مهمات شریف @sharif_ie

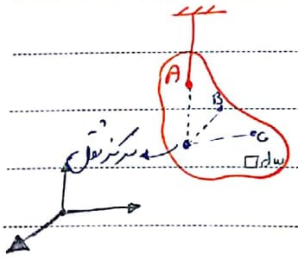
مهمات شریف @sharif_ie

مرکز ثقل $\frac{\int x\,dw}{w}$ مرکز جرم $\frac{\int x\,dm}{m}$

Date : Page : (۱۹)

مرکز حجم $\frac{\int x\,dv}{v}$

اگر گشتاور حول مرکز ثقل بنویسیم، گشتاور صفر می‌شود.



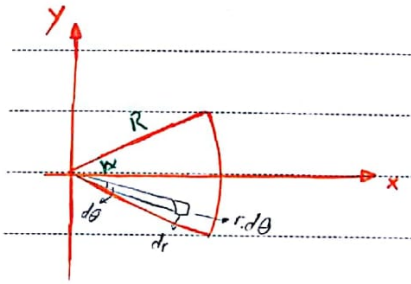
گشتاور جزء حول مبدأ — گشتاور کل جسم حول مبدأ

$$\int x.dw = \bar{x}\,w \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x.dw}{w} \quad \rho\,dx\,dy\,dz$$

$$\bar{y} = \frac{\int y.dw}{w}$$

اگر چگالی در تمام نقاط یکسان باشد، مرکز جرم، مرکز ثقل و مرکز حجم برابر است.

- محاسبه مرکز سطح قطاعی از دایره.

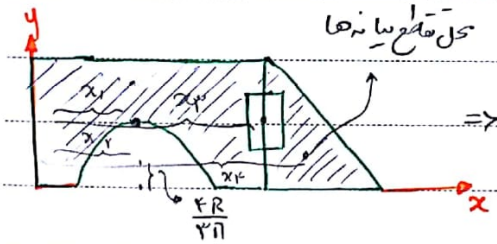


$$\bar{x} = \frac{\int x.dA}{A} \Rightarrow \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{0}^{R} r\cos\theta\,.dr.d\theta}{\alpha R^2} = \frac{R^3}{3}\times \sin\theta\Big]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{R^3\sin\alpha}{\alpha R^2} = \boxed{\frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}}$$

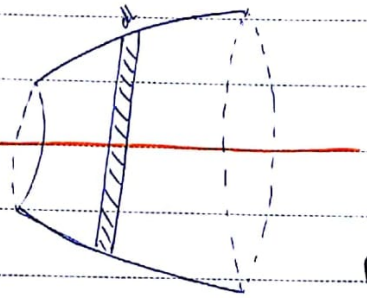
اصداف مرکز جرم و مرکز جرم دلیل پایداری کشتی‌هاست.

- مرکز سطح‌هایی که شکل از چند شکل ساده هستند.



$$\Rightarrow \text{مرکز سطح} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i}$$

تصیه پاپوس

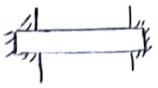


$$\int 2\pi y.dL = 2\pi L\,\underbrace{\frac{\int y.dL}{L}}_{\bar{y}} = 2\pi L\bar{y}$$

بطور شابه برای حجم داریم $V = 2\pi A\,\underbrace{\frac{\int y.dA}{A}}_{\bar{y}} = 2\pi A\bar{y}$

AZAD

Scanned by CamScanner

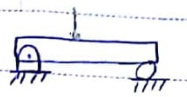


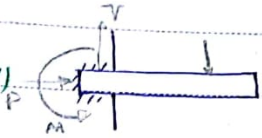
تیر دو سر گیردار نامعین است

Page : (۲۰)

Date :

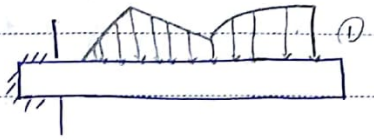
• انواع تیر

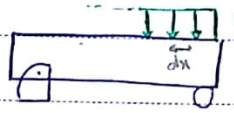




۱) تیر تکه ۲) تیر گیردار

مثال

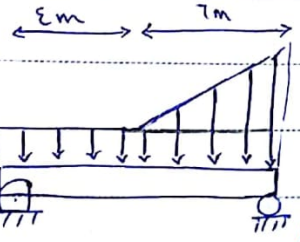


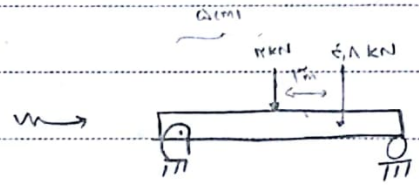


مثال

$$\bar{x}(L.w) = \int x.w.dx \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x.dw}{w}$$

نقطه اثر مجموعه نیروها، برابر مرکز سطح شکل سه رنگ (یا رنگی شکل رنگ شده)





نیروهای تکیه گاه را بدست آورید.

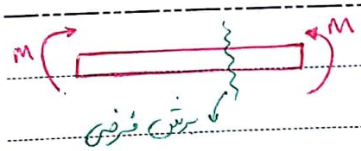
$\frac{1700 \times 7}{2} = 4800$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (-9)(12) - (8)(4.8) + 10(By) = 0 \Rightarrow By = 11.4\ kN$$

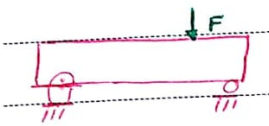
$$Ay = 16.8 - By$$

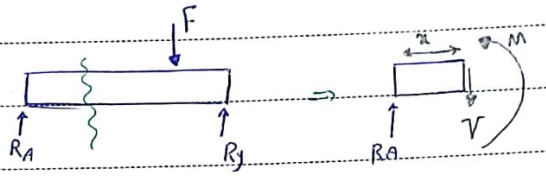
Scanned by CamScanner

* تنیر الاستیک گرفته شود
* " " نوار الاستیک برداشته شود



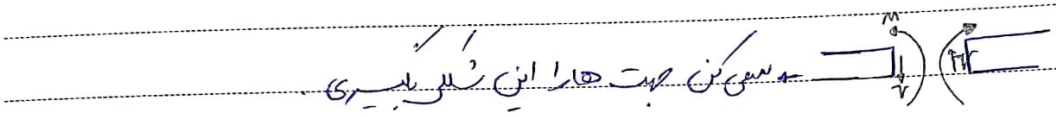
این نیروها از کجا ایجاد شدند

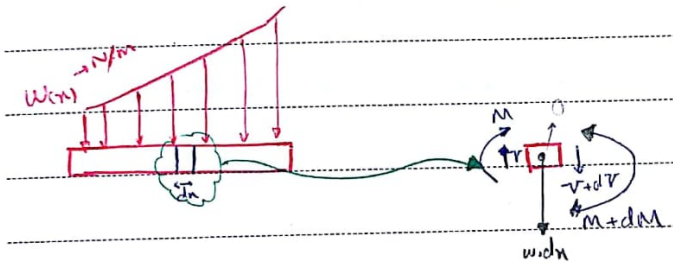




$\Rightarrow M = R_A \cdot x$

سعی کن جهت های این شکل یادبگیری.





$\Rightarrow$ ① $\sum F_y = 0 \Rightarrow V - w.dx - V - dV = 0$

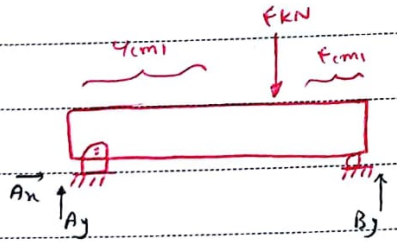
$\Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dx} = -w}$ ①

② $\sum M_O : M + dM - M - \frac{dx}{2} V + \frac{dx}{2}(V + dV) = 0 \Rightarrow dM = V dx \Rightarrow \boxed{\frac{dM}{dx} = V}$ ②

انتگرال نمودار (x-V) گشتاور را میدهند.

① ∧ ② $\Longrightarrow \boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = -w}$

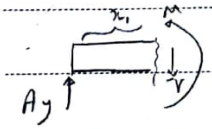
نیروهای عرضی را بدست آورید.



$\Rightarrow B_y = \frac{F \times 4}{10} = 1.4\ KN$

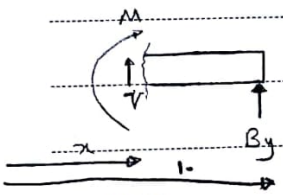
$A_y = 1.4\ KN$

یک برش قبل از نیرو و یک برش بعد از نیرو می زنیم.



