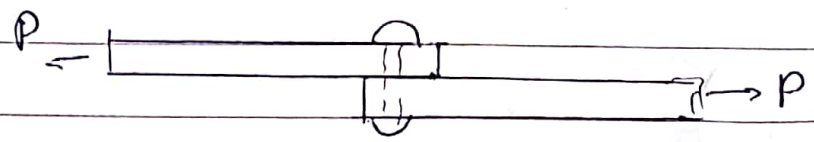
اگر با centeric باشد و به ما نیرو کافی از کل اعمال نیرو خواهد گسیریم

سر به صورت یکنواخت تقسیم می شود

Scanned by CamScanner

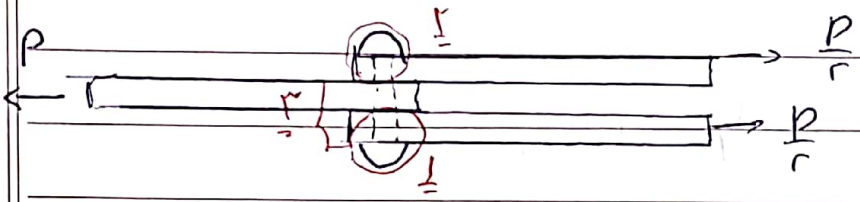
۱۳۹۶/۰۷/۱۲

تنش برشی

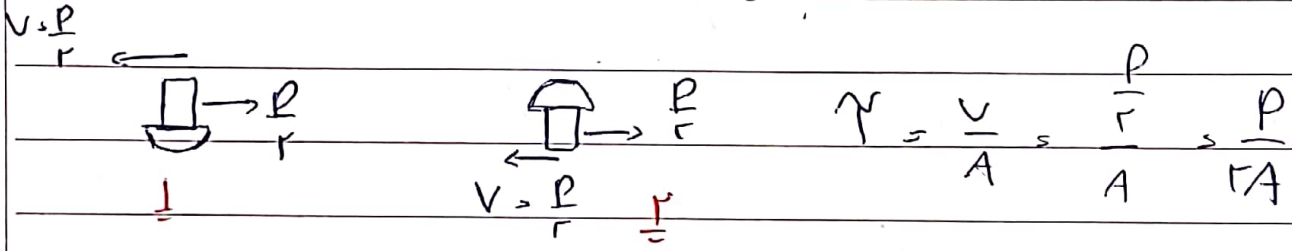


Single shear برش یکنا

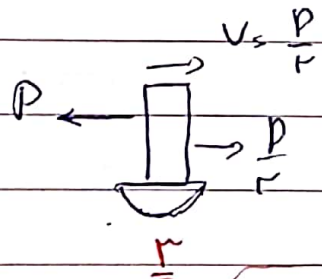
$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{P}{A}$$



Double shear برش دوگانه



$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{P/۲}{A} = \frac{P}{۲A}$$

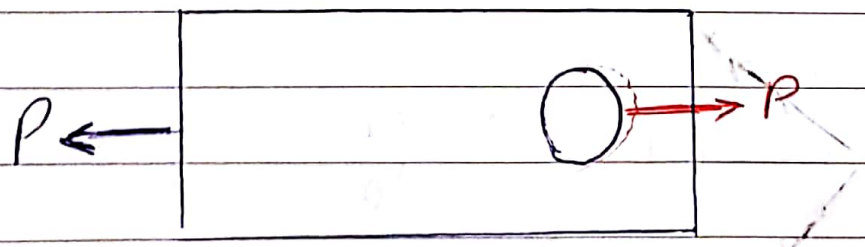


$$V_۲ \frac{P}{۲} - P = ۰ \rightarrow V = \frac{P}{۲}$$

تنش لهیدگی

bearing Stress

bear لهیدگی



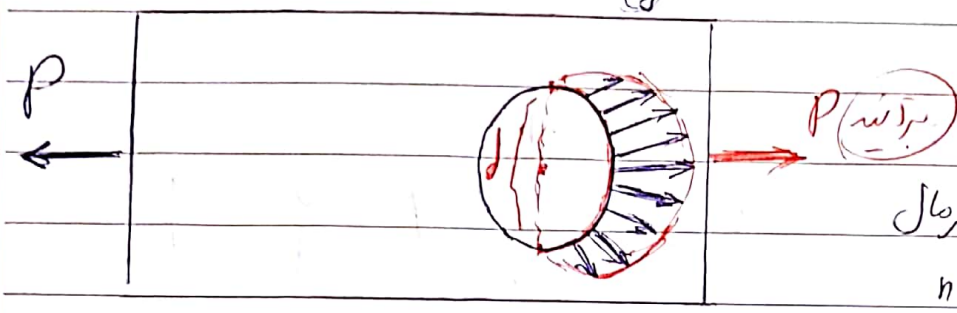
NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۰۷/۱۲

ضخامت (t)

قطر (d)



تنش نرمال

normal stress

تنش تماسی

Contact Stress

$$\sigma_b = \frac{P}{A_p}$$

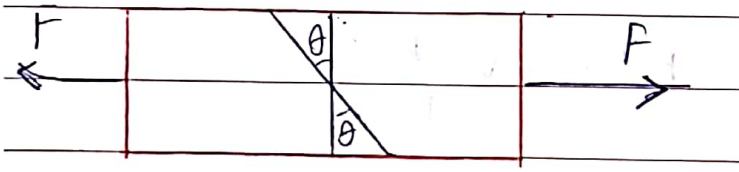
σ_b = bearing

A_p: projected area

$A_p > td$

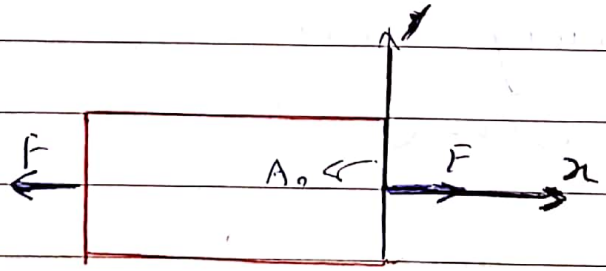
تنش کششی است در نقطه / تنش در یک نقطه به زاویه‌ی تورب صفحه‌ای که از آن می‌گذرد بستگی دارد

تنش روی یک صفحه‌ی مایل Stress on an oblique plane

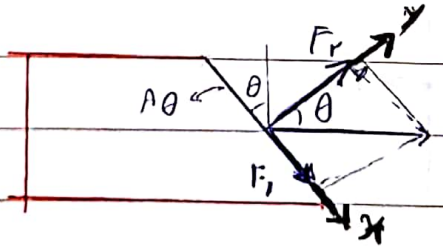


A_0 سطح مقطع عرضی

A_θ مساحت مقطع مایل



$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$



$$\sigma = \frac{F_r}{A_\theta}$$

$$\tau = \frac{F_1}{A_\theta}$$

Scanned by CamScanner

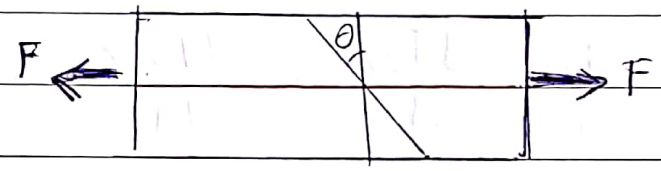
۱۳۹۶/۰۷/۱۱

$$A_\theta = \frac{A_0}{\cos\theta}$$

$$\begin{cases} F_1 = F\sin\theta \\ F_2 = F\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \dfrac{F\cos\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \dfrac{F}{A_0}\cos^2\theta \\ \tau = \dfrac{F\sin\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \dfrac{F}{A_0}\sin\theta\cos\theta = \dfrac{F}{2A_0}\sin 2\theta \end{cases}$$

تنش روی یک صفحه‌ی مایل:

$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{F}{A_0}\cos^2\theta \\ \tau = \dfrac{F}{2A_0}\sin 2\theta \end{cases}$$



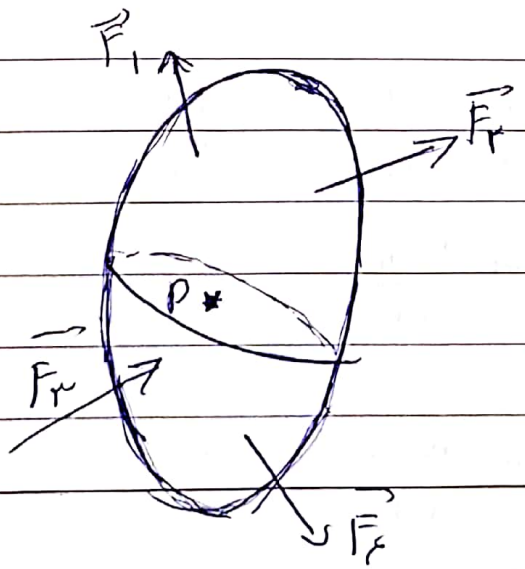
$$\theta = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_m = \dfrac{F}{A_0} \\ \tau = 0 \end{cases} \Big/ \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \sigma = 0 \\ \tau = 0 \end{cases} \Big/ \theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} \sigma = \dfrac{F}{2A_0} \\ \tau_m = \dfrac{F}{2A_0} \end{cases}$$

مواد نرم روی تنش برشی می شکنند و مواد ترد روی تنش نرمال می شکنند.

max max

حالت تنش

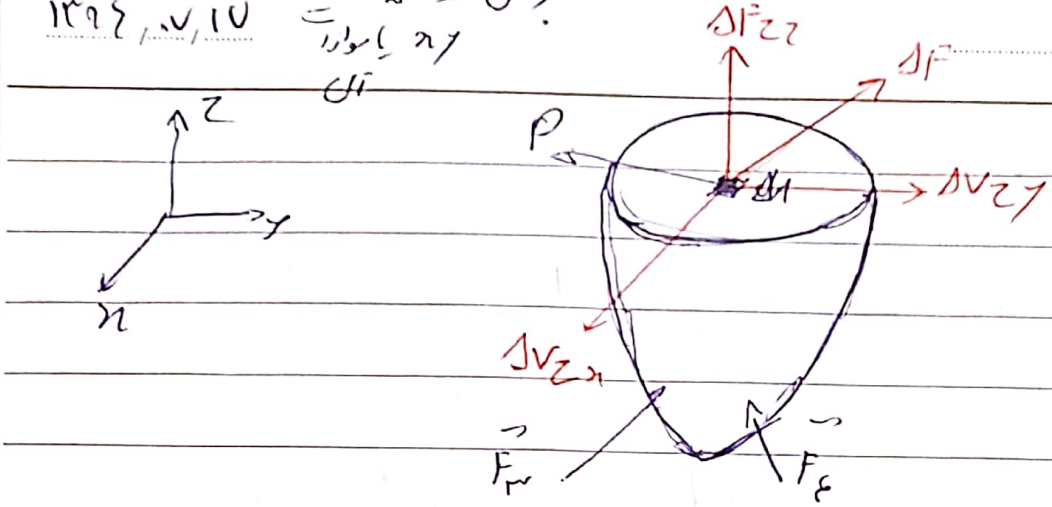
State of stress



NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۱۷ برشی در صفحه‌ی zx یا موازات آن



مؤلفه‌ی اول در هر بردار نشان دهنده‌ی بردار نرمال به صفحه‌ای است که آن بردار وارد می‌شود

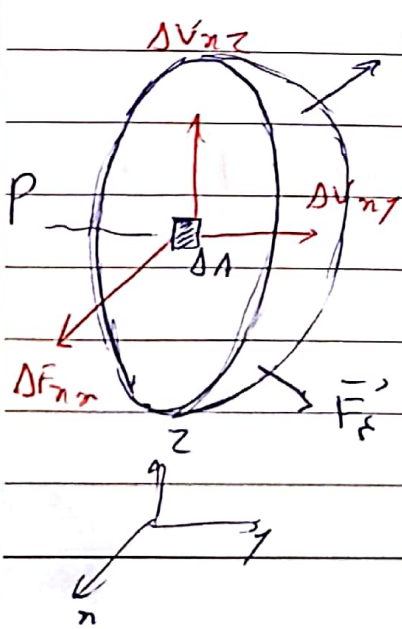
مؤلفه‌ی دوم راستای بردار است

$$\sigma_{zz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{zz}}{\Delta A} = \frac{dF_{zz}}{dA}$$

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_{zx}}{\Delta A} = \frac{dV_{zx}}{dA}$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_{zy}}{\Delta A} = \frac{dV_{zy}}{dA}$$

برش در صفحه‌ی xz یا موازات آن



$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{xx}}{\Delta A} = \frac{dF_{xx}}{dA}$$

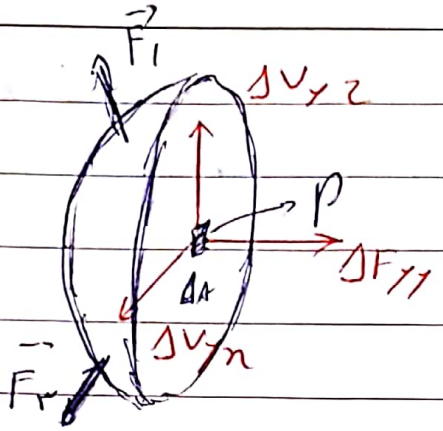
$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_{xy}}{\Delta A} = \frac{dV_{xy}}{dA}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_{xz}}{\Delta A} = \frac{dV_{xy}}{dA}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

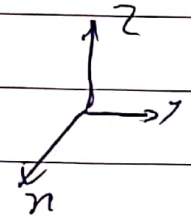
۱۳۹۶/۰۷/۱۷



تنش در صفحه yz

$$\sigma_{yy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{yy}}{\Delta A} = \frac{dF_{yy}}{dA}$$

$$\tau_{yn} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_{yn}}{\Delta A} = \frac{dV_{yn}}{dA}$$



$$\tau_{yz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_{yz}}{\Delta A} = \frac{dV_{yz}}{dA}$$

تنش کمیتی است با ۹ مولفه و کمیتی تانسوری است

تانسور Tensor

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}^T$$

تبدیل

بردار تنش traction

$$\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{n}$$

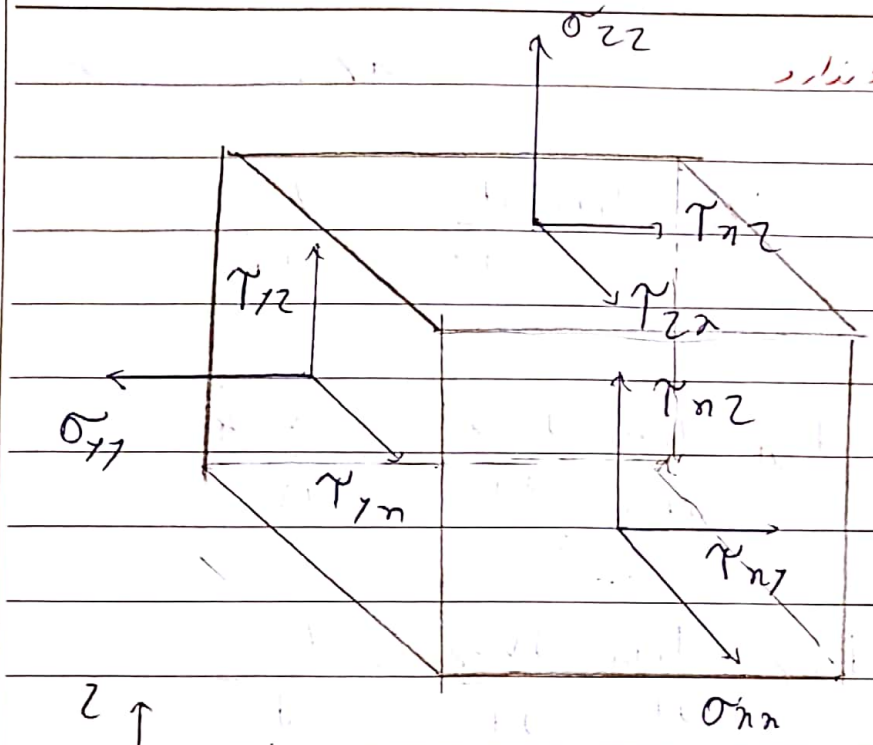
$$\underset{\sim}{\sigma}\,\underset{\sim}{h} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

NOTEBOOK iman

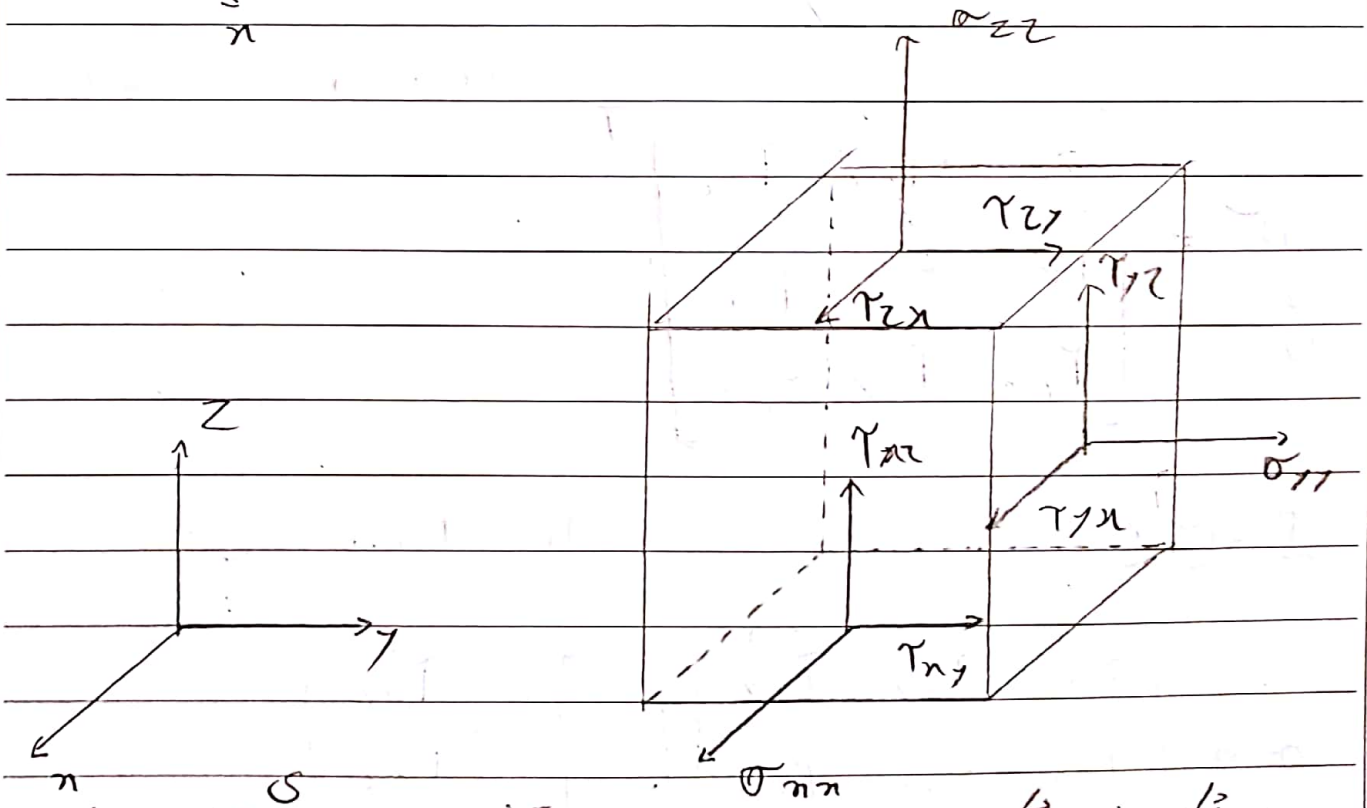
Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۱۷

* جا دلهای تبادل تنش وجود ندارد



تنش روی صفحه‌ی مثبت چپ را باید در جهت مثبت محور نوشتیم ولی خب شکل را یک کم به هم ریخته است



این شکل بایستی شکل بهتری برای بیان ۹ مولفه‌ی تنش است چون همه آنها در جهت مثبت محورهای مختصات رسم شده‌اند. چون صفحه‌ای که تنش ها برشی و نرمال دارد آنها رسم کرده‌ایم صفحات مثبت یعنی بردار نرمال آنها در جهت مثبت محورهای مختصات است.

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۱۹

بردارهای تنش برشی در حالتی که عمود به دیدنا ثبتند و در صفحه رو به بیرونی قرار دارند

دیده نمی شوند

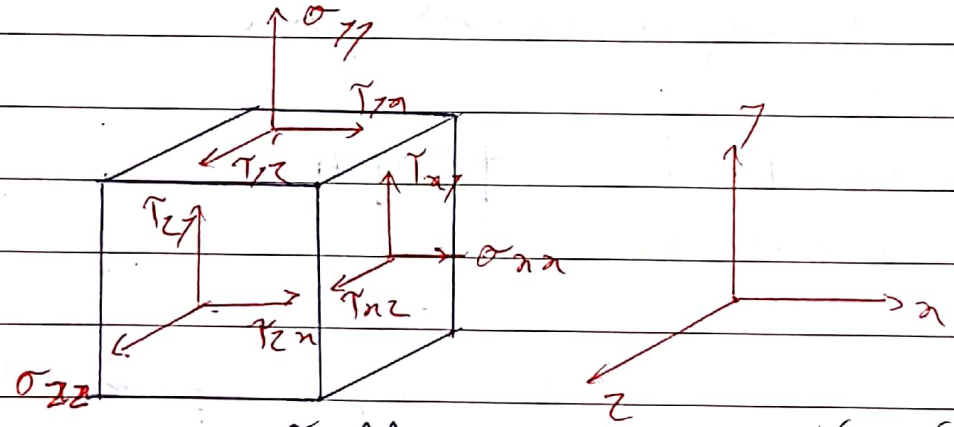
تنش های برشی نمی توانند بطور دلخواه وارد شوند و یا از آن خارج شوند بلکه باید یا هر دو وارد شوند

و یا هر دو خارج شوند

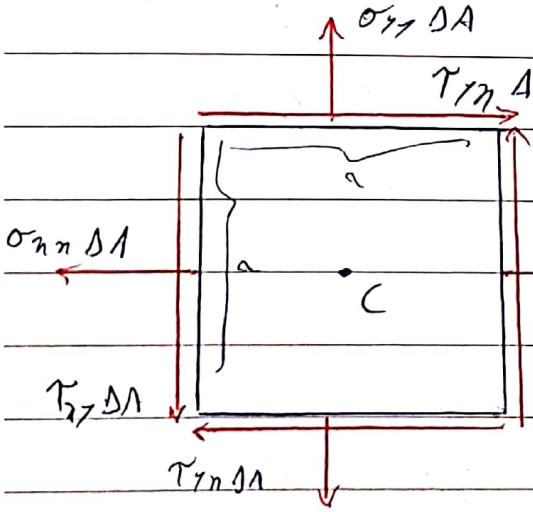
نکته

۱. تنش های برشی همیشه روی صفحه ای عمود بر هم اثر می کنند و نمی شود روی یک صفحه تنش برشی با یکدیگر صفحه ای عمود بر آن وجود نداشته باشد

۲. تنش های برشی به یک گونه از الان یا هر دو وارد می شوند یا هر دو خارج می شوند



تصویر مکعب مستطیل در صفحه x-z



$\circlearrowleft \sum M_c = 0$

$\Rightarrow a\,\tau_{xy}\,\Delta A - a\,\tau_{yx}\,\Delta A = 0$

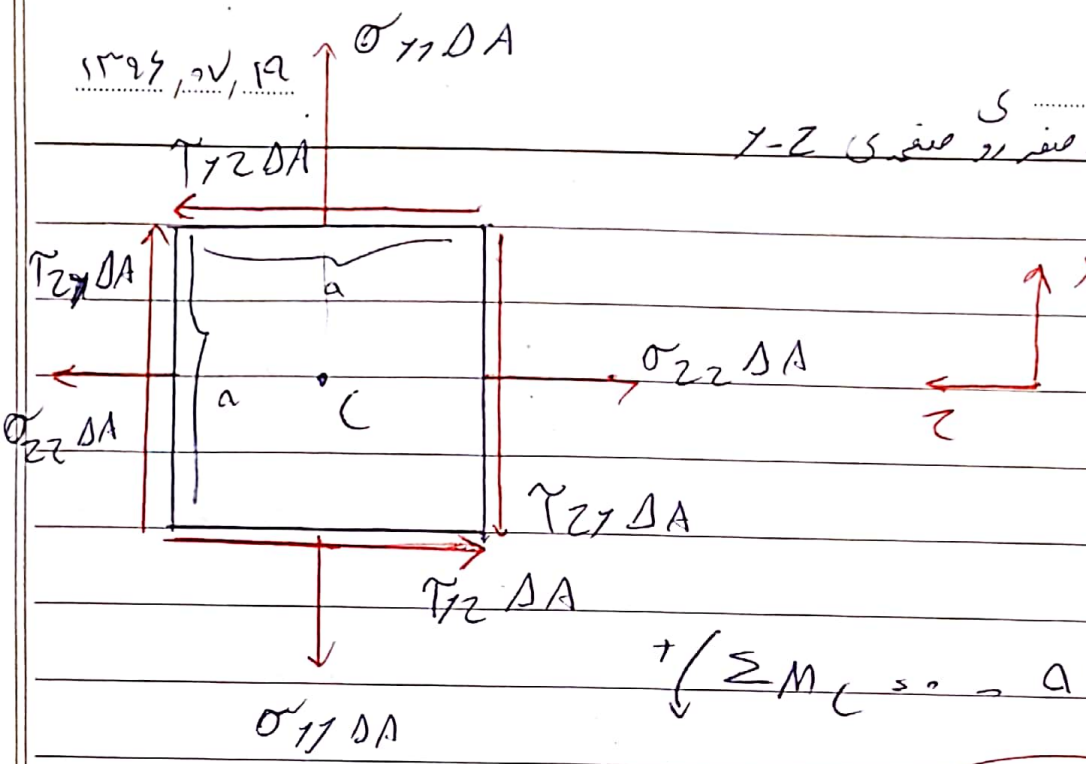
$\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۱۹

تصویر مکعب صفحه رو صفحه‌ی Z-Y



$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \quad -a\tau_{yz}\Delta A - a\tau_{zy}\Delta A$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

به همین ترتیب $\tau_{zx} = \tau_{xz}$

تنش های برشی روی صفحات عمود بر هم با هم مساوی است

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{\sigma}\,\underset{\sim}{n}$$

در این تصاویری که رسم کردیم در بالا دو وجه یک صفحه را نگاه داریم از مرکز دار جسم طبیعی

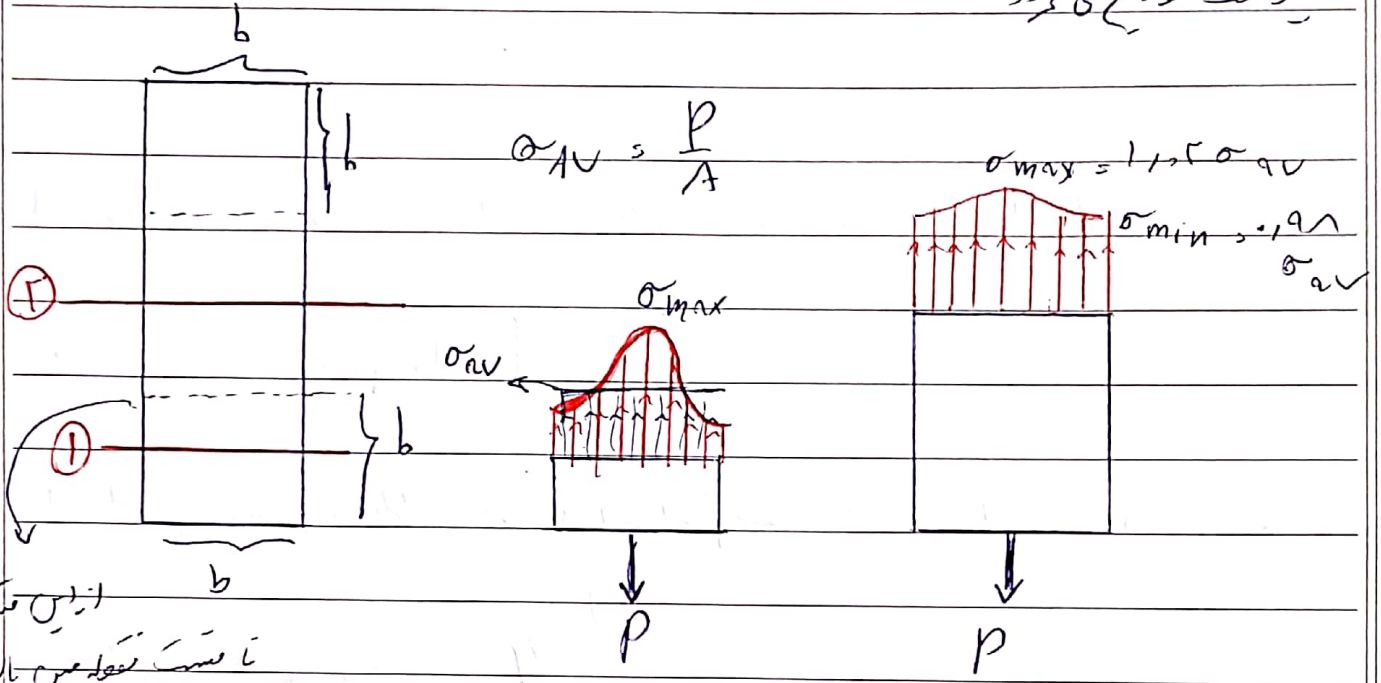
بنابراین بحث می‌شود که نیروهایی که در صفحات روبروی هم قرار دارد را نمی‌بینیم.

