باسمه تعالی

DYNAMICS OF STRUCTURES

دینامیک سازه ها

دکتر حمید رضا توکلی

عضو هیات علمی دانشکده مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی (نوشیروانی) بابل

پیشگفتار

کتب مرجع:

١. - دینامیک سازه ها تالیف خسرو برگی(مرجع اصلی)

- - Dynamics of Structures By: R.W. Clough and J. Penzein
- - Dynamics of Structures By: A. Chopra
- - Structural Dynamics Theory and Application M. Paz

پیشگفتار

دینامیک سازه ها – کارشناسی ارشد – ۳ واحد

کتاب مرجع: دینامیک سازه ها – خسرو برگی – انتشارات

- اهم مطالب مورد بحث در طول نیمسال

۱ - ضرورت آموزش و ارائه درس (امور تحصیلی – امور حرفه ای مهندسی و طراحی)

۲ - یادآوری اصول دینامیک سازه ها (با توجه به درس اصول مهندسی زلزله در مقطع کارشناسی)

الف- خصوصیات (متغیر زمان – تفاوت تحلیل دینامیکی و استاتیکی – ارتعاش)

ب- درجه آزادی و روش های کاهش (جرم متمرکز – تغییر مکان تعمیم داده شده – اجزاء محدود)

ج- نیروهای مقاوم (الاستیک و میرایی – رفتار و مکانیزم هر یک)

د- سختی و حالتهای مختلف برای سیستم های ساده و پیچیده

پیشگفتار

ه - روش های تعیین معادلات حاکم بر رفتار سازه (تعادل دینامیکی – دالامبر – کار مجازی – روش انرژی .....) در حالت سیستم های یک درجه آزادی

و- ارتعاش آزاد و حل معادله مربوط – حالتهای بحرانی و زیر بحرانی و فوق بحرانی

ز- بررسی معادله حرکت و حل آن در بارگذاری هارمونیکی و نتایج آن – انتگرال دوهامل

۳- تحلیل سیستم های معادل یک درجه آزادی در برابر بارگذاری ضربه ای و نتایج بحث

۴- روش های عددی تحلیل دینامیکی سازه ها برای سیستم های یک درجه آزادی

۵- رفتار غیر خطی سازه ها در حالت تحلیل دینامیکی برای سازه های یک درجه آزادی

پیشگفتار

۶- روش رایله در تحلیل دینامیکی سازه ها و کاربرد آن در تعیین خصوصیات دینامیکی

۷- تعیین معادله حرکت برای سیستم های چند درجه آزادی و بررسی ارتعاش آزاد آنها و سیستم های پیوسته

۸- تحلیل دینامیکی سازه های چند درجه آزادی به روش آنالیز مودال و نتایج حاصل

۹- روش تبدیل فوریه در تحلیل دینامیکی سازه ها و کاربرد نتایج آن

۱۰ - روش های عددی تحلیل دینامیکی برای سازه های چند درجه آزادی و پایداری آنها – رفتار غیر خطی

فصل اول – ضرورت ارائه درس دینامیک سازه ها

- در رشته مهندسی عمران اکثر سازه ها (ابنیه) تحت اثر نیروهای دینامیکی هستند. نیروهایی که مقدار (شدت) جهت و احتمالا نقطه اثر آنها با زمان تغییر می کنند و البته نرخ تغییرات فوق به حدی است که پدیده ارتعاش که مشخصه اصلی رفتار دینامیکی است در سازه بوجود میآید.

$p(t)$

فصل اول – ضرورت ارائه درس دینامیک سازه ها

- **ابنیه مهم و بارگذاری دینامیکی وارد**

انواع سدها- زلزله ، هیدرودینامیک (پدیده اندر کنش سازه – خاک – آب) ارتعاش تجهیزات و ماشین-های نیروگاه

انواع پل ها – زلزله ، ترافیک ، ترمز، باد ، ضربه ، جریان رودخانه

سیلوها – ویدانژ(تخلیه سریع مواد ذخیره شده) ، زلزله ، حرکت تسمه ها

برج آب – زلزله ، هیدرودینامیک ، باد

فصل اول – ضرورت ارائه درس دینامیک سازه ها

اسکله و موجشکن – امواج دریا ، زلزله ، برخورد کشتی ، جریانهای دریایی ، باد

دکل ، دودکش ، برج های خنک کننده – زلزله ، باد

استحکامات و پناهگاها – انفجار (دور – نزدیک – مجاور – برخورد مستقیم) ، زلزله

تاسیسات هسته ای – انفجار هسته ای – زلزله – برخورد هواپیما

ورزشگاه ها – تشویق تماشاچیان ، زلزله

لوله ها – زلزله ، عبور سیال

فصل اول – ضرورت ارائه درس دینامیک سازه ها

برج های ساختمانی – زلزله ، باد

تونل ها – عبور و ترافیک قطار ، زلزله

- **هدف :** تطبیق و سازگاری تحلیل با رفتار واقعی (دینامیکی)
- **روش برخورد در گذشته :** به دلیل پیچدگی و سختی ← حالت معادل استاتیکی
- **تغییر و تحول اخیر :** پیشرفت چشمگیر در فن آوری سخت افزاری و نرم افزاری (کامپیوترها)

فصل اول – ضرورت ارائه درس دینامیک سازه ها

- **روش امروزی :** بکارگیری روش های تحلیل *دینامیکی* در حد امکانات ، اصلاح آئین نامه های طراحی مطابق با نتایج حاصل
- **تغییرات آتی :** در نظر گرفتن حالتهای واقعی بارگذاری (اتفاقی و تصادفی) ، حالت های تحلیل تصادفی (تحلیل ریسک و قابلیت اعتماد) ، بارگذاری منفرد و معین ← طیف بارگذاری

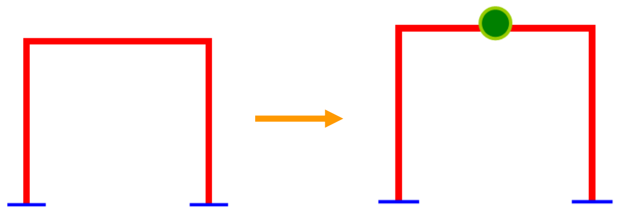
فصل دوم – یاد آوری اصول دینامیک سازه ها

- **قانون حاکم :** اصل دوم نیوتن $\sum \vec{F} = m\vec{\ddot{u}}$

$u:$ تغییر مکان $\dot{u}:$ سرعت $\ddot{u}:$ شتاب

- **درجه آزادی و روش های کاهش آن متناسب با امکانات در دسترس**

الف – روش تمرکز جرم Lumped – Mass - Procedure

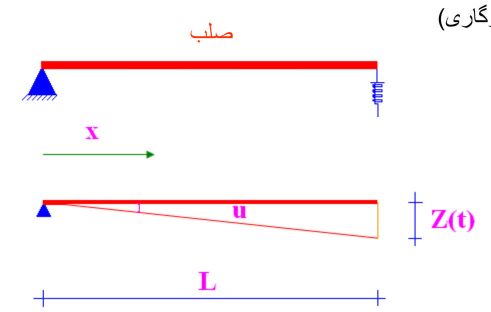


فصل دوم – یاد آوری اصول دینامیک سازه ها

ب – روش تغییر مکان های تعمیم داده شده **Generalized Displacement**

$a_i(t)$ تابع زمانی $$u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\phi_i(x)$$