$\Rightarrow V = A_y = 1.4\ KN$

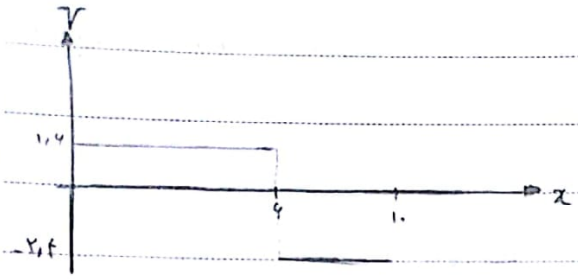
$M = 1.4\, x_1$



$V = -B_y = -1.4\ KN$

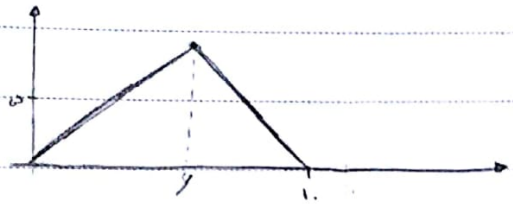
$M = (10 - x)\, B = (10 - x)(1.4)$

Scanned by CamScanner



حال نمودار (V-x) را رسم میکنیم

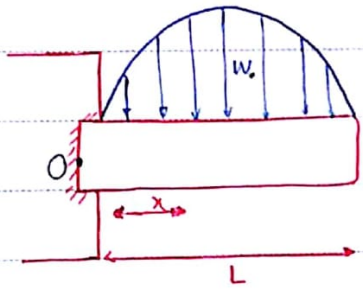
(نمودار نیروی برشی)



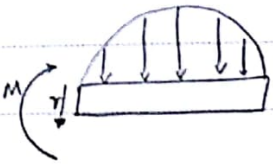
نمودار (M-x) را رسم میکنیم (نمودار گشتاور برشی)

اگر نیروی پیوسته نداشته باشیم، نمودار (M-x) پیوسته است.

" متمرکز نداشته باشیم، نمودار (V-x) پیوسته است.



$$W_{(x)} = W_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$



۱- نیروهای کلیه ما را بدست می آوریم

$$V = \int_0^L W_{(x)}\,dx = \int_0^L W_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = -W_0\frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big]_0^L \rightarrow \boxed{\frac{2W_0L}{\pi}}$$

گشتاور حول نقطه مرکز: $M = -V\frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{W_0L^2}{\pi}}$ یا $\sum M_O = 0 \Rightarrow \int_0^L x\cdot W_{(x)}\,dx = M = \dots$

$$\Rightarrow W_0\int_0^L x\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \boxed{-W_0\frac{L^2}{\pi}}$$

Scanned by CamScanner

حال برش می‌زنیم :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_x = \int_x^L w_{(x)}\,dx = -\frac{w_0 L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big]_x^L$$

$$\Rightarrow V = \frac{w_0 L}{\pi}\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)$$

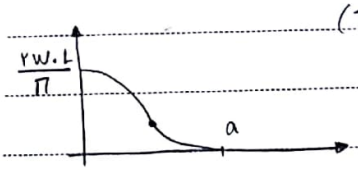
$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow -M - \int_x^L (z-x)\, w_{(z)}\, dz = 0 \Rightarrow M = -\int_x^L (z-x)\, w_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) dz$$

$$= -w_0 \int_x^L \left(z\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) - x\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\right) dz$$

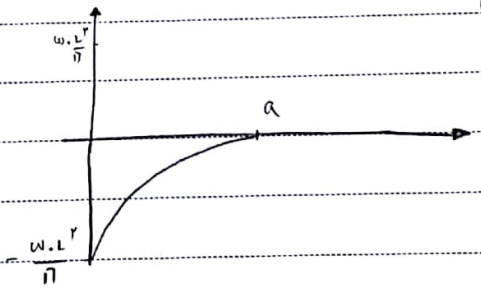
$$\Rightarrow M = \frac{-w_0 x L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\Big]_x^L - w_0\left(\frac{-zL}{\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\Big]_x^L + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\Big]_x^L\right)$$

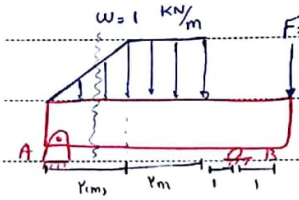
$$\Rightarrow M = \frac{w_0 x L}{\pi}\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) - w_0\left(\frac{L^2}{\pi} - \frac{xL}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)$$

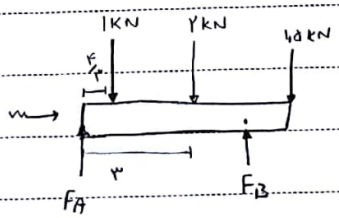
نمودار $(V-x)$



نمودار $(M-x)$







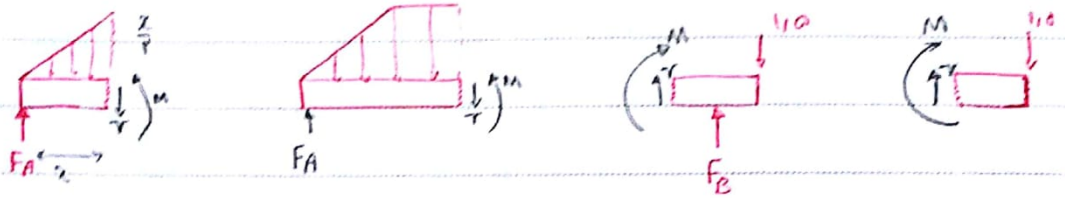
$$\Sigma M_A = 0 \curvearrowright \quad \overbrace{F_{(3)}(1)}^{\frac{\varepsilon}{3}} + \overbrace{3(2)}^{4} + \overbrace{6(3)}^{9} = F_B(3) \Rightarrow \frac{19}{3} = F_B(3) \Rightarrow F_B = \frac{19}{9}\ KN$$

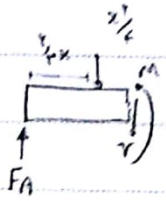
$$\Sigma F = 0 \rightarrow \quad 10 + F_A + F_B = 0 \Rightarrow F_A = \frac{151}{9}\ KN$$

AZAD

Scanned by CamScanner

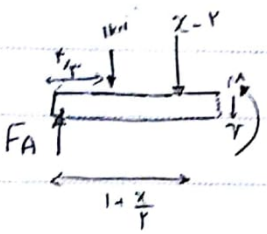
حال برش می‌زنیم. (برش حداقل از تغییر شیب یا بارگذاری) (یک برش قبل از ۲ - یک برش بین ۲ و ۴ - یک برش بعد از ۴)





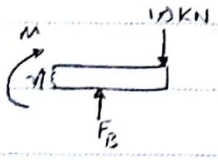
$$T = F_A - \frac{x^2}{4}$$

$$\sum M_B = 0 \quad M - \frac{x}{2} \times \frac{x^2}{4} - T \times x = 0 \Rightarrow M = \frac{x^3}{8} - x F_A - \frac{x^2}{4} = 0$$



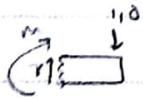
$$T = F_A - 1 - x + 2 \Rightarrow \boxed{T = F_A - x + 1}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -\frac{x}{2} - (x-2)\left(1+\frac{x}{2}\right) - xT + M = 0 \Rightarrow M = \dots$$



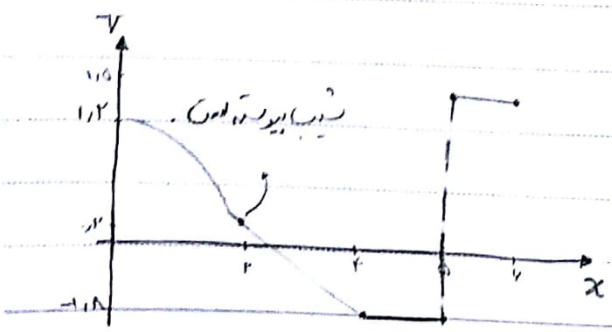
$$T = 11.5 - F_B$$

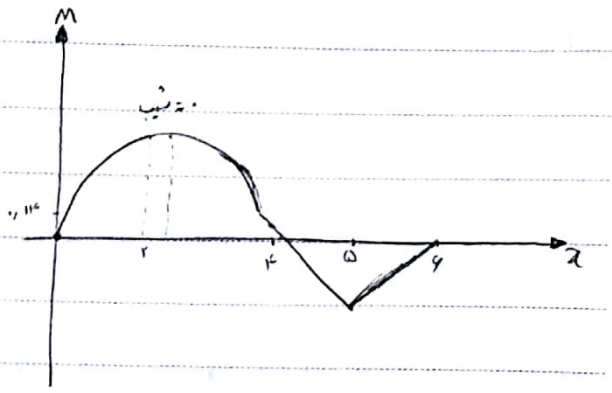
$$\sum M_T = 0 \Rightarrow (5-x) F_B - (4-x) 11.5 = M \Rightarrow M = \dots$$



$$T = 11.5 \quad , \quad M = (-11.5)(4-x)$$

عدم پیوستگی بخاطر نیروی متمرکز است



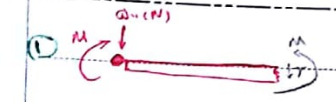


Scanned by CamScanner

Page : (۲۱)

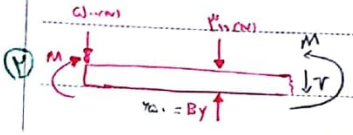
Date :

قبل رسم نمودارین حاصم برش می‌زنیم.