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۱۹

Saint-venant's principle اصل سن ونان

این اصل می گوید اگر به اندازه‌ی عرض قطعه از محل اعمال نیرو فاصله بگیریم نیرو به صورت تقریبا یکنواخت توزیع می‌گردد



از این علت تا مسافت تقریبی بالای اگر تحمیل نیرو نیم برابر تقریبا به صورت یکنواخت توزیع می‌شود

انتخاب

عوامل مؤثر در ضریب انتخاب مناسب

$$n = \frac{\sigma_{ult}}{\sigma_{all}} \qquad n > 1$$

$$n = \frac{\sigma_Y}{\sigma_{all}} \qquad Y \rightarrow \text{yielding stress}$$

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_Y}{n}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۴۰۲/۰۷/۱۹

۱) تغییرات خواص مواد: تغییر ترکیب شیمیایی، استحکام ماده و ابعاد مواد تولید شده

ایجاد تنش پسماند در اثر ۱- حرارت ۲- تغییر شکل در طی ذخیره سازی، حمل و نقل

Res. dual stress

و یا ساخت

۲) تعداد بارهایی که ممکن است در طول عمر سازه به آن اعمال شود

پدیده خستگی fatigue

۳) انواع بارهایی که طراحی بر مبنای آنها انجام شده یا ممکن است در آینده اتفاق بیفتد

طراحی: تخمین هندسی عدم اطمینان

آن جایی که بارهایی به صورت متناوب وارد می‌شود یا جایی که بار به صورت ضربه‌ای وارد می‌شود باید ضریب اطمینان را بزرگتر انتخاب کنیم

با یک سیکل پدیده خستگی می‌شود

(متناوب)

بارهای دینامیکی: متناوب (دوره‌ای) و ضربه‌ای

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۲۴

گسیختگی rupture

۴) نوع واماندگی ها در مواد مختلف
- مواد نرم یا شکل پذیر یا چکش خوار — Ductile material
- مواد ترد یا شکننده — Brittle material

تعریف: مواد نرم موادی هستند که تا لحظه‌ی شکست تغییر شکل قابل ملاحظه‌ای از خود نشان می‌دهند مانند فولاد ها، آلیاژ های آلومینیم ی

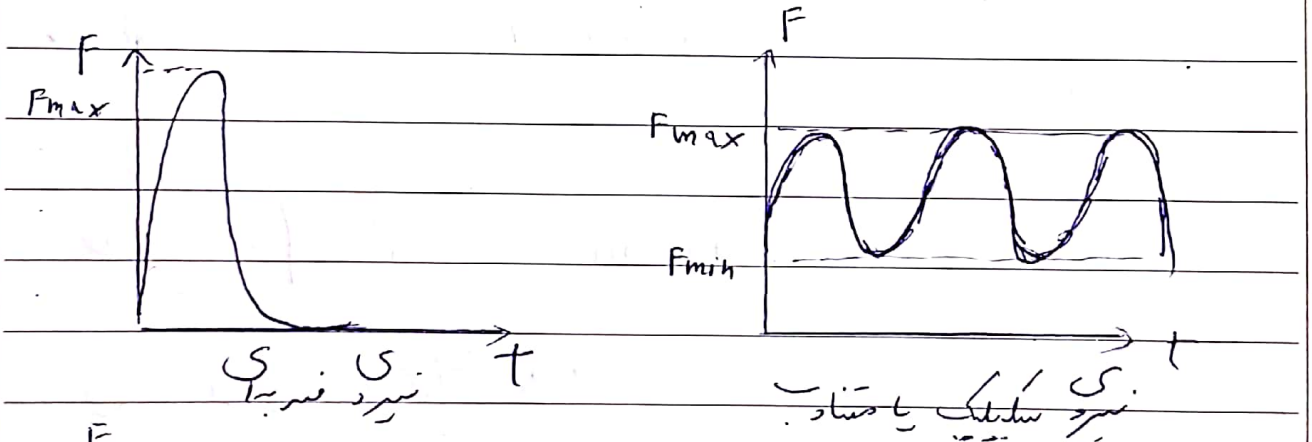
تعریف: مواد ترد موادی هستند که شکست از خود نشان نمی‌دهند پیش آگهی ن

از شکست ترتیب الوقوع شان نمی‌دهند مانند شیشه، سرامیک ها، چدن

آهن / Steel فولاد = Fe + C

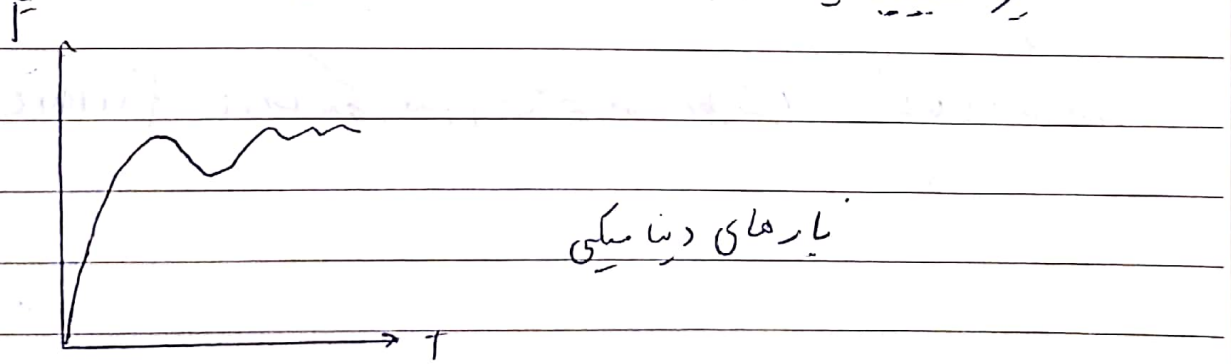
۲٪ از

Cast iron چدن



نیروی فشاری

نیروی سیکلیک یا متناوب



بارهای دینامیکی

NOTEBOOK iman

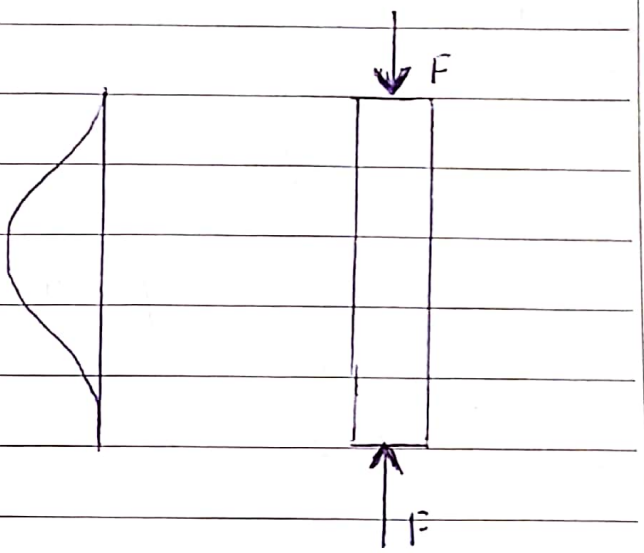
Scanned by CamScanner

۱۴۰۱/۰۷/۲۴

S_{su} : Ultimate Shearing Stress

برشی

Buckling پدیده ناپایداری و کاهش سفتی: صورت ناگهانی اتفاق میفتد



۵) حجم ادامه‌ای از شیوه تحلیل و طراحی

۶) کاهش سرعوبیت در اثر شرایط طبیعی یا محیطی مثل رنگ زدن

۷) اهمیت قطعه در مجموعه ای که برای آن سازه

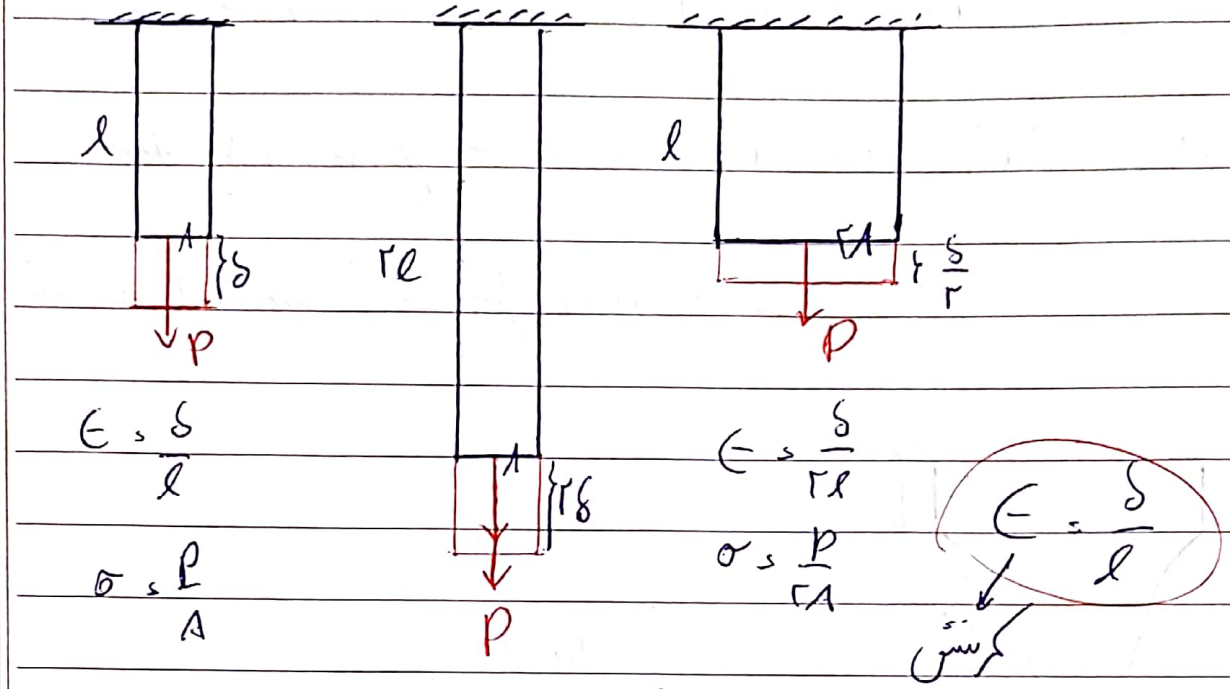
فصل دوم: کرنش Strain

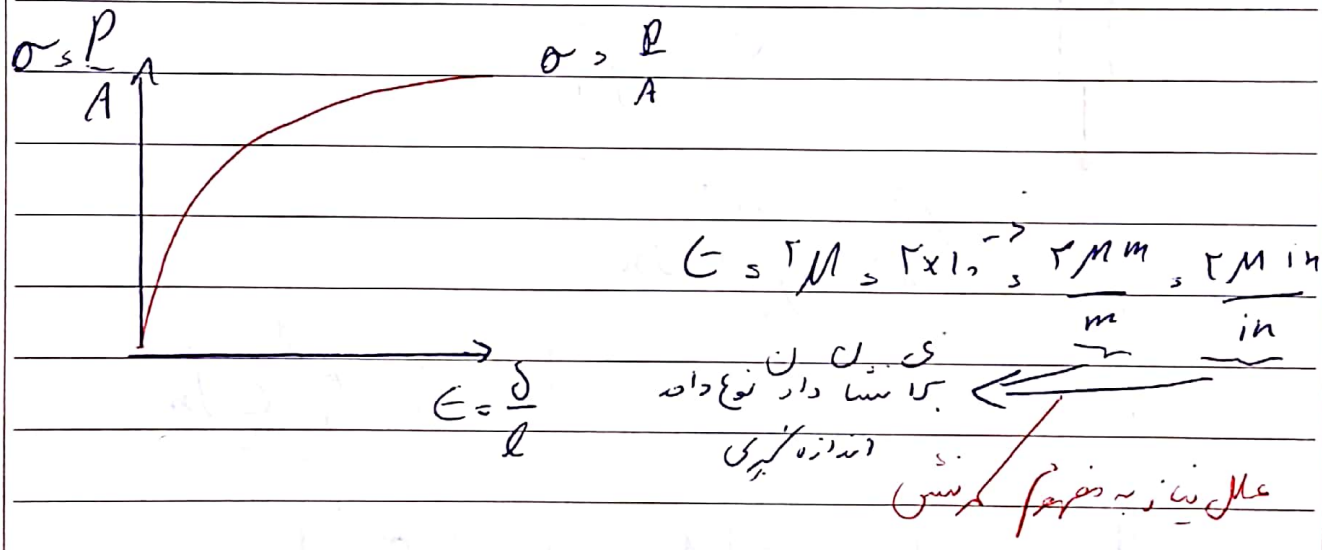
تنش ـ کرنش: بارگذاری محوری

Failure یا واماندگی یعنی یک جسم مورد نظر نتواند نیازها را ارضا کند

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۲۵





$\epsilon = 2\mu = 2\times10^{-6} = 2\frac{mm}{m} = 2\mu in = 2\frac{\mu in}{in}$

بی بُعد
بکاشتاد نوع داده
اندازه گیری

علل نیاز به مفهوم کرنش

۱) تغییر شکل زیاد خودش توانند باعث واماندگی یک جسم شود $\sigma > \sigma_{all}$

۲) از روی کرنش ها تنش ها قابل محاسبه هستند

نمودار تنش_کرنش شاخصی است از خاصیت ماده Stress_Strain Diagram

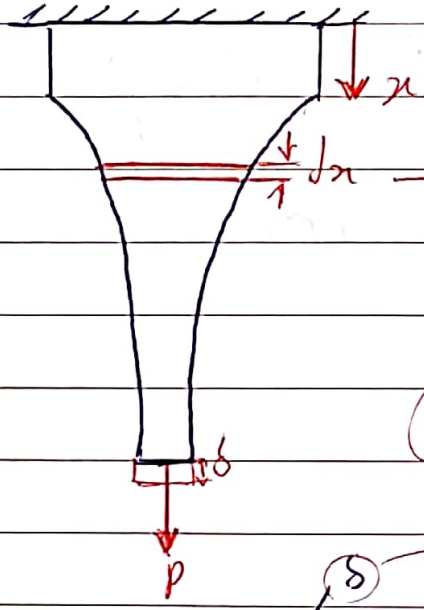
Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۲۶

۳) کاربرد مفهوم کرنش و هندسه ی تغییر شکل ها در حل مسائل نامعین استاتیکی

۴) مسئله ی یافتن توزیع تنش در مقاطع مختلف خود یک مسئله ی نامعین استاتیکی است

پس باید از روی هندسه ی تغییر شکل ها آن را یافت



تغییر طول المانی از جسم به طول dx → dδ

$$\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

در ابتدا جسم تغییر طول نداشته و در انتها جسم تغییر طول δ می یابد

$$\int_0^{\delta} d\delta = \int_0^{l} \epsilon\, dx$$

در ابتدا جسم در حال بالا تغییر طول نداشته است

$$\delta = \int_0^{l} \epsilon\, dx$$

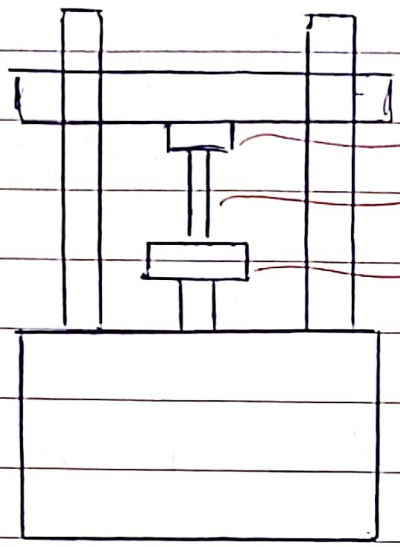
$$\sigma = \frac{dF}{dA} \Rightarrow \int dF = \int \sigma\, dA \rightarrow F = \int_A \sigma\, dA$$

خاصیت
- فیزیکی ← مانند چگالی ثابت است و در اثر اعمال نیرو بررسی نشده است
- مکانیکی ← مانند تنش و کرنش از طریق اعمال نیرو و تغییرات حاصل از آن اندازه گیری می شود ← نمودار تنش-کرنش

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۷/۲۶



دستگاه کشش یونیورسال
universal
سرو هیدرولیکی
استاندارد گیرنده

ASTM American society testing materials

ISO → ASTME8 استاندارد تست کشش ساده

ASME American Society mechanical Engeneering

JSME Jap

ISME Iranian Society mechanical

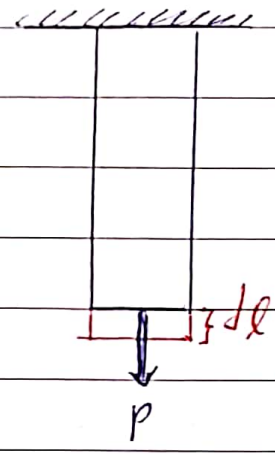
۱- دستگاه ۲- نمونه (هندسی) ۳- روش ۴- ارزیابی مواردی که استاندارد سازی می‌کنه

آزمایش کشش ساده: نمونه گرد و نمونه تخت

۱۳۹۴/۰۲/۰۸

$\epsilon = \frac{\delta}{l_0}$ $\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$ → Engineering Strain

کرنش مهندسی



$t \to t+\Delta t$ طول در لحظه‌ی معین l

$$\int_0^{\epsilon_t} d\epsilon_t = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} \to \epsilon_t = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

Logarithmic Strain

true Strain کرنش حقیقی

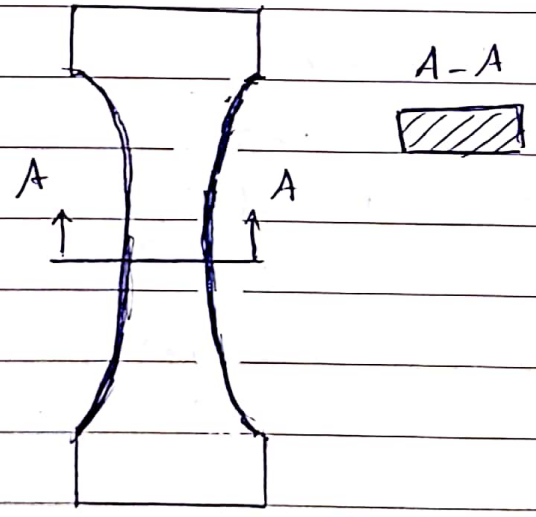
$$\epsilon_t = \ln(1+\epsilon)$$

$\sigma = \frac{P}{A_0}$ $\sigma_t = \frac{P}{A}$

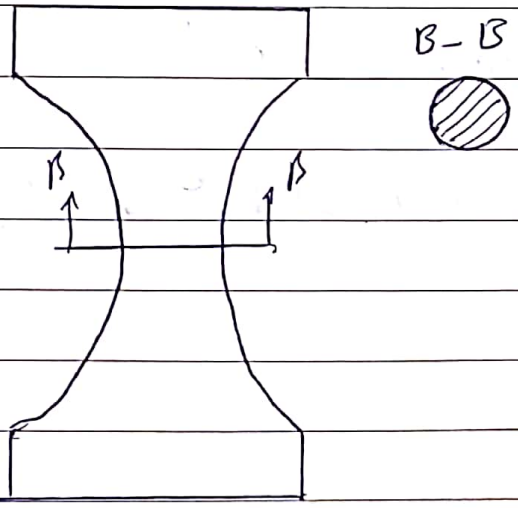
true stress

آزمایش کشش ساده:

نمونه تخت



نمونه گرد



Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۸/۰۱

wedge grip فک گوهی Strain gage کرنش سنج

یکی از ابزارهای اندازه گیری کرنش است extensometer

و دارای شاخک های gage length است

در ناحیه ی الاستیسیته جسم دوباره کشیده می شود یا تغییر شکل می یابد به حالت قبل خود باز می گردد

حدود الاستیسیته شاخصی از مقاومت ماده در برابر تغییر شکل الاستیک است

Stiffness سختی

رابطه ی هوک $\sigma = E\epsilon$

E : modulus of elasticity

نام دیگر E ضریب کشسانی یا مدول

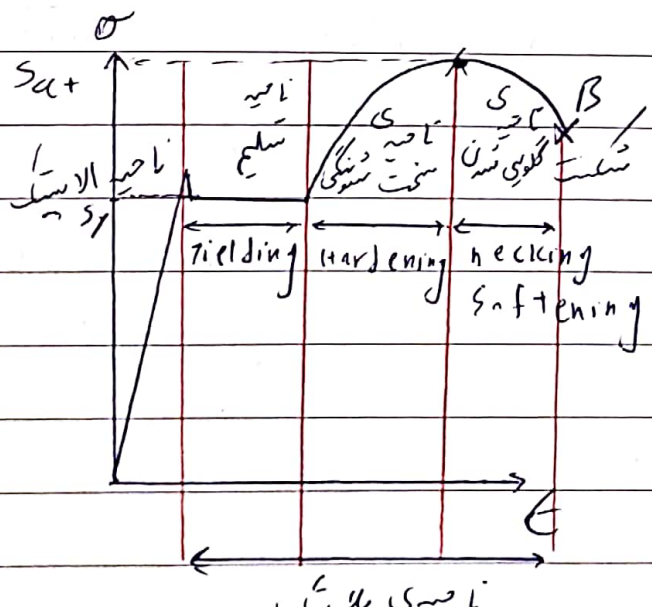
Young's modulus

E فولادها ۲۱۰ GPa ، ۲۱۰ × ۱۰^۹ Pa

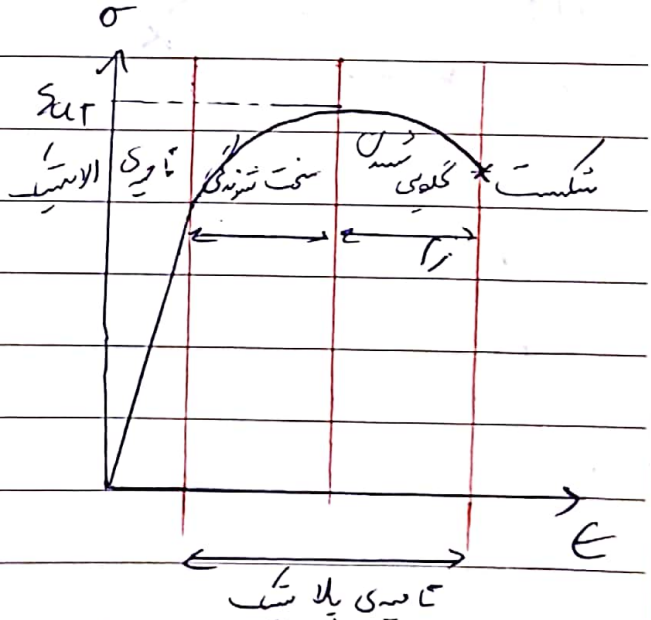
E آلومینیوم ۷۰ GPa ، ۷۰ × ۱۰^۹ Pa

مواد نرم

الف)



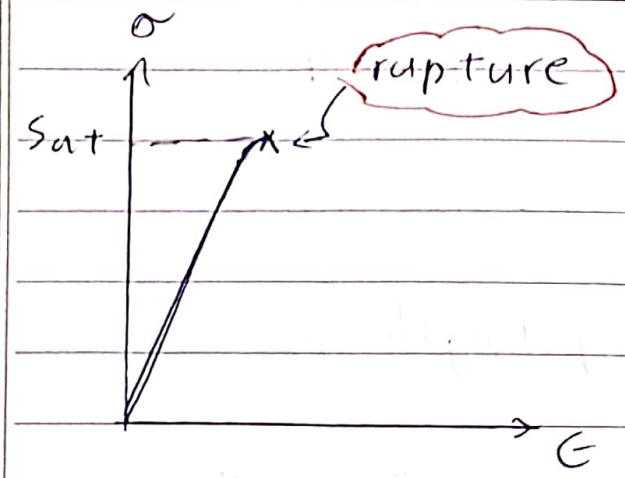
ب)



Sut: استحکام نهایی ماده Sy: استحکام تسلیم ماده

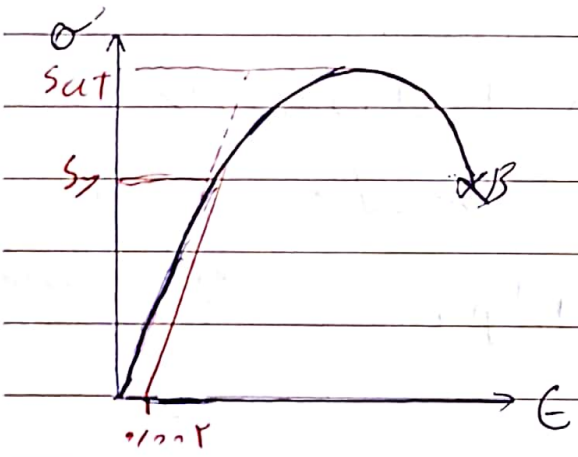
Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۸/۰۳

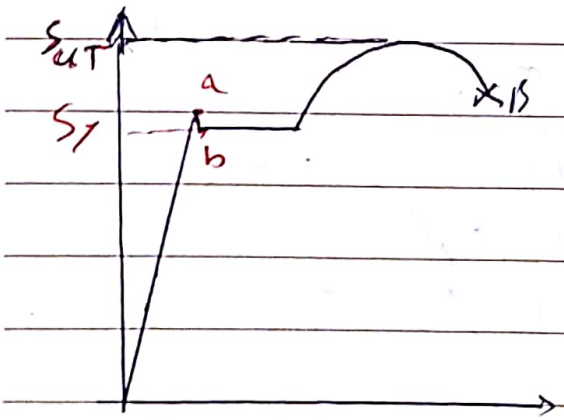


برای تعیین S_y موادی که تنش تسلیم ندارند از روش ٪۲ offset strain

٪۲ = ۰/۰۰۲



از نقطه‌ی ۰/۰۰۲ ε خطی به موازات قسمت خطی نمودار رسم می‌کنیم و محل تقاطع S_y خواهد شد.



a: upper yield limit

حد تسلیم بالایی

b: lower yield limit

حد تسلیم پایینی

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۸/۰۳

Elastic limit حالت تئوری وایده آل برای مشخص حد الاستیک
کربن ستعدادی که تا قبل از آن نمودار خطی است

proportional limit حد تناسب
روشی یا حالت عملی یا ۰٫۰۰۰۲ Offset
Strain

$\sigma = E\epsilon$

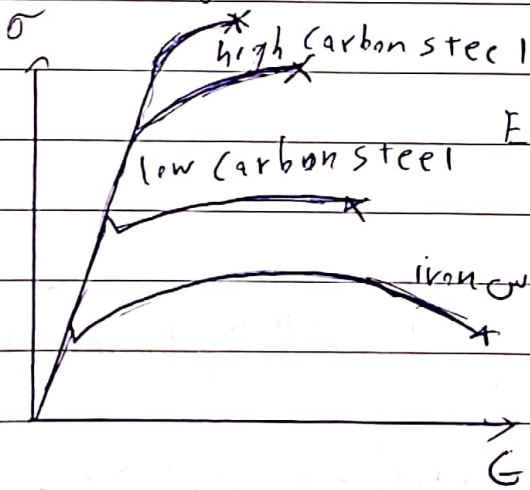
ductility نرمی

فولاد

percent elongation درصد ازدیاد طول $= \frac{L_f - L_0}{L_0} \times 100$

percent reduction in area درصد کاهش سطح $= \frac{A_0 - A_f}{A_0} \times 100$

High strength steel



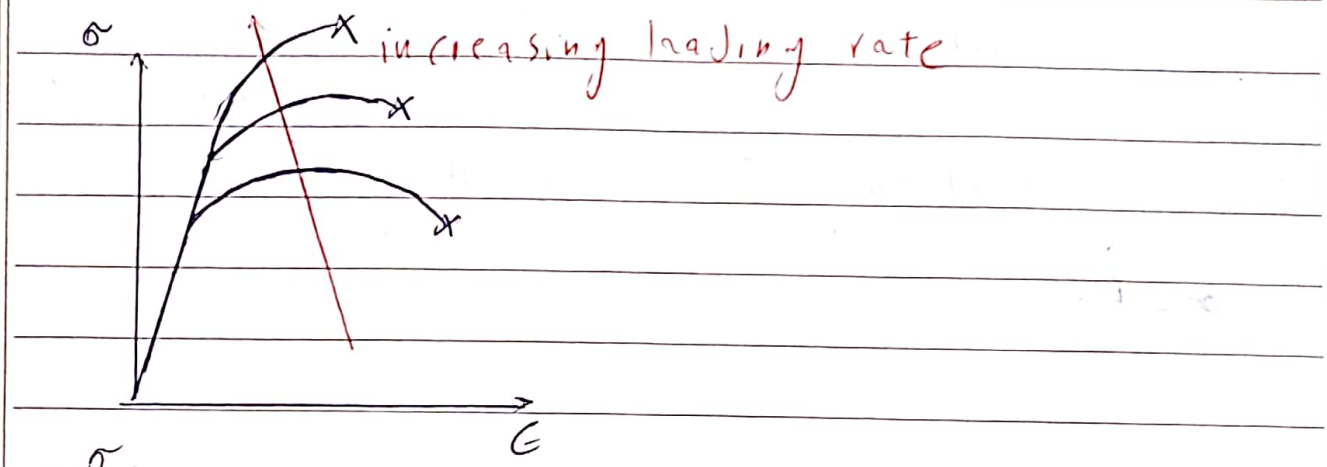
با اضافه کردن کربن به آهن ضریب الاستیسیته یا E تغییر نمی کند، استحکام آن افزایش می یابد اما ductility یا نرمی آن کاهش می یابد

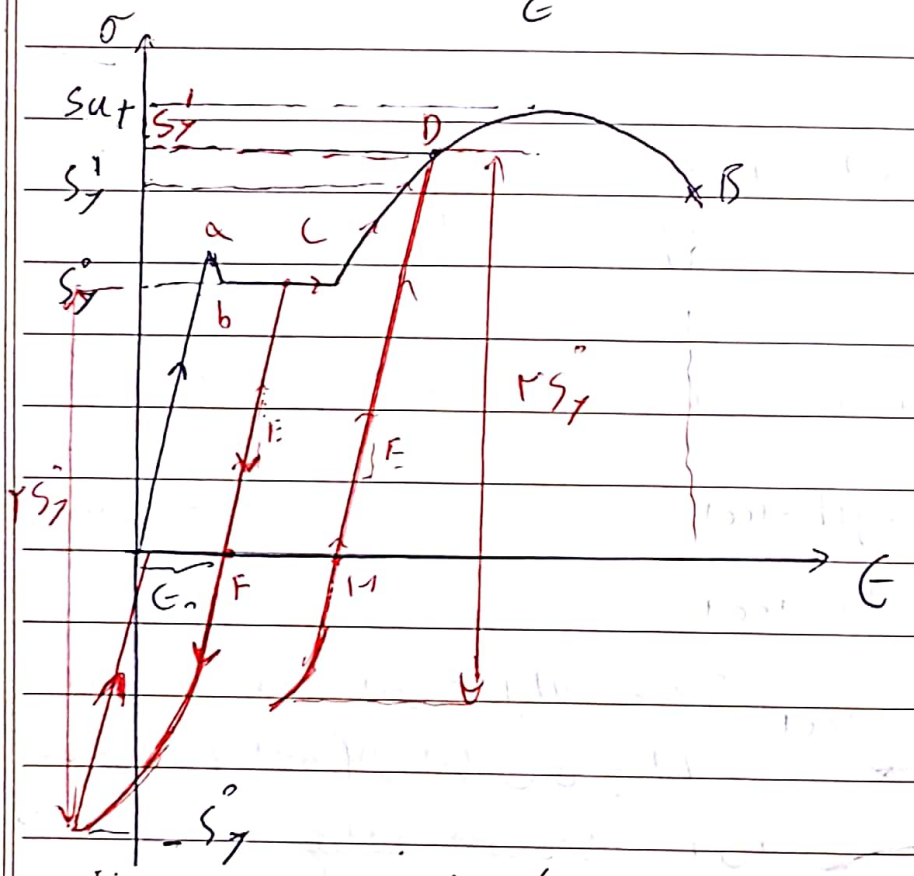
* نرمی و استحکام دقیقاً عکس هم عمل می کنند یعنی وقتی استحکام را زیاد کنیم نرمی کاهش می یابد و بالعکس

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۸/۰۳



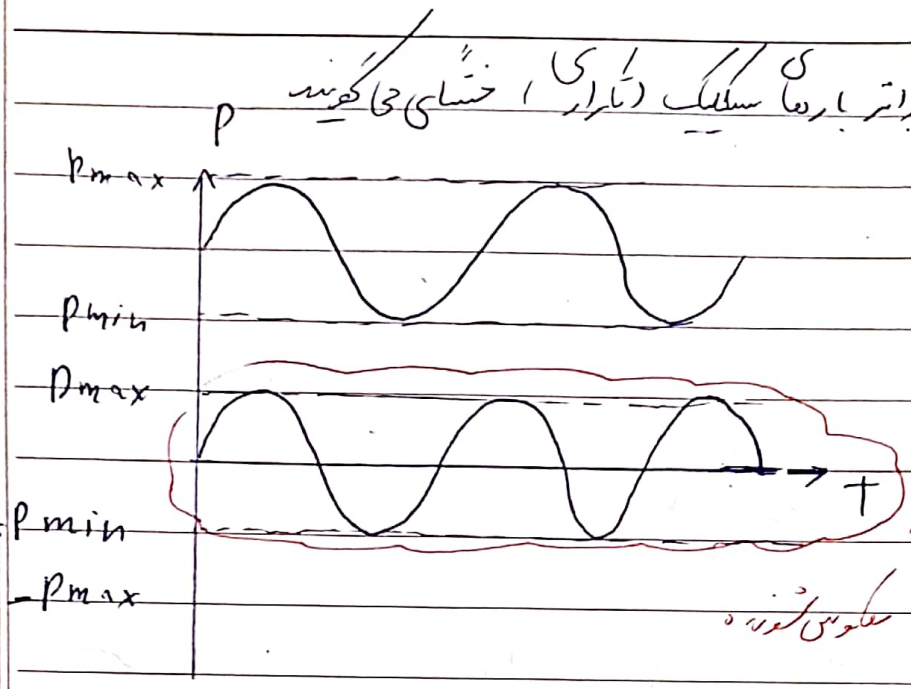


اصل Bauchinger : چنانچه جسم تا ناحیه‌ی پلاستیک بارگذاری شده و سپس تحت باربرداری و بارگذاری معکوس تا تسلیم قرار گیرد، ملاحظه می‌شود که تسلیم کششی و تقابلی تسلیم فشاری در این حالت برابر $2S_y$ خواهد بود. این خاصیت نه تنها برای کرده‌ی سخت شوندگی بلکه برای کرده‌ی تسلیم نیز صادق است

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۸/۰۸

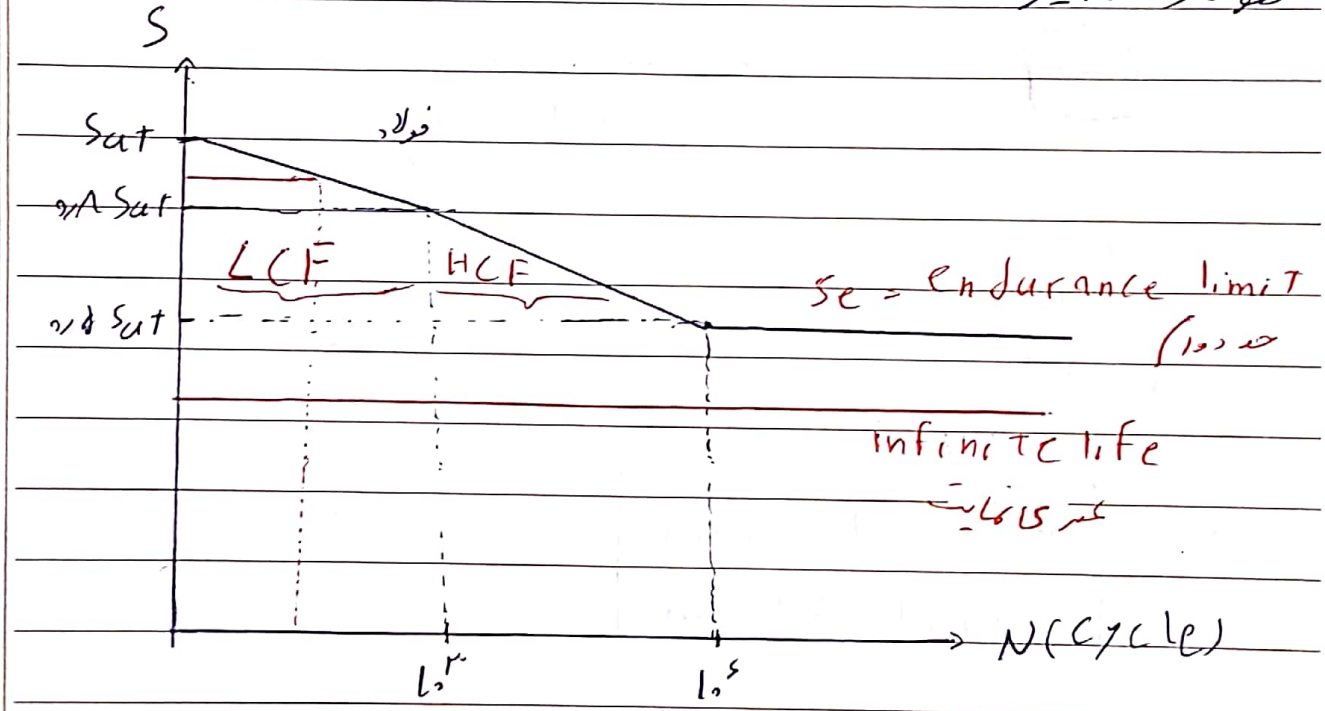
به کاسی استحکام ماده برابر با روش سیکلیک (تکراری) خستگی می‌گویند



P دستی مثبت است
نیروکششی است،
دستی P منفی است
نیروفشاری است

بارگذاری کاملاً معکوس شده

نمودار S_N



LCF: low cycle fatigue خستگی کم چرخه

HCF: High cycle fatigue خستگی پرچرخه

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۱/۰۵



ضریب پوآسون Poisson's ratio



با گذاری تک محوره
uniaxial loading

$\epsilon_x = \frac{\delta}{l}$

جانبی

$$\nu = \left| \frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}} \right|$$

محوری

برای مواد همسانگرد کاربرد دارد

$\nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = -\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}}$: اگر راستا طول را z بنامیم

$-1 < \nu < \frac{1}{2}$

* کرنش هماندازه کششی تانسوری است

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۵/۰۵

مواد
- همسانگرد isotropic
- ناهمسانگرد anisotropic

مواد
- همگن Homogeneous
- ناهمگن Non Homogeneous

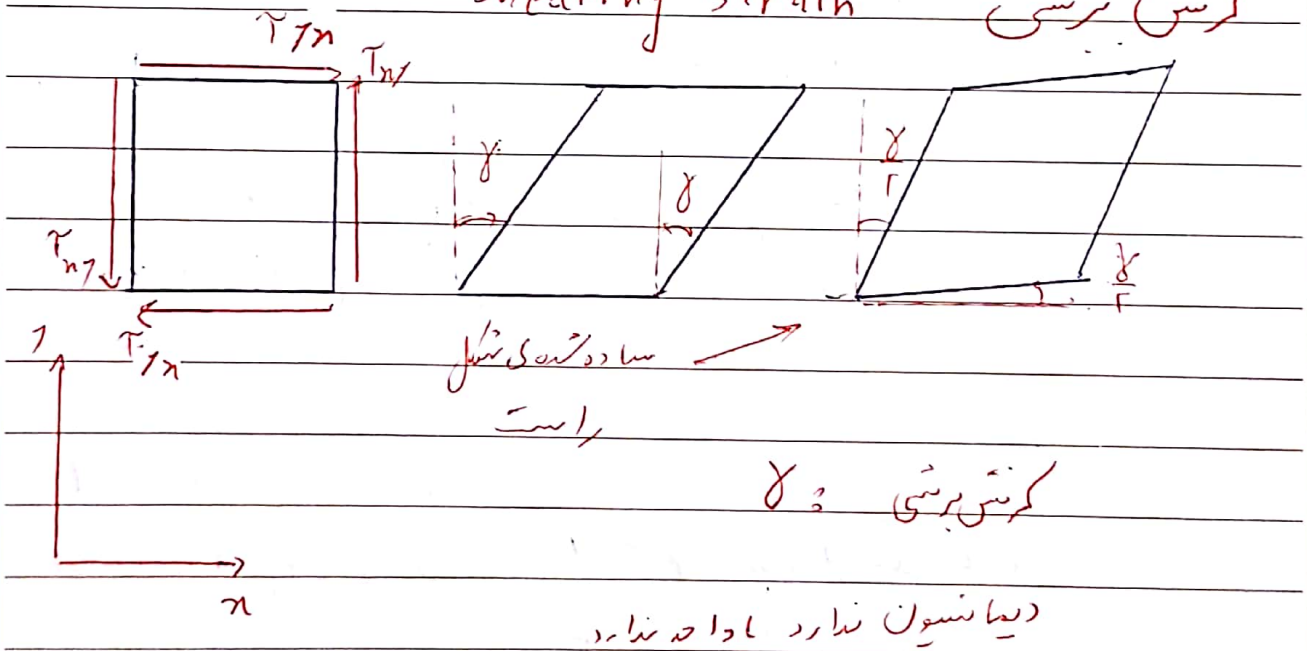
همسانگرد ماده ای است که خواص آن در راستاهای مختلف یکسان است.