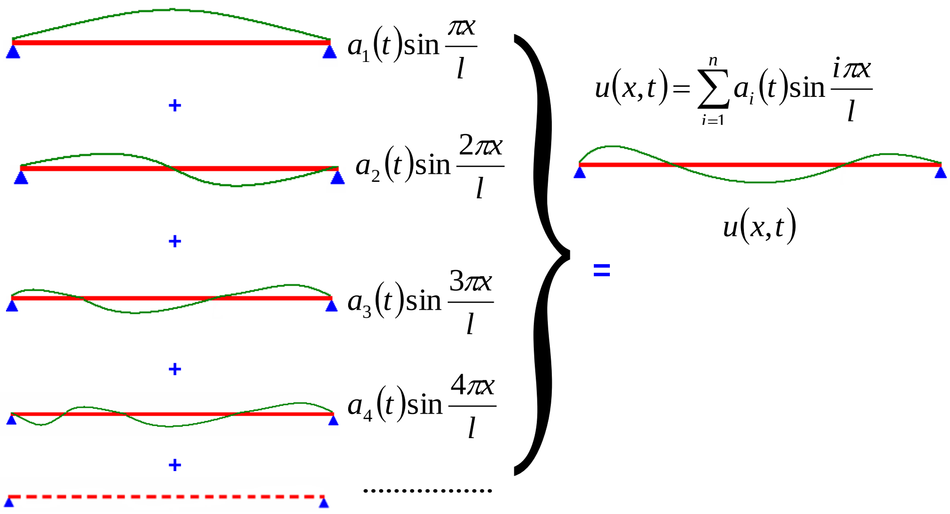
$\phi_i(x)$ تابع مکانی (شرایط حدی و سازگاری)



تشابه مثلث $\rightarrow u(x,t) = \dfrac{x}{l} \cdot z(t)$

فرض : تیر صلب $\rightarrow n = 1$

فصل دوم – یاد آوری اصول دینامیک سازه ها



فصل دوم – یاد آوری اصول دینامیک سازه ها

ج – روش اجزاء محدود Finite Element Concept

- مبانی خاص خود در تمرکز خواص رفتاری سازه در تعداد محدود گره (درجه آزادی)

د – روش اجزاء مرزی

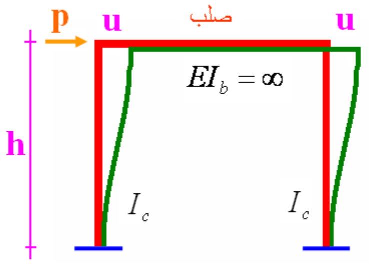
- تمرکز خواص رفتاری محیط مورد نظر در نقاطی در مرز با محیط (سازه) دیگر

نیروهای موثر در رفتار دینامیکی

الف – نیروی سختی (فنر ، ارتجاعی ، الاستیک ....) f_s **بعنوان نیروی مقاوم در برابر حرکت**

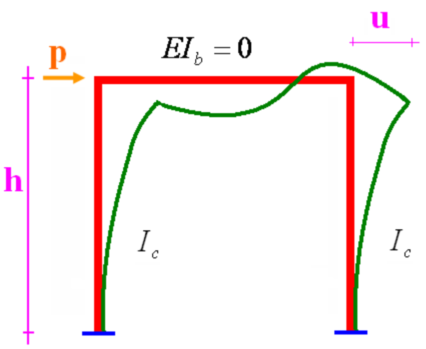
از تحلیل سازه ها $\rightarrow p=\dfrac{24EI_c u}{h^3} \rightarrow u=1 \rightarrow p=k=\dfrac{24EI_c}{h^3}$

نیروهای موثر در رفتار دینامیکی



$p=f_s=ku$

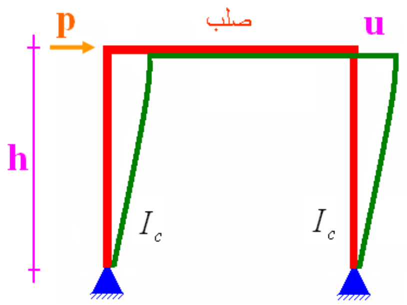
نیروهای موثر در رفتار دینامیکی



$$k = \sum \frac{3EI_c}{h^3} = \frac{6EI_c}{h^3}$$

تعداد ستونها

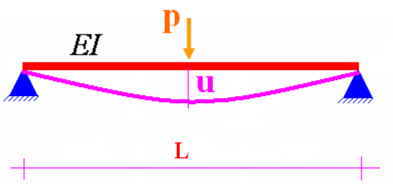
نیروهای موثر در رفتار دینامیکی



حالت خطی (رفتاری) مد نظر است

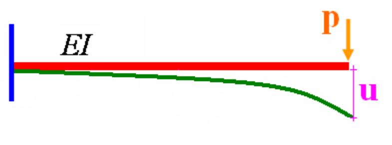
$$k = \sum \frac{3EI_c}{h^3} = \frac{6EI_c}{h^3}$$

نیروهای موثر در رفتار دینامیکی



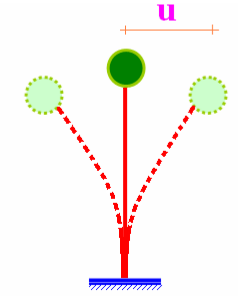
$$p = \frac{48EIu}{l^3} \rightarrow u = 1 \rightarrow k = \frac{48EI}{l^3}$$

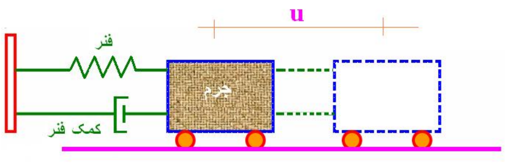
نیروهای موثر در رفتار دینامیکی



$$p = \frac{3EIu}{l^3} \rightarrow u = 1 \rightarrow k = \frac{3EI}{l^3}$$

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش





مدل ریاضی (تحلیلی) سیستم معادل جرم – فنر – کمک فنر

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش

- در سیستم مرتعش روبرو ، وقتی جرم به اندازه u جابجا شود ، کش آمدگی ارتجاعی ستون (کشیدگی فنر) بکار میآیند تا جرم به موقعیت اولیه برگردد ، این نیرو در ستون یا فنر که تابع تغییر مکان u می باشد ، بنام نیروی فنر (سختی) موسوم است (f_s)، البته اگر u کوچک باشد ، این نیرو تابع خطی u است ، جرم مورد نظر با یک سرعت مشخص به موقعیت اولیه برگشته و به سمت دیگر پرت خواهد شد و بنابراین مرتعش می شود.
- چنانچه سیستم ارتجاعی باشد و اتلاف انرژی وجود نداشته باشد ، جرم برای همیشه مرتعش خواهد بود ، ولی در عمل ، اصطکاک با هوا ، اصطکاک بین ذرات سیستم یا در اتصالات ، تسلیم مصالح و بوجود آمدن

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش

ترکها و اصطکاک بین آنها و غیره ، باعث اتلاف انرژی ارتعاش شده ، به نحوی که طی زمان ، ارتعاش مستهلک شده و از بین می رود ، نیروهایی که باعث اتلاف انرژی می شوند بنام نیروهای میرایی (استهلاک) Damping موسوم هستند.

- اگر نیروی میرایی متناسب با سرعت حرکت جرم باشد ، به آن نیروی میرایی لزجی گفته می شود ، اگر چه در عمل ، میرایی بطور خالص ، لزجی نمی باشد ولی فرض می گردد که چنین باشد که این امر به دلیل سهولت حل معادلات حرکت می باشد ، معمولا برای میرایی غیر لزجی می توان میرایی لزجی معادل آنرا که دارای تاثیر مشابه در حرکت باشد ، بدست آورد که این امر کاملا تجربی است.

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش

- همانطور که قبلا گفته شد ، میرایی یک سازه بستگی به مصالح آن ، ماهیت اتصالات ، کیفیت ساخت ، نوع پی و ..... دارد.

نیروی میرایی لزجی معادل $f_D = c\dot{u}$

- انتخاب میرایی در یک سیستم ، معمولا دلخواه است بویژه به این دلیل که میرایی با کرنش مصالح و طبیعت و جزئیات ساخت متغیر است.
- میرایی در تحلیل دینامیکی سازه ها بصورت درصد میرایی بکار می رود: $\xi = \dfrac{c_{\text{موجود}}}{c_{cr}}$

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش

- حدود درصد میرایی برای مصالح مختلف به شرح زیر است:

بتن	$5-10\%$	افزایش با کرنش
فولاد	$2-15\%$	// // //
بنایی	$4-10\%$	// // //
خاک	$10-30\%$	// // //

به دلیل تفاوت زیاد %10 – 2 چوب تغییرات در کیفیت چوب ، مقادیر نامطمئن است.