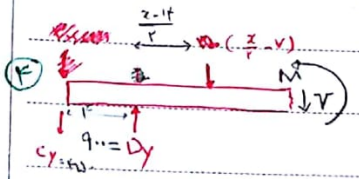
$V = -۵۰۰\ (N)$

$M = -(۵۰۰)x + ۳۲۵۰$



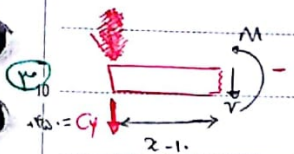
$V = -۱۵۰$

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow +(۱۵۰)(x-۵) + \overbrace{(-۵)(\frac{۵}{۲})}^{۲۵۰} - ۳۲۵۰ + M = 0 \Rightarrow M = -۱۵۰x + ۱۵۰۰$



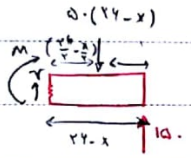
$V = -۵۰x + ۱۱۵۰$

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow ۴۰۹۰۰ - ۵۰(\frac{x}{۲} - ۷)(\frac{x}{۲} - ۳) - (x-۱۰)V + M = 0$



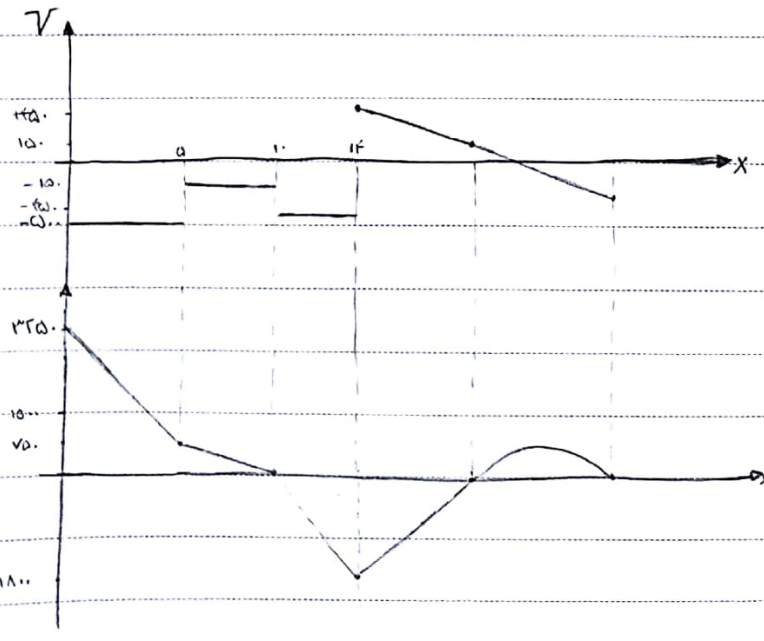
$V = -۴۵۰(۷)$

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M + (۴۵۰)(x-۱۰) = 0 \Rightarrow M = -۴۵۰x + ۴۵۰۰$



$V = ۱۱۵۰ - ۵۰x$

$\Sigma M_? = 0 \Rightarrow ۱۵۰(۲۴-x) - M - \frac{۵۰}{۲}(۲۴-x)^۲ = 0 \Rightarrow M = ۲۵(۲۴-x)^۲ - ۱۵۰(۲۴-x)$



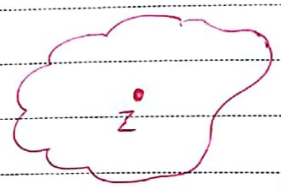
Scanned by CamScanner

$F = ma$
$M = I\alpha$

Date : . .

Page : ( )

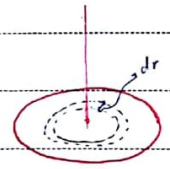
شعاع ژیراسیون (ژیراسیون)



$$I_z = \int r^2 . dA = k_z^2 A$$

شعاع ژیراسیون

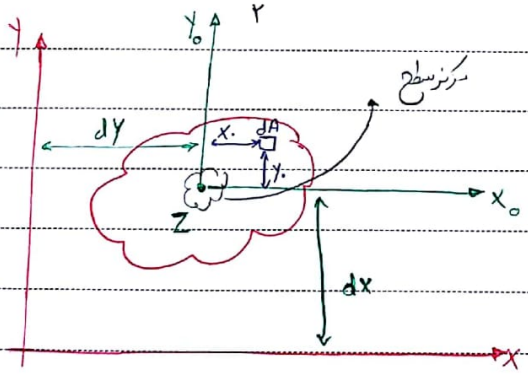
$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$$



- شعاع ژیراسیون یه دایره رو حساب کنید. (شعاع = R)

$$I = \int r^2 . dA = \int_0^R r^2 . 2\pi r . dr = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\frac{\pi R^4}{2} = k^2 \pi R^2 \Rightarrow \boxed{k = \frac{\sqrt{2}}{2} R}$$



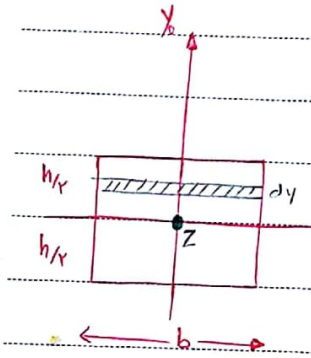
$$I_x = \int y^2 . dA = \int (d_x^2 + y^2 + 2 d_x y) . dA$$

$$= (A d_x^2 + \bar{I}_x + 2 d_x \underbrace{\int y . dA}_{=0})$$

چون دستگاه روی مرکز سطح قرار دارد.

$$\Rightarrow \boxed{I_x = A d_x^2 + \bar{I}_x}$$ ← قضیه محورهای موازی

$$\boxed{k_x^2 A = A d_x^2 + k_x^2 A}$$



- مثال اینرسی رابه دست آورید.

$$\bar{I}_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 . dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 . b . dy = b \frac{y^3}{3} \Big]_{-h/2}^{h/2} = \boxed{\frac{1}{12} b h^3}$$

$$\boxed{\bar{I}_y = \frac{1}{12} h b^3}$$

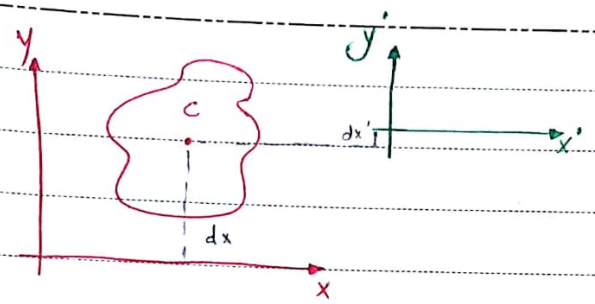
$$\boxed{\bar{I}_z = I_x + I_y}$$

AZAD

Scanned by CamScanner

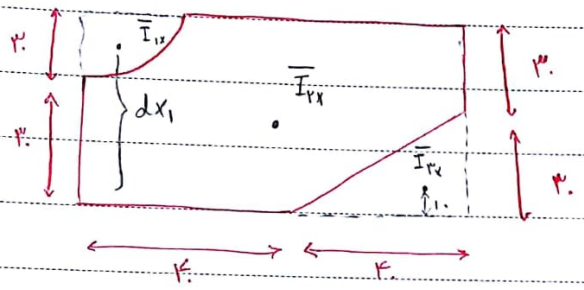
Page : ( )

Date :



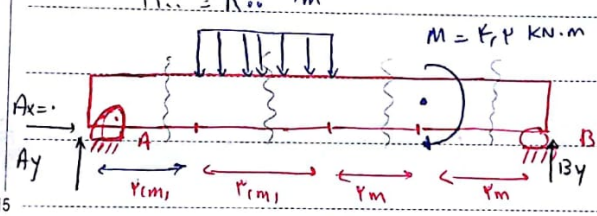
$$\bar{I}_x = I_x - A dx^2$$

$$I'_{x'} = I_x - A dx^2 + A dx^2$$

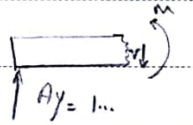


$$I_x = \bar{I}_{2x} + A_2 \times 30^2 - \left(\bar{I}_{1x} + A_1 \times dx_1^2\right) - \left(I_3 + A_3 (10)^2\right) =$$

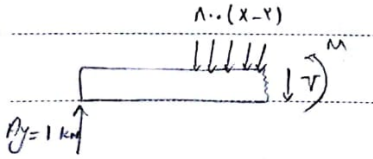
- تیر مقابل را حل کنید.