ناهمسانگرد ماده ای است که خواص آن در راستاهای مختلف فرق دارد.

همگن ماده ای است که خواص آن مستقل از مکان باشد.

ناهمگن ماده ای است که خواص آن وابسته به مکان باشد.

کرنش برشی Shearing strain



ساده شده ی شکل راست

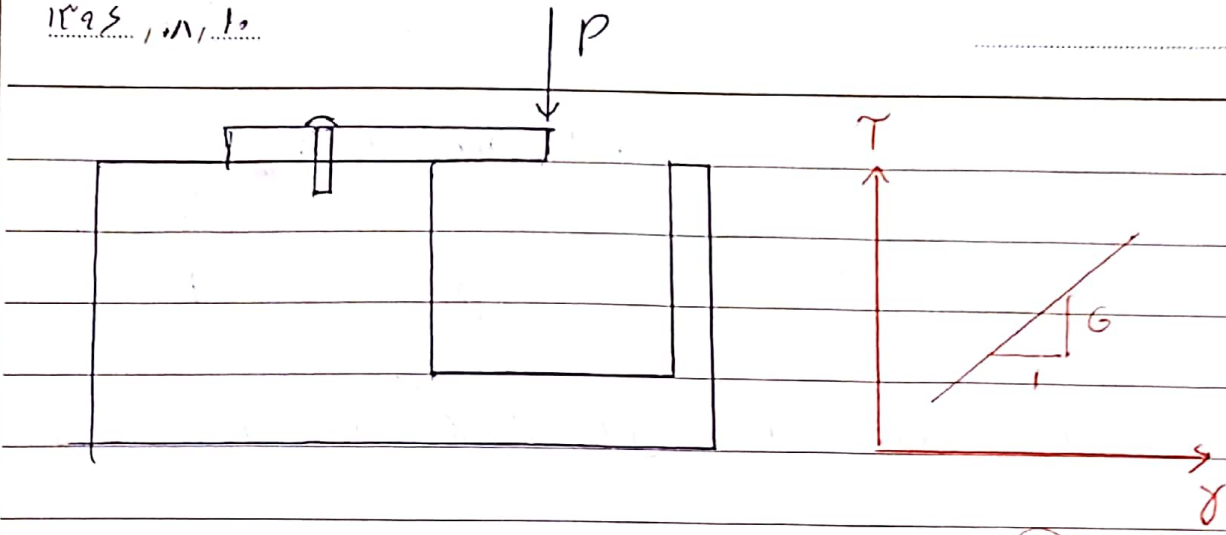
کرنش برشی $= \gamma$

دیمانسیون ندارد یا واحد ندارد

تنش برشی سبب تغییر طول در راستای محوری عمودی می شود و تنش برشی سبب تغییر زاویه می شود

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۸/۱۰



$\tau = G\gamma$

shear modulus

مدول (ضریب) برشی

$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$

$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$

برای یک ماده همسانگرد این روابط برقرار است یعنی G در راستای مختلف برابر است

بارگذاری چند محوره ـ روابط هوک تعمیم یافته ـ multiaxial loading

اصل برهم نهی یا جمع آثار superposition

شرایط صادق بودن اصل برهم نهی

۱ـ جسم در محدوده الاستیک باشد.

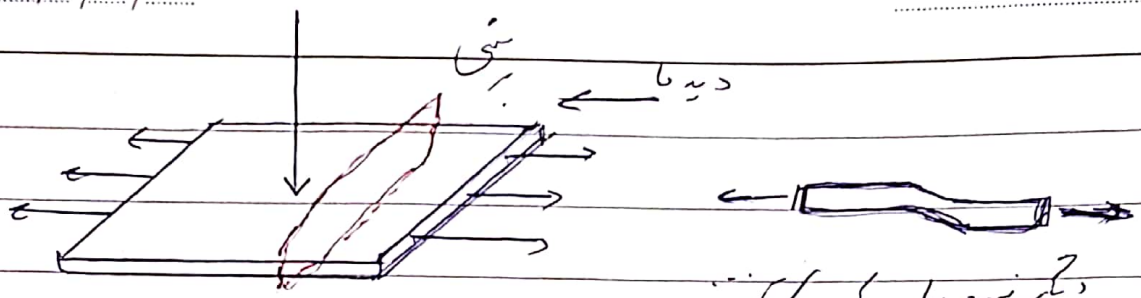
۲ـ تغییر شکل های ایجاد شده کوچک باشد

۳ـ بارگذاری در یک راستا شرایط بارگذاری در راستای عمود بر آن را تغییر ندهد

NOTEBOOK iman

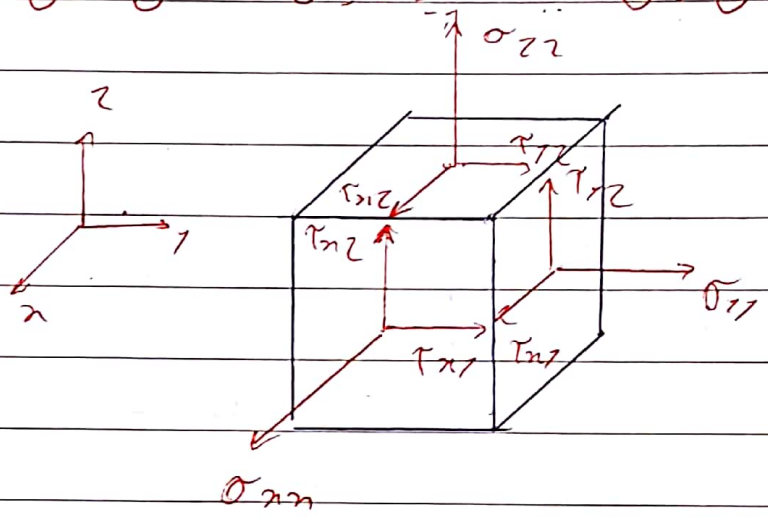
Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۰۳/۱۰



وحالت اخیر نسبت به هم ندارد

⊗ تنش برشی سبب تغییر زاویه می‌شود و تنش نرمال سبب تغییر طول می‌شود



$$\epsilon_{xx}=\frac{\sigma_{xx}}{E} \qquad \epsilon_{xx}=-\nu\frac{\sigma_{yy}}{E} \qquad \epsilon_{xx}=-\nu\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\epsilon_{yy}=-\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} \qquad \epsilon_{yy}=\frac{\sigma_{yy}}{E} \qquad \epsilon_{yy}=-\nu\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\epsilon_{zz}=-\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} \qquad \epsilon_{zz}=-\nu\frac{\sigma_{yy}}{E} \qquad \epsilon_{zz}=\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

superposition

$$\epsilon_{xx}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}-\nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right]$$

روابط هوک در بارگذاری چندگانه برای جسم همسانگرد

$$\epsilon_{yy}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{yy}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})\right]$$

$$\epsilon_{zz}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{zz}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right]$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

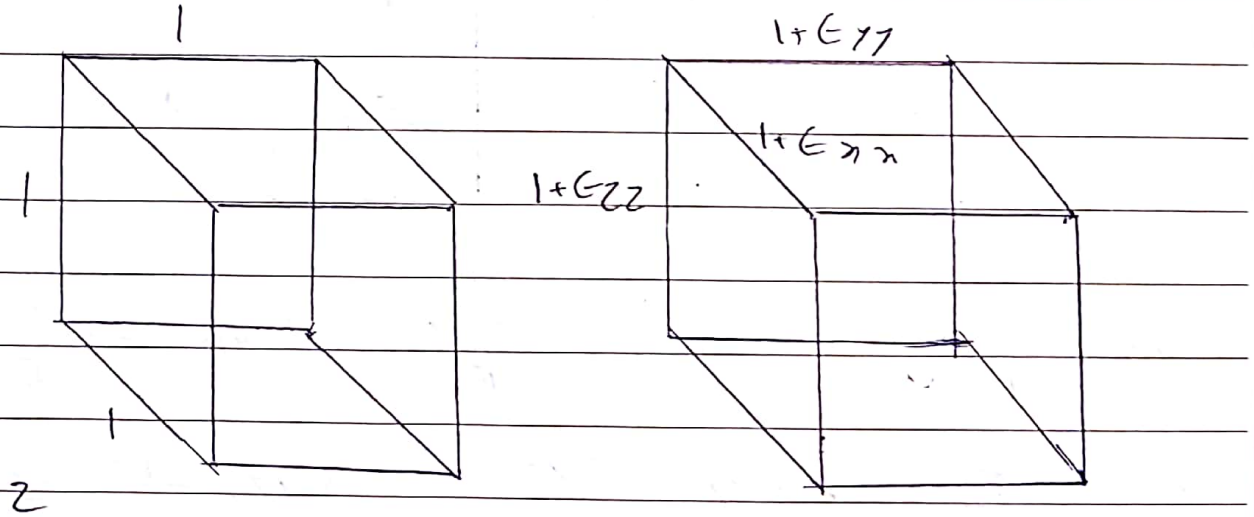
۱۳۹۶/۰۸/۰۶

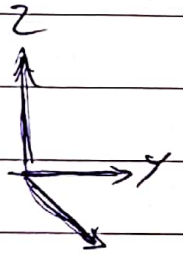
E، ν، G ثوابت الاستیک ماده

S_y ، S_{UT} خواص وابسته‌گی ماده
failure

کرنش حجمی یا انبساط Dilatation

$$e = \frac{\Delta V}{V}$$





$$e = \frac{\Delta V}{V_0} \qquad V_0 = 1$$

$$\Delta V = V - V_0 = (1+\epsilon_{xx})(1+\epsilon_{11})(1+\epsilon_{22}) - 1$$

$$= 1 + \epsilon_{xx} + \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \cancel{O(\epsilon)} - 1 =$$

حذف شد

$$e = \epsilon_{xx} + \epsilon_{11} + \epsilon_{22}$$

Scanned by CamScanner

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right]$$

$$\Rightarrow e = \varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})$$

حالت خاص: تنش هیدرواستاتیک — تنش یکنواخت فشاری p

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

$$e = \frac{-3(1-2\nu)}{E}p \Rightarrow \underline{p = -Ke}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

↓

مدول بالک

Bulk modulus

$K > 0 \quad E > 0 \longrightarrow \nu < \frac{1}{2}$

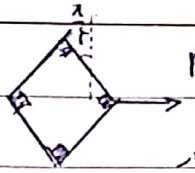
جسم در حالت الاستیک از نظر تغییر حجم شبیه جسمی در حالت پلاستیک حجم

جسم ثابت خواهد بود همچنین ν در حالت پلاستیک $= \frac{1}{2}$ می‌تواند برسد

Scanned by CamScanner

۱۴۰۲/۰۸/۲۲

رابطه بین ثوابت الاستیک ماده



$\tau = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta$

چون حداکثر مقدار تنش برشی τ در

E, ν, G, K

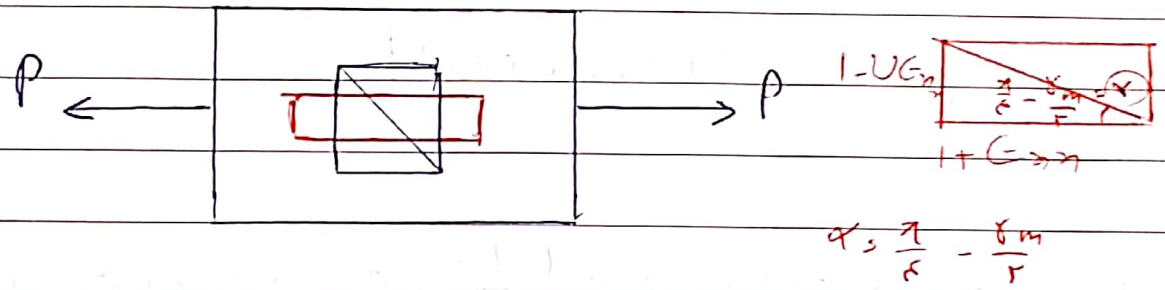
برای جسم همسانگرد

زاویه‌ی $\frac{\pi}{4}$ با نام اتفاقی انتخاب شد τ و $G\gamma$

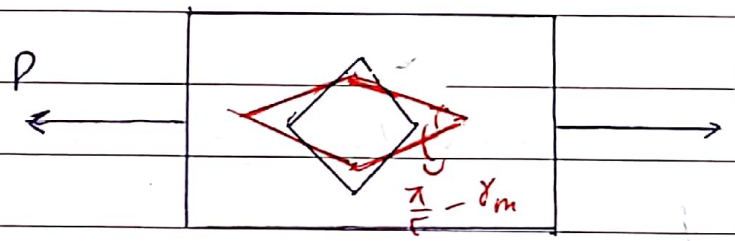
در مس زاویه بین θ با کرنش برشی را نیز خواهیم داشت

و کرنش برشی چون از جنس زاویه است بی‌بعد خواهیم داشت

$0 - \frac{\pi}{4} - \gamma_m$



$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}$



$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}\right) = \frac{1-\nu\epsilon_{xx}}{\epsilon_{xx}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \simeq \frac{1-\frac{\gamma_m}{2}}{1+\frac{\gamma_m}{2}}$$

(ضرب وزنی)

$$\gamma_m = \frac{(1+\nu)\epsilon_{xx}}{1+\frac{1-\nu}{2}\epsilon_{xx}} \Rightarrow \gamma_m = (1+\nu)\epsilon_{xx}$$

(صرف نظر)

(جایگذاری)

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \sigma_{xx} &= \frac{P}{A}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \epsilon_{xx} = \frac{P}{AE}$$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۰۳/۱۵

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G} \Big\} \Rightarrow \frac{P}{2AG} \quad \text{حالت کلی} \quad \gamma_m = (1+\nu)\varepsilon_{xx}$$

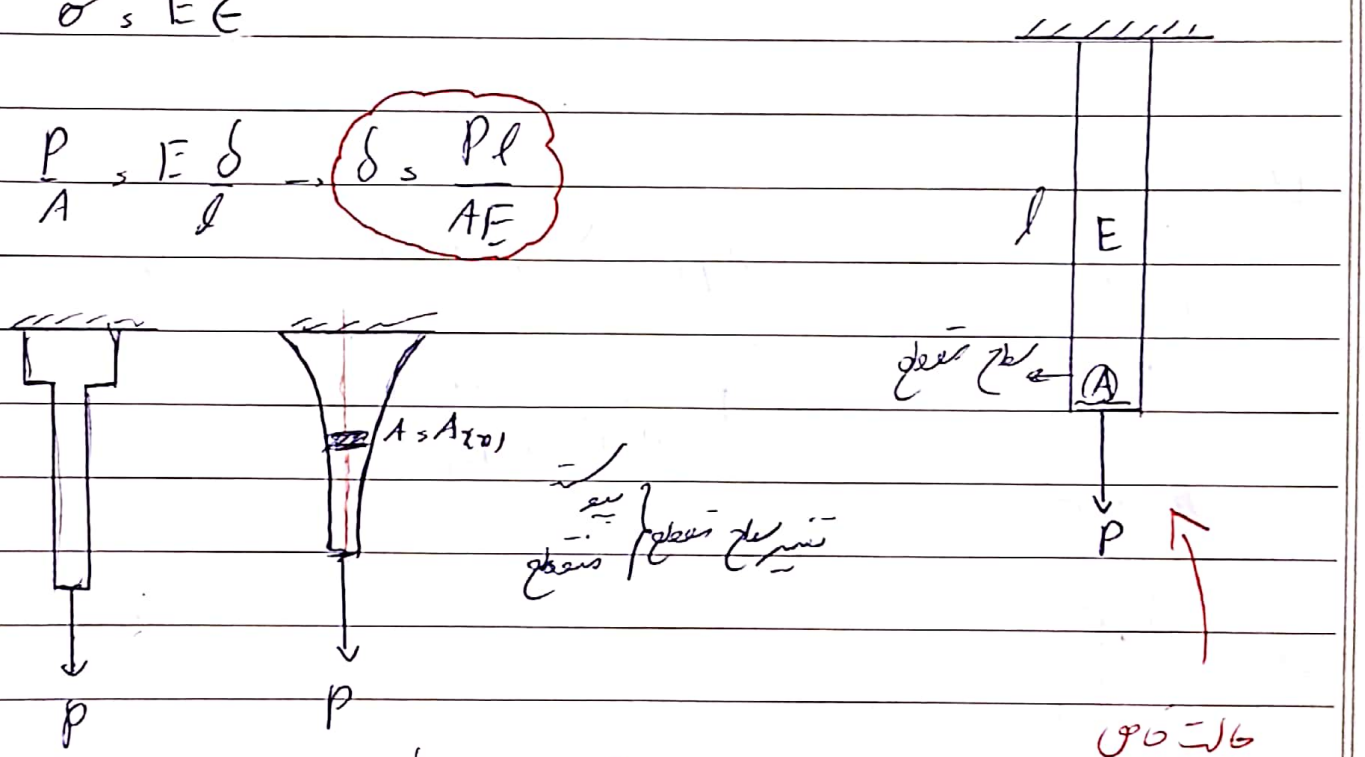
$$\tau_m = \frac{P}{2A}$$

$$\frac{P}{2AG} = (1+\nu)\frac{P}{AE} \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

تغییر شکل میله ها در اثر بارگذاری محوری

$$\sigma = E\epsilon$$

$$\frac{P}{A} = E\frac{\delta}{\ell} \rightarrow \delta = \frac{P\ell}{AE}$$



$$\epsilon = \frac{d\delta}{dx} \rightarrow \int_0^{\delta} d\delta = \int_0^{\ell} \epsilon\, dx \rightarrow \delta = \epsilon\ell \rightarrow \epsilon = \frac{\delta}{\ell}$$

$$\epsilon = \frac{d\delta}{dx} \rightarrow \int_0^{\delta} d\delta = \int_0^{\ell} \epsilon\, dx \Rightarrow \delta = \int_0^{\ell} \epsilon\, dx = \int_0^{\ell} \frac{\sigma}{E} dx$$

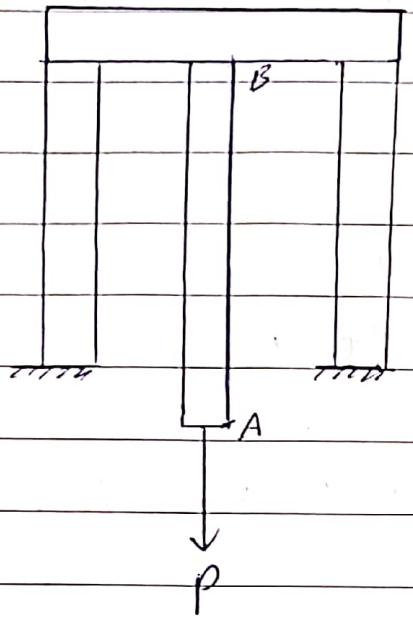
$$\delta = \int_0^{\ell} \frac{P(x)\,dx}{A(x)\,E(x)}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۸/۱۷

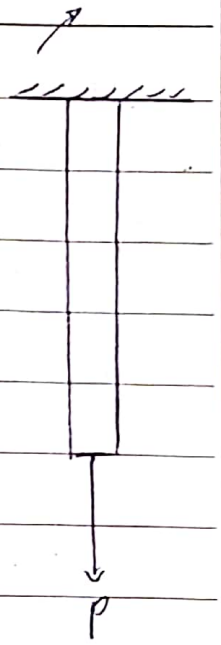
گاهی اوقات مطلب است

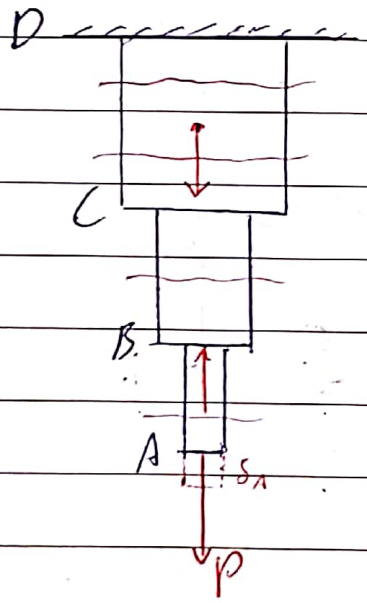


$$\delta_{A/B} = \frac{Pl}{AE}$$

$$\delta_{A/B} = \delta_A - \delta_B$$

$$\delta_A = \delta_B + \frac{Pl}{AE}$$





$$\delta_{A/D} = \delta_{A/B} + \delta_{B/C} + \delta_{C/D}$$

$$\delta_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i l_i}{A_i E_i}$$

کرنش حرارتی

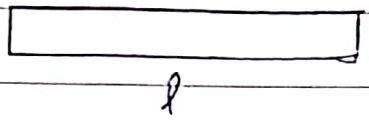
Thermal Strain

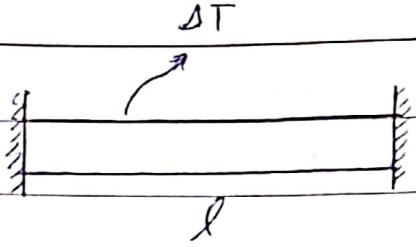
کرنش حرارتی یک استثنا است چون بدون دادن نیرو و تنش کرنشی اتفاق می افتد

کرنش { مکانیکی ϵ ، حرارتی ϵ_T }

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۸/۱۷





$\epsilon = \frac{\delta}{\ell} = \alpha \Delta T$

$\epsilon = \frac{\delta}{\ell} = 0$

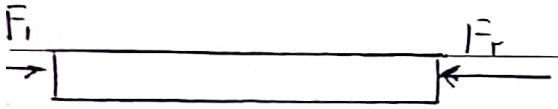
$\delta = \ell \alpha \Delta T$

تنش وجود دارد، کرنش صفر است

کرنش وجود دارد، تنش صفر است

بررسی همسان تغییر شکل‌ها ← معادله سازگاری

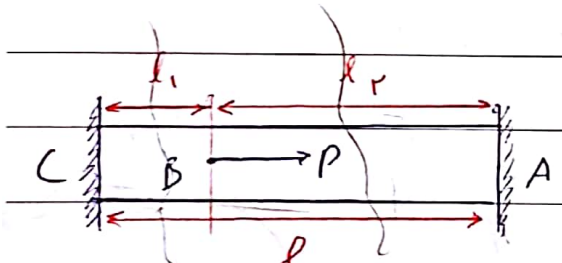
Compatibility Equation

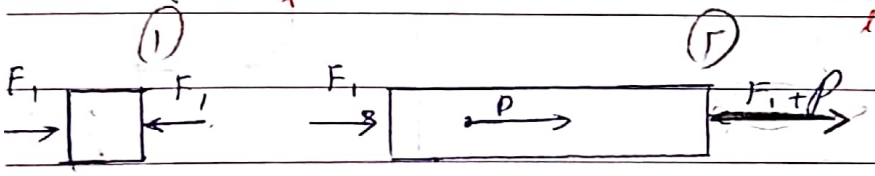


معادله تعادل ی $F_1 = F_2 = P$

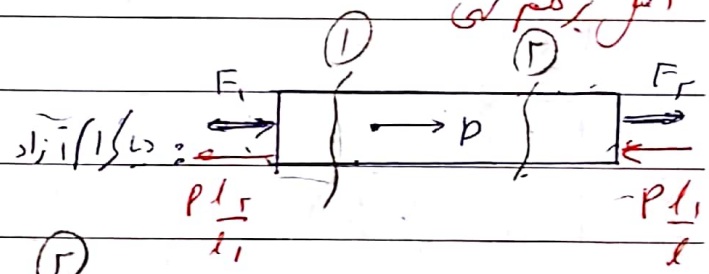
$\delta = \ell \alpha \Delta T - \frac{P\ell}{AE} = 0$ معادله سازگاری $\Rightarrow P = EA\alpha\Delta T$

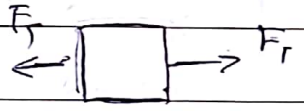
$\sigma = \frac{P}{A} = E\alpha\Delta T$





اصل برهم نهی





$\begin{cases} F_1 + F_2 + P = 0 & \text{معادله تعادل} \\ \delta_{A/C} = 0 & \text{معادله سازگاری} \end{cases}$

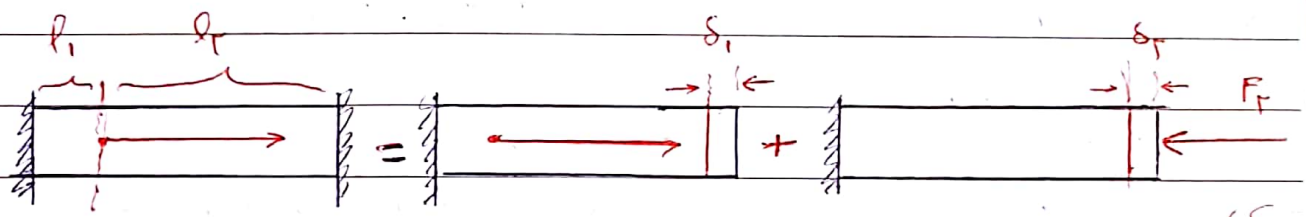
$\delta_{A/B} + \delta_{B/C} = 0$

Scanned by CamScanner

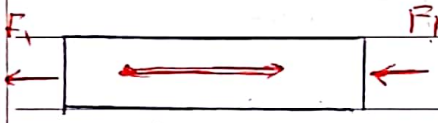
۱۳۹۷/۳/۱۷

$$\frac{F_2 l_2}{AE} - \frac{F_1 l_1}{AE} = 0 \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow F_2 = -P \frac{l_1}{l}$$

$$F_1 \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) + P = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{-P l_2}{l_1 + l_2} \Rightarrow F_1 = -P \frac{l_2}{l}$$



تعیین جمع آثار

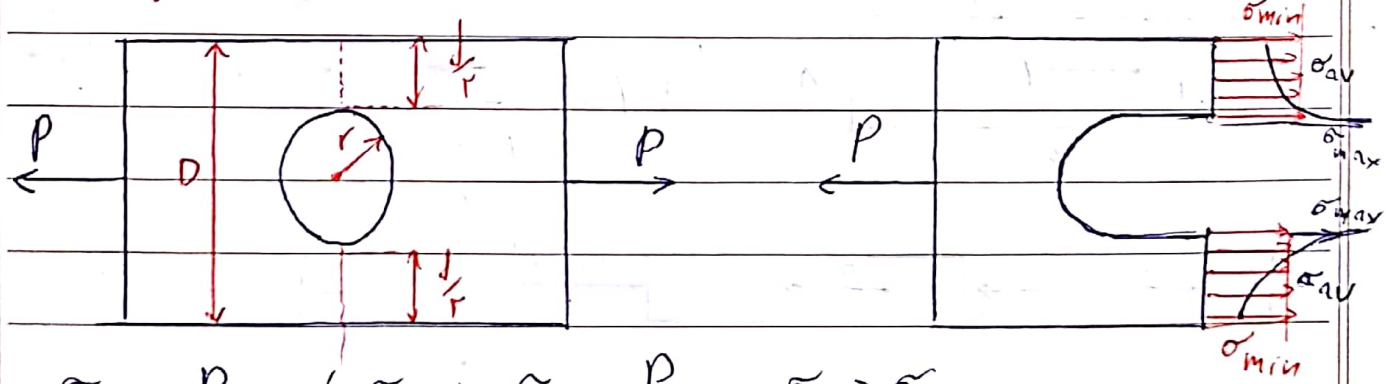


$$\delta_1 = \frac{P l_1}{AE} \qquad \delta_2 = -\frac{F_2 l}{AE}$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 0 \Rightarrow \frac{P l_1}{AE} - \frac{F_2 l}{AE} = 0 \Rightarrow \boxed{F_2 = P \frac{l_1}{l}}$$

تمرکز تنش ((Stress Concentration))

خاصیت ۲:



$$\sigma_1 = \frac{P}{A_0} \quad / \quad \sigma_{av} = \sigma_2 = \frac{P}{A} \qquad \sigma_2 > \sigma_1$$

$$A = (D - 2r)t$$

$$\sigma_{max} = K \sigma_{av} \quad ! \quad \boxed{K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{av}}} \qquad \boxed{\sigma_{av} = \frac{P}{(D-2r)t}}$$

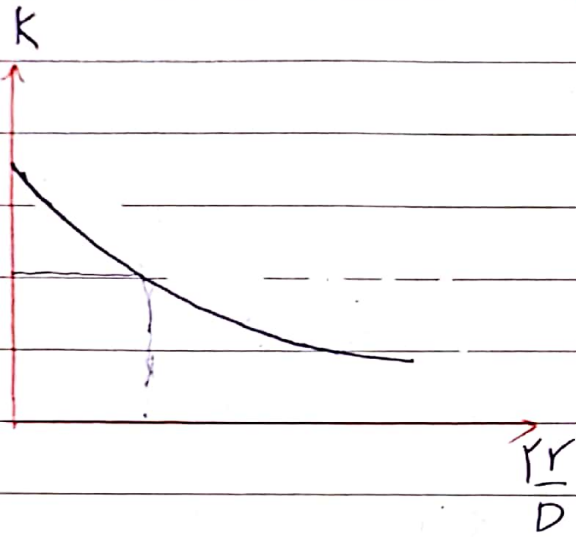
↓

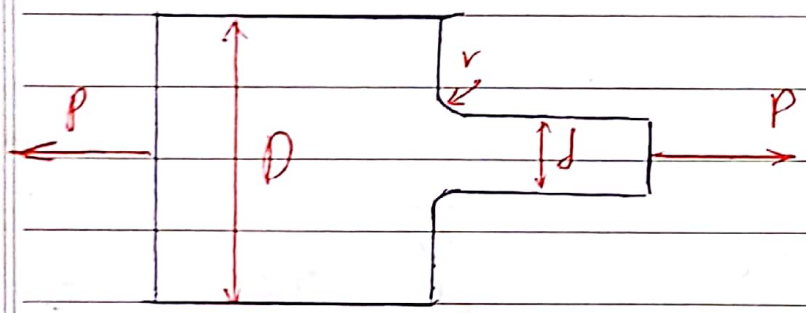
ضریب تمرکز تنش

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۸/۲۱

تنش در سطح مقطع کمترین قسمتی دیسک

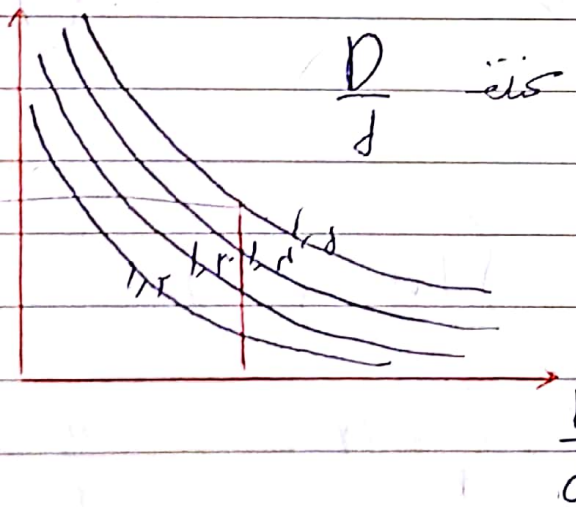




$\sigma_{max} = K\sigma_{av}$

$\sigma_{av} = \frac{P}{td}$

ضریب تمرکز تنش



۱۴۰۲/۰۸/۲۱

فصل ششم: پیچش

Torsion

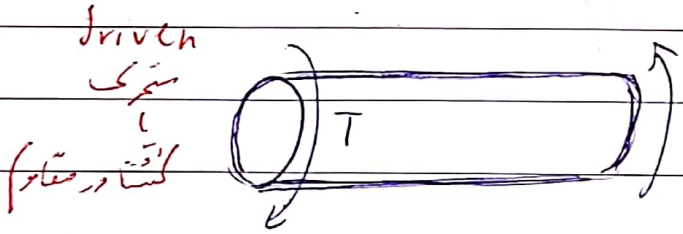
میله bar

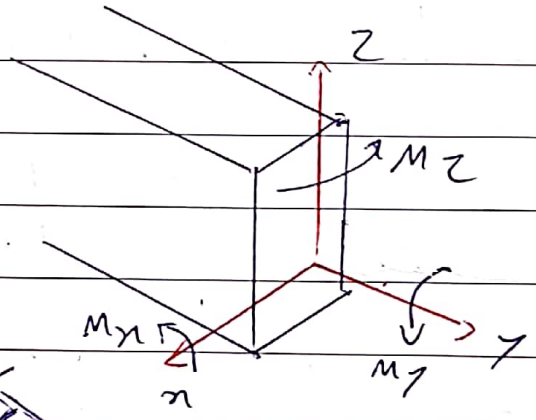
ستون Column

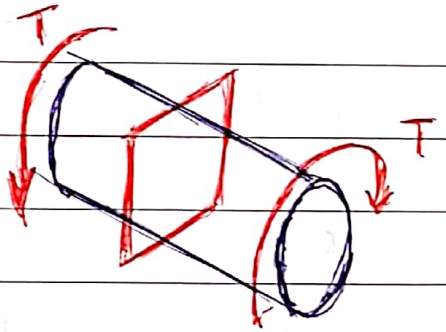
تیر beam برای تحمل کشش، خمشی استفاده می‌شود

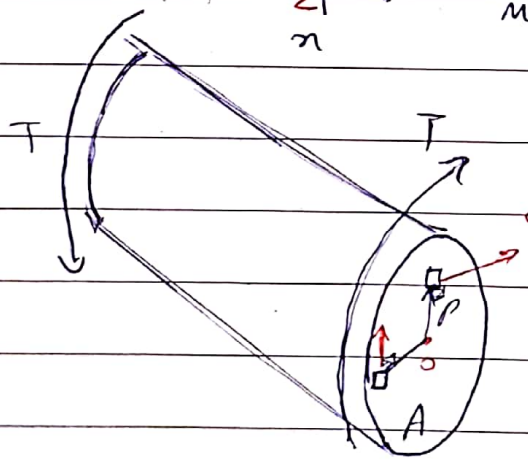
محور shaft: عضوی است که برای تحمل گشتاور پیچشی طراحی می‌شود

Torsional moment / Torque









$$\int dM = \int \rho\, dF \Rightarrow$$

$$T = \int_A \rho\, dF \quad , \quad \tau = \frac{dF}{dA} \Rightarrow dF = \tau\, dA$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \int_A \rho\, \tau\, dA}$$

$\tau = \tau(\rho)$ تابع ρ است و تابع θ نیست

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۸/۲۳

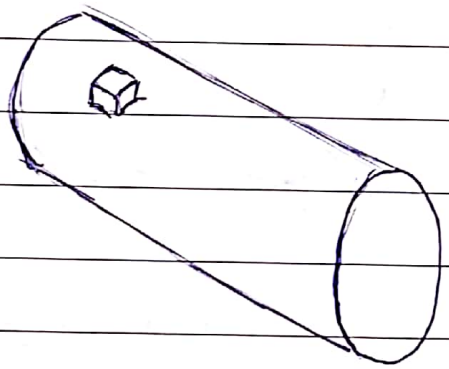
مسئله : یافتن توزیع تنش برشی در سطح مقطع محور تحت پیچش

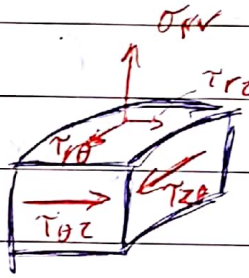
نکته : مسئله‌ی پیدا کردن توزیع تنش در مقطع یک جسم یک مسئله‌ی امپتی استاتیکی است

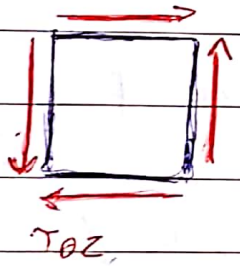
سطح آزاد free surface : سطحی که در آن نیرو سطحی وجود ندارد

traction_free : یعنی کسیت ها تانسوری در سطحی مد نظر صفر است یعنی ۳ معادله

سه است نه ۹ معادله

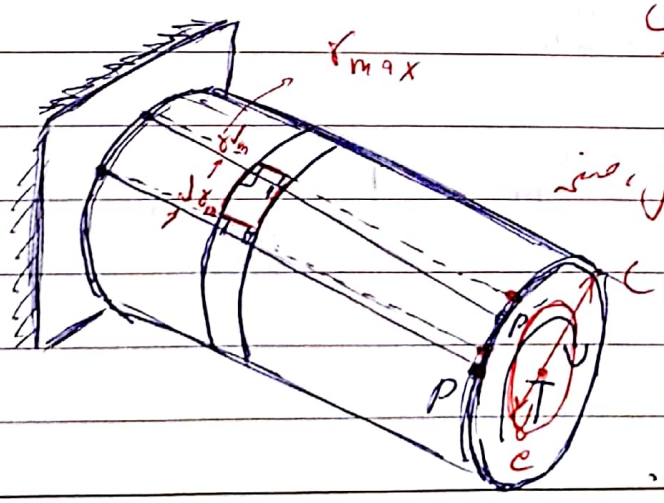






$\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0$

$\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \tau_{\theta z}$



فرضیات پیچش محور های دایره ای

۱- صفحه مقطع عرضی پس از تغییر شکل، صفحه

باقی می ماند.