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش

- در تعیین سختی ، جهت و نقطه مورد نظر باید معلوم باشد (درجه آزادی)
- در حالت چند درجه آزادی ← ماتریس سختی با عناصر k_{ij}

k_{ij} نیرو در درجه آزادی i وقتی تغییر مکان یا چرخش واحد در درجه آزادی j اعمال میشود و سایر درجات آزادی گرفته می شوند.

در تعیین سختی : مدل سازی و تعیین درجات آزادی خیلی مهم است.

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش

- **ب – نیروی میرایی (استهلاک) f_D بعنوان نیروی مقاوم در برابر حرکت**

این نیرو از مکانیزم های مختلف اتلاف انرژی در حرکت (ارتعاش) ناشی می شود.

اصطکاک در اتصالات ، ترک ها ، مصالح و .....

مکانیزم های پیچیده و نا معلوم ← روش مناسب لحاظ کردن در معادلات رفتاری آن است

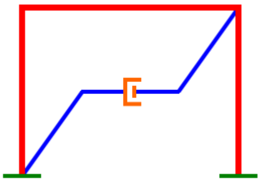
که معادل میرایی لزجی فرض شوند.

حالت خطی مد نظر است $f_D = c\dot{u}$ ← Viscous Damper

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش

- پدیده میرایی به ابعاد و هندسه سازه ارتباطی ندارد ولی به نوع مصالح و نوع اتصالات وابسته است ،

تبدیل مکانیزم های واقعی اتلاف انرژی به مکانیزم لزجی از طریق آزمایش روی مدل



مدل Damper (کمک فنر)

ضریب میرایی c یا در صد میرایی در عمل بصورت تجربی تعیین می شود.

نیرو و درصد میرایی در سیستم های مرتعش

- **ج – نیروی اینرسی (لختی) f_I از قانون دوم نیوتن بدست می آید.**

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{u}} \rightarrow \sum \vec{F} - m\ddot{\vec{u}} = 0$$

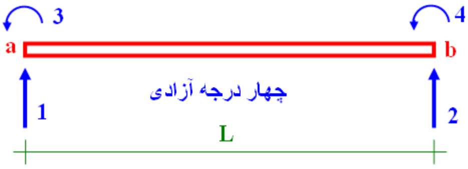
علامت منفی : مقاوم در برابر حرکت

$$f_I = m\ddot{u}$$

چون از قانون ناشی می شود ، ارائه مدل فیزیکی بی معنی است

محاسبه سختی یک قاب خمشی

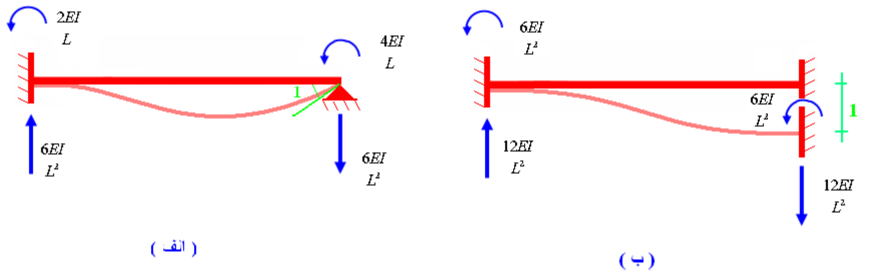
یادآوری : برای محاسبه لنگر و برش در یک المان سازه ای (تیر یا ستون) ، ضرایب سختی برای المان مورد نیاز است. موضوع برای یک المان همگن بطول L و ممان اینرسی I و مدول ارتجاعی E ، بطور شماتیک ارائه می شود .



به جهت ها و شماره گذاری توجه شود.

محاسبه سختی یک قاب خمشی

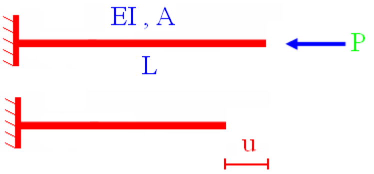
- ضرایب سختی برای چرخش گره در شکل الف و برای انتقال گره در شکل ب نشان داده شده است .



محاسبه سختی یک قاب خمشی

- برای محاسبه ضرایب سختی ، در درجه آزادی مربوط تغییر مکان یا چرخش واحد اعمال می شود در حالی که سایر درجات آزادی مقید و گرفته می شوند.

درجه آزادی محوری به دلیل صلبیت زیاد در نظر گرفته نشده است.



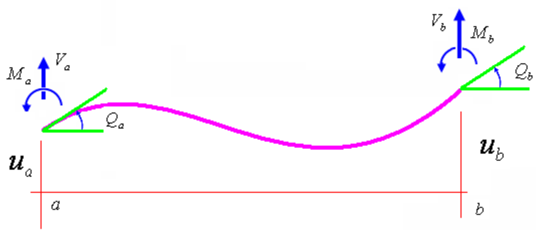
$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E\frac{u}{l} \Rightarrow P = \frac{EAu}{l}$$

تعریف ضریب سختی ⟶ $u = 1 \rightarrow P \rightarrow k \Rightarrow k = \frac{EA}{l}$ عدد بزرگ

محاسبه سختی یک قاب خمشی

- بنابراین برای المان تیرو با توجه به چهار درجه آزادی نشان داده شده، مربوط به تغییر مکان های u_a ، u_b
وچرخش های Q_a و Q_b ، لنگر خمشی و نیروی برشی در گره ها برابر خواهد بود با :



تغییر شکل کلی تیر خمشی

محاسبه سختی یک قاب خمشی

$$M_a = \frac{4EI}{l}Q_a + \frac{2EI}{l}Q_b + \frac{6EI}{l^2}u_a - \frac{6EI}{l^2}u_b$$

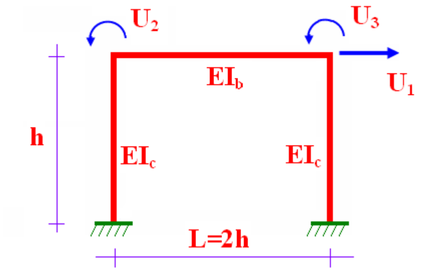
$$M_b = \frac{2EI}{l}Q_a + \frac{4EI}{l}Q_b + \frac{6EI}{l^2}u_a - \frac{6EI}{l^2}u_b$$

$$V_a = \frac{12EI}{l^3}u_a + \frac{12EI}{l^3}u_b + \frac{6EI}{l^2}Q_a + \frac{6EI}{l^2}Q_b$$

$$V_b = -\frac{12EI}{l^3}u_a + \frac{12EI}{l^3}u_b - \frac{6EI}{l^2}Q_a - \frac{6EI}{l^2}Q_b$$

محاسبه سختی یک قاب خمشی

- مثال – مطلوبست محاسبه سختی جانبی قاب نشان داده شده با توجه به درجات آزادی مورد نظر؟

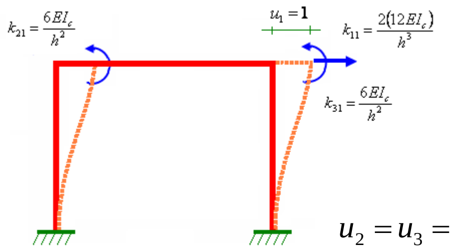


ازروش های مختلف تحلیل سازه از جمله پخش لنگر و غیره می توان مساله را حل نمود . در اینجا از تعریف ضرایب تاثیر سختی استفاده می شود.

محاسبه سختی یک قاب خمشی

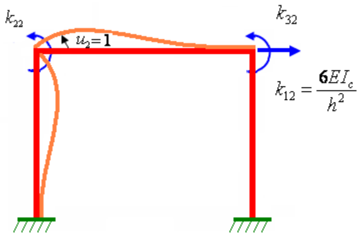
سه درجه آزادی داریم ← ماتریس سختی ۳X۳ خواهد بود.