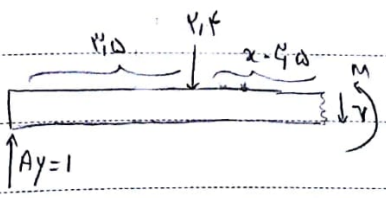
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -(240)(4) - 42 = 12 = By(9) \Rightarrow \boxed{By = 14 kN} \Rightarrow \boxed{Ay = 10 N}$$



$$\boxed{V = +10 kN} \quad , \quad \boxed{M = 10x}$$

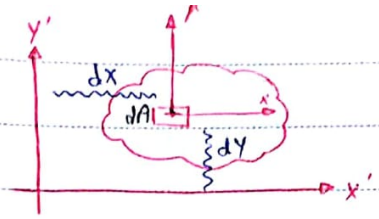


$$\boxed{V = 2.4 - 0.8x} \qquad M = x - 0.4(x^2 - 4x + 8)$$



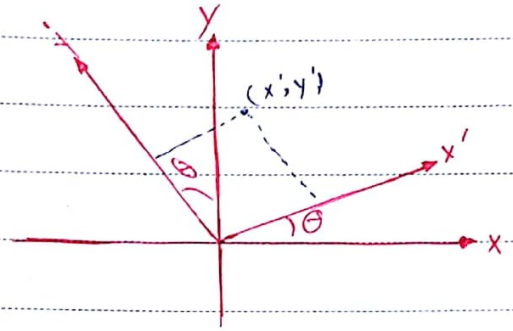
$$V = -1.4 kN \qquad M = -x - \underbrace{(2.4)(6.5 - x)}_{8.4 + 2.4x} = -4.4x + 8.4$$

Scanned by CamScanner



$$I_{x'y'} = I_{xy} + dx\,dy\,A$$

- دوران محور



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$I_{x'} = \int y'^{2}\,dA = \int (y C\theta - \sin\theta x)^{2}\,dA = I_x C^{2}\theta + I_y \sin^{2}\theta - 2 I_{xy} \sin\theta C\theta$$

پس از مشتقات ⟹ $I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} C2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$

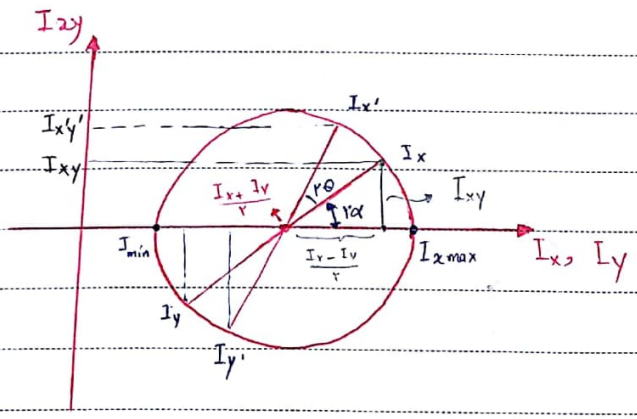
برای $I_{y'}$ هم بطور مشابه همین طور است.

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} C2\theta$$

برای ماکسیمم شدن ممان اینرسی های جدید باید از آنها نسبت به θ مشتق گرفت

$$\frac{d I_{x'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$$

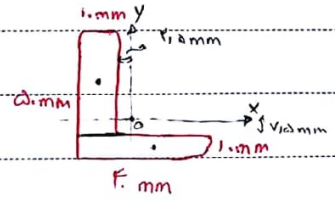
Scanned by CamScanner



$$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

شعاع دایره

الف) ممان اینرسی را حول محورهای x و y بدست بیاورید.



$$I_{x_1} = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \times 10 \times (40)^3 = \frac{16}{3} \times 10^4 \ mm^4$$

ممان اینرسی مستطیل (حول مرکز جرم) — عرض — ارتفاع

$$I_{x_2} = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \times 24 \times 10^3 = \frac{10^4}{3} mm^4$$

$$I_{x_{کل}} = I_{x_1} + I_{x_2} + dx_1^2 (bh) + dx_2^2 (b'h') = \frac{16}{3} \times 10^4 + 10 \times (25^2 \times 2) = 10^4 \left(\frac{16}{3} + 12.5\right) mm^4$$

ب) $I_{x_{max}}$ را بدست آورید.

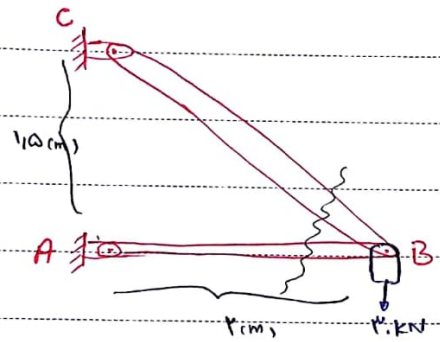
$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

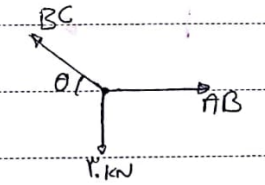
Scanned by CamScanner

Page : ( )

Date : . .

«مقاومت مصالح»

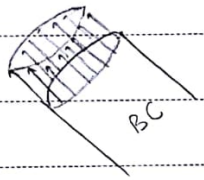




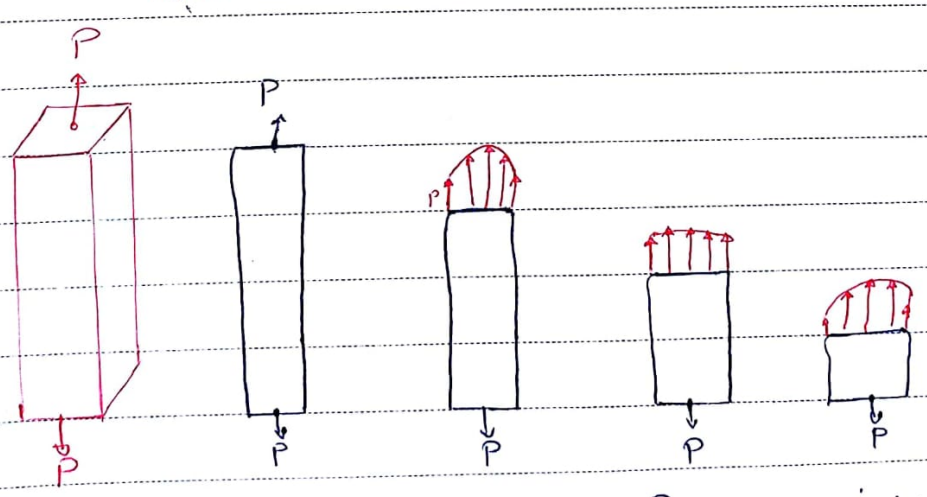
$\Rightarrow$ $BC = 90\,kN$, $AB = 40\,kN$

تنش

$$\sigma = \frac{F}{A}$$



σ هر نقطه $= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$



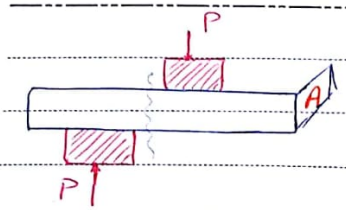
۱. تنش متوسط در هر این نیروها برابر $\frac{P}{?}$ است.

Scanned by CamScanner

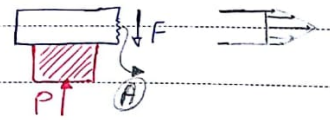
Date : . .

Page : ( )

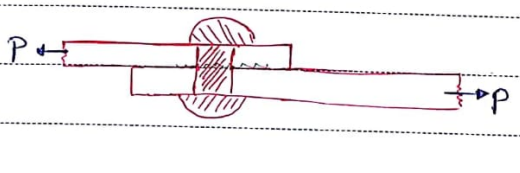
تنش برشی

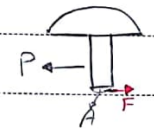


$$\tau_{avg.} = \frac{F}{A}$$

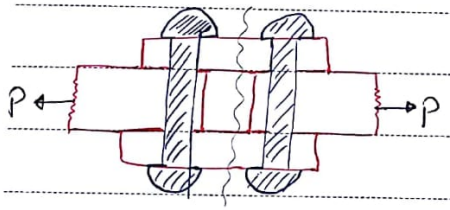


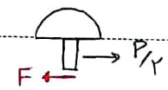
مثال: تنش برشی را حساب کنید.





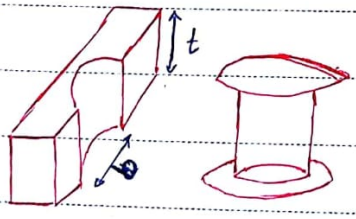
$$\tau = \frac{F}{A} = \boxed{\frac{P}{A}}$$





$$\Rightarrow \tau = \frac{F}{A} = \boxed{\frac{P}{2A}}$$

تنش تکیه گاهی

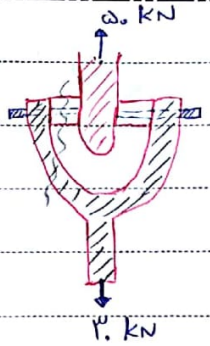


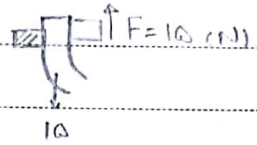
$$\sigma_b = \frac{F}{A_b} = \frac{F}{tb}$$

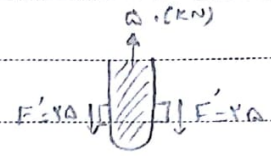
Scanned by CamScanner

Date : . .

Page : ( )







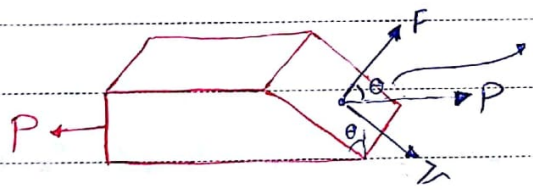
فقط کافی بود همین قدر را حساب کنیم چون یکی از F ها از دیگری بزرگ‌تر است پس بزرگه را در نظر می‌گیریم.

$$\tau = \frac{F'}{A} = \frac{۲۵\times۱۰^{۳}}{\pi\left(\frac{۲۵}{۴}\right)\times۱۰^{-۶}} = \frac{۱,۶\times۱۰^{۸}}{\pi} \simeq ۵۰\,MPa$$

یک میله را تحت کشش قرار دهیم. نیروی درونی آن از چه نوع است؟ P

بستگی به نوع صفحه‌ای است که برشش بزنیم. اگر قائم باشد، فقط تنش قائم داریم ولی اگر صفحه مایل باشد، هر دو نوع تنش را داریم.