$\tau \propto \rho$

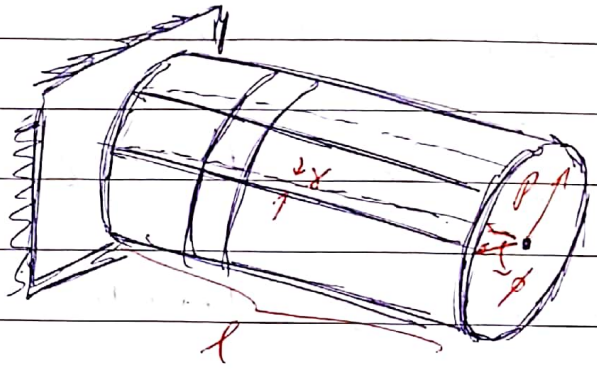
$\tau_{max} \propto \gamma_{max}$

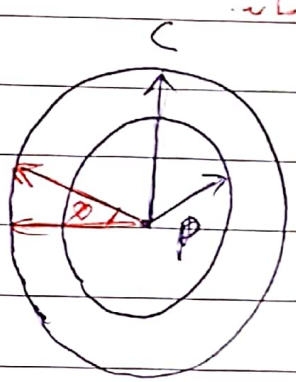
NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۸/۲۳

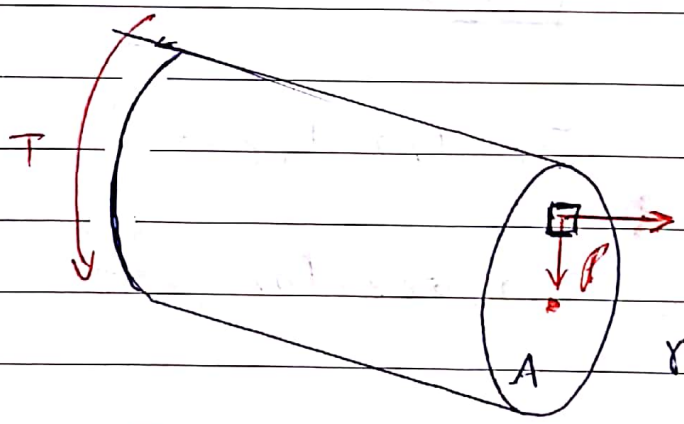
۲- خطوط راست که در سطح از صدا روی مقاطع عرضی پس از تغییر شکل خط راست باقی می‌ماند.





$$\rho d\phi = l\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\rho d\phi}{l} \Rightarrow \boxed{\gamma_m = \frac{C d\phi}{l}}$$

(*) γ در سطح مقطع کوچکتر از γ در سطح مقطع بزرگتر است ولی هردو کرنش برشی هستند



$$\int_A \rho \tau \, dA = T$$ معادل تبادل

$$\gamma = \frac{\rho}{l} d\phi \qquad \gamma_m = \frac{C}{l} d\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\rho}{C} \gamma_m} \quad (1)$$ رابطه سازگاری

$$\tau = G\gamma \Rightarrow G\gamma = \frac{\rho}{C} G\gamma_m \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{C} \tau_m}$$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۰۸/۲۹

J : polar moment of inertia

ممان اینرسی قطبی

$$\int_A \rho \frac{\rho}{c} \tau_m \, dA = T \Rightarrow \frac{\tau_m}{c} \int_A \rho^2 \, dA = T \Rightarrow \boxed{\tau_m = \frac{Tc}{J}}$$

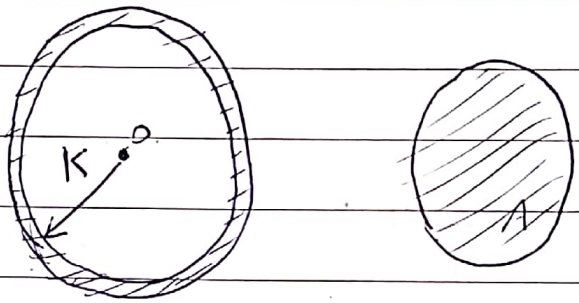
$J = I_{xx} + I_{yy}$

دایره $J = \frac{\pi}{2} c^4$

$I_{xx} = \int_A y^2 \, dA$

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{4} c^4$

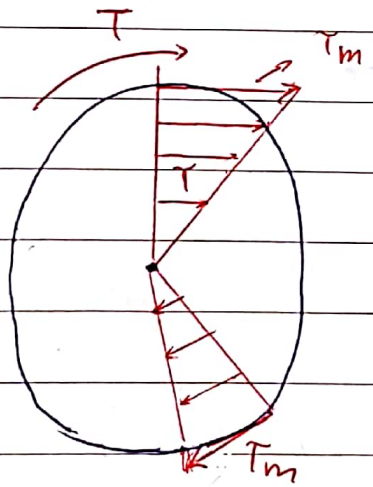
$I_{yy} = \int_A x^2 \, dA$

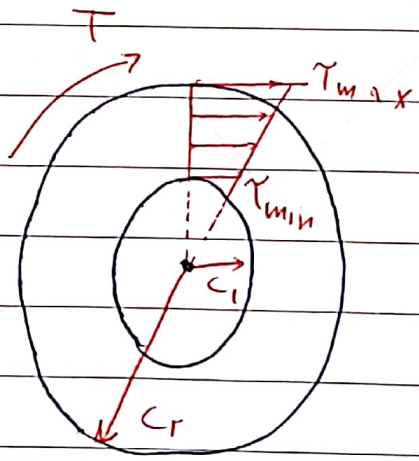


$K^2 = \frac{J}{A}$

$J = K^2 A$

$$\rightarrow \boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}}$$





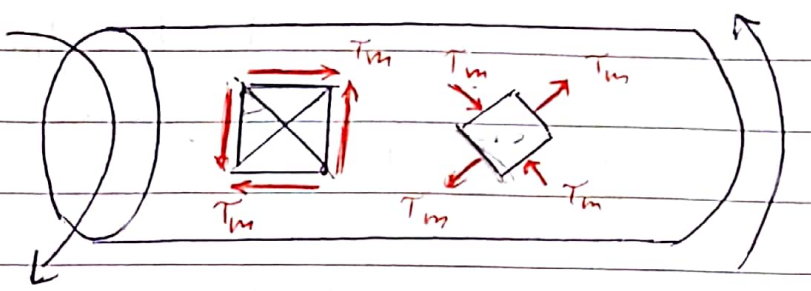
$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4)$

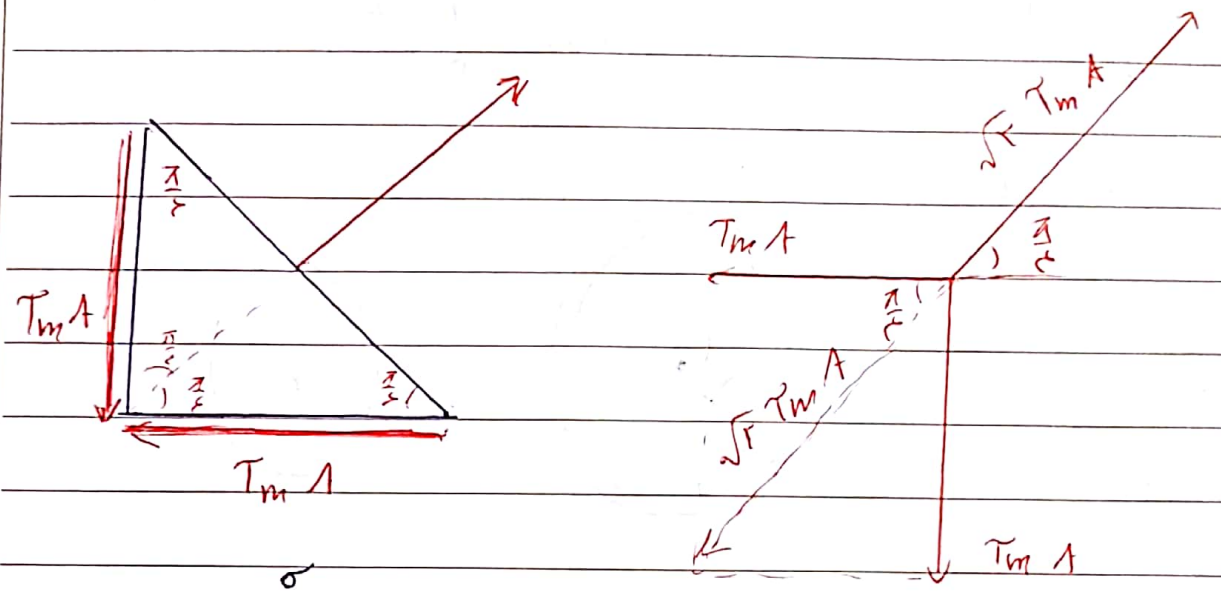
$\tau_{max} = \frac{Tc_2}{J}$

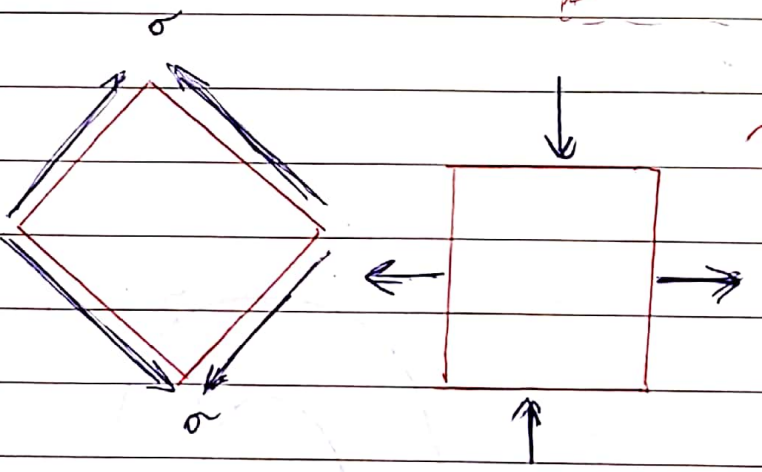
$\tau_{min} = \frac{Tc_1}{J}$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷ / ۰۸ / ۲۱



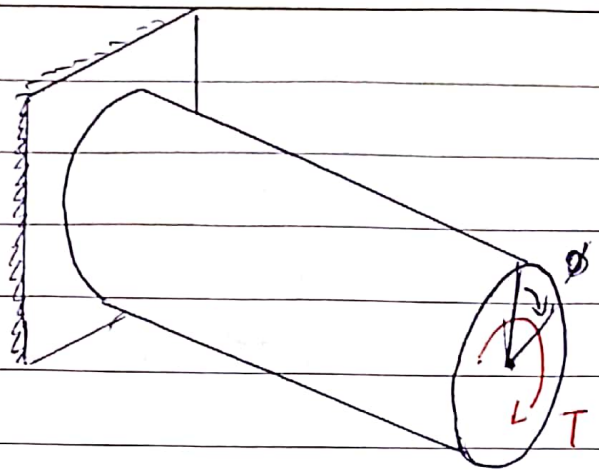




$\tau = \frac{\sqrt{2}\,\tau_m A}{\sqrt{2}A} = \tau_m$

زاویه ی پیچش محورهای دایره ای

ϕ : angle of twist

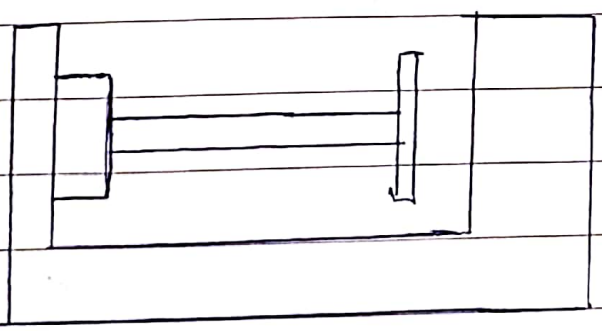


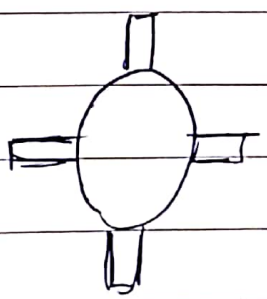
$$\left.\begin{aligned} \tau_m &= \frac{Tc}{J} \\ \gamma_m &= \frac{\tau_m}{G} \\ \gamma_m &= \frac{c}{l}\phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma_m = \frac{Tc}{GJ} = \frac{c}{l}\phi$$

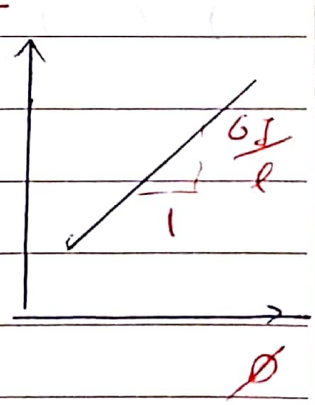
$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{Tl}{GJ}}$$

$$\delta = \frac{Pl}{AE} \Rightarrow P = \underbrace{\frac{AE}{l}}_{K}\delta$$

$$T = \underbrace{\frac{GJ}{l}}_{K}\phi = T = K\phi$$







NOTEBOOK iman

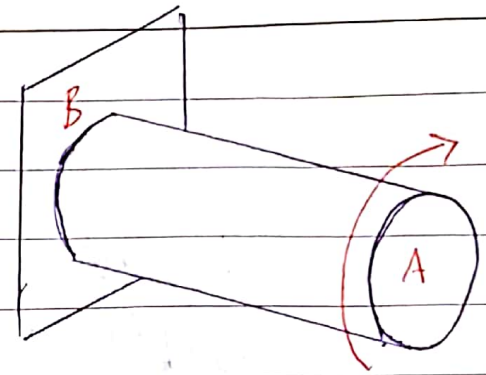
Scanned by CamScanner

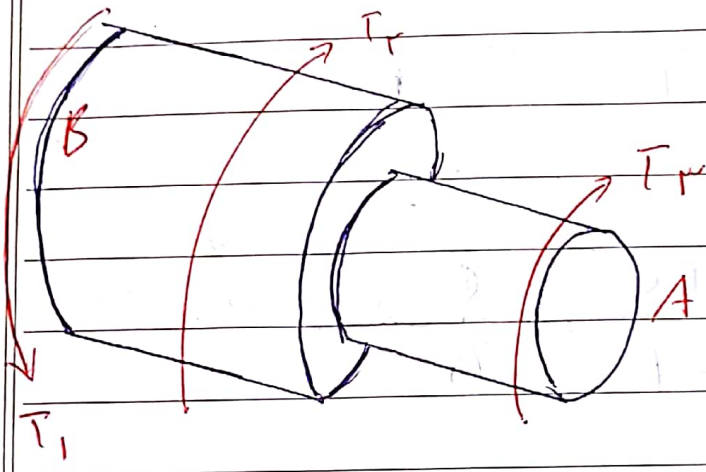
۱۳۹۶/۰۹/۰۱

$$\phi_{A/B} = \frac{Tl}{GJ}$$

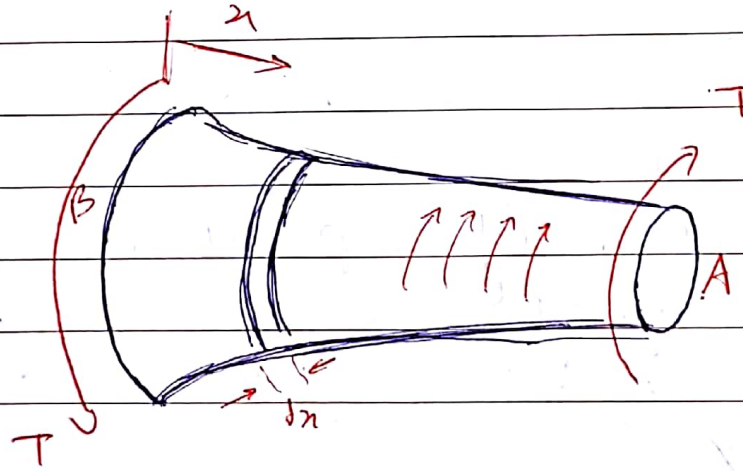
$$\downarrow$$

$$\phi_A - \phi_B$$





$$\phi_{A/B} = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i l_i}{G_i J_i}$$



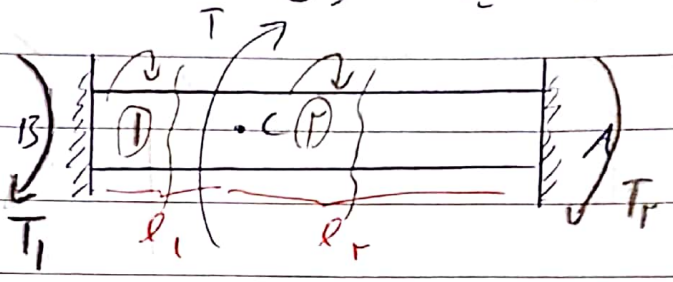
$$\int d\phi = \int \frac{T\,dx}{GJ} \Rightarrow \boxed{\phi_{1/B} = \int_0^l \frac{T\,dx}{GJ}}$$

NOTEBOOK iman

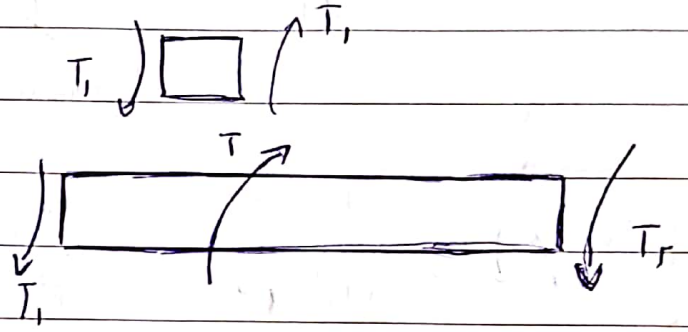
Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۹/۰۱

حل مسائل نامعین استاتیکی



$$\begin{cases} T_1 + T_2 = T & \text{معادله‌ی تعادل} \\ \phi_{A/B} = 0 & \text{معادله‌ی سازگاری} \end{cases}$$



$$\phi_{A/C} + \phi_{C/B} = 0$$

$$\frac{T_2 \ell_2}{GJ} - \frac{T_1 \ell_1}{GJ} = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

حالا که معادله‌ی تعادل داریم

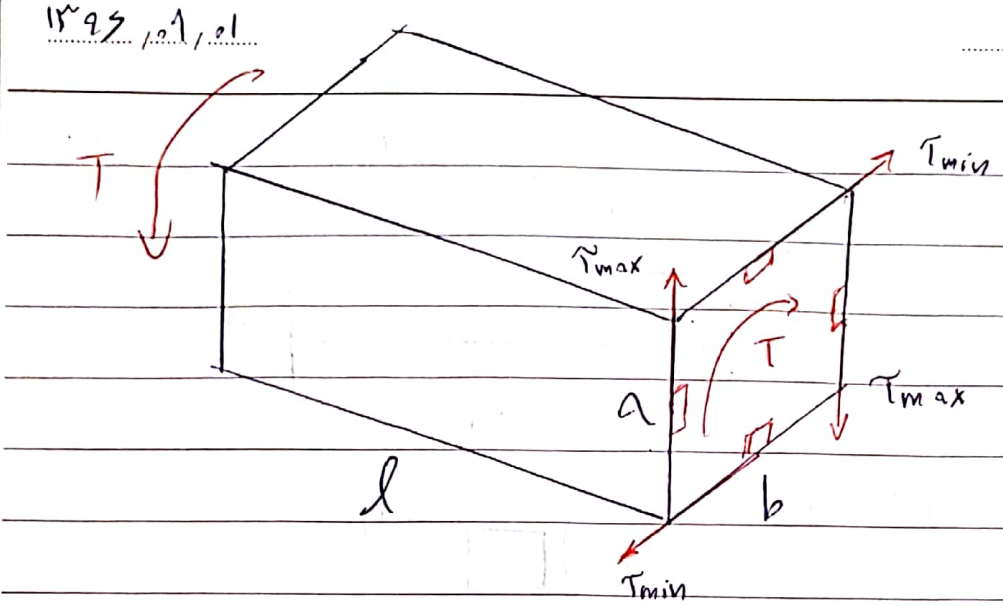
$$T_1 + T_1 \frac{\ell_1}{\ell_2} = T \Rightarrow T_1\left(1 + \frac{\ell_1}{\ell_2}\right) = T \Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{T\ell_2}{\ell_1}}$$

$$\boxed{T_2 = \frac{T\ell_1}{\ell}}$$

warping ناخوردگی

پیچش مقاطع مستدیل شکل

۱۳۹۶/۰۱/۰۱



$$\tau_{max} = \frac{T}{C_1 a b^2}$$

تنش برشی ماکزیمم

$$\phi_{A/B} = \frac{Tl}{C_2 G a b^3}$$

$\frac{a}{b}$	C_1	C_2
۱	۰٫۲۰۸	۰٫۱۴۰۶
۱٫۲	۰٫۲۱۹	۰٫۱۶۶۱
⋮		
۴	۰٫۲۸۱	۰٫۲۸۱
۵	۰٫۲۹۱	۰٫۲۹۱
⋮		
۱۰	۰٫۳۱۲	۰٫۳۱۲
⋮		
∞	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{3}\left(1 - 0.63\frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore \frac{a}{b} \geq 5$$

حالت تقریبی

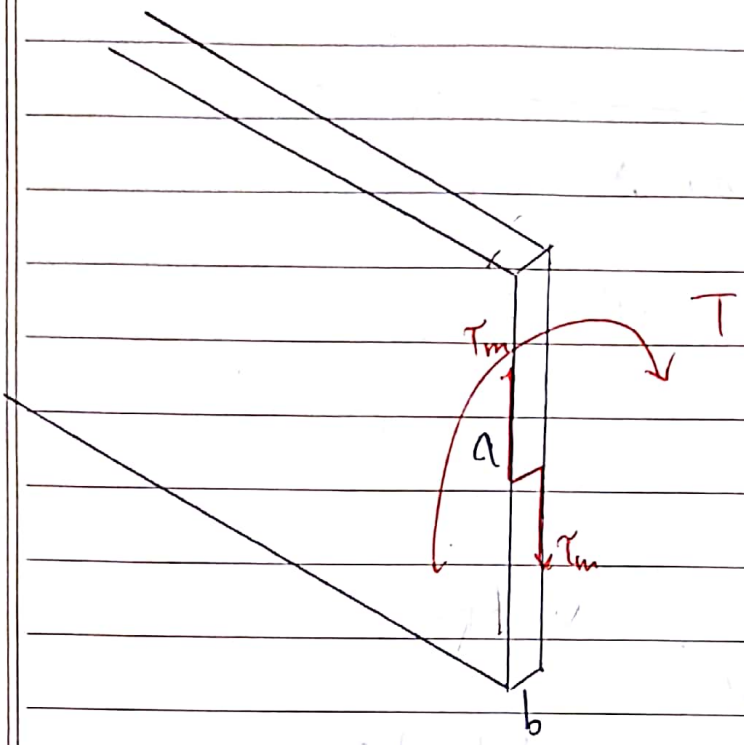
Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۹/۰۱

پیچش مقاطع جدار نازک
Torsion of thin-walled sections

thick-walled

جدار ضخیم

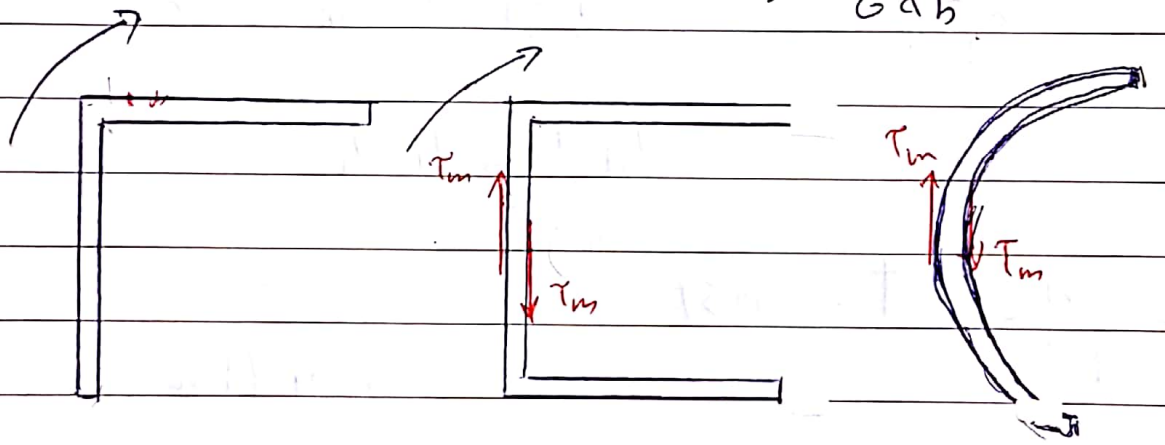


$$C_1 = \frac{1}{3}$$

$$\tau_m = \frac{3T}{ab^2}$$

حداکثر تنش برشی در جدار کوتاه

$$\phi_{A/B} = \frac{3Tl}{Gab^3}$$

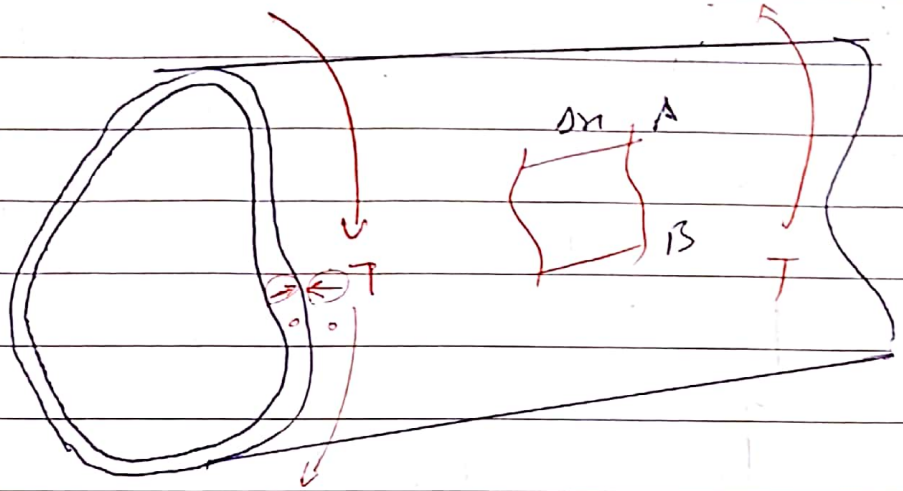


نبشی

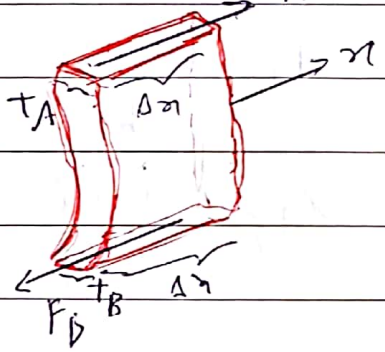
ناودانی

۱۳۹۶/۰۹/۰۸

بحث مقاطع جدار نازک بسته



چون سطح آزاد است



$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_A = F_B$$

$$\tau_A t_A \Delta x = \tau_B t_B \Delta x$$

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \tau t = \text{const}}$$

جریان برشی
shear flow

* تولیدی تنش عمود بر سطح آزاد صفر است یا وجود ندارد.