- برای بدست آوردن ضرایب ستون اول ماتریس ، در تغییر مکان u_1 ، تغییر مکان واحد اعمال می شود در حالی که سایر تغییر مکانهای درجات آزادی گرفته می شوند یعنی : $u_1 = 1$ و $u_2 = u_3 = 0$



- نیروهای k_{i1} (ضرایب سختی) و تغییر شکل مربوط در شکل نمایش داده شده است (از تحلیل سازه ها و یادآوری ها)

محاسبه سختی یک قاب خمشی



$$k_{22}=\frac{4EI_c}{h}+\frac{4EI_b}{l}$$

- برای تعیین ضرایب ستون دوم ماتریس سختی k_{i2}

خواهیم داشت : $u_2=1$ و $u_1=u_3=0$

- برای ضرایب k_{i3} (ستون سوم ماتریس)

مشابه حالت دو عمل می شود :

$u_3=1$ و $u_1=u_2=0$

محاسبه سختی یک قاب خمشی

- اگر در حالت خاص $I_b=I_c$ و $l=2h$ باشد ،

ماتریس سختی بصورت زیر خواهد بود :

$$[k]=\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix}24 & 6h & 6h\\ 6h & 6h^2 & h^2\\ 6h & h^2 & 6h^2\end{bmatrix}$$

- اگر قاب تحت اثر نیروی جانبی (مثلا f_s) قرار داشته باشد ، معادله حاکم برای تغییر شکل قاب بصورت زیر خواهد بود ($[k]\{u\}=\{f_s\}$) :

$$\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix}24 & 6h & 6h\\ 6h & 6h^2 & h^2\\ 6h & h^2 & 6h^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_s\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

محاسبه سختی یک قاب خمشی

- از معادلات ردیف ۲ و ۳ خواهیم داشت :

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 6h \\ 6h \end{Bmatrix} u_1 = -\frac{6}{7h} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} u_1$$

- رابطه اخیر در معادله حاکم رفتاری قرار گیرد ، خواهیم داشت :

$$f_s = \left(\frac{24EI_c}{h^3} - \frac{EI_c}{h^3} \frac{6}{7h} \langle 6h \quad 6h \rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) u_1$$

محاسبه سختی یک قاب خمشی

$$f_s = \frac{96}{7} \left(\frac{EI_c}{h^3} \right) u_1$$

$$u_1 = 1 \rightarrow f_s \rightarrow k \Rightarrow$$

سختی جانبی قاب $$k = \frac{96}{7} \frac{EI_c}{h^3}$$

- این روش که همراه با حذف چرخش های گره هاست ، به عنوان روش حذف استاتیکی معروف است .

معادلات رفتاری

- با توجه به مباحث پایه ای مطرح در حالت سازه های معادل یکدرجه آزادی مطالب بعدی در این حالت خواهد بود . (SDOF)

Single – Degree – of - Freedom

- **نوشتن معادلات رفتاری (معادله حرکت)**

الف – کاربرد مستقیم اصل دوم نیوتن

$$\sum F = m\ddot{u}$$

$$P(t) - f_S - f_D = m\ddot{u}$$

$$m\ddot{u} + f_D + f_S = P(t) \qquad \underline{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t)}$$

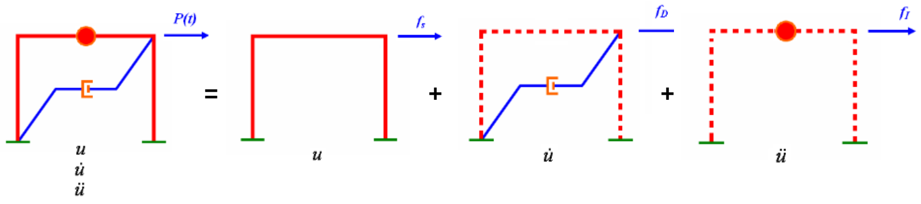
معادلات رفتاری

ب – تعادل دینامیکی (اصل دالامبر) (D'Alembert's Principle)

مشابه حالت اول با بیان متفاوت : نیروی $m\ddot{u}$ از ابتدا نیروی مقاوم است .

ج – ترکیب مولفه های نیروهای سختی ، میرایی و جرم

در حالت رفتار خطی و در اصول مشابه حالتهای الف و ب



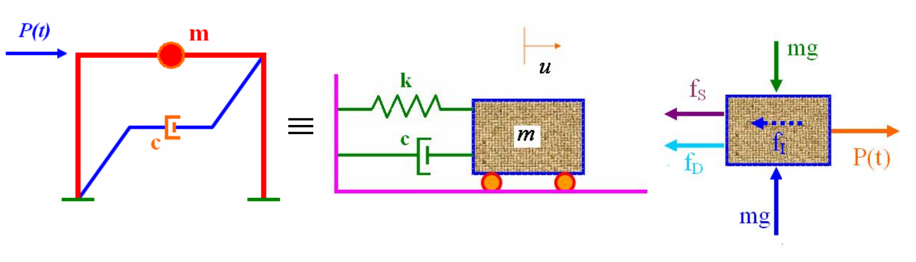
معادلات رفتاری

د – روش کار مجازی : تصور تغییر مکان کاذب و صفر بودن کار انجام شده

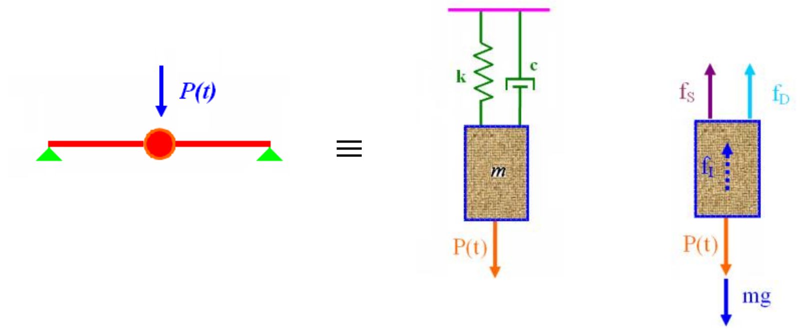
ه – اصل انرژی : اطل بقای انرژی (جنبشی و پتانسیل ....)

مدل سازی رفتاری

- **سیستم جرم – فنر – کمک فنر**

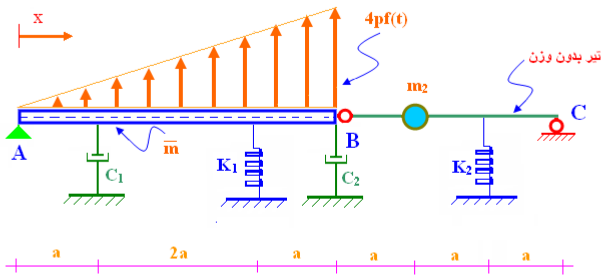


مدل سازی رفتاری



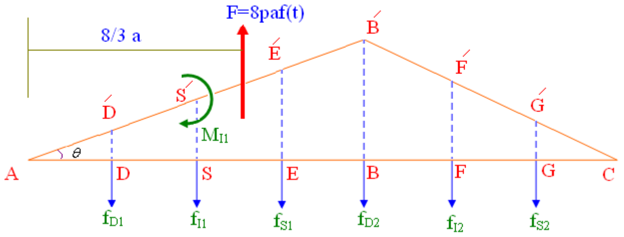
مدل سازی رفتاری

- مطلوبست تعیین معادله حرکت سیستم داده شده :



مدل سازی رفتاری

- **حل :**



از روش متعارف تعادل استفاده می کنیم :

ارتعاش در دامنه های کوچک است (رفتار خطی) ، سیستم را در یک لحظه (مثلا t)

در حالت تغییر شکل نشان می دهیم (به همراه نیروهای موثر) :

مدل سازی رفتاری

- سیستم معادل یک درجه آزادی ← نقطه شاخص یا درجه آزادی شاخص را $z(t) = BB'$

انتخاب می کنیم .