شکل مایل را می‌بینیم:

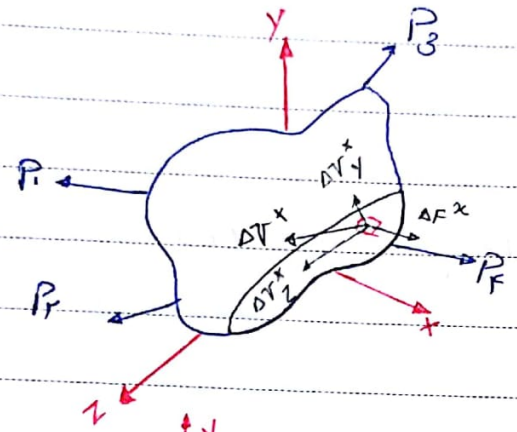


زاویه‌ای که صفحه میله را قطع میکند.

$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{F}{A_\theta} = \dfrac{P\cos\theta}{A/\cos\theta} = \dfrac{P}{A}\cos^{۲}\theta \\ \tau = \dfrac{V}{A_\theta} = \dfrac{P\sin\theta}{A/\cos\theta} = \dfrac{P}{A}\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

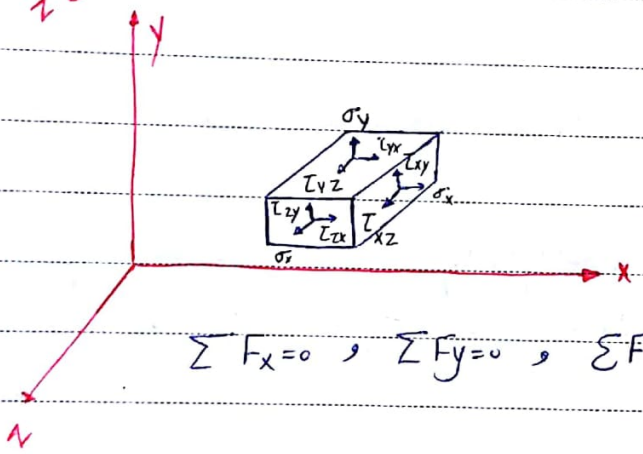
مواد ترد (مثل بتن) به دلیل اینکه از صفحات قائم بریده میشه، به این نتیجه می‌رسیم که به تنش برشی حساس است.
همیشه در صفحه‌ای میشینه که نیروی کشش max بشه.)



تانسور

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

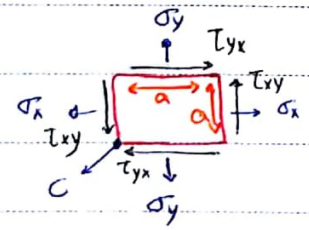
$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \tau^x_y}{\Delta A} \quad , \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \tau^x_z}{\Delta A}$$



سه بعدی المان به این صورت کشیده می‌شود.

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum F_z = 0 \Rightarrow$$

دلیل اینکه نیروهای که در این سه صفحه جلو
شند در سه صفحه پشت برعکسش
هست پس همدیگر را خنثی میکنند.



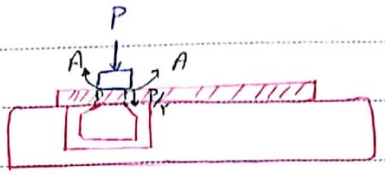
مساحت صفحه به اندازه کافی کوچک است.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -a(\tau_{yx}\,\Delta A) + a(\tau_{xy}\,\Delta A) =$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Scanned by CamScanner

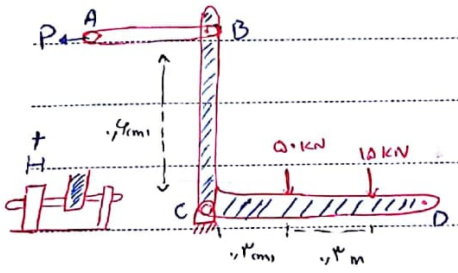
برای محاسبه نیروی برشی یک پیچ میتوان از روش زیر استفاده کرد.



نیروی کشدار آن جسم بسته میشود.

(تنش نهایی) $\sigma_{max} = \frac{P_1}{A} = \frac{P}{2A}$

$F.S = \frac{\text{تنش نهایی}}{\text{تنش مجاز}}$ یا $\text{ضریب اطمینان } (F.S.) = \frac{\text{نیروی نهایی}}{\text{نیروی مجاز}}$



$\sigma_u = 600\ MPa$ (قائم)

الف) با دانستن اینکه تنش نهایی میله AB برابر 600 MPa باشد، قطر را طوری بیابید که ضریب اطمینان (F.S) 3,3 شود.

ب) پین C باید از فولادی با تنش نهایی 350 MPa باشد. قطر پین را چنان تعیین کنید که ضریب اطمینان 3,3 باشد.

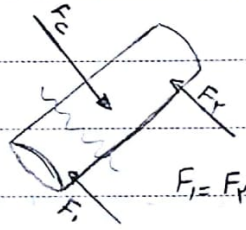
$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 0.6P = 15 + 9 \Rightarrow 0.6P = 24 \Rightarrow P = 40\ kN$

$F.S = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}} \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S} = \frac{600}{3,3}$ $\quad \sigma_{all} = \frac{P}{A}$ $\quad \frac{600}{3,3} = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{40(0,6)\times 10^{-3}}{600\times 10^{6}}$

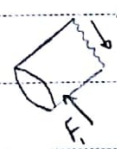
$\Rightarrow A = 22.0 \times 10^{-6}\ (m^2) \Rightarrow \frac{\pi d^2}{4} = 22.0 \times 10^{-6} \Rightarrow d = \dots\dots\ (m)$

ب)

$\Rightarrow \begin{cases} C_x = 40\ kN \\ C_y = 70\ kN \end{cases} \Rightarrow F_C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \simeq 79\ kN$



$F_1 = F_2 = \frac{F_C}{2} = 38\ kN \Rightarrow$



$\Rightarrow V = 38$

$\tau_{all} = \frac{\tau_u}{F.S} =$

$A = \frac{F}{\tau_{all}} =$ $\Rightarrow A = \frac{38\times 10^{+3}}{\frac{350\times 10^{6}}{3,3}} \Rightarrow d = 19\ (mm)$

AZAD

Scanned by CamScanner

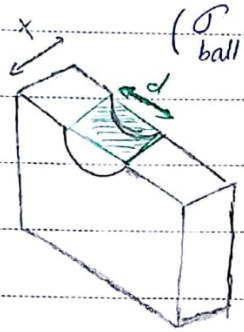
کرنش چون واحد ندارد در فارسی و انگلیسی عددش فرقی نمی‌کند.

(چون ضریب تبدیل واحد ندارد.)

Page : ( )

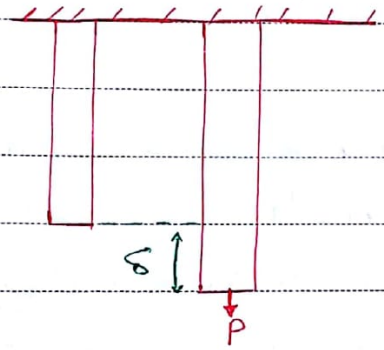
Date : . .

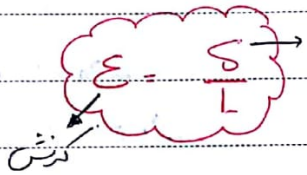
ج) ضخامت پایه را بدست آورید در جایی که تنش تکیه‌گاهی برابر ۳۰۰ MPa شد. ($\sigma_{ball} = 300\ MPa$)

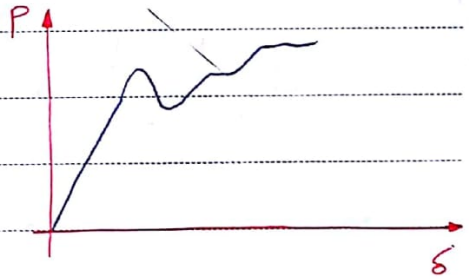


$$\frac{F_1}{td} = \sigma_{ball} \Rightarrow t = \frac{28 \times 10^{3}}{300 \times 10^{6} \times 19 \times 10^{-3}} = \frac{2}{30} = 0.4\ (mm)$$

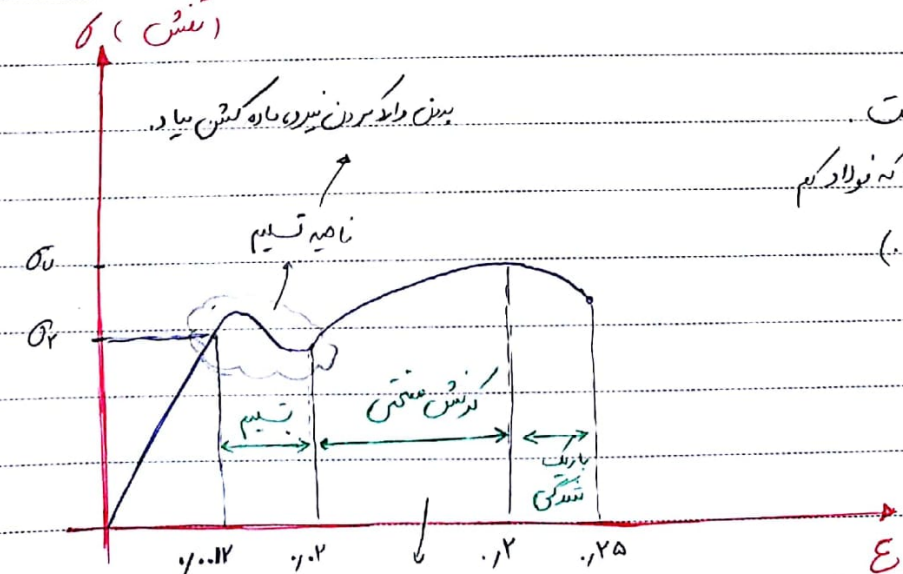
کرنش







کرنش لحظه‌ای ← $\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$



این نمودار برای فولاد است.