* تنش عمود بر مقطع در ابتدا و انتهای سطح آزاد صفر بوده دارای تنش عمود بر مماسی

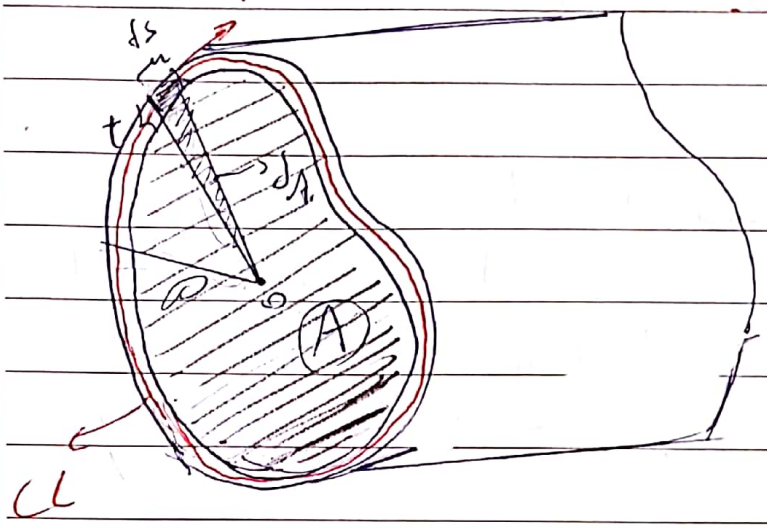
که بین آنهاست تنها قابل صرف نظر است

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۰۹/۰۱

* تنش برشی در مقطع میله باریک بسته تحت پیچش همیشه مماس بر خط مرکزی است center line (CL)

$F = \tau t ds$



$$\int dT = \int \rho \tau t ds \Rightarrow T = \int \tau t \rho ds = \tau t \int \rho ds$$

$$= \tau t \int 2 dA = 2 A \tau t$$

q

A: سطح محصور در خط مرکزی

$$\tau = \frac{T}{2At} \qquad q = \frac{T}{2A}$$

طراحی محورهای انتقال قدرت

Design of transmission shafts

Power

۱۳۹۰/۰۹/۰۸

$P = T\omega$ واحد $\frac{N.m}{s}$ یا وات — rad واحد است

$P = F v$ $\quad S_{su} \simeq 0.5 S_{ut}$ / $T_{all} = \frac{S_{su}}{n}$

$P = T\omega = T(2\pi f) \Rightarrow T = \frac{P}{2\pi f}$

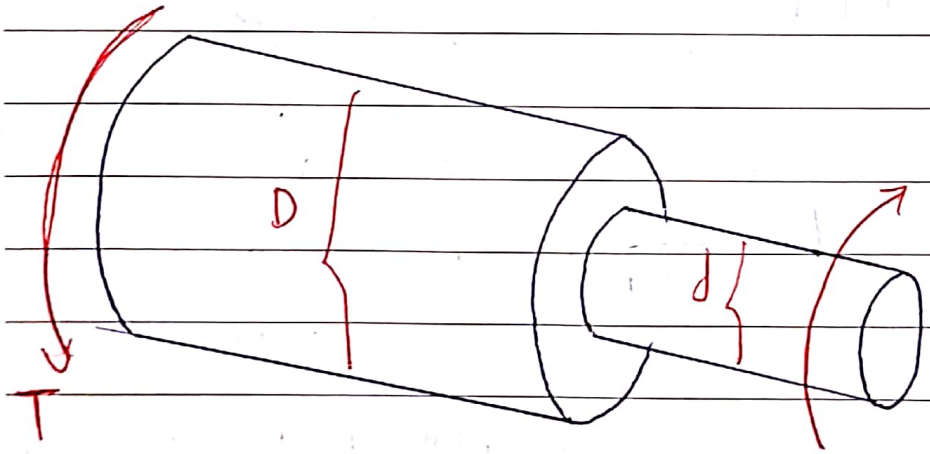
$T_{all} = T_m = \frac{TC}{J} \Rightarrow T = \frac{J}{C} T_{all}$

$\Rightarrow \frac{J}{C} \cdot T_{all} = \frac{P}{2\pi f}$

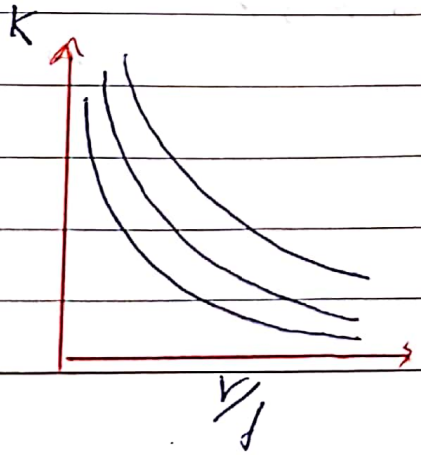
برای دایره توپر: $\frac{J}{C} = \frac{\pi}{2} C^3$

برای دایره توخالی: $\frac{J}{C} = \frac{\pi}{2} \frac{C_2^4 - C_1^4}{C_2}$

$\frac{J}{C} = \frac{P}{2\pi f T_{all}}$



$T_{max} = K \frac{TC}{J}$

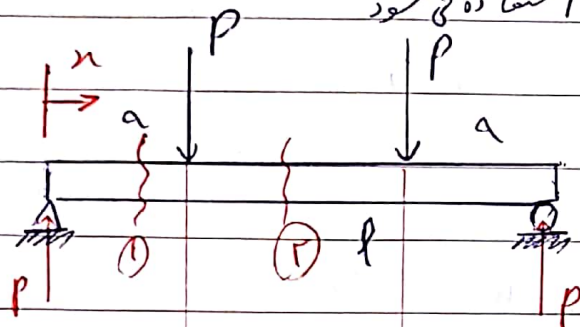


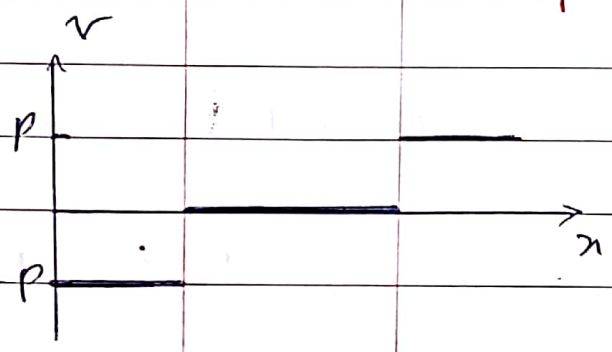
Scanned by CamScanner

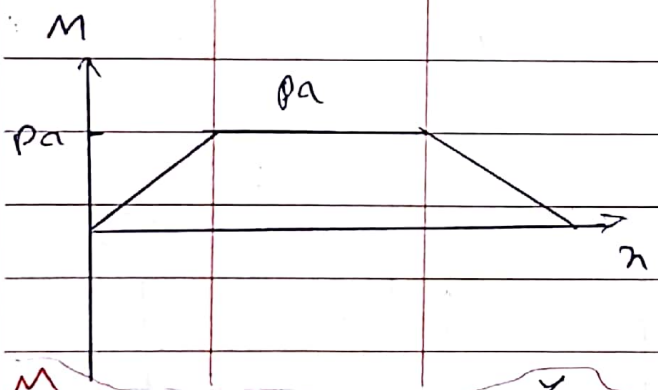
۱۳۹۷/۰۹/۱۳

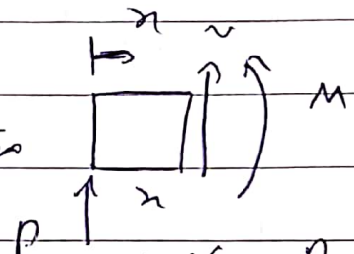
فصل چهارم: خمش خالص pure Bending

تیر عضوی است که برای تحمل گشتاور خمشی استفاده می‌شود





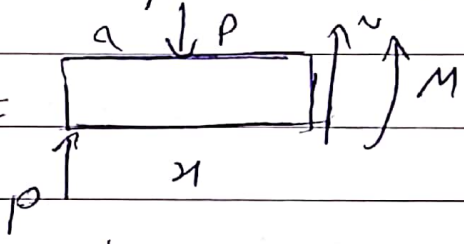




مقطع ۱:

$$V = -P$$

$$M(x) = Px$$

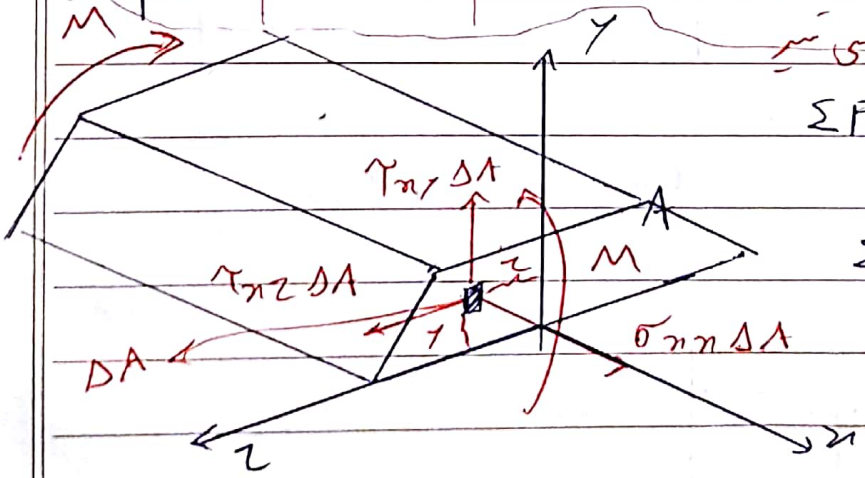


مقطع ۲:

$$V = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M = -Px + P(x-a) = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = Pa$$



نحوه توزیع تنش در مقطع عرضی تیر

$$\Sigma F_x = 0 : \int_A \sigma_{xx}\, dA = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 : \int_A \tau_{xy}\, dA = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0 : \int_A \tau_{xz}\, dA = 0 \quad (3)$$

ادامه‌ی درسول در جلسه‌ی بعد

Scanned by CamScanner

۱۴۰۲/۰۹/۱۴

$$+\circlearrowleft \sum M_x = 0 : \int_A (yT_{xz} - zT_{xy})\,dA = 0 \quad (۴)$$

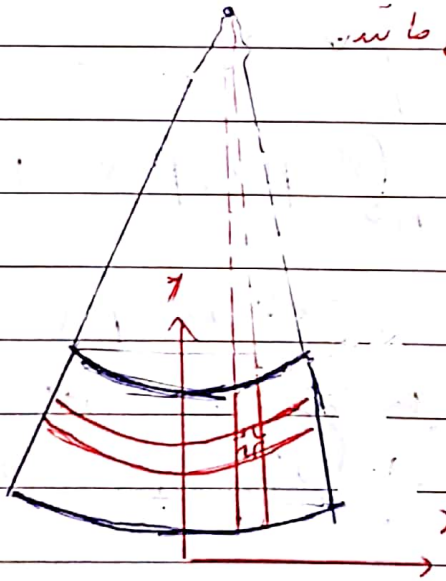
$$\sum M_y = 0 \therefore \int_A z\sigma_{xx}\,dA = 0 \quad (۵)$$

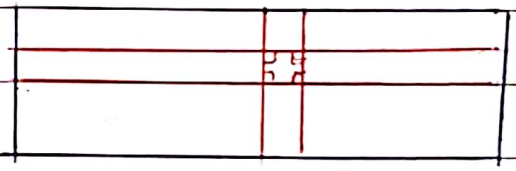
$$\sum M_z = M \div -\int_A y\sigma_{xx}\,dA = M \quad (۶)$$

فرضیات: ۱- تغییر شکل تیر در محدوده ی الاستیک رخ می دهد.

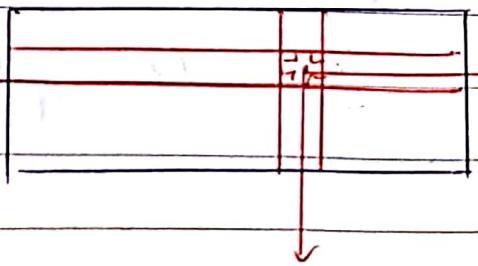
۲- تیر پس از خمش به صورت کمانی از دایره تبدیل می شود.

۳- مقاطع عرضی تیر پس از تغییر شکل صفحه باقی می مانند.





$\gamma_{xy} = 0 \rightarrow \boxed{T_{xy} = 0}$



$\gamma_{xz} = 0 \rightarrow T_{xz} = 0$

پس معادلات معادل ۲، ۳، ۴ صفر =

خود به خود برقرار هستند

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۹/۱۵

$\int_A \sigma_{xx}\, dA = 0$ (۱) نیروی محوری: حاصل تقاطع صفحه‌ی خنثی با صفحه‌ی طولی AB

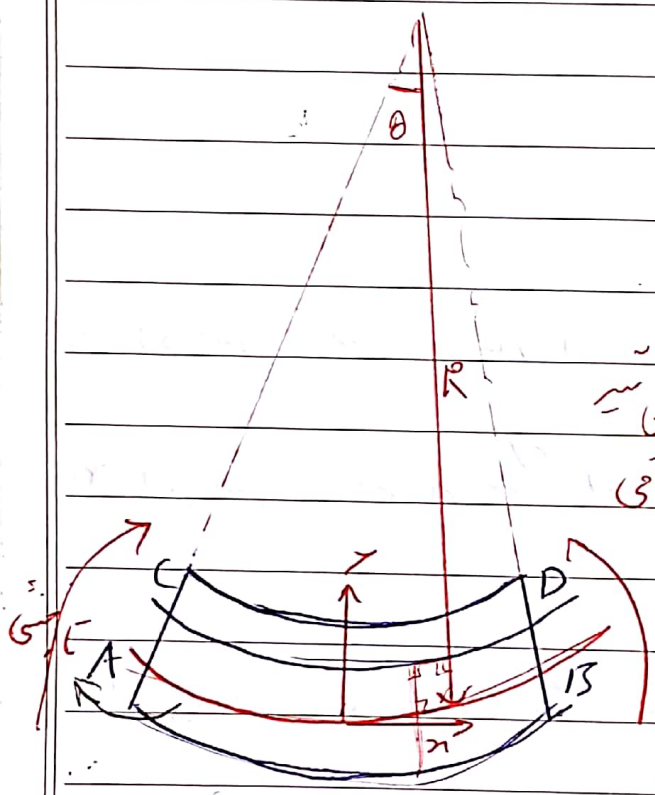
$\int_A z\,\sigma_{xx}\, dA = 0$ (۲) گشتاور خمشی: حاصل تقاطع صفحه‌ی خنثی با صفحه‌ی عرضی

$-\int_A y\,\sigma_{xx}\, dA = M$ (۳) صفحه‌ی خنثی: صفحه‌ای که ابعاد آن کمتر خمش تغییر نکند

Neutral Curve انحنای خنثی

Neutral plane صفحه‌ی خنثی

Neutral axis محور خنثی



تعریف ۳: حالت مقطع عرضی که قبل از تغییر شکل عمود بر تار خنثی است بعد از تغییر شکل نیز عمود بر تار خنثی باقی می‌ماند

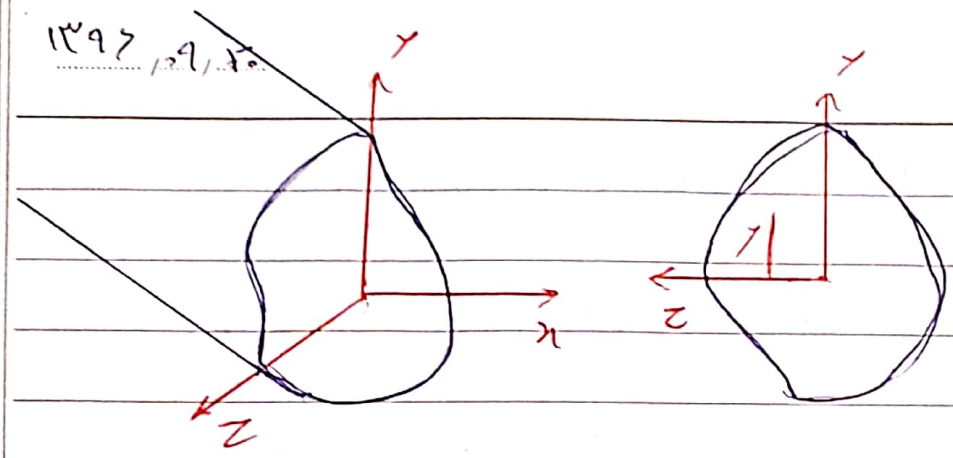
طول تار قبل از تغییر شکل $L = CD$ / تغییر طول $= (R-y)\theta - R\theta = -y\theta$

$L = R\theta$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{-y\theta}{L} = \frac{-y\theta}{R\theta} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{xx} = \frac{-y}{R}}$$ ✓

$$\boxed{\sigma_{xx} = -\frac{Ey}{R}}$$ ✓

۱۳۹۶/۰۹/۲۰



$\int_A y\,dA = 0$ ⇒ محور خنثی از مرکز دارد ۹

می گذرد

$\int_A yz\,dA = 0$ ۱۰

* اگر خمش در صفحه‌ی حاوی اتفاق بیفتد خمش متقارن است. Symmetric bending

* اگر خمش در صفحه‌ی حاوی اتفاق نیفتد خمش نامتقارن است. unsymmetric bending

اگر جسمی یک محور تقارن داشته باشد حاصل ضرب اینرسی نسبت به آن محور صفر می‌شود

برای صفر است ولی ضرورتی ندارد که محور صفر حتماً محور تقارن باشد

$I_{yz} = \int_A yz\,dA$ حاصل ضرب اینرسی

$I_{yy} = \int_A z^2\,dA$

$I_{zz} = \int_A y^2\,dA$ } ممان دوم اینرسی

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۹/۲۰

فقط وقتی تیر در صفحه‌ی xy خمش خالص می‌شود که کوپل‌ها منطبق بر یکی از محورهای اصلی تیر باشد

اثبات

$$\sigma_{xx} = -\frac{E}{\rho} y$$

$$-\int_A y\,\sigma_{xx}\,dA = M \Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A y^2\,dA = M \quad (I)$$

$$I$$

$c = y_{max}$ / c فاصله از دورترین نقطه تا محور خنثی

$$\sigma_m = E\frac{c}{\rho} \quad (II) \qquad \xrightarrow[\text{II به A}]{\text{تقسیم رابطه‌ی}} \qquad \sigma_{xx} = -\frac{y}{c}\sigma_m \quad (III)$$

$$(I) \Longrightarrow -\int_A y\,\sigma_{xx}\,dA = \frac{\sigma_m}{c}\int_A y^2\,dA = M$$

$$I$$

$$\rightarrow \sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (IV) \qquad \sigma_{xx} = -\frac{My}{I} \quad (V)$$

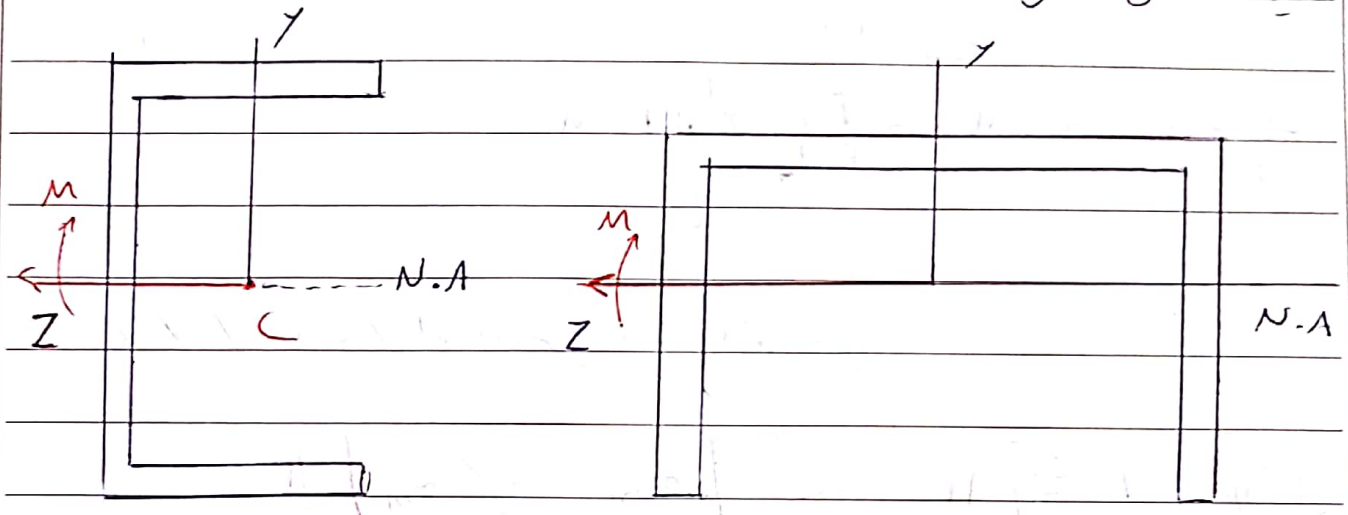
هرچه I بیشتر شود σ کوچکتر می‌شود



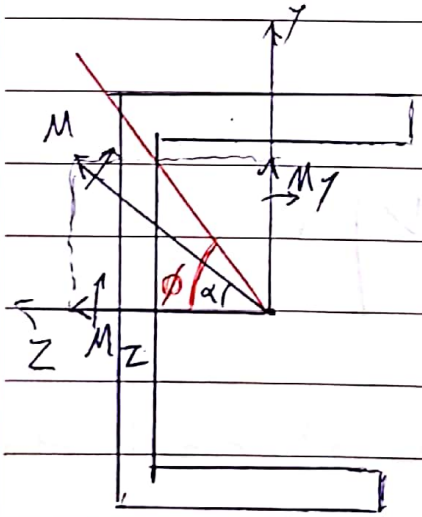
Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۰۱/۲۲

اگر محور عمان به یکی از محورهای اصلی اینرسی منطبق باشد همان محور، محور خنثی سیر تحت خمش خالص است.



اگر شکلی یک محور تقارن هم داشته باشد آن محور، محور خنثی بوده و بر آن محورهای اصلی اینرسی هستند



unsymmetric bending

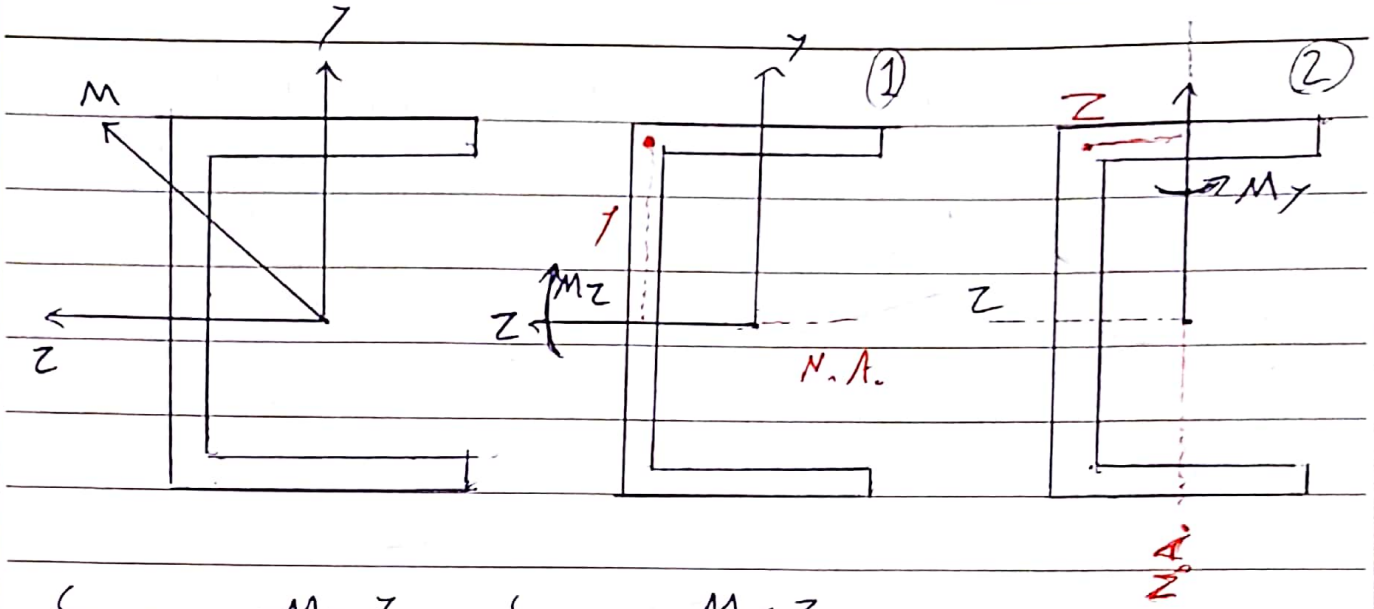
$$\sigma_{xx} = \frac{-M_y}{I}$$

$$\begin{cases} M_z = M\cos\alpha \\ M_y = M\sin\alpha \end{cases}$$

نامرئی آنها شرایط
هم آنها برقرار باشد

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۹/۲۲



$$\delta_{xx1} = \frac{-M_z y}{I_{zz}} \cdot \delta_{xx2} = \frac{M_y z}{I_{yy}}$$

$$\delta_{xx} = \frac{-M_z y}{I_{zz}} + \frac{M_y z}{I_{yy}}$$

$$\tan\phi$$

معادله خنثی $\Rightarrow \delta_{xx} = 0 \Rightarrow \frac{-M_z y}{I_{zz}} + \frac{M_y z}{I_{yy}} = 0 \Rightarrow y = \boxed{\frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_{zz}}{I_{yy}} z}$

$$\tan\phi = \frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_{zz}}{I_{yy}} = \frac{I_{zz}}{I_{yy}} \tan\alpha$$

الزاویه ϕ بزرگتر است

$$\varepsilon_{xx} = \frac{-y}{R} \rightarrow \varepsilon_m = \frac{c}{R}$$

$$\varepsilon_m = \frac{\delta_m}{E} = \frac{M\phi}{IE} = \frac{\phi}{R} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

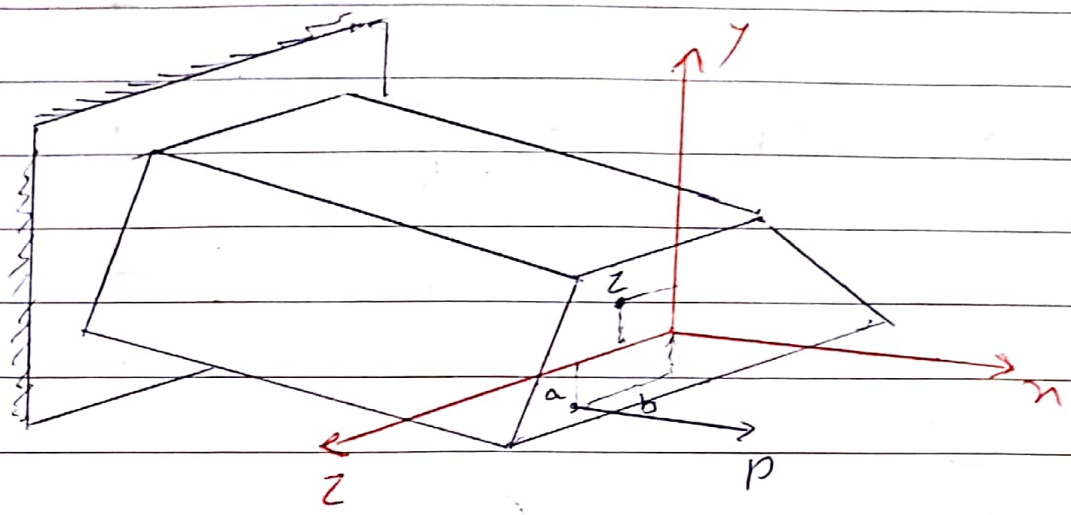
انحنا

curvature

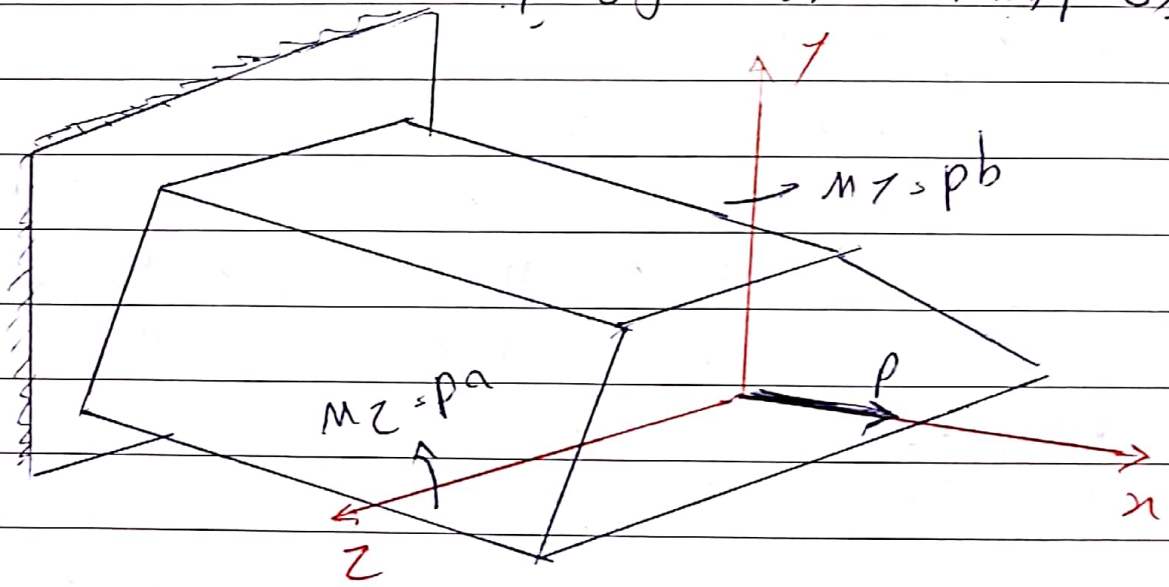
Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۰۹/۲۲

Beam subjected to Eccentric loading



ابتدا نیروی P را به Centroid منتقل می‌کنیم.



$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} - \frac{M_z x}{I_{zz}} + \frac{M_x z}{I_{xx}}$$

با توجه اصل برلدم نی

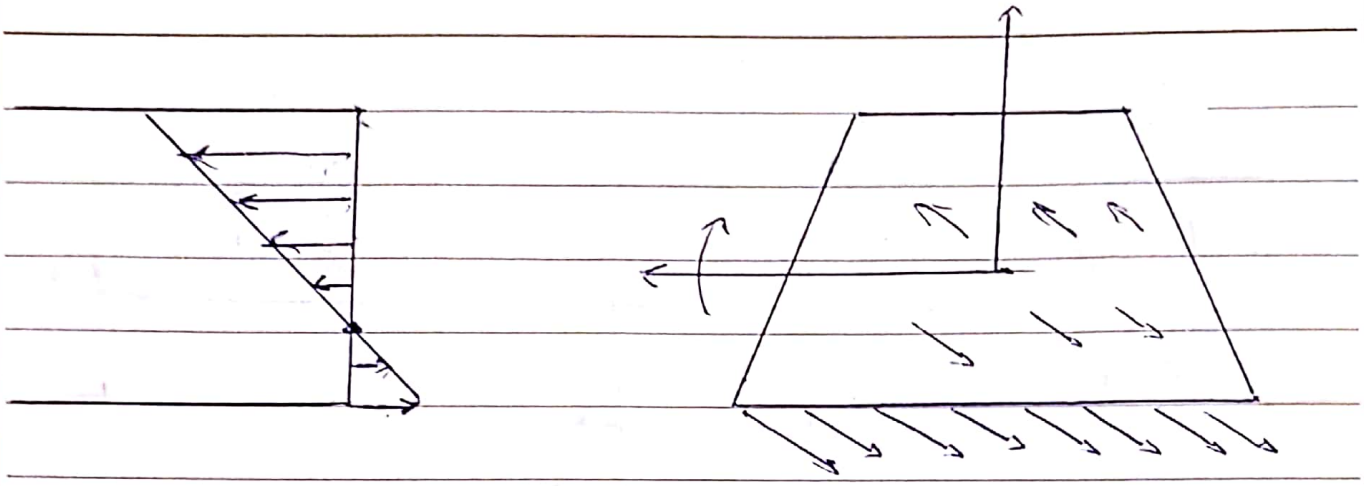
$$\gamma = \frac{M_x}{M_z} \times \frac{I_{zz}}{I_{xx}} z + \frac{P}{A} \frac{I_{zz}}{M_z}$$

معادله‌ی کمر خنثی

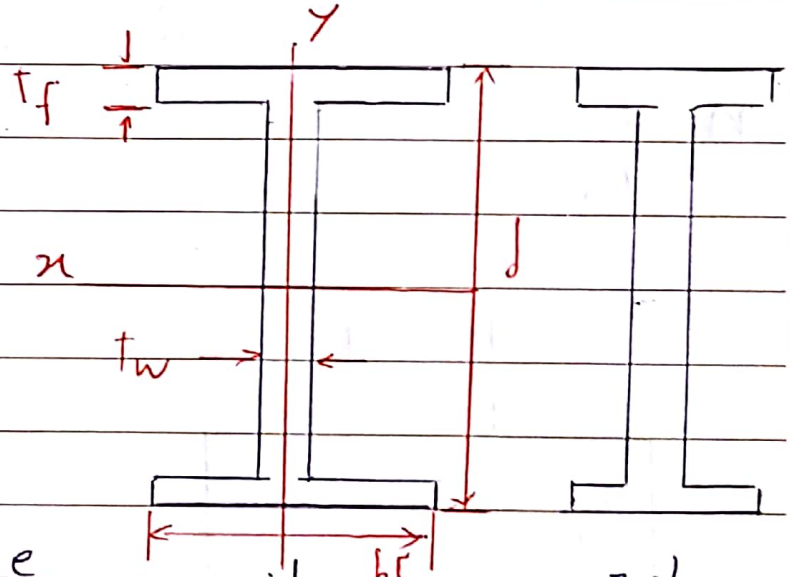
می‌تواند کاملا خارج کشش یا فشار باشد یا هردو

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۰۹/۲۲



$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{\frac{I}{c}} = \frac{M}{S}$$ ← اساسی صدل مقطع



d : depth : عمق نبی

tf : thickness flange

tw : thickness web

wide w-shapes

I-shap

W ۹۲۰ x ۴۴۹

↓ kg/m وزن

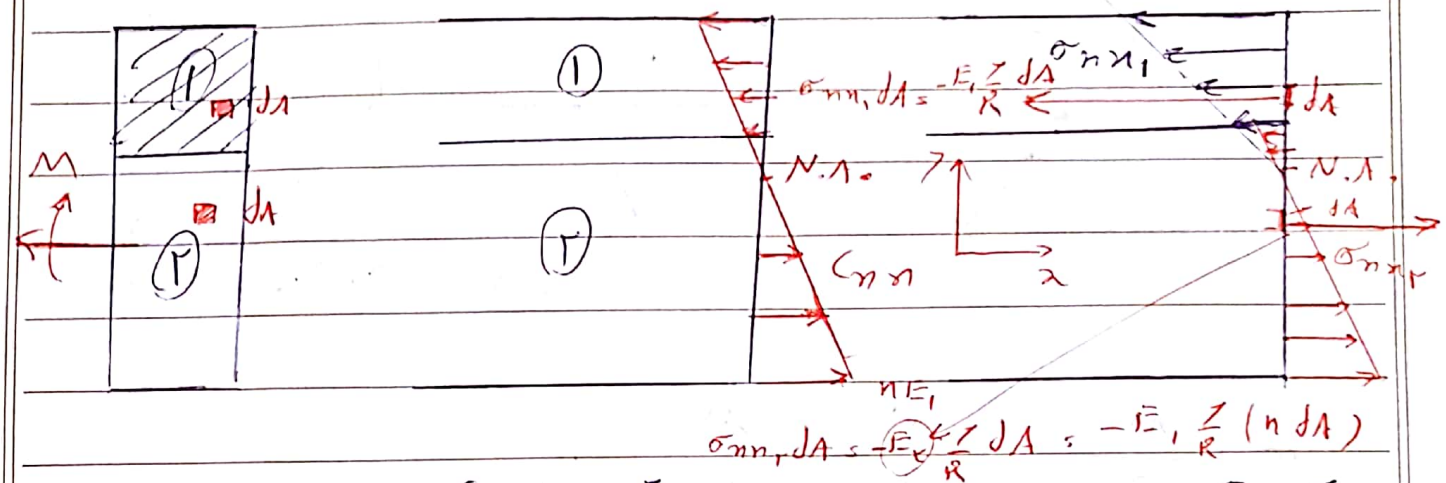
↓ عمق نبی (mm)