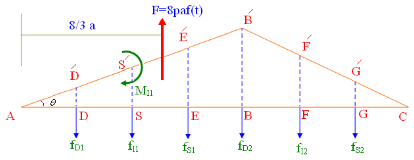
$$DD' = \frac{Z}{4}$$

$$EE' = \frac{3}{4}Z$$

$$FF' = \frac{2}{3}Z$$

$$GG' = \frac{1}{3}Z$$

$$SS' = \frac{Z}{2}$$



مدل سازی رفتاری

- **تعیین نیروهای موثر:**

$$f_{S1} = K_1(EE') = K_1 \frac{3}{4} Z(t)$$

$$f_{S2} = K_2(GG') = K_2 \frac{1}{3} Z(t)$$

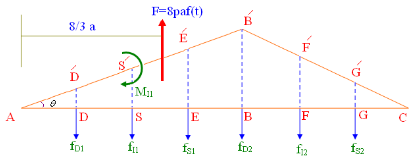
$$f_{D1} = C_1(\dot{DD'}) = C_1 \frac{1}{4} \dot{Z}(t)$$

$$f_{D2} = C_2 \dot{Z}(t)$$

$$f_{I2} = m_2(\ddot{FF'}) = m_2 \frac{2}{3} \ddot{Z}(t)$$

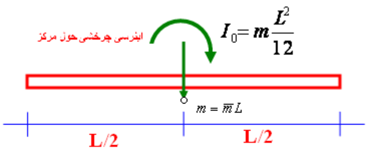
$$f_{I1} = m_1(\ddot{SS'}) = m_1 \frac{\ddot{Z}(t)}{2} = \overline{m} 2a \ddot{Z}(t)$$

اینرسی انتقالی المان AB



مدل سازی رفتاری

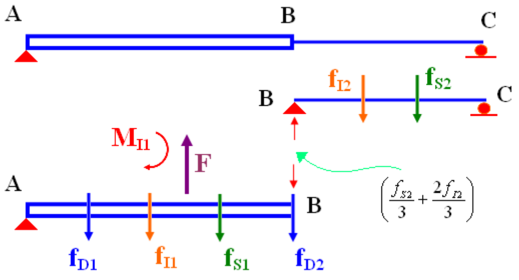
$$\begin{cases} M_{I1} = I_0 \ddot{\theta} = \left[4a\overline{m} \times \frac{(4a)^2}{12} \right] \frac{\ddot{Z}(t)}{4a} = \frac{4}{3} a^2 \overline{m} \ddot{Z}(t) \\ \theta = \frac{BB'}{4a} = \frac{Z}{4a} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{Z}}{4a} \end{cases}$$



المان تیری شکل

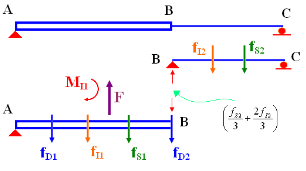
مدل سازی رفتاری

- دسترسی به معادله حرکت از روش تعادل ← $\sum M/_A = 0$



مدل سازی رفتاری

$$\sum M/_A = 0$$



$$\underbrace{f_{I1}\times 2a + M_{I1} + \frac{2f_{I2}}{3}\times 4a}_{\text{اینرسی جرمی}} + \underbrace{f_{D1}\times a + 4a}_{\text{میرایی}}$$

$$+ \underbrace{f_{S1}\times 3a + \frac{f_{S2}}{3}\times 4a}_{\text{سختی}} = \underbrace{8paf(t)\times\frac{2}{3}a}_{\text{نیروی خارجی تحمیلی}}$$

مدل سازی رفتاری

- پس از جاگذاری عبارت ها و ساده کردن روابط در نهایت خواهیم داشت :

$$\underbrace{\left(\frac{4}{3}\overline{m}a+\frac{4}{9}m_2\right)}\ddot{Z}(t)+\underbrace{\left(\frac{C_1}{16}+C_2\right)}\dot{Z}(t)+$$

$$\underbrace{\left(\frac{9}{16}K_1+\frac{K_2}{9}\right)}Z(t)=\underbrace{\frac{16}{3}paf(t)}$$

- معادله سیستم معادل یک درجه آزادی با جرم موثر ، میرایی موثر ، سختی موثر و نیروی موثر

$$m^*z(t)+c^*\dot{z}(t)+k^*z(t)=p^*(t)$$

- **توجه :**

با توجه به ارائه درس مهندسی زلزله در نیمسال بعدی ، حالتهای حرکت زمین بعنوان عامل ارتعاش در سازه ها در مدل سازی و تحلیل ها در درس دینامیک سازه ها ارائه نمی شود .

روش های حل معادلات حرکت

الف – روش کلاسیک و متعارف (مستقیم) classical solution

حل معادله دیفرانسیل – حل عمومی و جواب خصوصی و اعمال شرایط اولیه

ب – روش انتگرال دوهامل Duhamel's Integral رفتار خطی

ج – روش های تبدیل Transform Methods رفتار خطی

تبدیل لاپلاس و فوریه ⟵ تحلیل در میدان فرکانس

- مناسب برای تحلیل های اندر کنش محیط های غیر یکنواخت
- روش های عددی قوی و سریع FFT

د – روش های عددی Numerical Methods رفتار خطی و غیر خطی الگوریتم های مختلف و پایداری روش

پاسخ ، واکنش سازه Response

- از حل معادله حرکت ⟵ U(t) بدست می آید
- مفهوم پاسخ شامل همه نوع مجهول محاسباتی و طراحی می تواند باشد

تغییر مکان ، سرعت ، شتاب ، تنش ، نیرو و ......

- معمولا در طراحی U_{max} و پاسخ های حداکثر بکار گرفته می شوند .

نیروهای اجزاء

Element Forces

- از حل معادله حرکت (دینامیکی) ← $u(t)$ حاصل می شود و برای تیر و ستونها می توان لنگرخمشی و نیروی برشی حاصل شود . $f_S(t) = ku(t)$

توجه : برای طراحی ، از تنش های مجازی استفاده می شود که از آزمایش استاتیکی مصالح بدست میاید و کافی است از f_S برای ارزیابی نیروها استفاده شود .

- برای بدست آوردن پاسخ کامل باید از جواب دینامیکی و استاتیکی (ترکیب) استفاده شود . تغییر مکان تحت اثر وزن باید ملحوظ شود .

دستگاه واحد (مقیاس)

رابطه اساسی f=ma

شتاب x جرم = نیرو

دستگاه SI →

نیوتن N = واحد نیرو

متر بر ثانیه بتوان ۲ m/s^2 = شتاب

Kg mass کیلو جرم $kg = N.S^2/m$ = جرم

دستگاه واحد (مقیاس)

دستگاه MKS →

واحد نیرو =kgf

شتاب = m/s^2

جرم = $kgf.S^2/m$

1 kgf = 9.81 N

شتاب ثقل $g=9.81\ m/s^2=981\ cm/s^2$

$=386\ in/s^2 = 32.2$

دستگاه واحد (مقیاس)

1 kip =1000ibf = 453.4 kgf = 4448.2 N

1 psi = 6894.8 N/m2 = 0.7 t/m2

1 kip/in = 175126 N/m

1 in = 2.54 cm

برای بکار گیری جرم (m)مناسب است در فرمول ها از m=W/g،
استفاده شود (W وزن)

وزن مانند نیرو است .

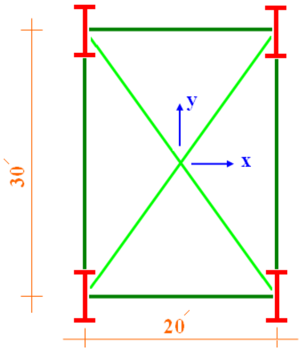
معادله حرکت

- **مثال :** یک ساختمان صنعتی یک طبقه $20' \times 30'$ در جهت شمال جنوب قاب خمشی و در جهت شرقی غربی بصورت مهار بندی شده است .