(از این نمودار معلوم میشه که فولاد کم کربن بسیار نرم است.)

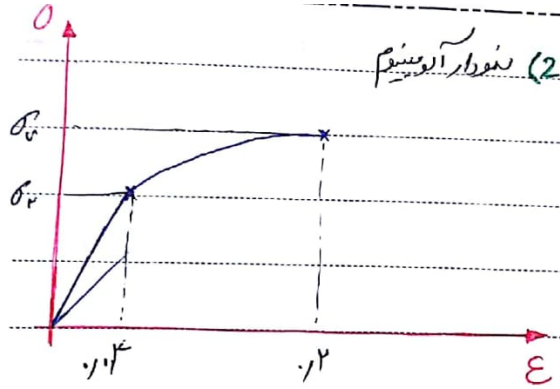
چگش زدن هنگام شمشیر ساختن

(در دوش نرمه و بیرونش سخت)

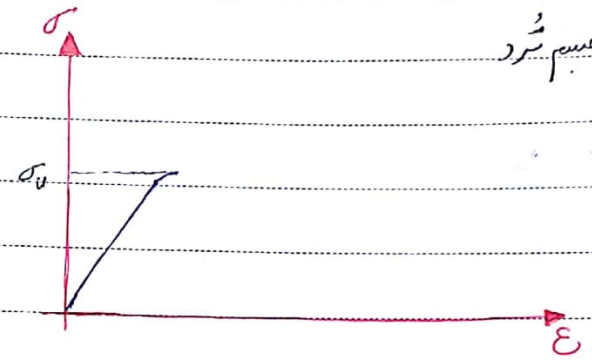
AZAD

Scanned by CamScanner

2) نمودار آلومینیوم

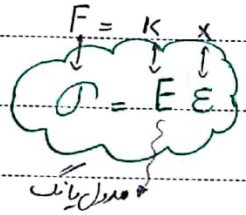


3) نمودار یک جسم شُرد



← اجسامی که کرنش نهایی ضعیفی دارند ⇐ تُرد گفته می‌شوند.

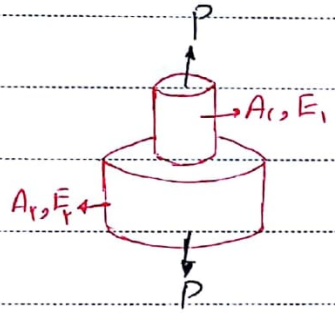
قانون هوک: در ناحیه خطی، رابطه زیر جواب میدهد.



$$\left.\begin{array}{l}\sigma = E\varepsilon \\ \delta = EL\end{array}\right\} \Rightarrow \delta = \frac{PL}{AE}$$

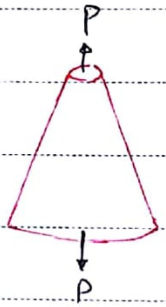
$$\frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \leftarrow \sigma = \frac{P}{A}$$

۱) اگر جسم از چند شکل ثابت تشکیل شده باشد.



$$\delta = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

۲) جسم بصورت مداوم تغییر اندازه بدهد.

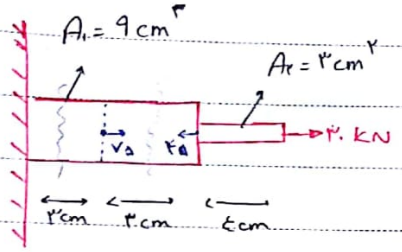


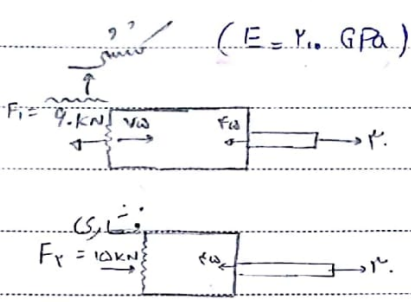
$$\delta = \int \frac{P \cdot dx}{A_x E}$$

Scanned by CamScanner

Page : ( )

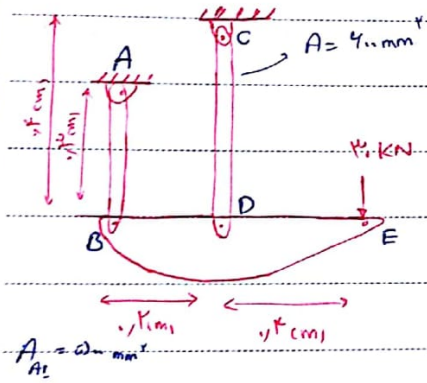
Date : . .





میله‌ی کشش آلیاژی مطابق با شکل رابرو است. اگر ($E = 200\,GPa$) مطلوب است محاسبه‌ی تغییر طول کل میله.

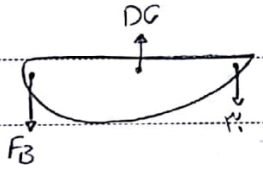
$$\Rightarrow \delta = \frac{60\times10^{3}\times3\times10^{-2}}{9\times10^{-4}\times200\times10^{9}} + \frac{15\times10^{3}\times3\times10^{-2}}{9\times10^{-4}\times200\times10^{9}} + \frac{30\times10^{3}\times4\times10^{-2}}{3\times10^{-4}\times200\times10^{9}}$$



میله صلب است. جنس AB آلومینیوم است ($E = 70\,GPa$)

BC هم فولاد ($200\,GPa$)

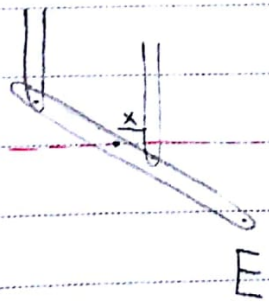
نیز تیر در B و D و F به دست آورید.

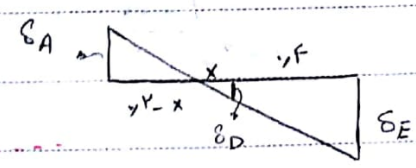


$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (0.2)(DC) = 30(0.4) \Rightarrow \boxed{DC = 60\,kN} \Rightarrow \boxed{F_B = 60\,kN}$$

$$\delta_{DC} = \frac{FL}{AE} = \frac{60(0.4)}{400\times10^{-6}\times200\times10^{9}} = 0.3\times10^{-3} = \boxed{0.3\,mm}$$

$$\delta_{AB} = \frac{60\times(1.5)\times(0.3)}{70\times10^{9}\times500\times10^{-6}} = \frac{18}{35000} = \boxed{0.514\,mm}$$





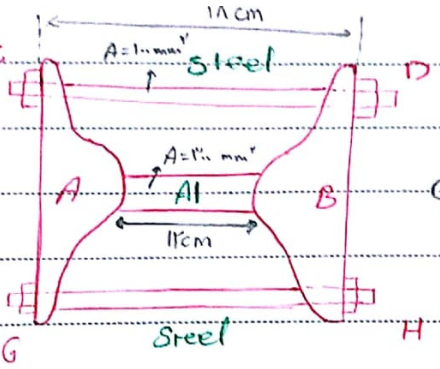
$$\frac{x}{0.2-x} = \frac{0.3}{0.5} \Rightarrow 0.5x = 0.6 - 0.3x$$

$$\Rightarrow x = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\delta_E}{\delta_A} = \frac{0.4-x}{0.2-x} \Rightarrow \boxed{\delta_E = 1.9\,mm}$$

AZAD

Scanned by CamScanner



— دو میله D و H را یک چهارم دوری چرخونیم. تنش در مقطعه آلومینیم را بدست آورید. ($1mm = \frac{1}{10}cm$)

وقتی میله‌ها بهم بستیم، Al تحت فشار قرار میگیره. حال باید میله‌های فولادی تحت کشش قرار بگیرند تا همدیگر را خنثی کنند.

$$\delta_{St} = \frac{P_{St}\ 18\times10^{-2}}{10\times10^{-4}\times200\times10^{9}} = 9\times10^{-9}\ P_{St}$$