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۹/۲۷

خمش مقاطع مرکب

خمش تیرهای با بیش از یک جنس



$$\sigma_{xx_1} dA = -E_1 \frac{y}{R} dA = -E_1 \frac{y}{R} (n\, dA)$$

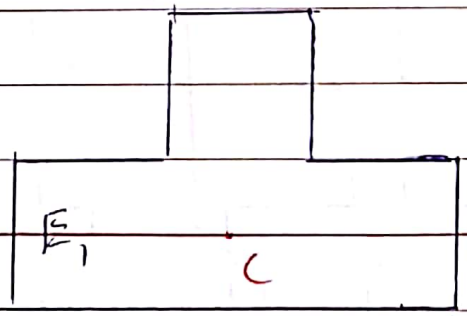
$$\sigma_{xx_1} = -E_1 \frac{y}{R}$$

$$\epsilon_{xx} = -\frac{y}{R}$$

$$\sigma_{xx_2} = -E_2 \frac{y}{R}$$

$$n = \frac{E_2}{E_1}$$

مقطع معادل



$$\sigma_{xx_1} = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_{xx_2} = -\frac{nMy}{I}$$

اینجا مساحت مقطع دوم را n برابر می کنیم بدون اینکه فاصله تا محور خنثی تغییر کند

NOTEBOOK iman

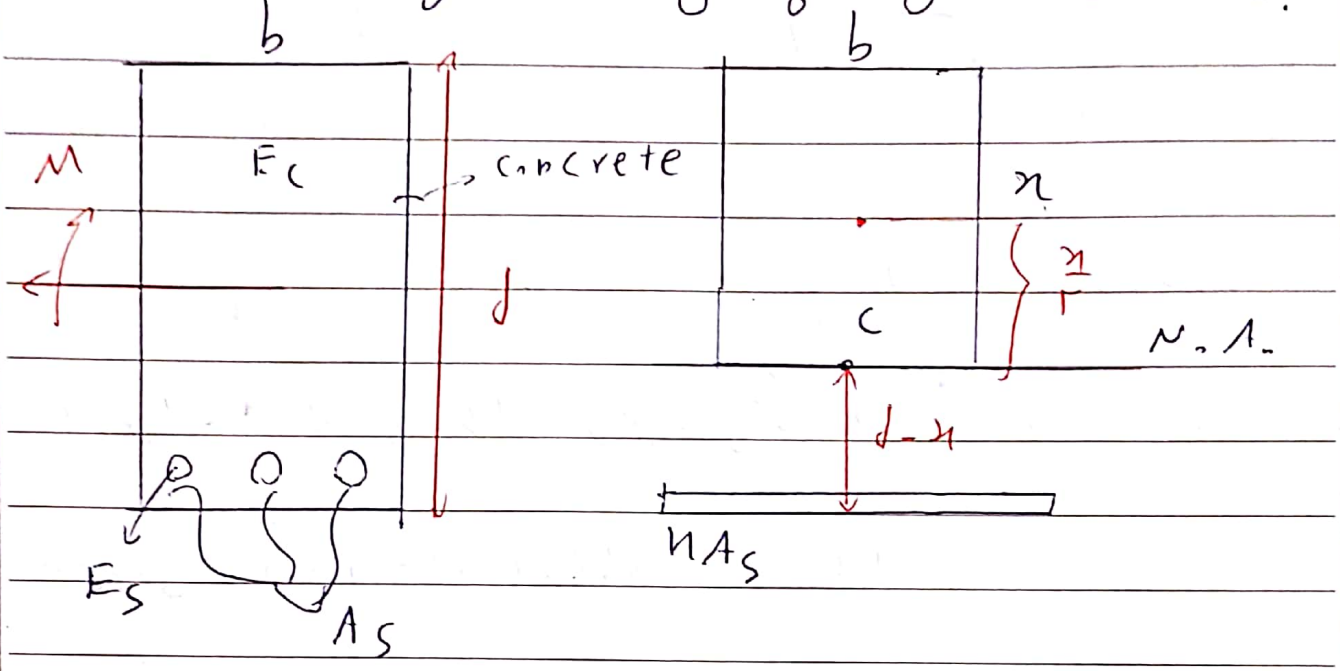
Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۰۹/۲۷

Reinforced concrete — تحلیل تنش خمشی در بتن مسلح

armed

بتن فشار را می‌تواند تحمل کند ولی کشش را نمی‌تواند تحمل کند



$n = \frac{E_s}{E_c}$

نسبت به مرکز دوار: $Q = 0$

$$EJA = 0$$

$$\frac{n}{2} b n - (nA_s)(d-n) = 0$$

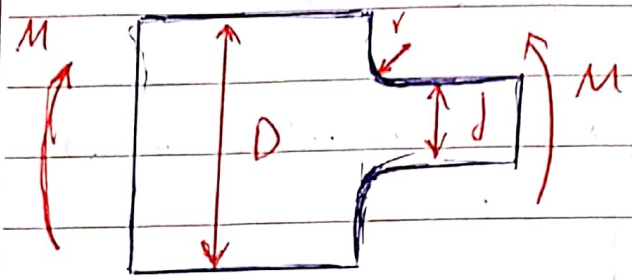
$$\frac{b}{2} n^2 + nA_s n - nA_s d = 0 \quad \checkmark$$

$$I = \frac{1}{12} b n^3 + (bn)\left(\frac{n}{2}\right)^2 + (nA_s)(d-n)^2$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۰۹/۲۹

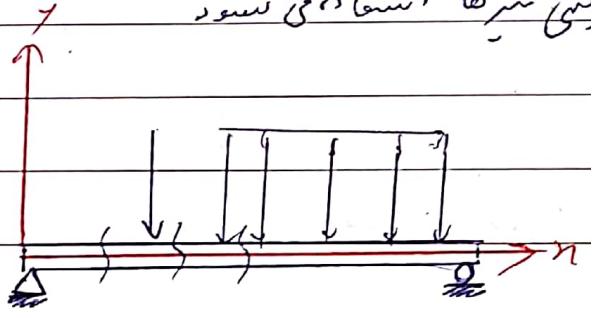


$$\sigma_m = K\frac{Mc}{I}$$

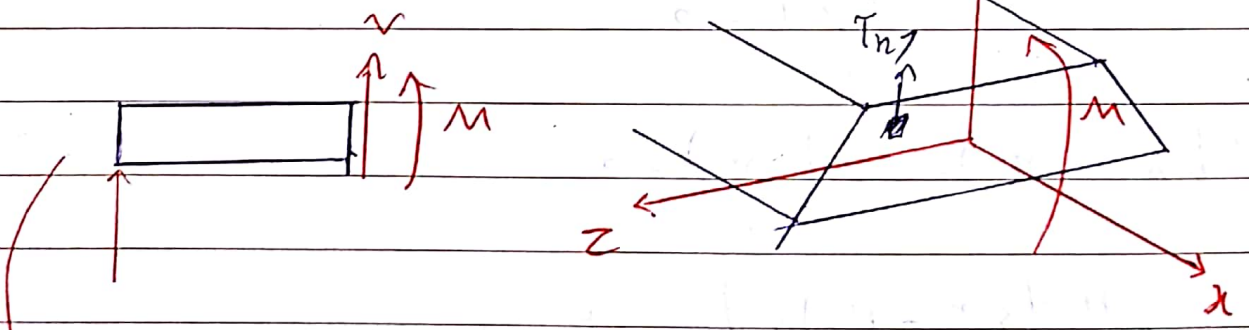
فصل پنجم : بارگذاری عرضی تیرها transverse loading

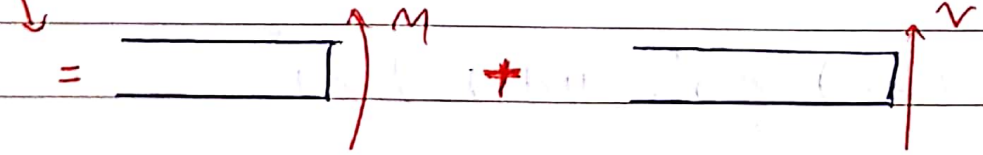
با فرض اینکه تیردی برشی شرایط تغییر شکل ناشی از گشتاور خمشی را تغییر ندهد، از اصل

سن ونان برای تحلیل خمشی بارگذاری عرضی تیرها استفاده می شود



$$\int_A \tau_{xy}\,dA = V$$



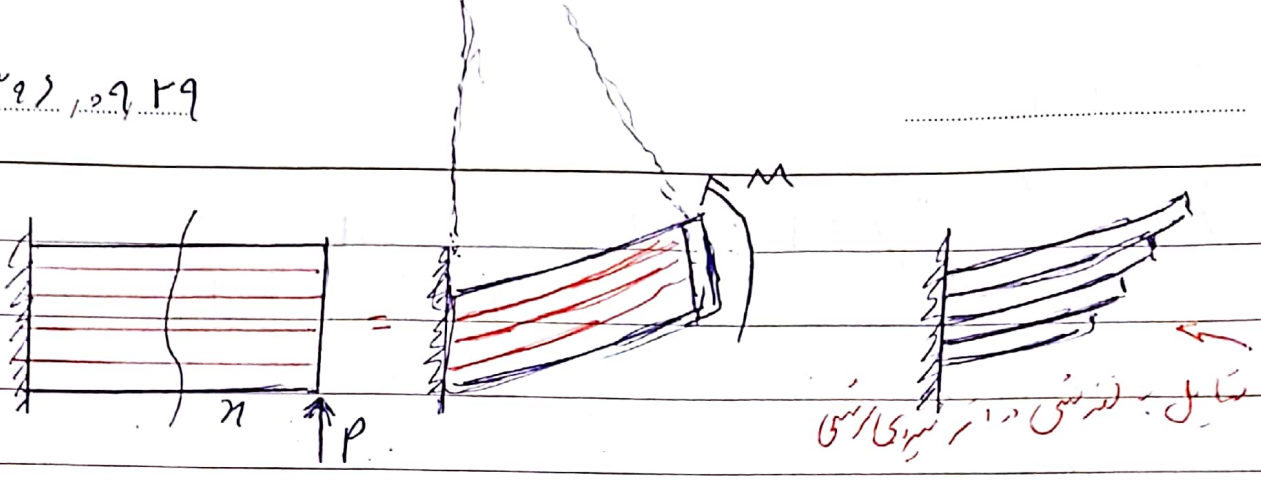


$$\sigma_{xx} = -\frac{My}{I}$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

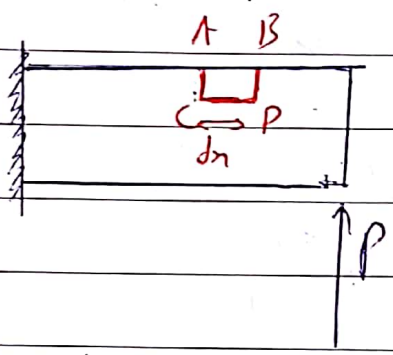
۱۳۹۷/۰۹/۲۹

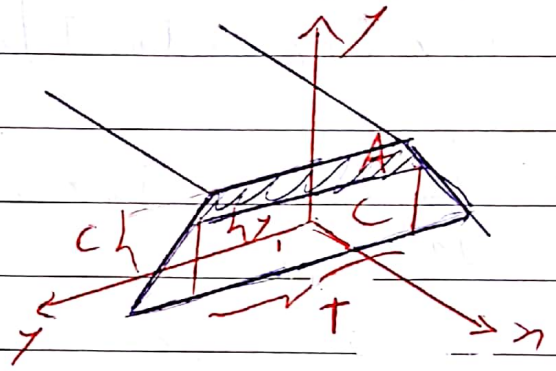


مثال: تنش در تیری آزاد

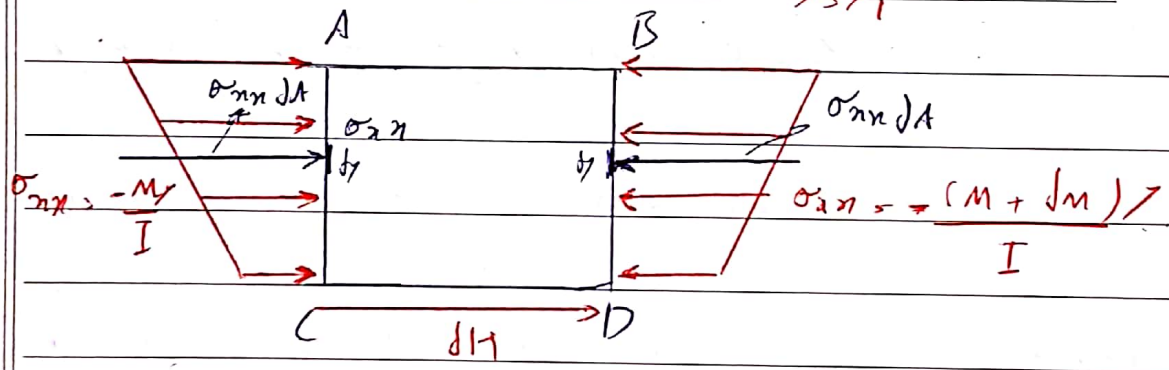
تفاوت بارگذاری عرضی با حالت خمشی در واقع این است که نیروی V تنها باعث تنش

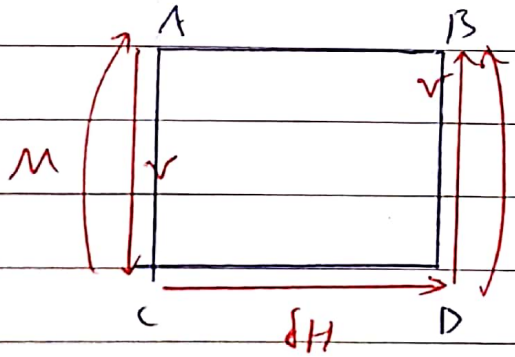
در صفحات طولی ایجاد می‌کند





$\gamma_2 > \gamma_1$





$$\Sigma F_x = 0 : \int_A \frac{My}{I} dA - \int_A \frac{(M+dM)y}{I} dA + dH = 0$$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۹/۲۹

$$dH = \int \frac{dm}{I} \gamma dA = \frac{dm}{I} \int_{\gamma_1}^{\gamma=c} \gamma dA = \frac{dm}{I} Q$$

$\tau_{rz} = \tau_{rz}(z)$ تابع z است — مکان اولین سطح

$$Q = \int_{\gamma=\gamma_1}^{c} \gamma dA = \bar{\gamma} A$$

این dA را dA میری قبل مقاومت است $\leftarrow dA$

$$dH = \tau_{rz} (t dx) \Rightarrow \tau_{rz} t dx = \frac{dm}{I} Q \Rightarrow$$

$$\tau_{rz} = \frac{dm}{dx} \frac{Q}{It} \Rightarrow \tau_{rz} = \frac{VQ}{It}$$

$\frac{dm}{dx} = V$

برای کل مقطع است

به مقطعی که ردیم مربوط است

① اگر برش روی محوری باشد $\gamma_1 = c$ ، $Q = 0$ می شود

② اگر برش روی محوری باشد $Q = 0$ می شود

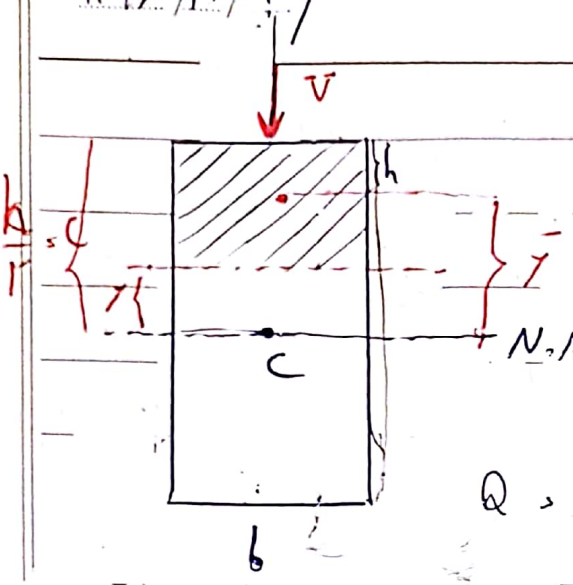
مارپیچ

③ حداکثر Q زمانی است که $\gamma_1 = 0$ باشد یا به عبارت دیگر روی Centroid باشد

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۱۰/۰۳



$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} \quad , \quad q = \tau \times t$$

$$\Rightarrow q = \frac{VQ}{I}$$

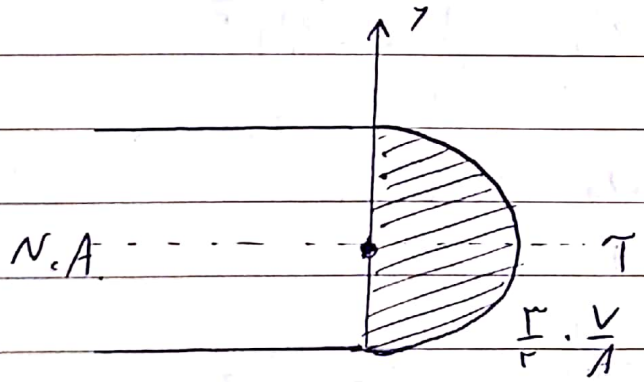
$$Q = \bar{y}A = \frac{1}{2}(c+y)b(c-y) = \frac{b}{2}(c^2-y^2)$$

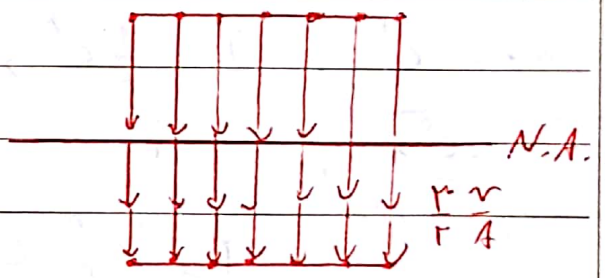
$$\Rightarrow I = \frac{1}{12}bh^3 \quad , \quad t = b$$

$$\tau = \frac{V(\frac{b}{2})(c^2-y^2)}{\frac{1}{12}bh^3b} = \frac{6V(c^2-y^2)}{b(2c)^3} = \frac{3}{4}\frac{V}{bc}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$$

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left[1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right] \quad \because y = \pm c \Rightarrow \tau = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow \tau_m = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$





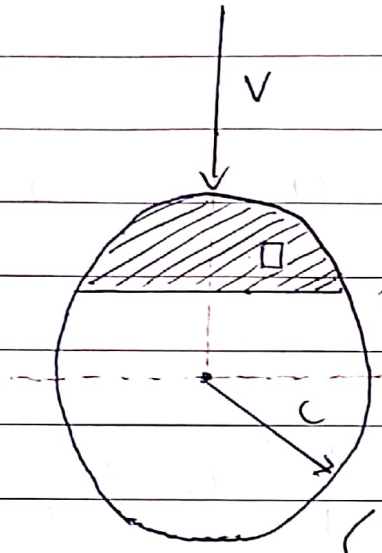
Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۱۰/۰۳

$$F = \int \tau \, dA = \int T \cdot t \cdot ds \Rightarrow U_{AB} = \int_A^B \tau \, ds$$

مراحل حل مسائل در بارگذاری فرنی سیرها

۱- یا متن کمد خمشی ۲- برشی دار



$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$Q = \int_A y \, dA =$$

$$\int_{-\sqrt{c^2-y_1^2}}^{\sqrt{c^2-y_1^2}} \int_{y_1}^{\sqrt{c^2-x^2}} y \, dy \, dx = \int_{-\sqrt{c^2-y_1^2}}^{\sqrt{c^2-y_1^2}} \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{y_1}^{\sqrt{c^2-x^2}} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{c^2-y_1^2}}^{\sqrt{c^2-y_1^2}} \left[c^2 - x^2 - y_1^2\right] dx = \frac{1}{2}\left[c^2 x - \frac{x^3}{3} - y_1^2 x\right]_{-\sqrt{c^2-y_1^2}}^{\sqrt{c^2-y_1^2}}$$

$$= (c^2 - y_1^2)\sqrt{c^2-y_1^2} - \frac{1}{3}(c^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(c^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad I = \frac{\pi}{4} c^4, \quad t = 2a = 2\sqrt{c^2 - y_1^2}$$

$$y = \sqrt{c^2 - x^2}$$

$$x = \sqrt{c^2 - y_1^2}$$

$$\tau = \frac{V \frac{2}{3}(c^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\pi}{4} c^4 \cdot 2\sqrt{c^2 - y_1^2}} = \frac{4V(c^2 - y_1^2)}{3\pi c^4}$$

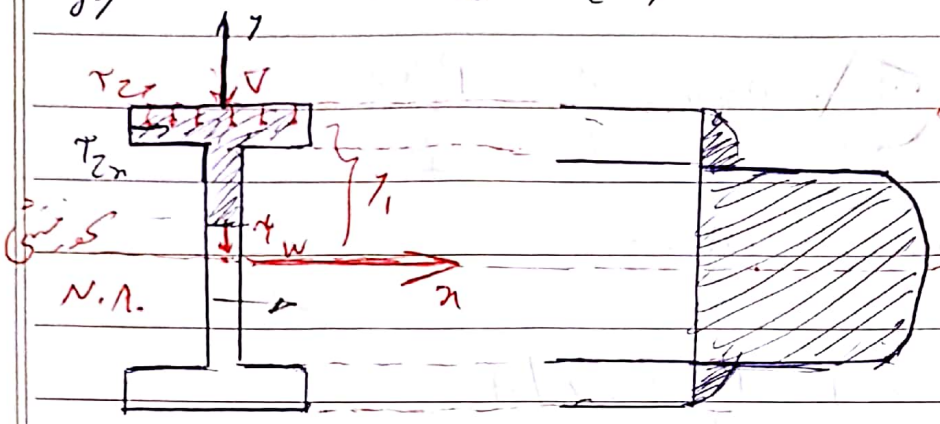
$$= \frac{4}{3\pi} \times \frac{V}{A}\left[1 - \left(\frac{y_1}{c}\right)^2\right]$$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۱۰/۰۳

$$\frac{dT}{dy} = 0 \rightarrow -\frac{4}{3}\times\frac{V}{A}\left(\frac{2Y}{C^2}\right) + 0 \rightarrow Y_m = ? \rightarrow \tau_m = \frac{4}{3}\times\frac{V}{A}$$

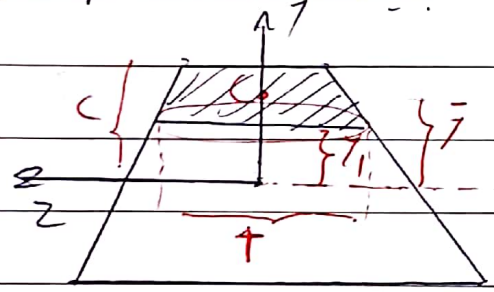
توزیع تنش در تیرهای پهن wide flange



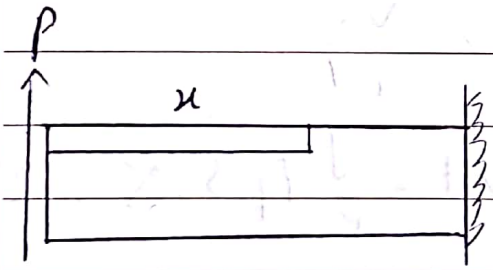
در فرمول $\tau = \frac{VQ}{It}$ ، V نیروی برشی در کل مقطع است و I ممان اینرسی کل مقطع

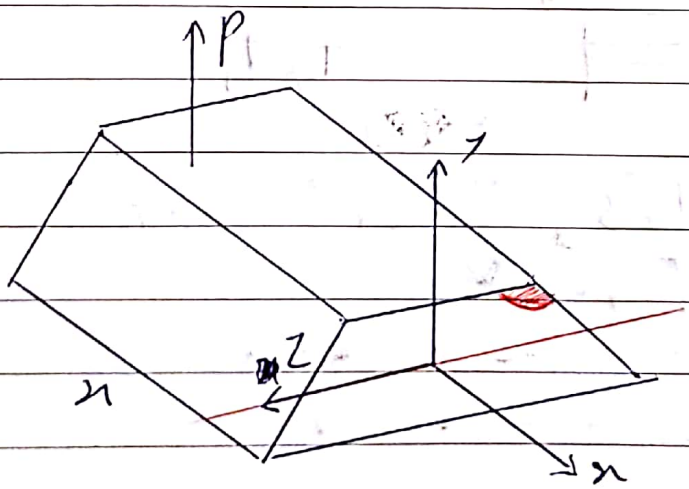
و t ضخامت مقطع در همین نقطه است

Q گشتاور اول سطح قسمت بریده شده نسبت به محور خنثی است و y_1 از y_2 است



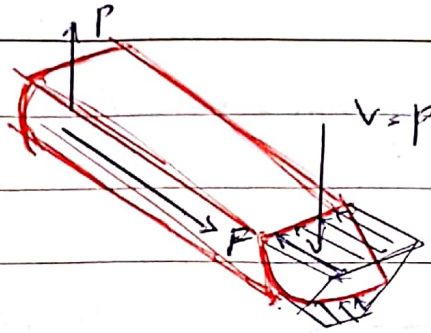
تنش برشی روی یک برش دلخواه





NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner



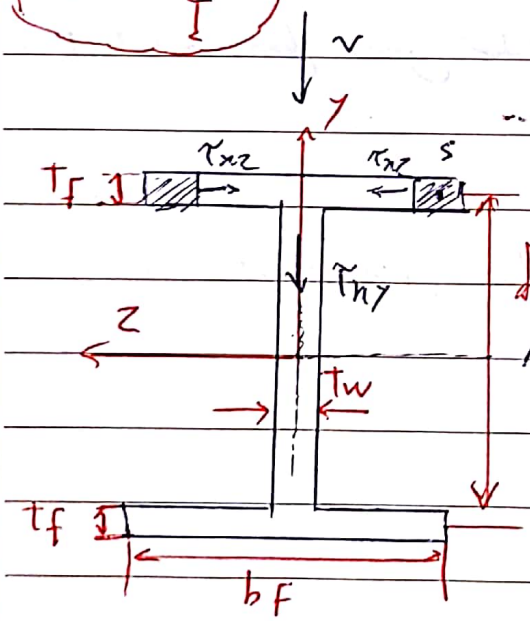
$$\sigma_{xx} = \frac{My}{I} = \frac{Px\,y}{I}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - \int_A \sigma_x \, dA = 0$$

$$F = \int_A \frac{Px\,y}{I}\, dA \Rightarrow F = \frac{Px}{I}\underbrace{\int_A y\, dA}_{Q}$$

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{PQ}{I}$$

$$q = \frac{VQ}{I}$$



$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It}$$

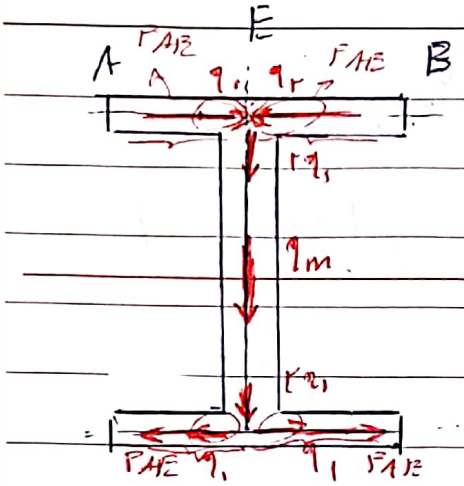
$$Q = \bar{y}A = \frac{d}{2} t_f S = \frac{d}{2} t_f \left(\frac{b_f}{2}\right)$$

$$t = t_f$$

$$\tau_{xz} = \frac{V \frac{d}{2} t_f x}{I t_f}$$

Scanned by CamScanner

۱۴۰۲/۱۰/۰۶

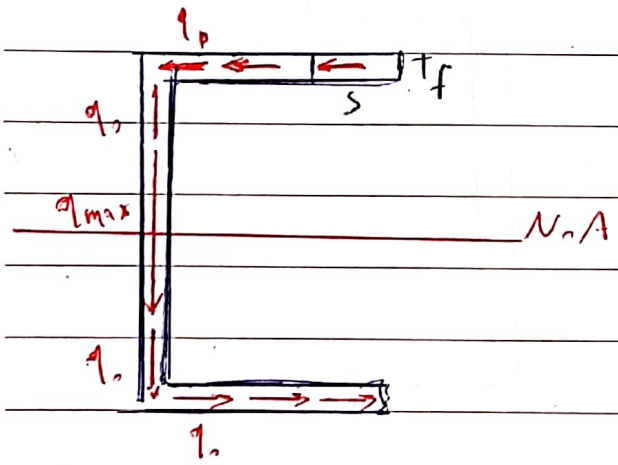


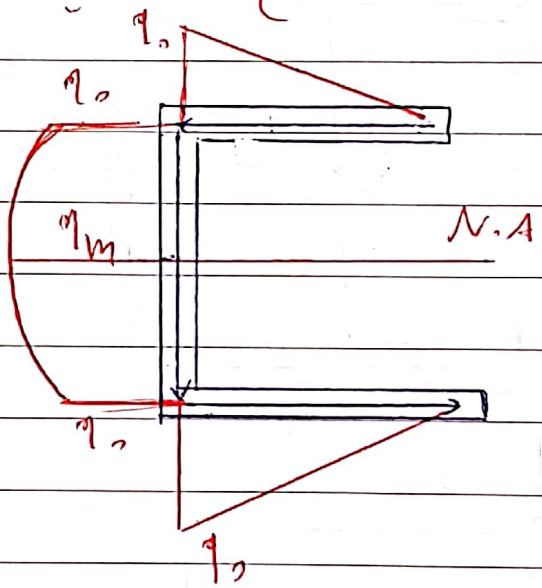
$$\int_A^B q\,ds = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\int_A^E q\,ds &= F_{AE}\\ \int_E^B q\,ds &= -F_{AE}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_A^B q\,ds = 0$$

$$\int_E^E q\,ds = V$$

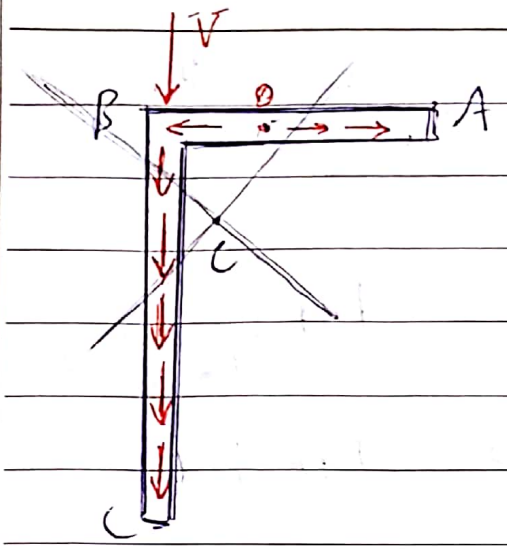
Cut را کنار سطح آزاد می‌نویسیم





Scanned by CamScanner

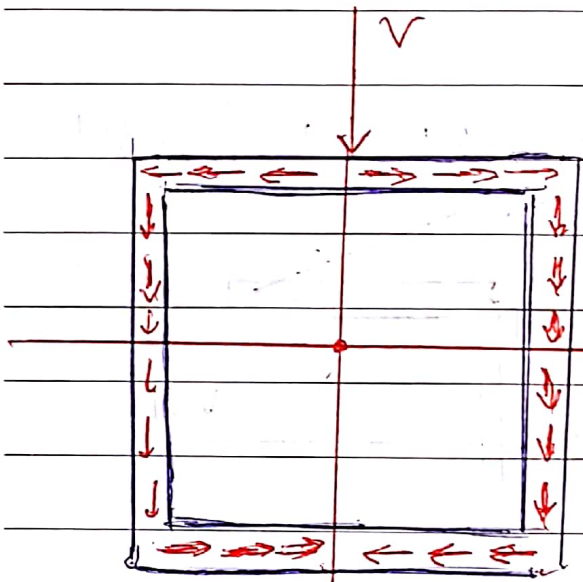
۱۳۹۶/۱۰/۱۱

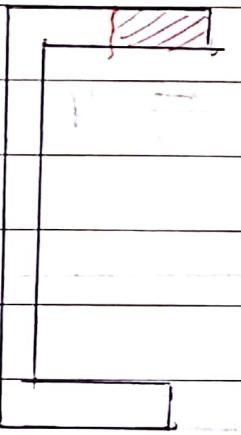


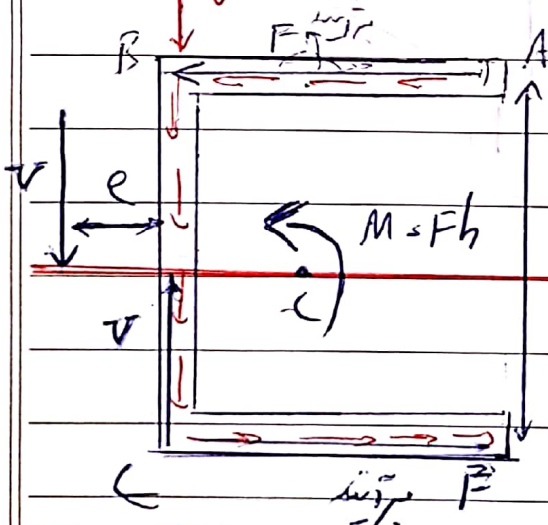
$$\int_B^C q\,ds = V$$

$$\int_A^B q\,ds = 0 \Rightarrow \int_A^D q\,ds + \int_D^B q\,ds = 0$$

روی کدام نقاط جریان برشی صفر است







مرکز برش

shear center

$$F = \int_A^B q\,ds$$

$$Ve = M = Fh \Rightarrow \boxed{e = \frac{Fh}{V}}$$

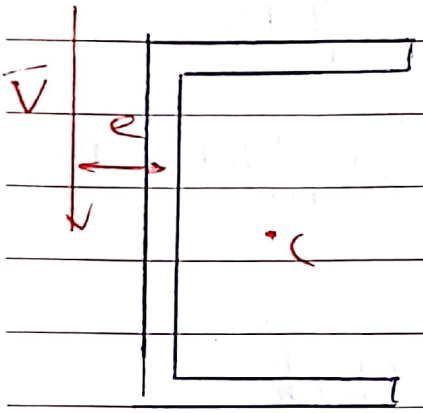
e در واقع فاصله‌ی نیروی جابجا شده V نیست به جایی که اول V داشته‌ایم