  وزن در سقف $30 \, {}^{ib}\!/_{ft^2}$ و مهارهای افقی در سقف زیر خرپای سقف است . ممان اینرسی ستونها :

$$\begin{cases} I_x = 82.8 in^4 \\ I_y = 18.3 in^4 \end{cases}$$

مهارهای قائم میلگرد به قطر $1''$ و $E = 29000 ksi$

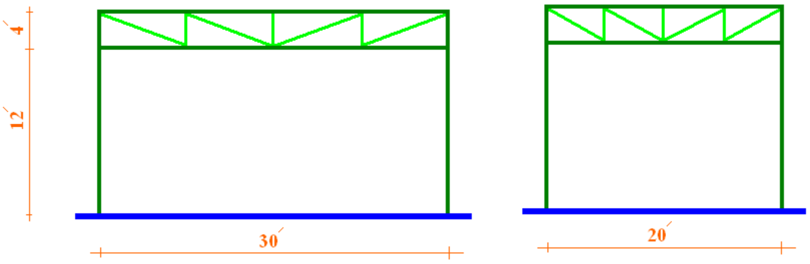


مطلوبست تعیین معادله حرکت در جهات شمال جنوب – غرب و شرق

معادله حرکت

$$m = \frac{W}{g} = \frac{30 \times (30 \times 20)}{386} 46.63 ib - {}^{s^2}\!/_{in}$$

- با توجه به ضربدری های افقی سقف می توان عملکرد سقف را بصورت دیافراگم فرض نمود .



معادله حرکت

الف – جهت شمال – جنوب :

سختی جانبی دو قاب خمشی عبارت است از

$$k_{N-S} = 4\left(\frac{12EI_x}{h^3}\right) = 4\frac{12\left(29\times10^3\right)\left(82.2\right)}{\left(12\times12\right)}38.58kips/in$$

معادله حرکت S-N : $m\ddot{u} + k_{N-S}u = 0$

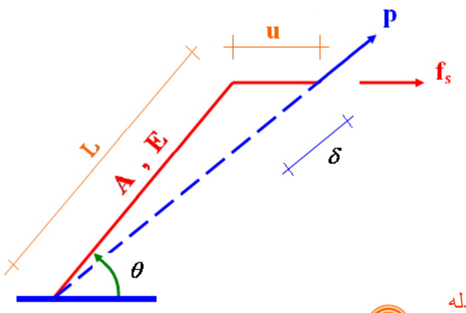
معادله حرکت

ب – جهت شرقی – غربی :

معمولا وقتی از مهار استفاده می شود ، فرض می گردد که قاب ها صلب بوده و برای انتقال نیروی قائم (بار مرده و زنده) هستند و بار جانبی توسط مهارها تحمل می شود (با اتصال مفصلی) ، بنابراین سختی جانبی جمع سختی هر یک از مهارها خواهد بود که بصورت زیر برآورد می شود :

$$\begin{cases} A = 0.785in^2 \\ l = 23.3ft \end{cases}$$

معادله حرکت



$$p = \frac{AE}{l}\delta \quad (1)$$

$$f_s = p\cos\theta$$

$$u = \delta / \cos\theta$$

$$p = f_s / \cos\theta$$

(1) ← در معادله

$$\delta = u\cos\theta$$

معادله حرکت

$$f_S = ku \longrightarrow k_{\text{مهار}} = \frac{AE}{l}\cos^2\theta$$ و

$$\cos\theta = \frac{20}{\sqrt{12^2 + 20^2}} = 0.8575$$

$$k_{\text{مهار}} = \frac{0.785(29\times10^3)}{23.3\times12}(0.8575)^2 = 59.8kips/in$$

- هر قاب دارای دو مهار است ولی یکی در کشش است که مقاومت جانبی را ایجاد می نماید و دیگری در فشار کار می کند که فرض می شود به کمانش برسد (در اثر نیروی محوری) و بسیار کم در مقاومت جانبی مشارکت می نماید ، چون دو قاب مهار بود پس :

معادله حرکت

$$k_{E-W} = 2\times 59.8 = 119.6 kips/in$$

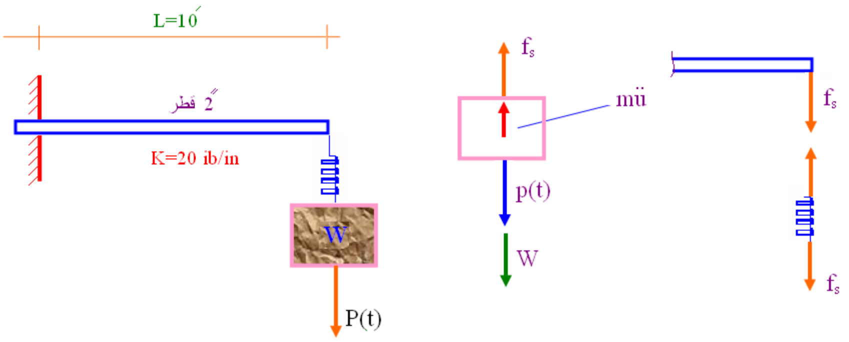
معادله حرکت $\underline{m\ddot{u} + k_{E-W}u = 0}$

توجه : سختی یک ستون در جهت شرق – غرب $k_{ستون} = \frac{12EI_y}{h^3} = 2.13 kips/in$

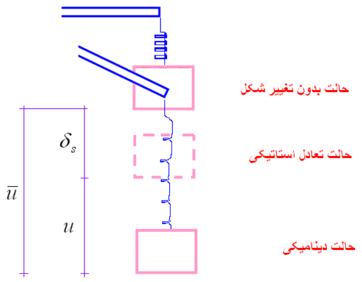
است که بهر حال از نظر نسبی قابل توجه نمی باشد (پس صرفنظر شد .)

معادله حرکت

- **مثال :** با توجه به سیستم زیر که وزنه W توسط فنری از انتهای یک تیر طره آویزان است ، معادله حرکت وزنه را بنویسید ، تیر فلزی است $E = 29000 ksi$ و از جرم تیر و فنر صرفنظر می شود .



معادله حرکت



$$m\ddot{\bar{u}} + f_s = W + p(t)$$

$$f_s = k_e \bar{u}$$

$$m\ddot{\bar{u}} + k_e \bar{u} = W + p(t)$$

$$\bar{u} = \delta_s + u$$

$$\ddot{\bar{u}} = 0 + \ddot{u}$$

$$k_e \delta_s = W \longrightarrow$$

$$m\ddot{u} + k_e u = p(t)$$

δ_s تغییر مکان در اثر W (استاتیکی)

u "" "" "" $p(t)$ (دینامیکی)

معادله حرکت k_e باید محاسبه شود

معادله حرکت

- **ملاحظه می شود وقتی معادله برحسب تغییر مکان دینامیکی u است ، وزن در معادله اثر ندارد . معمولا حرکت از حالت استاتیکی به بعد نوشته و حل می شود و سپس اثر حالت استاتیکی ملحوظ می شود(اگر رفتار خطی باشد)**

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی بدون میرایی

$f_I + f_S = 0$ شرایط اولیه $\begin{cases} u(t=0) = u_0 \\ \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \end{cases}$

$m\ddot{u} + ku = 0 \rightarrow \ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0$

فعلا ω مفهوم فیزیکی ندارد $\leftarrow k/m = \omega^2 \leftarrow m \neq 0, k \neq 0$

(1) $\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \rightarrow$ برای حل $\rightarrow$ پاسخ فرضی $u(t) = \bar{c}e^{st}$

$\ddot{u} = \bar{c}s^2 e^{st} \Rightarrow$ (1) در معادله $\bar{c}e^{st}(s^2 + \omega^2) = 0$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی بدون میرایی

$s^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow s = \pm i\omega$

$(i = \sqrt{-1}) \leftarrow \bar{c}e^{st} \neq 0$

$\Rightarrow$ پاسخ معادله $u(t) = \bar{c}_1 e^{i\omega t} + \bar{c}_2 e^{-i\omega t}$ (2)

- ترجیح می دهیم ، رابطه از حالت تابع اکسپونانسیل به حالت هارمونیک نوشته شود .