P_{St} ← → P_{St}

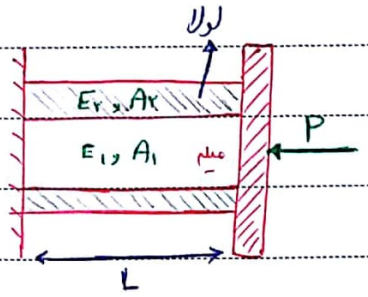
P_{Al} ← → $P_{Al} = 2P_{St}$

$$\delta_{Al} = \frac{P_{Al}\ 12\times10^{-2}}{10\times10^{-4}\times70\times10^{9}} = 11.54\times10^{-9}\ P_{St}$$

$$\delta_{St} + \delta_{Al} = \frac{1}{F} \Rightarrow (9\times10^{-9} + 11.54\times10^{-9})\ P_{St} = \frac{1}{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{St} \simeq 12.9\ KN}$$

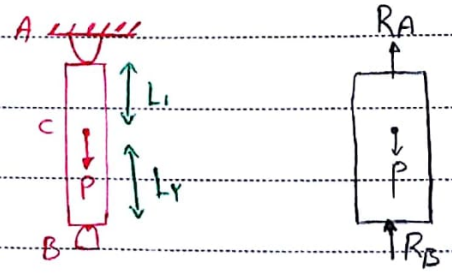
مثال:



$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{F_1 L}{A_1 E_1} = \frac{F_2 L}{A_2 E_2} \\ F_1 + F_2 = P \end{cases}$$

پس از حل مسئله

$$\Rightarrow \Delta L = \frac{PL}{A_1E_1 + A_2E_2}$$



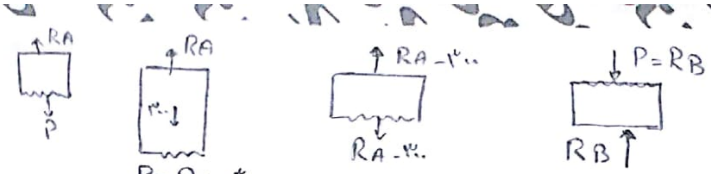
— در حالتی که نیروی C نبود، تنش وجود نداشت. در این حالت تنش‌ها را حساب کنید.

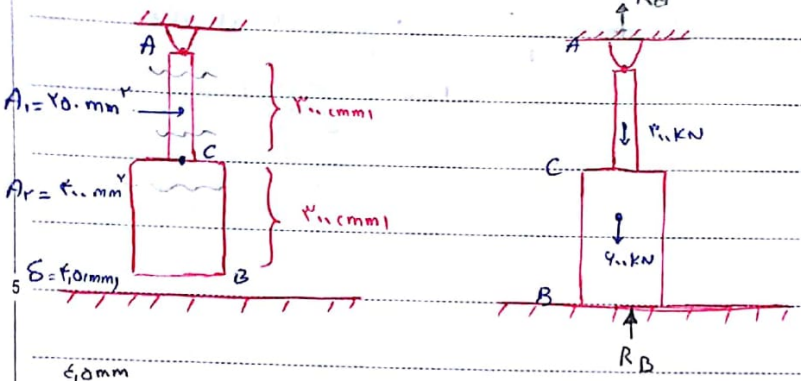
$$\begin{cases} (1)\ \Delta L_1 = \Delta L_2 \Rightarrow \frac{R_A L_1}{EA} = \frac{R_B L_2}{EA} \\ (2)\ R_A + R_B = P \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_A = \frac{L_2}{L_1+L_2} P} \qquad \boxed{R_B = \frac{L_1}{L_1+L_2} P}$$

Scanned by CamScanner

Date :





$E = ۲۰۰ \times ۱۰^{۹}$

$R_A + R_B = ۹۰۰\ kN$

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{R_A(۱۵۰\,mm)\times ۱۰^{-۳}}{۲۵۰\times ۱۰^{-۶}\times E} + \frac{(R_A - ۴۰۰)(۱۰۰)\times ۱۰^{-۳}}{۲۵۰\times ۱۰^{-۶}\times E} + \frac{(R_A - ۴۰۰)(۱۵۰\times ۱۰^{-۳})}{۴۰۰\times ۱۰^{-۶}\times E} + \frac{R_B\times(۱۵۰\times ۱۰^{-۳})}{۴۰۰\times ۱۰^{-۶}\times E}$$

$E = ۲۰۰\times ۱۰^{۹}$ — تحت فشار

$$\Rightarrow\ ۹۰۰ = \frac{R_A\times ۰/۳}{۲۵۰} - \frac{۴۵}{۲۵۰} + \frac{R_A\times ۰/۳}{۴۰۰} - \frac{۱۸۰}{۴۰۰}$$

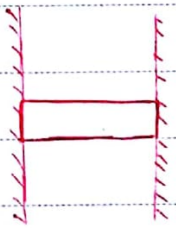
عامل حرارتی

افزایش طول: $\delta_T = \alpha(\Delta T)L$

کرنش حرارتی: $\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha\Delta T$

میله بین دو دیوار است. دما را به اندازه ΔT زیاد کرده تنش بین دو دیوار را حساب کنید.

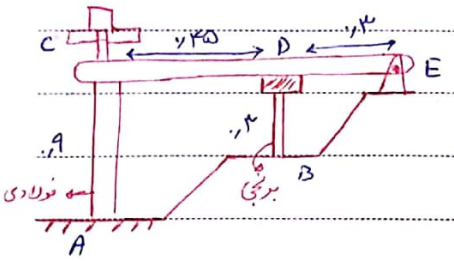
میزان بلند شدن میله هم اندازه فشاری است که برگشته روی میله وارد می‌شود.

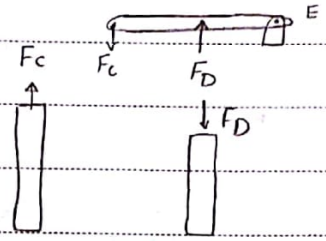


$$\delta_T = \delta \Rightarrow \frac{\sigma L}{E} = \alpha\Delta T L \Rightarrow \boxed{\sigma = \alpha\Delta T E}$$

Scanned by CamScanner

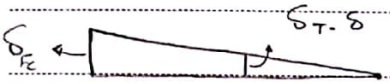
میله برنجی از ۲۰° به ۵۰° رسیده.





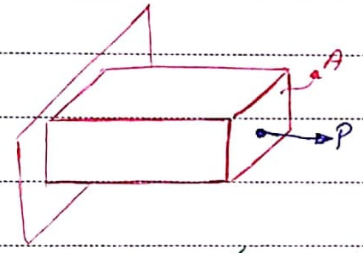
چون رولبست

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow (0.45)F_C - 0.3F_D = 0 \Rightarrow \boxed{F_D = 2.5F_C}$$



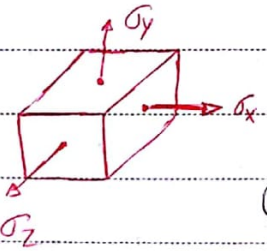
$$\delta = \frac{F_C \times 0.9}{A_{St} E_{St}} \quad , \quad \delta_T - \delta = \alpha \Delta T - \frac{F_D \times 0.3}{A_b E_b} \Rightarrow$$

بارگذاری محوری



$$\sigma_x = \frac{P}{A} \quad , \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\nu = \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