Scanned by CamScanner

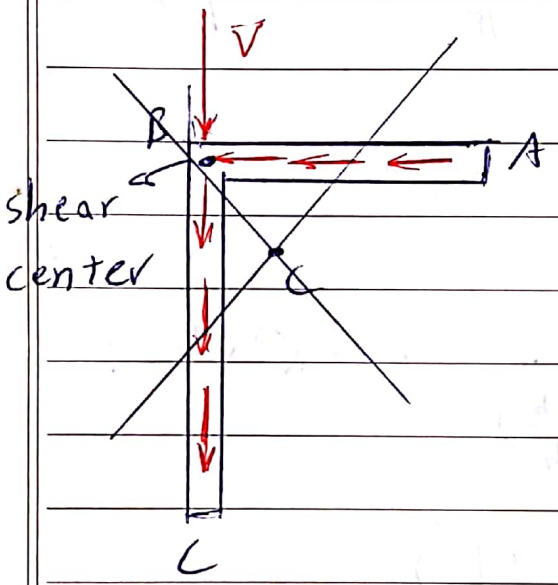
۱۳۹۷/۱۰/۱۱

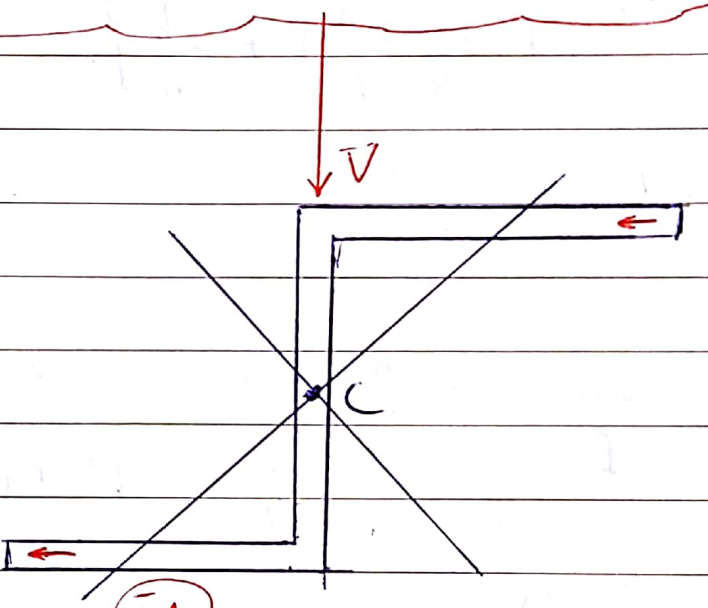
مرکز برش: نقطه‌ای است که اگر نیروی عرضی در آن

نقطه وارد شود آن‌گاه هیچ‌گونه انحنا ایجاد نخواهد شد



تیری اگر بر مرکز تقارن بسته باشد آن نقطه مرکز برشی تیر هم می‌باشد





$\tau = \frac{VQ}{It}$ (۶A)

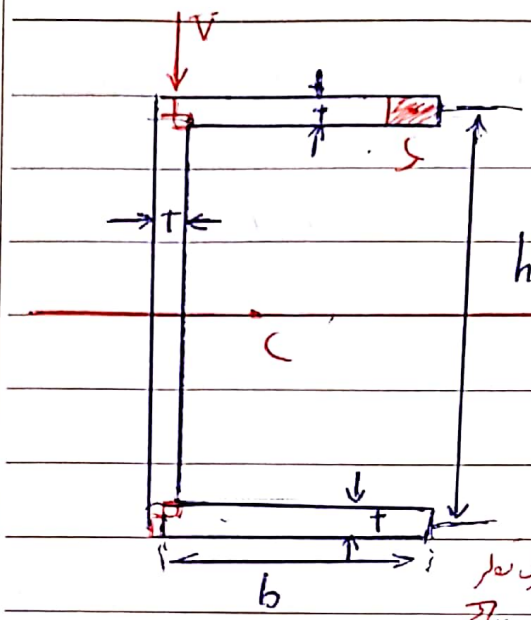
همین رابطه این خاصیت یعنی

مثلاً جریان داره داره می‌گوید چسبت نزدن

یعنی جریان داره از همینجا خارج می‌شود

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۱۰/۱۱



$Q = \bar{y}A = \frac{h}{2}\left(\frac{t}{2}\right)$

$I = \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + (bt)\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] =$

$= \frac{1}{12}th^3 + \frac{1}{6}bt^3 + \frac{1}{2}bth^2 =$

$\frac{1}{12}th^2\left[1 + 2\frac{b}{h}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + 6\frac{b}{h}\right] \Rightarrow I = \frac{1}{12}th^3\left(1 + 6\frac{b}{h}\right)$

فرض نظر

چون سیر جدار نازک است

$\frac{t}{h} \ll 1$

$\frac{b}{h}$ خیلی کوچک است

$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V \times \frac{h}{2} \times t \times 6}{\frac{1}{12}th^3\left(1 + 6\frac{b}{h}\right)} = \frac{6V}{h^2\left(1 + 6\frac{b}{h}\right)}$ ، $0 \le s \le b$

$F = \int_0^b \frac{6V}{h^2\left(1 + 6\frac{b}{h}\right)} 6\,ds = \frac{6V}{h^2\left(1 + 6\frac{b}{h}\right)}\left(\frac{1}{2}b^2\right)$

$e = \frac{Fh}{V} = \frac{3b^2}{h\left(1 + 6\frac{b}{h}\right)} = \frac{3b}{\frac{h}{b}\left(1 + 6\frac{b}{h}\right)} = \frac{3b}{6 + \frac{h}{b}}$

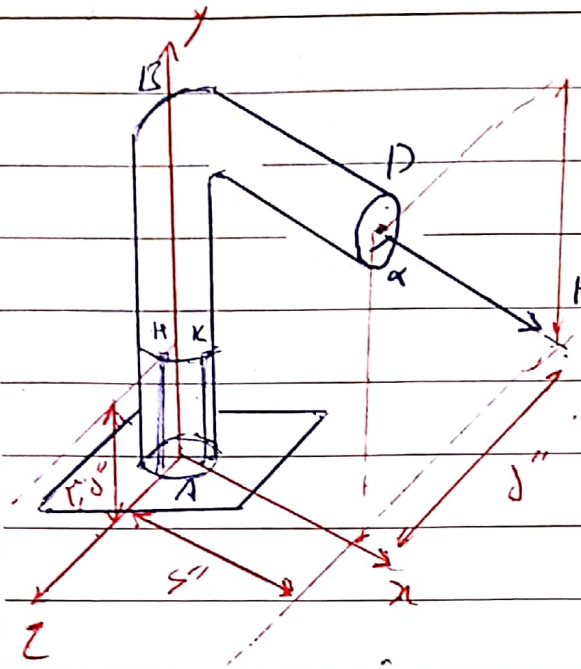
$\Rightarrow \begin{cases} \frac{h}{b} \to 0 : e = \frac{b}{2} \\ \frac{h}{b} \to \infty : e = 0 \end{cases}$

$0 \le e \le \frac{b}{2}$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۱۰/۱۲

تکلیف شب ۵ بارگذاری مرکب



$\phi = 2,5''$

$F = 2,7 \text{ kips}$

الف $H = ?$

ب $K = ?$

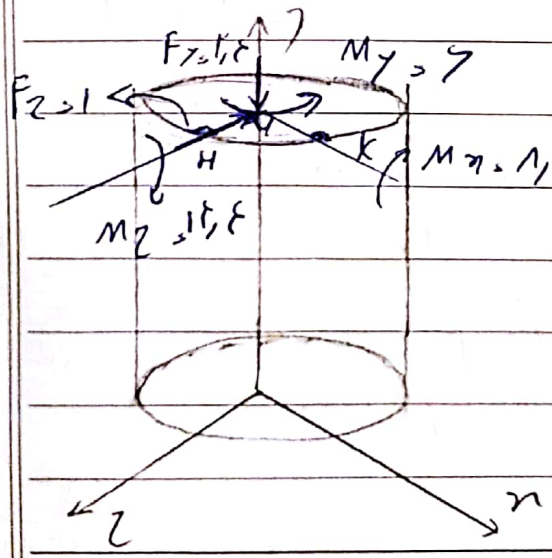
$\vec{F} = -2,6\cos\alpha\, j - 2,7\sin\alpha\, k$ $\quad \tan\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \alpha = 22,6^\circ$

$\vec{F} = -2,4j - 1k \text{ (kips)}$, $\vec{r}_{CD} = 4i + \underbrace{(12-3,5)}_{8,5} j$ in

$M = r_{CD} \times F = (4i + 8,5j)(2,4j - 1k)$

$= -4 \times 2,4k + 4j + 8,5i$

$\Rightarrow M = 8,5i + 4j - 14,4k$



Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۱۰/۱۲

M_x

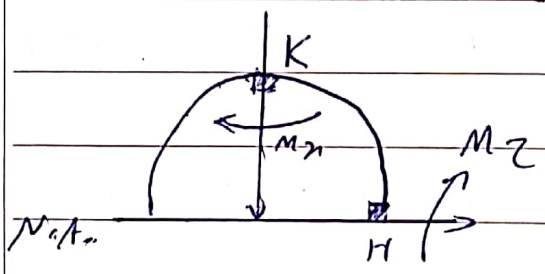
F_y kip in

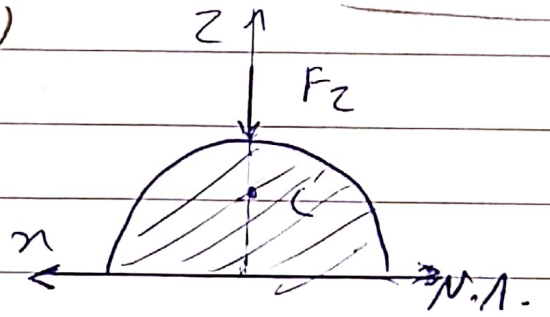
الف) $\sigma_H = \frac{-۲,۲}{A} + \frac{(۱,۵)(۱,۲۵)}{I} = +۵,۰۵ \text{ ksi}$

$\tau_H = \frac{M_z c}{J} = ۱,۹۵۶ \text{ ksi}$

ب) $\sigma_K = -\frac{۲,۴}{A} - \frac{(۱۲,۴)(۱,۲۵)}{I} = -۹,۸۱۸ \text{ ksi}$

$\tau_K = ۱,۹۵۶ + \frac{(۱)\left(\frac{۴ \times (۱,۲۵)}{۳۲}\right) \times \frac{\pi}{۲} \times (۱,۲۵)^۲}{I \times (۲,۵)} = ۲,۲۳۴ \text{ ksi}$



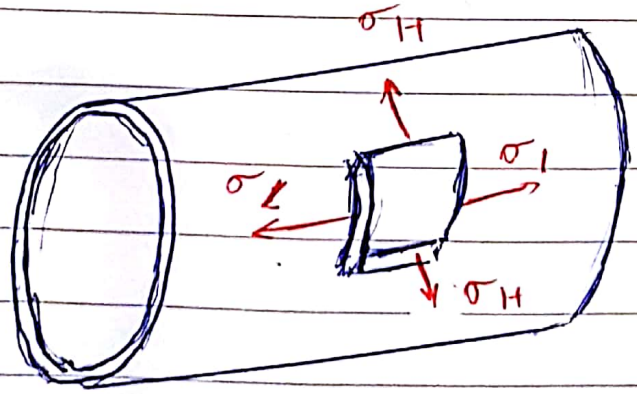


$Q = \bar{y}A$

مخازن تحت فشار جدار نازک

thin-walled pressure vessels

$\frac{t}{R} < ۰,۱ \quad \left(\frac{۱}{۱۰} \quad \frac{R}{t} > ۱۰\right)$



- طولی
- محیطی

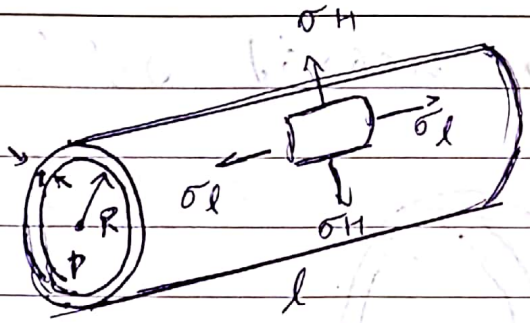
longitudinal stress

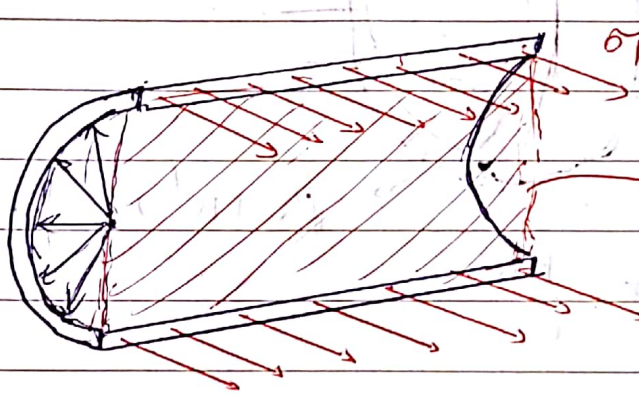
Hoop stress

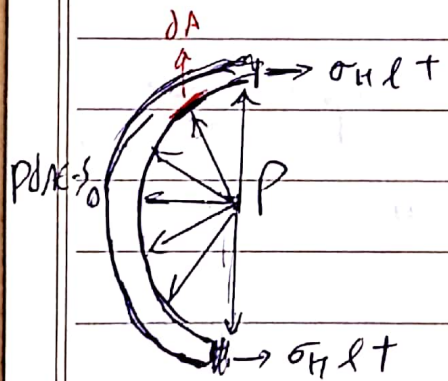
تنش طولی

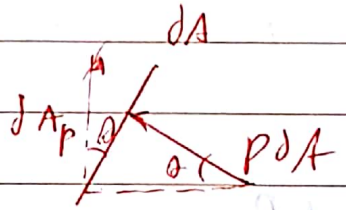
tangential

۱۳۹۶/۱۰/۱۴



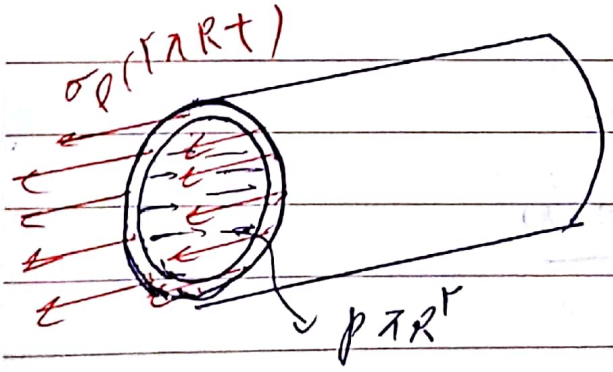






$p(dA\sin\frac{\theta}{2}) = p\,dA_p$

$\Sigma F_{\circ\circ} \Rightarrow p(2Rl) - 2\sigma_H l t = 0 \rightarrow \sigma_H = \frac{pR}{t}$



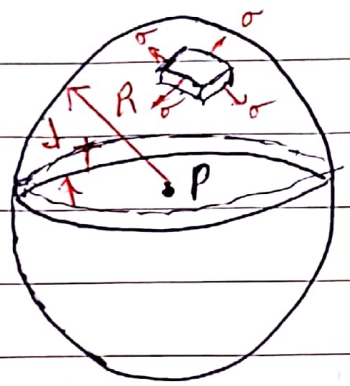
$\sigma_l(2\pi Rt) - p\pi R^2 = 0$

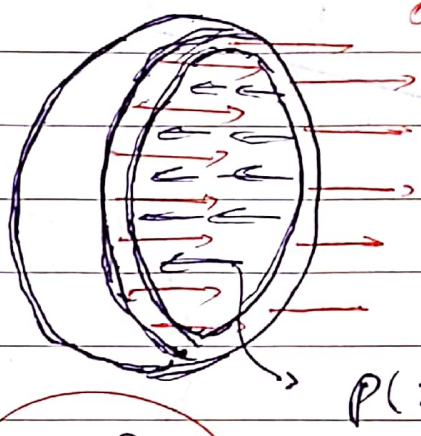
$\rightarrow \sigma_l = \frac{pR}{2t}$

Scanned by CamScanner

۱۴۰۱/۱۰/۱۴

Spherical vessel مخازن کروی

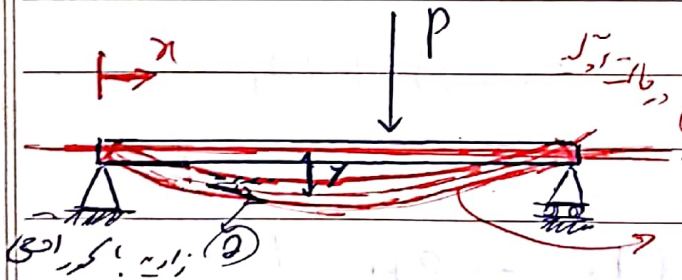




$$\sigma(2\pi Rt) = P\pi R^2 \Rightarrow \sigma = \frac{PR}{2t}$$

فصل هفتم: محاسبه خیز تیرها به روش انتگرال گیری

deflection



$y = v(x)$: elastic deflection curve منحنی خیز الاستیک

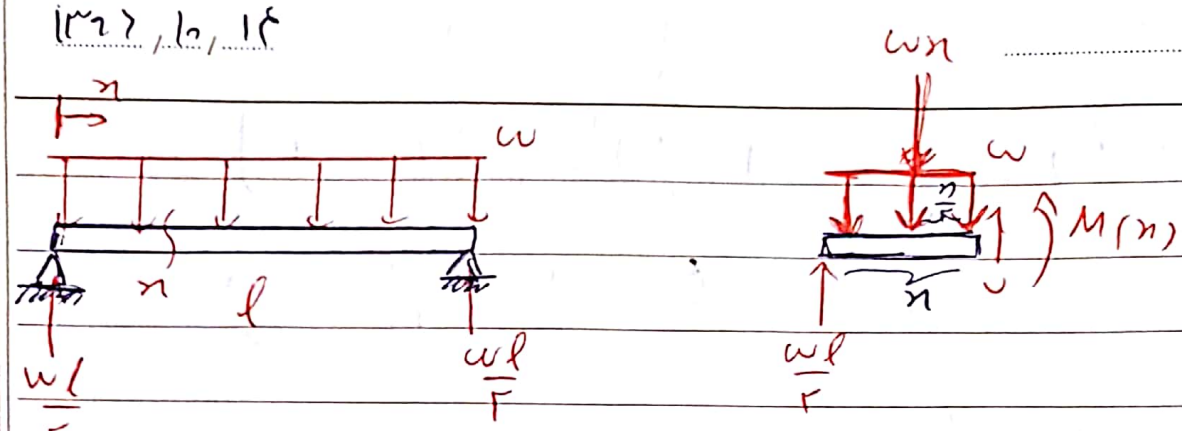
$$\frac{1}{R} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]}$$

تقریب خوب

$$\Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Scanned by CamScanner



$$\curvearrowleft \sum M_{s^\circ} \Rightarrow M(x) - \frac{wl}{2}x + \frac{wx^2}{2} = 0$$

$$EIy'' = M(x) = \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

E I : flexural rigidity
صلبیت خمشی تیر

$$EIy' = \frac{wl}{4}x^2 - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$EIy(x) = \frac{wl}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + C_1 x + C_2$$

$$x = 0 \;,\; y = 0 \;\rightarrow\; C_2 = 0$$

$$x = l \;,\; y = 0 \;:\; \frac{wl^4}{12} - \frac{wl^4}{24} + C_1 l = 0 \;\rightarrow\; C_1 = \frac{wl^3}{24}$$

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{wl}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 - \frac{wl^3}{24}x\right]$$

$$y(x) = \frac{wl^4}{24EI}\left[2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{x}{l}\right]$$

شرایط مرزی است که در آنها تغییر مکان نباید کامی است $x = 0$, $x = l$, $y = 0$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۱۰/۱۲

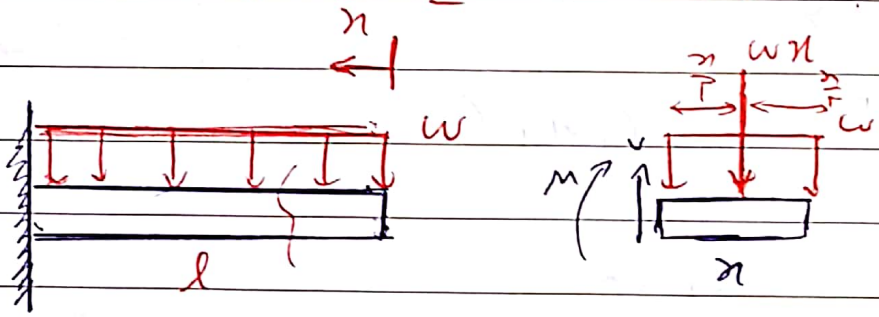
$$y_{max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{wl^4}{24EI}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2}\right] =$$

$$\frac{4}{16} - \frac{1}{16} - \frac{8}{16} = -\frac{5}{16}$$

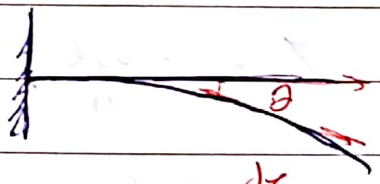
$$\Rightarrow y_{max} = \frac{5wl^4}{384EI}$$

منفی یعنی تیر این جوری خم می‌شه

* نکته: وقتی بازه‌ی کل تیر اعمال شده باشه برای محاسبه‌ی ماکسیمم خیلی کافیه که یک مقطع بزنیم. اما وقتی بار متمرکز داره باید دو مقطع بزنیم



$$EIy'' = M(x) = -\frac{wx^2}{2}$$



$$\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$EIy' = -\frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$EIy = -\frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2$$

$$y(l) = 0 : -\frac{wl^4}{24} + \frac{wl^4}{6} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{wl^4}{8}$$

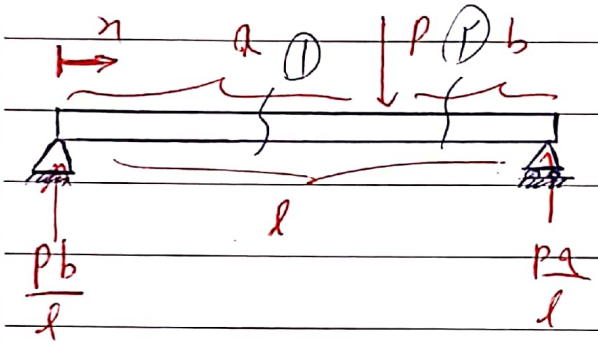
$$y'(l) = 0 : C_1 = \frac{wl^3}{6}$$

Scanned by CamScanner

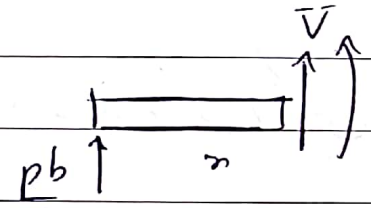
۱۴۹۶/۰۶/۱۲

$$y(x) = \frac{w l^4}{24EI}\left[-\left(\frac{x}{l}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{l}\right) - 3\right]$$

$$y_{max} = y(0) = \frac{-wl^4}{8EI}$$



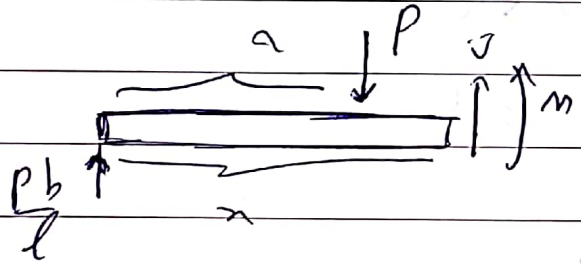
۱ امین:



$$EIy_1'' = M_1(x) = \frac{Pb}{l}x$$

$0 \le x \le a$

۲ امین:



$$M_2(x) = \frac{Pb}{l}x + P(x-a) \Rightarrow EIy_2'' = M_2(x) = \frac{Pb}{l}x - P(x-a)$$

$a \le x \le l$

$$EIy_1' = \frac{Pb}{2l}x^2 + C_1$$

$$EIy_1 = \frac{Pb}{6l}x^3 + C_1 x + C_2$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۱۰/۱۴

$$EIy_2' = \frac{pb}{2l}x^2 - \frac{p}{2}(x-a)^2 + C_3$$

$$EIy_2 = \frac{pb}{6l}x^3 - \frac{p}{6}(x-a)^3 + C_3 x + C_4$$

$$y_1(0) = 0 \quad y_2(l) = 0 \quad y_1(a) = y_2(a) \quad y_1'(a) = y_2'(a)$$

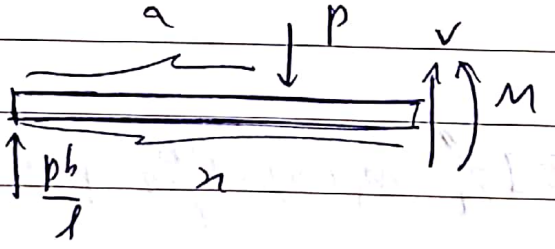
$$\left.\begin{array}{l} y_1(0) = 0 \\ y_2(l) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{شرایط مرزی}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(a) = y_2(a) \\ y_1'(a) = y_2'(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{پیوستگی}$$

روش دوم استفاده از توابع تکین

The use of singularity function

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & : x < a \\ (x-a)^n & : x \geq a \end{cases}$$



$$M(x) - \frac{Pb}{l}x + P\langle x-a\rangle = 0$$

$$EIy'' = M(x) = \frac{pb}{l}x - P\langle x-a\rangle$$

$$EIy' = \frac{pb}{2l}x^2 - \frac{P}{2}\langle x-a\rangle^2 + C_1$$

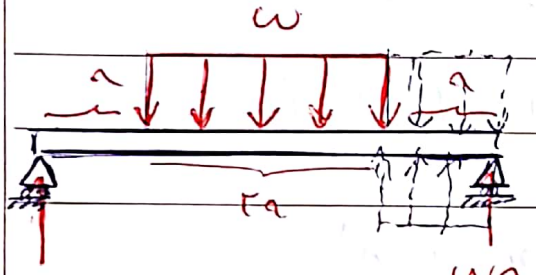
Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۱۰/۱۴

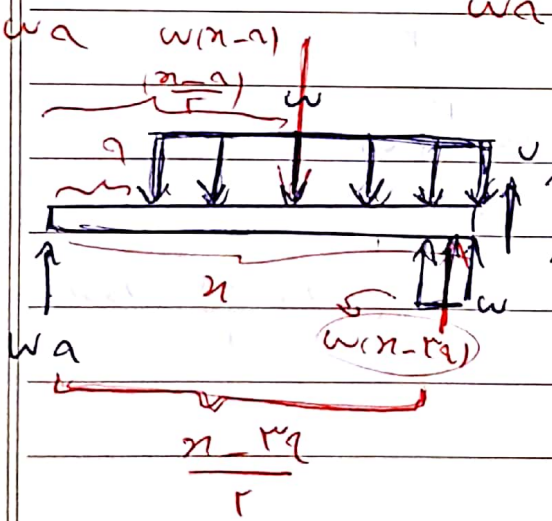
$$EIy = \frac{Pb}{6l}x^3 - \frac{P}{6}\langle x-a\rangle^3 + C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ y(l)=0 \Rightarrow \frac{Pb}{6}l^2 - \frac{Pb}{6}l^3 + C_1 l = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{Pb^3}{6l} - \frac{Pbl}{6} \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{P}{6EI}\left[\frac{b}{l}x^3 - \langle x-a\rangle^3 + \left(\frac{b^3}{l} - 3bl\right)x\right]$$



تیرهای ساده گاهی راحتر از روش کرنش تیری گسترده تا بتوان تیر گاهی کنیم



$$EIy'' = M(x) = wax - \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{w}{2}\langle x-2a\rangle^2$$

$$\Rightarrow EIy' = \frac{wa}{2}x^2 - \frac{w}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{w}{6}\langle x-2a\rangle^3 + C_1$$

$$\Rightarrow EIy = \frac{wa}{6}x^3 - \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{w}{24}\langle x-2a\rangle^4 + C_1 x + C_2$$

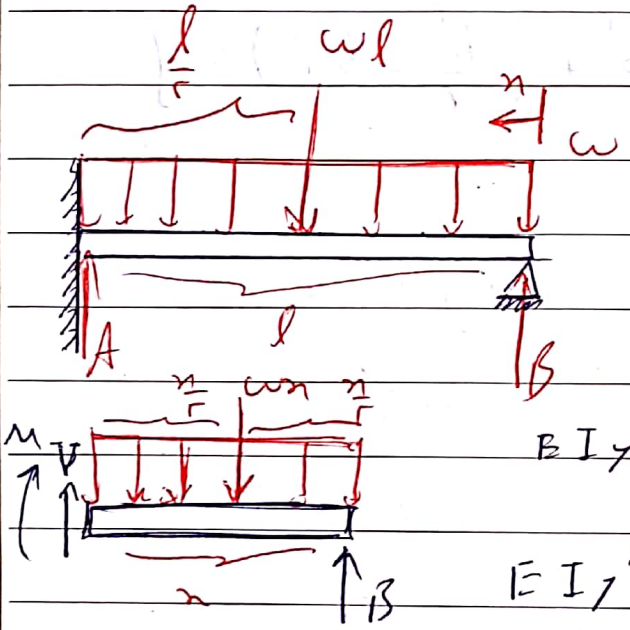
Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۱۰/۱۲

$$\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow C_2=0 \\ y(2a)=0 \Rightarrow \frac{w(2a)^4}{6}-\frac{w}{12}(2a)^4+\frac{wa^4}{24}+2C_1a=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow wa^4\left[\frac{16}{6}-\frac{16}{12}+\frac{1}{24}\right]+2C_1a=0 \Rightarrow C_1=\frac{11}{6}wa^3$$

حل مسائل نامعین استاتیکی



$$\begin{cases} A+B=wl \\ +\circlearrowleft \; M+Bl-\frac{wl^2}{2}=0 \end{cases}$$

$$EIy''=M=Bx-\frac{wx^2}{2}$$

$$EIy'=\frac{Bx^2}{2}-\frac{wx^3}{6}+C_1$$

$$EIy=\frac{Bx^3}{6}-\frac{wx^4}{24}+C_1x+C_2 \qquad M(x)+\frac{wx^2}{2}-Bx=0$$

$$y(0)=0 \Rightarrow C_2=0$$

$$y(l)=0 \Rightarrow \frac{Bl^3}{6}-\frac{wl^4}{24}+C_1l=0$$

$$y'(l)=0 \Rightarrow \frac{Bl^2}{2}-\frac{wl^3}{6}+C_1=0$$

$$\frac{Bl^3}{6}-\frac{Bl^3}{2}-\frac{wl^4}{24}+\frac{wl^4}{8}=0 \Rightarrow \frac{1}{3}Bl^3=\frac{wl^4}{8}$$

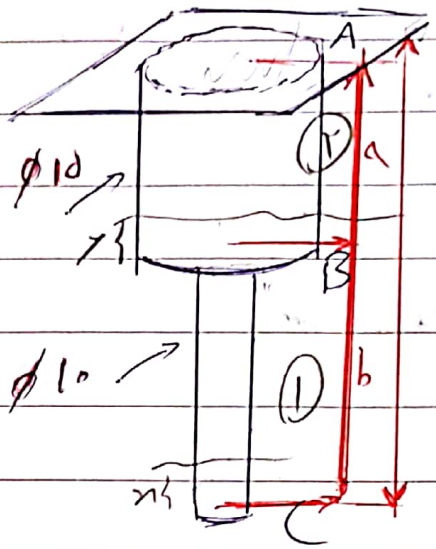
$$\Rightarrow B=\frac{3}{8}wl$$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۱۰/۰۷

مثال های مقاومت

فصل ۱



دو میله ی برنجی AB و BC به هم متصل شده اند

در نقطه ی B به هم متصل شده اند به طوری که

میله ی غیر کشیدنی به طول 100m را ساخته اند

ی دانیم وقتی برنج $\frac{kN}{m^3}$ 85 باشد. مطلوب است:

الف) طول میله ی AB برای اینکه تنش نرمال ماکزیمم در کل میله ABC کمترین

مقدار را داشته باشد ب) ماکزیمم مقدار تنش نرمال در کل میله

$$\sigma = \frac{W}{A} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\rho_b g \pi (\frac{d}{2})^2 x}{\pi (\frac{d}{2})^2} = \rho_b g x & 0 < x < b \\ \sigma_2 = \dfrac{\rho_b g \left[\pi (\frac{d}{2})^2 b + \pi (\frac{d}{2})^2 z\right]}{\pi (\frac{d}{2})^2} & b < z < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \rho_b g \left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 b + z\right] \qquad b < z < a$$

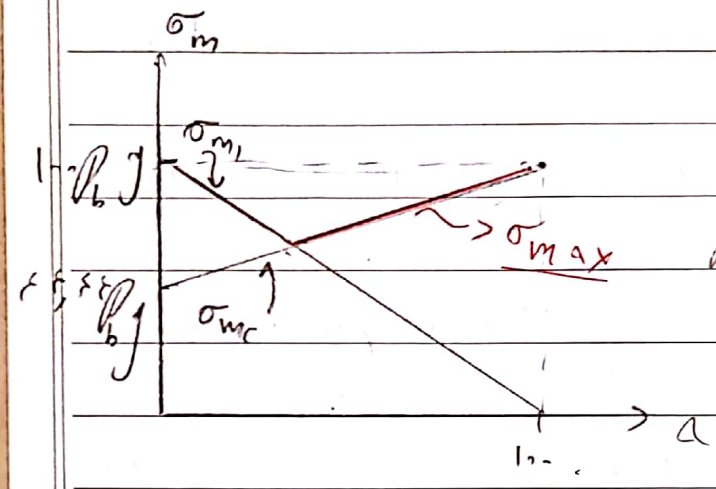
$$\sigma_{max_1} = \sigma_1|_{x=b} = \rho_b g (100 - a)$$

$$\sigma_{max_2} = \sigma_2|_{z=a} = \rho_b g \left[\frac{b}{4} + a\right] = \rho_b g \left[\frac{1}{4}(100 - a) + a\right] =$$

$$\rho_b g \left[25 + \frac{3}{4}a\right]$$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۱۰/۰۷