از رابطه مثلثاتی اولر استفاده می کنیم : $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

$\Rightarrow$ (2) $\rightarrow u(t) = \bar{c}_1 \cos\omega t + i\bar{c}_1 \sin\omega t + \bar{c}_2 \cos\omega t - i\bar{c}_2 \sin\omega t$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی بدون میرایی

$$u(t)=\underbrace{(\bar{c}_1+\bar{c}_2)}_{A}\cos\omega t+\underbrace{(i\bar{c}_1-i\bar{c}_2)}_{B}\sin\omega t$$

$$u(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

- برای تعیین ضرایب ثابت A و B از شرایط اولیه استفاده می کنیم :

$$u(t=0)=u_0=A\times 1+B\times 0\rightarrow A=u_0$$

$$\dot{u}(t)=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t$$

$$\dot{u}(t=0)=\dot{u}_0=-A\omega\times 0+B\omega\times 1\rightarrow B=\dot{u}/\omega$$

$$u(t)=u_0\cos\omega t+\frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t$$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی بدون میرایی

$$u(t)=\rho\sin(\omega t+\alpha)\quad\left|\begin{array}{l}\rho=u_{\max}=\sqrt{u_0^2+\left(\dfrac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2}\\ \alpha=arctg\,\dfrac{\omega u_0}{\dot{u}_0}\end{array}\right.$$

- به کمک روابط مثلثاتی پاسخ بصورت تابع هارمونیکی است با دامنه $\rho(u_{\max})$ و سیکل تناوب با فاصله زمانی T (پریود تابع) ، فاصله زمانی T عبارت است از مدتی که آرگومان تابع یعنی $(\omega t+\alpha)$ با مقدار 2π افزایش می یابد :

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی بدون میرایی

$$(\omega t+\alpha)+2\pi=\omega(t+T)+\alpha \Rightarrow T=2\pi/\omega$$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}\rightarrow \omega=2\pi f$$

f فرکانس : تعداد سیکل در یک ثانیه

پس ω تعداد سیکل تناوب در 2π ثانیه که به فرکانس زاویه ای موسوم است .

محاسبه سختی موثر

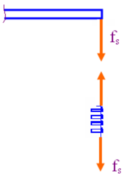
$$f_s=k_e\bar{u} \quad (1)$$

$$\bar{u}=\delta_{\text{فنر}}+\delta_{\text{تیر}} \quad (2)$$

δ تیر،عبارت از تغییر شکل انتهای تیر طره است

δ فنر،عبارت از تغییر شکل انتهای فنر است

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی بدون میرایی



- با توجه به شکل :

$$f_s=k\delta_{\text{فنر}}=k_{\text{تیر}}\delta_{\text{تیر}} \quad (3)$$

در معادله (2) بجای $\bar{u}$ از (1) و بجای δ ها از (3) قرار می دهیم

$$\frac{f_s}{k_e}=\frac{f_s}{k}+\frac{f_s}{k_{\text{تیر}}}$$

یا

$$k_e=\frac{kk_{\text{تیر}}}{k+k_{\text{تیر}}}$$

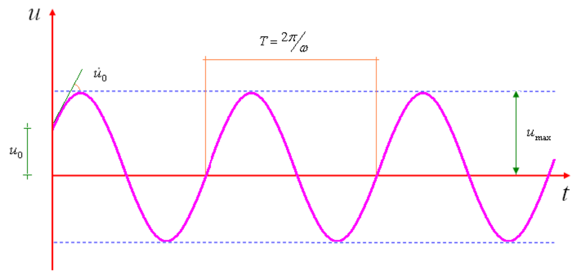
$k=20ib/in \rightarrow$ و

$$k=\frac{3EI}{l^3}=\frac{3(29\times10^6)\left[\pi(1)^4/4\right]}{(10\times12)^3}=39.54ib/in$$

$$\Rightarrow k_e=13.28ib/in$$

ارتعاش آزاد SDOF

- **الف – بدون میرایی**



$$m\ddot{u} + ku = 0$$

شرایط اولیه u_0 و $\dot{u}_0 \rightarrow u(t) = u_0 \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t$

ارتعاش آزاد SDOF

- پریود ، فرکانس و فرکانس زاویه ای طبیعی سیستم

$$\omega = \sqrt{k/m} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\delta_s = \sqrt{g/\delta_s} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{g/\delta_s} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\delta_s} \qquad T = 2\pi\sqrt{\delta_s/g}$$

دامنه حرکت $u_{max} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2}$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی با میرایی

$$f_I + f_D + f_S = 0$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \rightarrow m \neq 0 \rightarrow \ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \qquad (1)$$

جواب فرضی: $u(t) = \bar{c}e^{st}$

$$\dot{u} = \bar{c}se^{st}$$

$$\ddot{u} = \bar{c}s^2e^{st} \longrightarrow (1) \text{ در}$$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی با میرایی

$$\bar{c}e^{st}\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2\right) = 0 \rightarrow \qquad S^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$S = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \rightarrow$$ سه حالت برای زیر رادیکال متصور است

اگر $\frac{c}{2m} = \omega \rightarrow$ مقدار C را بحرانی نامند $\Rightarrow c_{cr} = 2m\omega$

اگر از درصد استهلاک استفاده شود $\xi = \frac{c}{c_{cr}} \rightarrow S = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$

$$\frac{c}{2m} = \frac{c\omega}{2m\omega} = \frac{c\omega}{c_{cr}}\xi\omega$$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی با میرایی

حالت بحرانی یا % ۱۰۰ $\xi = 1$ ← زیر رادیکال صفر

جواب S عدد حقیقی ← تابع پاسخ اکسپونانسیل

حالت فوق بحرانی $\xi > 1$ ← زیر رادیکال مثبت

جواب S دو عدد حقیقی ← تابع پاسخ اکسپونانسیل

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی با میرایی

- که در عمل ، ارتعاش آزاد کلیه ابنیه (سازه های متعارف عمرانی) دارای میرایی خیلی کمتر از بحرانی است و تابع پاسخ دارای حالت نوسانی (ارتعاش) است :

% ۱۰۰ یا $\xi \ll 1$ و $c_{\text{موجود}} \ll c_{cr}$

- برای بدست آوردن تابع پاسخ :

$\Rightarrow$ فرض می کنیم $\omega\sqrt{1-\xi^2} = \omega_D$ و $S = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2}$

$$S = -\xi\omega \pm i\omega_D \Rightarrow \quad u(t) = \bar{c}_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + \bar{c}_2 e^{-\xi\omega t - i\omega_D t}$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left(\bar{c}_1 e^{i\omega_D t} + \bar{c}_2 e^{-i\omega_D t}\right)$$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی با میرایی

- عبارت داخل پرانتز شبیه پاسخ ارتعاش آزاد بدون میرایی است فقط ω به ω_D تبدیل شده است .

پس می توان به کمک رابطه اولر مثلثاتی ، پاسخ را بصورت هارمونیک نوشت :

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\left(A\cos\omega_D t+B\sin\omega_D t\right)$$

$\dot{u}_0$ و u_0 از شرایط اولیه $\Rightarrow A=u_0$ و $B=\dfrac{\dot{u}_0+\xi\omega u_0}{\omega_D}$

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\left(u_0\cos\omega_D t+\frac{\dot{u}_0+\xi\omega u_0}{\omega_D}\sin\omega_D t\right)$$

- می توان دو تابع هارمونیک را تبدیل به یک تابع نمود :

$$u(t)=e^{-\xi\omega t}\rho\sin(\omega_D t+\alpha)=e^{-\xi\omega t}\rho\cos(\omega_D t-\theta)$$

$$\rho=\sqrt{A^2+B^2}\qquad \alpha=\arctan A/B\qquad \theta=\arctan B/A$$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی با میرایی

- **مثال –** در ساختمان صنعتی مثال های قبل مطلوبست برآورد ω ، T و f در دو جهت ؟

$$\omega_{N-S}=\sqrt{k/m}=\sqrt{\frac{38.58}{0.04663}}=28.73Rad/\sec$$

$$T_{N-S}=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{28.73}=0.219\sec\qquad f_{N-S}=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.219}=4.57Hz$$

$$\omega_{E-W}=\sqrt{\frac{119.6}{0.04663}}=50.64Rad/\sec\qquad T_{E-W}=\frac{2\pi}{50.64}=0.124\sec$$

$$f_{E-W}=\frac{1}{0.124}=8.06Hz\qquad \omega_{N-S}\langle\omega_{E-W}$$

پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم معادل یک درجه آزادی با میرایی