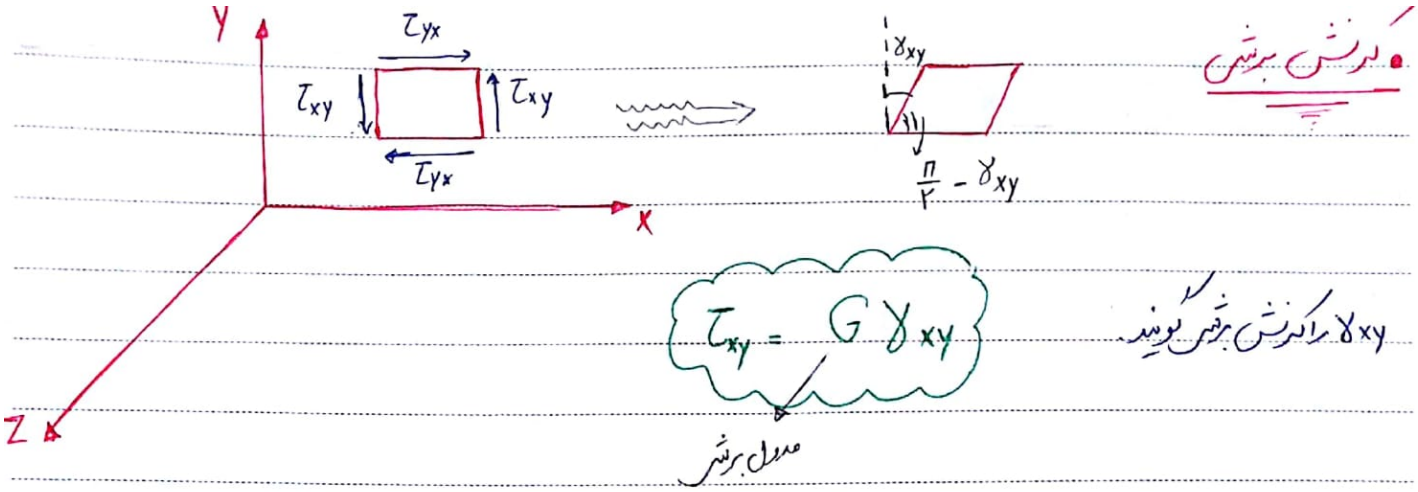


$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

کرنش در محور x

Scanned by CamScanner

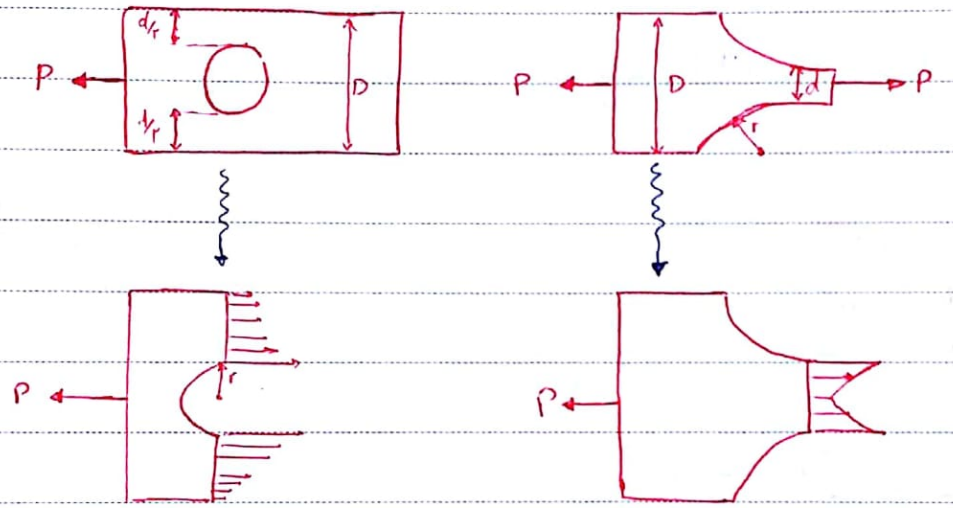
کرنش برشی



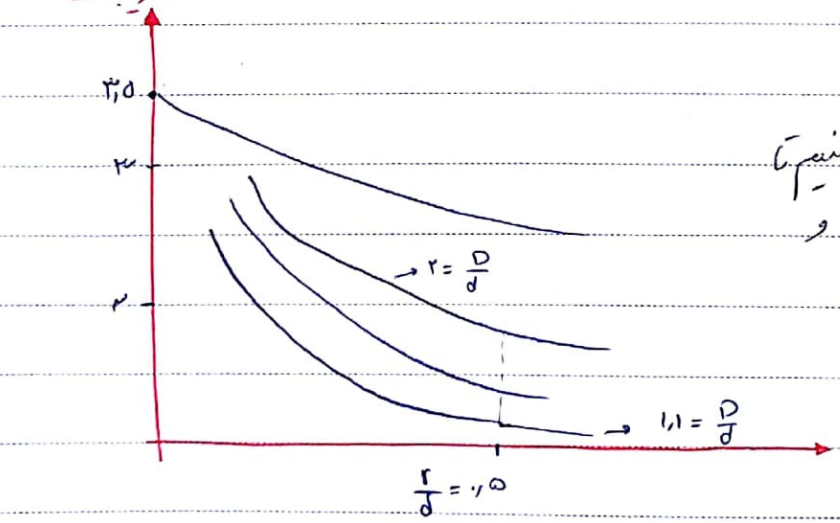
γ_{xy} را کرنش برشی گویند.

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

مدول برشی



ضریب تمرکز تنش

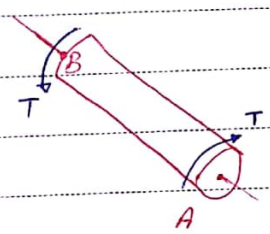


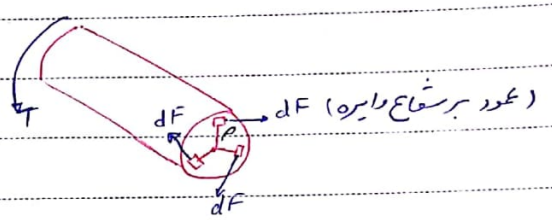
این شکل ها، بحث تمرکز تنش مطرح میشه.

مقداری که باید در تنش ضرب کنیم تا تنش نهایی در نقاط خاص بدست بیاریم و سپس باید اعمال کند.

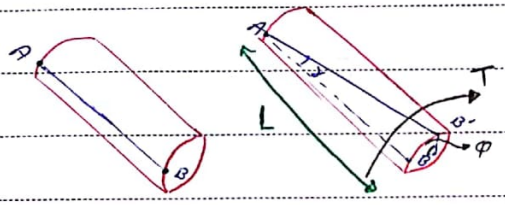
Scanned by CamScanner

پیچش در دایره





$$T = \int \rho \, dF \Rightarrow \quad T = \int \rho \tau \, dA = T$$



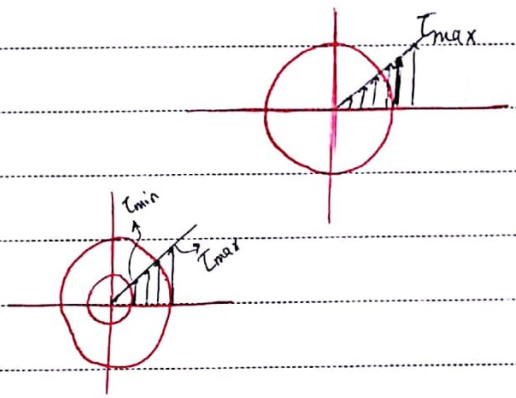
$$L\gamma = \rho\varphi \Rightarrow \gamma = \frac{\rho\varphi}{L}$$

$$\tau = \frac{\rho G \varphi}{L}$$

در مرکز دایره کرنش برابر ۰ است

در لبه کرنش دایره max است.

بصورت شکل مقابل داریم:



$$T = \int \rho \tau \, dA \xrightarrow{\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{max}} \frac{\tau_{max}}{c}\underbrace{\int \rho^2 \, dA}_{J}$$

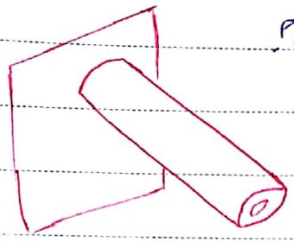
$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}, \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

AZAD

Scanned by CamScanner

(۲)

- تنش برشی مجاز برابر ۱۲۰ MPa است. گشتاور پیچشی ماکسیمم چقدر است؟



$d_o = 4\,cm$

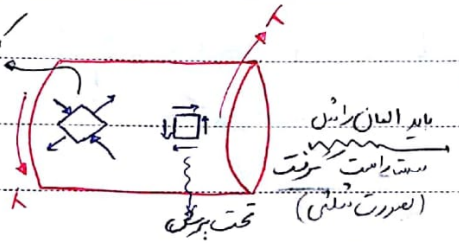
$d_i = 3\,cm$

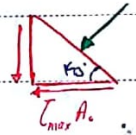
$$J = \frac{1}{2}\pi\left(C_o^4 - C_i^4\right) =$$

$$\Rightarrow T = \frac{\tau_{all} \times J}{C_o} = \frac{12\times10^6 \times \frac{1}{2}\pi \times \left((0.02)^4 - (0.01)^4\right)}{0.02}$$

$$\Rightarrow \frac{12\times\frac{1}{2}\pi\left(2^4 - 1^4\right)}{2} = 1200\pi\ N.m \simeq \boxed{4\ kN.m}$$

کشش و فشار

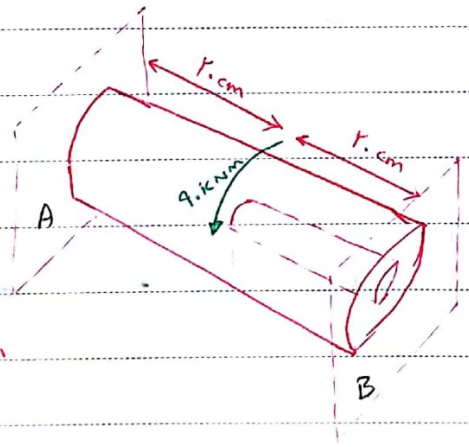




$F = \sigma A \qquad A = \frac{A_o}{\cos 45} = \sqrt{2} A_o$

$$\Rightarrow 2\,\tau_{max} A_o \sin 45 = \sigma \times \sqrt{2} A_o \Rightarrow \sigma = \tau_{max}$$

تنش قائم در صفحه ۴۵ برابر با تنش برشی ماکسیمم است.



$d_o = 6\,cm$

$d_i = 3\,cm$

$$\gamma = \frac{\rho\varphi}{L} \qquad \frac{\varphi_{\text{چپ}}}{\text{راست}} = \frac{\varphi}{\text{چپ}} \quad L_{\text{راست}} = L_{\text{چپ}} \Rightarrow \gamma_A = \gamma_B$$

$$\tau_{maxA} = \frac{T_A \times C_o}{J = \frac{1}{2}\pi C_o^4}$$

$$\tau_{maxB} = \frac{T_B \times C_o}{\frac{1}{2}\pi\left(C_o^4 - C_i^4\right)}$$

$$\Rightarrow \tau_{maxA} = \tau_{maxB} \quad \left(\tau_{maxA} = \tau_{maxB} \text{ که } \gamma_A = \gamma_B \text{ بدین ترتیب}\right)$$

$$T_A + T_B = 90$$

AZAD

Scanned by CamScanner