$\sigma_{m_1} = \sigma_{m_2} \Rightarrow$

$P_b J(100-a) = P_b J(\frac{4}{3}a + 0.0005a)$

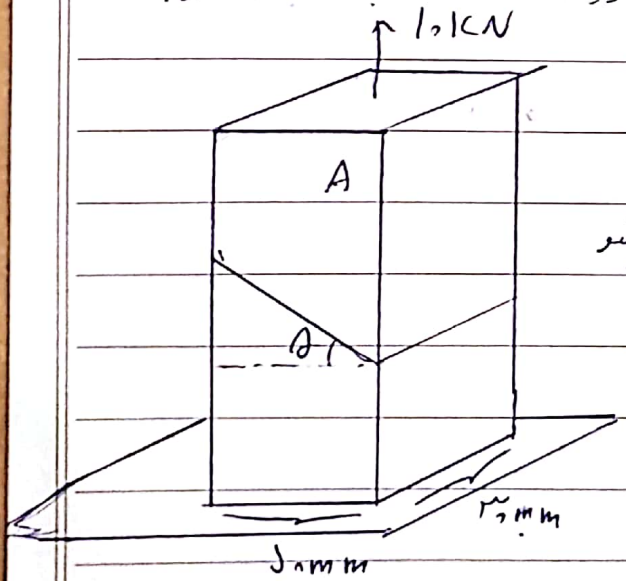
$\Rightarrow a = 3.5$

$\min[\sigma_{max}] = \sigma_{m_1}|_{a=3.5} = \sigma_{m_2}|_{a=3.5} = 5.3 MPa$

دقت کنید σ_{m_1} ی قابل قبول داده شده

σ_{m_2} ←

دو عضو A و B مطابق شکل در زاویه‌ی θ نسبت به هم توسط یک اتصال جسمی به یکدیگر متصل شده‌اند می‌دانیم کرنش‌های نهایی در اتصال جسمی برابر $\sigma_V = 17 MPa$ و $\tau_V = 9 MPa$ می‌باشد مطلوب است کمترین زاویه θ برای اینکه ضریب اطمینان عضو A حداقل برابر ۳ باشد. مطلوب است محاسبه‌ی زاویه‌ی θ برای اینکه ضریب اطمینان سرتاسر عضو A مرکز هیچ عضو دیگری را لمس نکند



Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۱۰/۰۷ تریپ اولیه کلی کمترین مقدار تریپ اولیه در جسم است یا در طراحی

تحلیل جسم است

$\sigma_u = 17\,MPa \quad \tau_u = 9\,MPa \Rightarrow \theta = ?$

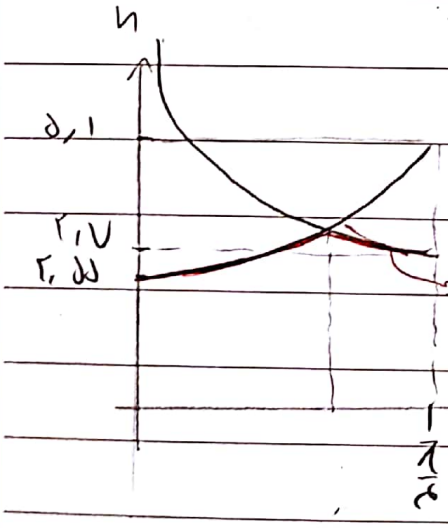
$n_a \to max$

$$\sigma = \frac{P}{A_1}\cos^2\theta \qquad \tau = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta$$

$$n_n = \frac{\sigma_u}{\sigma} = \frac{17\ MPa}{\frac{10\times 10^2}{50\times 2^2}\cos^2\theta} = \frac{2.88}{\cos^2\theta}$$

$$n_s = \frac{\tau_u}{\tau} = \frac{9\ MPa}{\frac{10^6}{2\times(50\times 2^2)}\times\sin 2\theta} = \frac{2.7}{\sin 2\theta}$$

$\Rightarrow$ overall factor of safety $= n_a = \min(n_n, n_s)$



$n_{min} = n_a$

$$n_s = n_n \Rightarrow \frac{2.88}{\cos^2\theta} = \frac{2.7}{\sin 2\theta}$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \frac{2.7}{2.88}\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2.7}{2(2.88)} = 0.469 \Rightarrow$$

$$\theta = 25.9^\circ$$

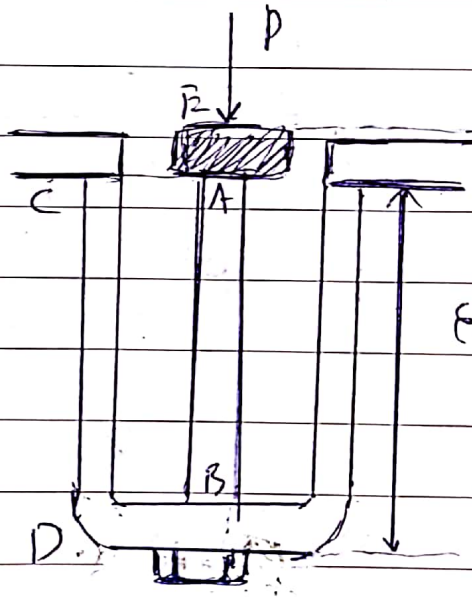
NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۰۱/۰۷

فصل ۲

میله‌ی برنجی AB به قطر 9 mm به پایه‌ی فولادی استوانه‌ای CD متصل شده است. مساحت سطح مقطع آن $300\ mm^2$ می‌باشد. طرف C به تکیه‌گاه ثابتی در متصل شده است و در پیشی $0.2\ mm$ انتهای میله در A متصل است. می‌دانیم که مدول الاستیسیته برنج $E_{br} = 105\ GPa$ می‌باشد. مطلوب است مقدار P برای اینکه تغییر مکان در پیچ برابر $1.2\ mm$ باشد؟



$$\delta_{A/B} = \frac{Pl}{AE}$$

$$\delta_A - \delta_B = \frac{Pl}{AE}$$

$$\delta_B - \delta_D = \frac{Pl}{A_D E} = \frac{P(400)}{(300)\ mm^2 \times (105 \times 10^3)\ \frac{N}{mm^2}} \simeq$$

$$\simeq 1.524 \times 10^{-5} P$$

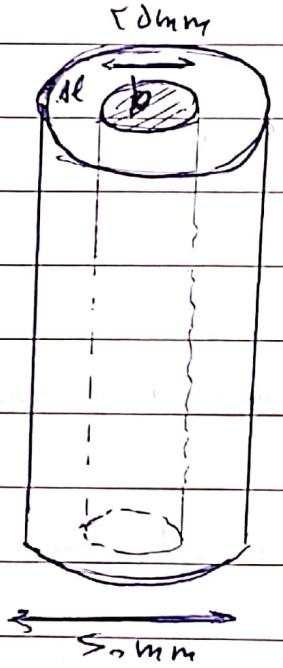
$$\Rightarrow 1.2 = 1.057 \times 10^{-5} P + \frac{P(600)}{\frac{\pi}{4}(9)^2 (105 \times 10^3)} = (1.057 \times 10^{-5} + 7.4 \times 10^{-5}) P$$

$$\Rightarrow \boxed{P \simeq 13.358\ kN}$$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۱۰/۰۷

مجموعه نشان داده در شکل شامل یک پوسته ی آلومینیومی است که یک هسته ی فولادی را کاملا در برگرفته است و در دمای $15^\circ C$ بر آن تنشی وارد نمی شود. با در نظر گرفتن تنها، تغییر شکل کوری مقدار تنش در پوسته ی آلومینیومی را در دمای $195^\circ C$ به دست آورید؟



Brass core

$E = 105\ GPa$

$\alpha = 19 \times 10^{-6}\ \frac{1}{^\circ C}$

Al shell

$E = 70\ GPa$

$\alpha = 23 \times 10^{-6}\ \frac{1}{^\circ C}$

قید سبب ایجاد تنش می شود

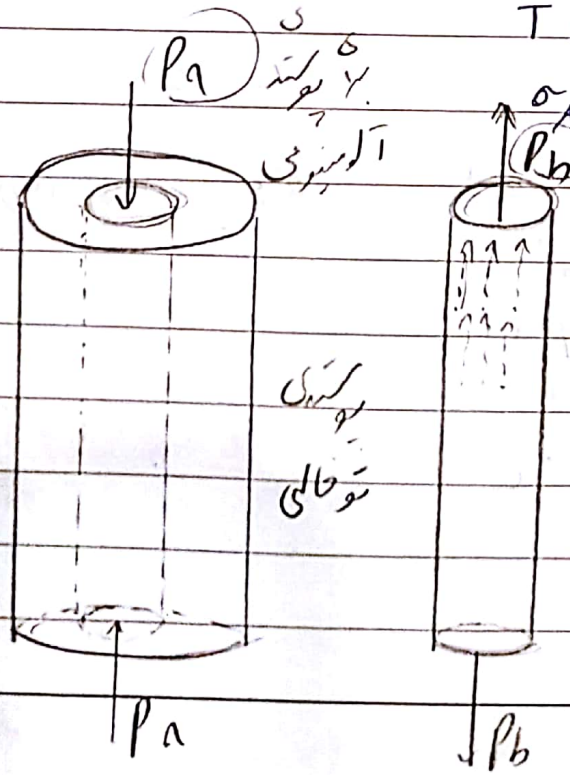
شکل قید ما لوله ها را چسبید

در هم در این شکل

$T_0 = 15^\circ C$ unstressed

$T = 195^\circ C$

$\sigma_{Al} = ?$



استاتیکی

$P_a = P_b = P$ معادله ی تعادل

$l_a = l_b$ معادله ی سازگاری

$\delta_a = \delta_b$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۶/۱۰/۰۷

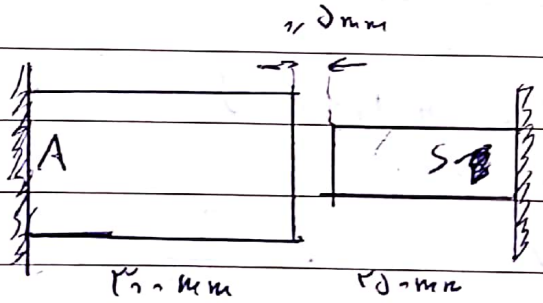
$$l_a \alpha_a \Delta T - \frac{Pl}{A_a E_a} = l_b \alpha_b \Delta T + \frac{Pl}{A_b E_b}$$

$$Pl\left[\frac{1}{\frac{\pi}{4}(60^2-25^2)\,(70\times10^3)} + \frac{1}{\frac{\pi}{4}(25)^2(105\times10^3)}\right] = \cdots$$

(mm², N/mm²)

$$l\,(125-15)(23-19)\times10^{-6} \Rightarrow \boxed{P = 2200\,N}$$

در درجه حرارت اتاق ($20^\circ C$) فاصله‌ی موجود بین دو انتهای میله‌های نشان داده شده در شکل $0.5\,mm$ است. الف) به ازای چه تغییر دمایی تنش نرمال در فولاد ضد زنگ برابر $-150\,MPa$ (فشاری) می‌شود؟ ب) طول صحیح هر میله‌ی فولادی را نیز بدست آورید.



الف) $T_f = ?$ $\quad l_f = ?$

$T_i = 20^\circ C$

$\sigma_s = -150\,MPa$

Stainless Steel

$A = 1000\,mm^2$

$E = 190\,GPa$

$\alpha = 11\times10^{-6}\,/^\circ C$

Al

$A = 2000\,mm^2$

$E = 70\,GPa$

$\alpha = 23\times10^{-6}\,/^\circ C$

Scanned by CamScanner

۱۴۰۲/۱۰/۰۷

معادله تعادل استاتیکی $P_a = P_s = P$

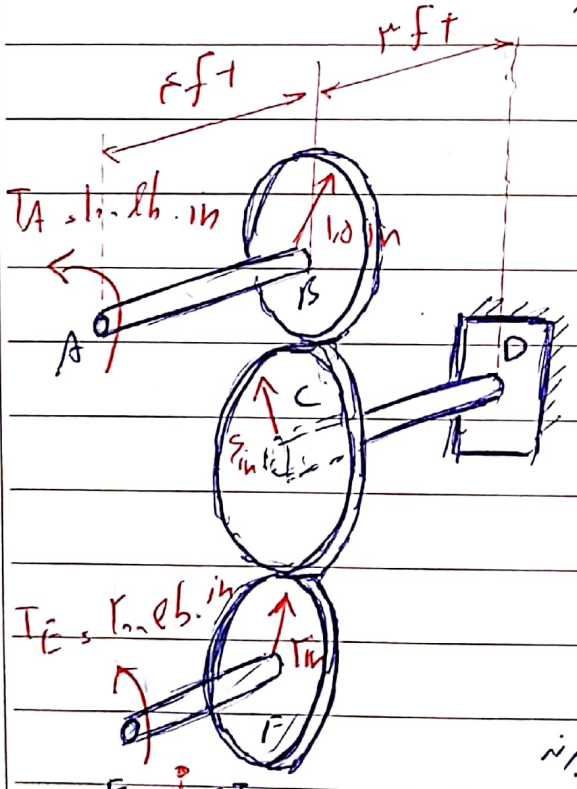
$$\sigma_s = \frac{P_s}{A} = -150\ MPa = \frac{P}{800} \rightarrow P = 120\ kN$$

رابطه‌ی سازگاری $\delta_a + \delta_s = 0.5$

$$l_a \alpha_a \Delta T - \frac{P l_a}{A_a E_a} + l_s \alpha_s \Delta T - \frac{P l_s}{A_s E_s} = 0.5$$

$$(l_a \alpha_a + l_s \alpha_s)\Delta T - P\left(\frac{l_a}{A_a E_a} + \frac{l_s}{A_s E_s}\right) = 0.5$$

حل مسئله‌ی ۲۰ صفحه‌ی ۲۱۵



$$J = \frac{3}{4}\ in$$

$$G = 11 \times 10^6$$

الف) $\phi_A = ?$

ب) $\phi_{CD} = ?$

قسمتی از کار ما که دو دایره با هم تماس دارند با هم برابرند

$$\frac{r_1\theta_1}{l_1} = \frac{r_2\theta_2}{l_2} \rightarrow \frac{r_1\omega_1}{v_1} = \frac{r_2\omega_2}{v_2} \rightarrow \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1$$

قسمت مثبت نیروها

$$F_1 \rightarrow F_2 \Rightarrow \frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2} \rightarrow T_2 = \frac{r_2}{r_1} T_1$$

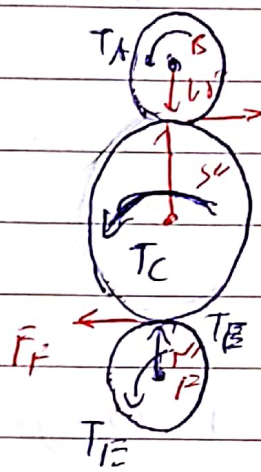
Rolling without slipping غلتش بدون لغزش

Scanned by CamScanner

۱۴۰۲/۱۰/۱۶ $J = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{4}\right)^4$ If $T = 12\ in$

$$\phi_{A/B} = \frac{T_A \ell_{AB}}{GJ} \Rightarrow \phi_A - \phi_B = \frac{(100)(4 \times 12)}{(11 \times 10^3)\frac{lb}{in^2}\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{4}\right)^4\,in^4} = 0.12\ rad$$

$$r_B \phi_B = r_C \phi_C \Rightarrow \phi_B = \frac{r_C}{r_B}\phi_C \Rightarrow \phi_B = 4\phi_C$$



$$T_C = r_C(F_B + F_F) = r_C\frac{T_A}{r_B} + r_C\frac{T_E}{r_F} =$$

$$\boxed{\frac{r_C}{r_B}T_A + \frac{r_C}{r_F}T_E}$$

$$\phi_C = \frac{T_C \ell_{CD}}{GJ} = \frac{(100)(12)}{GJ} = 0.1085\ rad$$

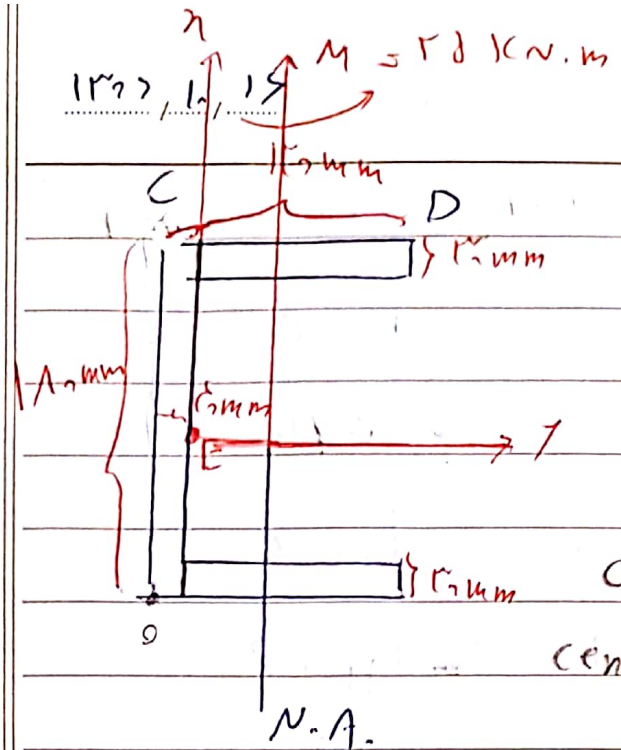
$$T_C = 4T_A - 2T_E = 4 \times 100 + 2 \times 200 = 1000\ lb.in$$

$$\phi_B = 4\phi_C = 4(0.1085) = 0.43\ rad$$

$$\phi_A = 0.43 + 0.12 = 0.5522\ rad = 24.25^\circ$$

۲۸) کدام مورد صحیح است

Scanned by CamScanner



الف) σ_C ؟

ب) σ_D ؟

ج) σ_E ؟

اول برای پیدا کردن $\bar{y}$ مبدا را centroid قطعات یا سطوح را می‌گیریم بعد از مشخص کردن centroid کل، فاصله centroid کل تا مبدا را حساب می‌کنیم

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y} A}{\sum A} = \frac{2(60 \times 20 \times 120) + 2(40 \times 120)}{2 \times 20 \times 120 + 40 \times 120}$$

$$\bar{y} = 64\,mm$$

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(20)(120)^3 + (20 \times 120)(60-64)^2\right] + \left[\frac{1}{12}(120)(40)^3 + (40 \times 120)(64-60)^2\right]$$

$$I = 18{,}188{,}000\,mm^4$$

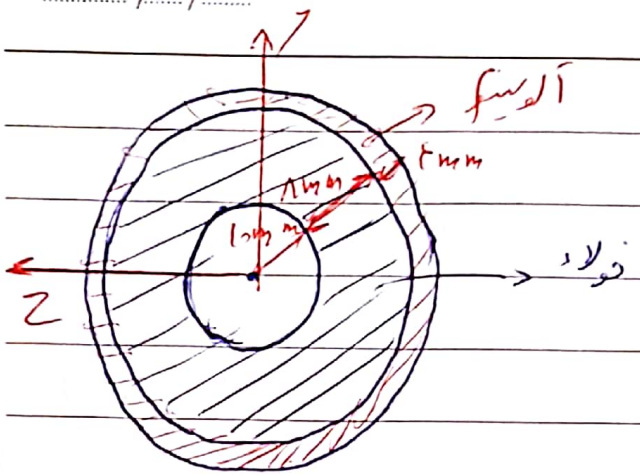
الف) $\sigma_C = \dfrac{(25 \times 10^3)(64 \times 10^{-3})}{18{,}188{,}000 \times 10^{-12}} = +89.2\,MPa$

ب) $\sigma_D = -\dfrac{(25 \times 10^3)(120-64) \times 10^{-3}}{I} = -154.1\,MPa$

ج) $\sigma_E = \dfrac{(25 \times 10^3)(120 \times 10^{-3})}{I} = +71.2\,MPa$

Scanned by CamScanner

۱۴۰۱/۱۰/۱۶



فنر مسئله‌ی ۳۲ صفحه‌ی ۴۱۹

$E_S = 210\ GPa$

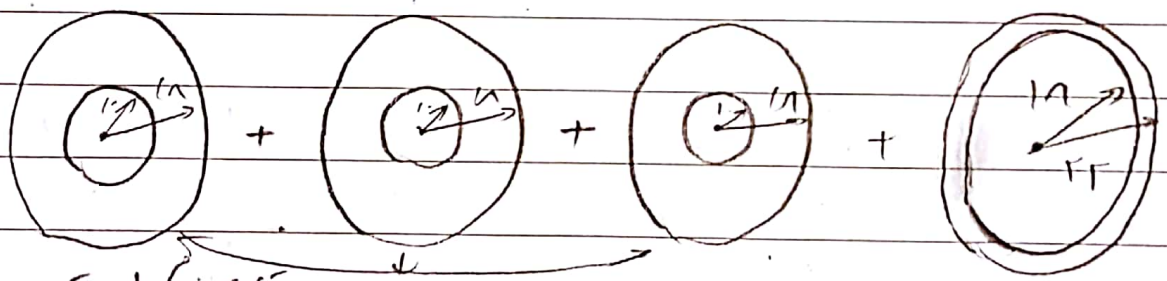
$E_a = 70\ GPa$

a) $\sigma_m|_{ST}$?

b) $\sigma_m|_{A1}$?

$M = 800\ N.m$

$$\begin{cases} Z = 9\cos\theta \\ Y = 9\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Z = 22\cos\theta \\ Y = 22\sin\theta \end{cases}$$



چون متقارن آلومینیوم است

$$I = 2\left[\frac{\pi}{4}(18)^4 - \frac{\pi}{4}(10)^4\right] + \frac{\pi}{4}\left[(22)^4 - (18)^4\right]$$

$$I = 32321.8\ mm^4$$

$$\sigma_m|_{A1} = \frac{(18)(22)\times 10^{-3}}{I} = \boxed{64.1\ MPa}$$

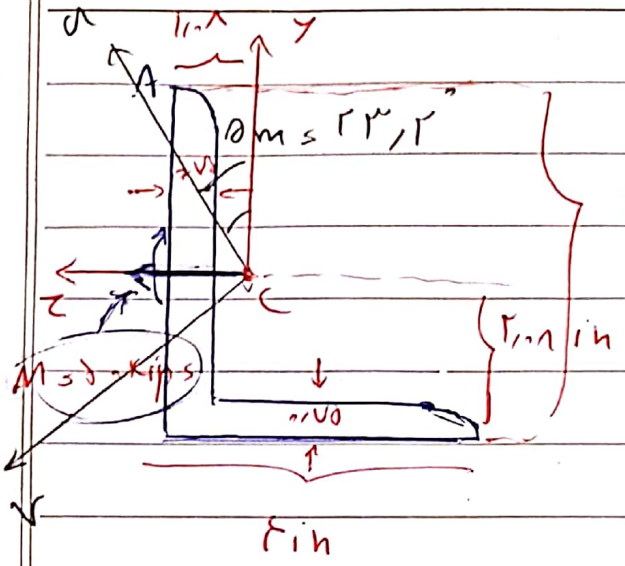
$$\sigma_m|_{ST} = \frac{n(800)(18)\times 10^{-3}}{I} \rightarrow \boxed{132.8\ MPa}$$

Scanned by CamScanner

۱۴۰۲/۱۰/۱۷

کدوم المانی انرسی حاصلی هستند که حاصل ضرب انرسی دوران حاضرند

حل مسئله‌ی ۲۹ صفحه‌ی ۶۸۹



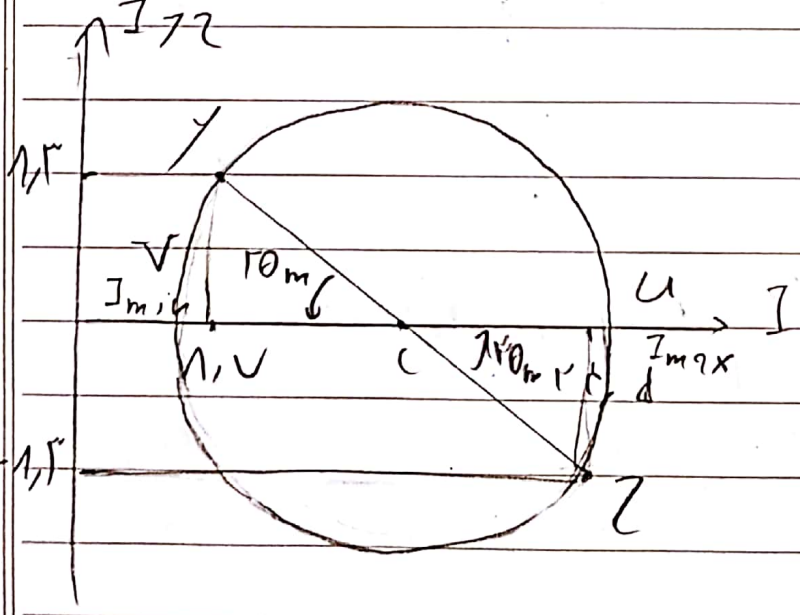
$I_{yy} = 1,7\ in^4$

$I_{zz} = 24,05\ in^4$

$I_{yz} = +1,8\ in^4$

$y = (I_{yy_2} - I_{yz})$, $z = (I_{zz_2} - I_{yz})$

$y = (1,7 , 1,8)$ / $z = (24,05 , -1,8)$



$\tan 2\theta = \frac{1,8}{\frac{24,05 - 1,7}{2}} = 0,161$

$2\theta_m = 46,8°$

$\theta_m = 23,4°$

$M_U = M \sin\theta_m = 19,7\ Kip.in$

$M_V = M \cos\theta_m = 45\ Kip.in$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

$$\begin{Bmatrix} U_A \\ V_A \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_A \\ Z_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_m & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_m\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_m\right) & \cos\theta_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2.4 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_A = 4.05 \\ V_A = -1.522 \end{cases}$$

$$I_{av} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} = 12.6 \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_{22} - I_{11}}{2}\right)^2 + I_{12}^2}$$

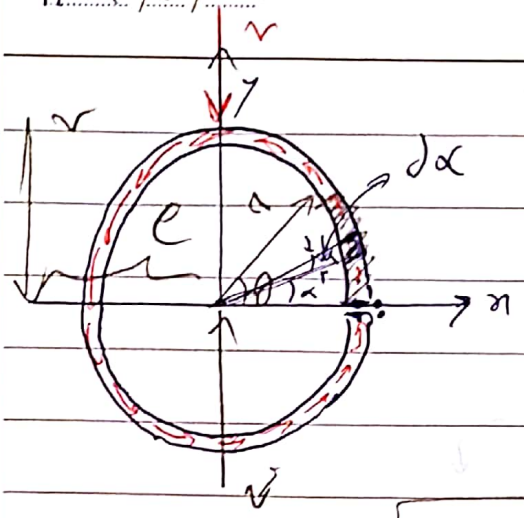
$$R = 11.4$$

$$I_{max} = I_{av} + R = 12.6 + 11.4 = 24.0 = I_{22}$$

$$I_{min} = I_{av} - R = 12.6 - 11.4 = 1.2 = I_{11}$$

$$\sigma_A = \frac{-M_y V_A}{I_{yy}} - \frac{M_z U_A}{I_{zz}} = \boxed{-8.72\ \text{ksi}}$$

به همین گونه بقیه V_A و U_A را بر حسب آن بدست می‌آوریم.



$$Q = \int \gamma \, dA$$

$$Q = \int_0^{\theta} q \sin\alpha \cdot 2\pi a \, d\alpha$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\theta} \sin\alpha \, d\alpha$$

$$\boxed{Q = 2\pi a^2 (1 - \cos\theta)}$$

$$I = \int \gamma^2 dA = \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2\alpha \cdot 2\pi a \, d\alpha \Rightarrow$$

$$2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha \Rightarrow I = \frac{2\pi a^3}{2} \left[\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right]_0^{2\pi} =$$

$$\pi 2\pi a^2$$

$$\gamma = \frac{V Q}{I} = \frac{V 2\pi a^2 (1 - \cos 2\theta)}{\pi 2\pi a^2} = \frac{V}{\pi a}(1 - \cos\theta)$$

$$0 < \theta < 2\pi$$

$$\gamma_m = \frac{2V}{\pi a} \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \gamma \cos\theta \, ds = 0$$

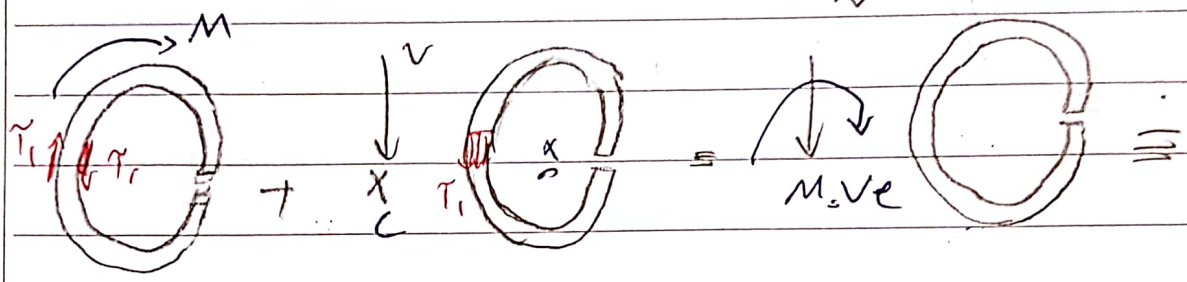
$$\int_0^{2\pi} \gamma \sin\theta \, ds = V$$

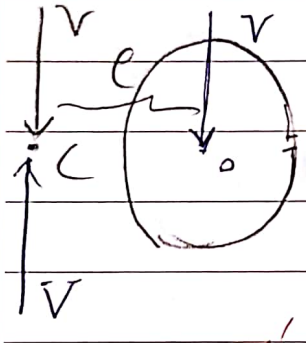
$$\int dm = a \, dF = \int a \gamma \, ds \Rightarrow m = \int_0^{2\pi} \frac{V}{\pi}(1 - \cos\theta) a \, d\theta$$

Scanned by CamScanner

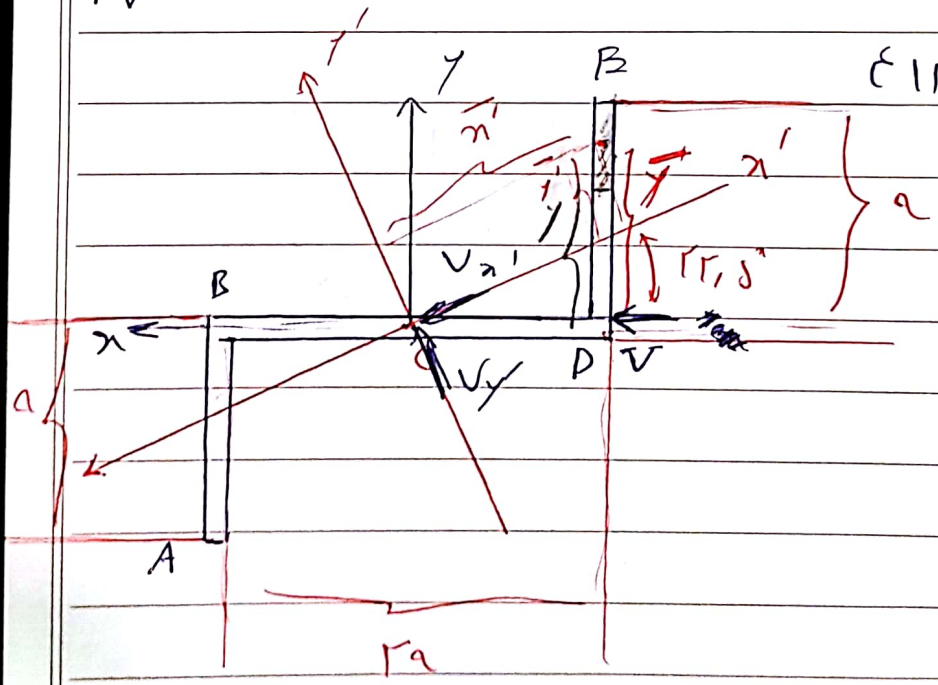
$$\frac{v_a}{\pi}\left[\theta - \sin\theta\right]_{0}^{\pi} = rv_a$$

$$ve, M, rv_a \Rightarrow \boxed{e, r_a}$$





حل مسئله ی ۲۹ صفحه ی ۴۱۱



$$\begin{cases} J_{x''} = \cdots r_{\delta} r \cdot t_a{}^{r} \\ J_{y'y'} = r_{,} \wedge t_a{}^{r} \end{cases}$$

$$\theta_m = r r_{,} \delta^{\circ}$$

Scanned by CamScanner

۱۳۹۱/۱۰/۱۸

$$\begin{cases} v_{x'} = v\cos(22.5^\circ) \\ v_{y'} = v\sin(22.5^\circ) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_m & \sin\theta_m \\ -\sin\theta_m & \cos\theta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \frac{a+z}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \bar{x}' = \dfrac{a}{\cos\theta_m} + (\bar{y} - a\tan\theta_m)\sin\theta_m \\ \bar{y}' = \dfrac{1}{2}(a+z)\cos\theta_m - a\sin\theta_m \end{cases}$$

$$T_1 = \frac{v_{y'} Q_{x'}}{J_{z'z'} + \quad} = \frac{v\sin\theta_m \left[\frac{1}{2}(a+z)\cos\theta_m - a\sin\theta_m\right] + (a-z)}{\quad + \quad}$$

$$T_{1(z)} = \frac{1.5}{4a^2}(0.707a + 0.354z)(a-z)$$

$v_{x'}$ در $Q_{y'} = \bar{x}'A = \left[\dfrac{a}{\cos\theta_m} + (\bar{y} - a\tan\theta_m)\sin\theta_m\right] + (a-z)$

$$Q_{y'} = +(a-z)(1.109a + 0.191z)$$

$$T_{1(1)} = \frac{v_{x'} Q_{y'}}{J_{y'y'} + \quad} = \frac{2.5}{4a^2}(1.109a + 0.191z)(a-z)$$

NOTEBOOK iman

Scanned by CamScanner

۱۳۹۷/۱۰/۱۸

$$\downarrow + \quad \Sigma F_y = -T_1 + T_2 = \frac{V}{2g^2}(g-1)(0,219 - 0,5407)$$

$$= 5/7 \text{ kN}$$

Scanned by CamScanner