- **مثال –** در مثال های قبل (طره با وزنه در انتها) ، مطلوبست تعیین f و T

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\delta_s}$$

$$\delta_s = \frac{W}{k_e} = \frac{20}{13.28} = 1.494in$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{386}{1.494}} = 2.56Hz$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.391\sec$$

ارتعاش آزاد SDOF

- **ب – حالت میرایی**

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

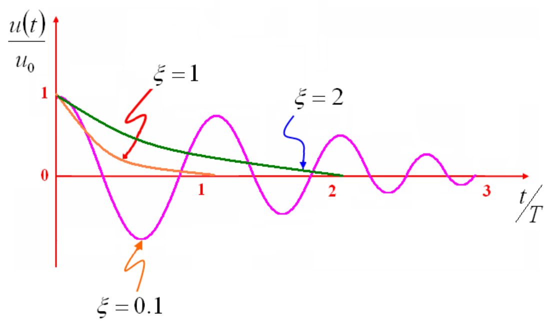
$$\begin{cases} k/m = \omega^2 \text{ و } c_{cr} = 2m\omega \Rightarrow \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \\ \xi = \dfrac{c}{c_{cr}} \end{cases}$$

(c_{cr}: میرایی بحرانی؛ c: موجود؛ c_{cr}: بحرانی؛ ξ: در صد میرایی)

$$\begin{cases} c = c_{cr} \rightarrow \xi = 1 & \text{حالت بحرانی} \\ c \rangle c_{cr} \rightarrow \xi \rangle 1 & \text{حالت فوق بحرانی} \end{cases}$$

در عمل (واقعیت) : حالت زیر بحرانی $\xi\langle 1$ یا $c\langle c_{cr}$

ارتعاش آزاد SDOF



برای ساختمانها ، پل ، سد ، تاسیسات هسته ای ، سازه های دریایی و .... $\xi \langle 0.1$

ارتعاش آزاد SDOF

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left[u_0 \cos \omega t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_D t}{\omega_D}\right)\sin \omega_D t\right]$$

$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ فرکانس زاویه ای میرایی

$T_D = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}}$ پریود طبیعی میرایی

$\omega_D \neq \omega$ برای $\xi \langle 0.2$

ارتعاش آزاد SDOF

- دامنه حرکت در ارتعاش آزاد با میرایی در هر سیکل حرکت کاهش می یابد و پوش آنها :

$$\pm \rho e^{-\xi \omega t} \text{ و } \rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega u_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \exp\left(\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \rightarrow \delta = \ln\frac{u_i}{u_{i+1}}\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\sqrt{1-\xi^2} \cong 1 \Rightarrow \delta \cong 2\pi\xi$$

کاهندگی لگاریتمی

ارتعاش آزاد SDOF

- معمولا بهتر است بجای دو سیکل متوالی از چند سیکل فاصله برای کاهندگی لگاریتمی استفاده شود ،

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{u_1}{u_2}\frac{u_2}{u_3}\frac{u_3}{u_4}\cdots\cdots\frac{u_j}{u_{j+1}} = e^{j\delta}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{j}\ln\frac{u_1}{u_{j+1}} \cong 2\pi\xi$$

رابطه بیان کننده تعداد سیکل لازم برای کاهش ۵۰ % دامنه حرکت :

$$J_{50\%} \cong \frac{0.11}{\xi}$$

ارتعاش آزاد SDOF

- تعیین تحلیلی در صد میرایی ممکن نیست لذا از روش های تجربی استفاده می شود . یکی از این روش ها حالت ارتعاش آزاد سازه واقعی است .

اگر آزمایش اجازه ثبت شتاب را بدهد

$$\xi = \frac{1}{2\pi J} \ln \frac{u_i}{u_{i+j}}$$

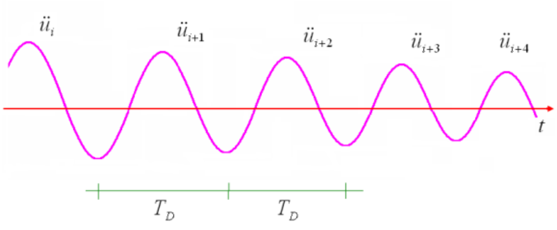
یا

اگر آزمایش اجازه ثبت u را بدهد

$$\xi = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}}$$

معمولا در عمل حالت ثبت شتاب سازه در آزمایش ارتعاش آزاد سهل تر است .

ارتعاش آزاد SDOF



- شتاب نگاشت ارتعاش آزاد سازه
- از ثبت می توان ارتعاش آزاد را بررسی و پریود واقعی را محاسبه نمود و از روش تحلیلی و کاربرد سختی و جرم نیز محاسبه و مقایسه کرد تا دقت تعیین سختی و جرم ارزیابی شود .

ارتعاش آزاد SDOF

- مثال – مطلوبست تعیین پریود طبیعی و در صد میرایی یک قاب (مدل) که تحت آزمایش ارتعاش آزاد قرار گرفته است . نتیجه آزمایش بصورت زیر است .

Peak	Time, t_i (sec)	Peak, u_i (g)
1	1.110	0.915
11	3.844	0.076

$$T_D = \frac{3.844 - 1.110}{10} = 0.273\sec$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi(10)} \ln\frac{0.915g}{0.076g} = 0.0396 = 3.96\%$$

ارتعاش آزاد SDOF

- **مثال –** یک مخزن آب هوایی که خالی است در نظر گرفته می شود ، یک کابل به مخزن متصل بوده و نیروی افقی kips ۱۶,۴ اعمال شده که باعث ۲ اینچ تغییر مکان افقی شده است ، کابل بصورت ناگهانی قطع و ارتعاش آزاد رخ می دهد ، در پایان چهار سیکل کامل ، زمان ۲ ثانیه و دامنه حرکت ۱ اینچ می باشد ، با اطلاعات فوق مطلوبست محاسبه :

الف – در صد میرایی   ب – پریود طبیعی بدون میرایی

ج – سختی موثر سیستم   د – وزن موثر سیستم

ه - ضریب میرایی   و – تعداد سیکل لازم برای اینکه دامنه حرکت به ۰,۲ اینچ کاهش یابد .

ارتعاش آزاد SDOF

- الف - در ۴ سیکل دامنه از ۲ به ۱ رسیده

$$j_{50\%} \cong \frac{0.11}{\xi} \rightarrow \xi = \frac{0.11}{4} = 0.0275 = 2.75\%$$

- ب –

$$T_D = \frac{2.0}{4} = 0.5\sec$$

$$T \cong T_D = 0.5\sec$$

- ج -

$$k = \frac{16.4}{2} = 8.2\, {kips}/{in}$$

ارتعاش آزاد SDOF

- د –

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 12.57\, {Rad}/{s}$$

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{8.2}{(12.57)^2} = 0.0519 kips - \sec^2 / in$$

$$W = mg = (0.0519)386 = 20.03 kips$$

- ه -

$$c = \xi\left(2\sqrt{km}\right) = 0.0275\left[2\sqrt{8.2(0.0519)}\right] = 0.0359 kips - \sec/ in$$

ارتعاش آزاد SDOF

- و -

$$\xi \cong \frac{1}{2\pi j}\ln\frac{u_1}{u_{1+j}} \rightarrow$$

$$j \cong \frac{1}{2\pi(0.0275)}\ln\frac{2}{0.2} = 13.32 \approx 13$$ سیکل

ارتعاش آزاد SDOF

- **مثال** – وزن آب لازم برای پر کردن مخزن آب هوایی در مثال قبل برابر 80 kips می باشد ،

مطلوبست تعیین پریود طبیعی و در صد میرایی مخزن پر ؟

$$W = 20.03 + 80 = 100.03 kips$$

$$m = \frac{100.03}{386} = 0.2591 kips - s^2 / in$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2591}{8.2}} = 1.12\sec$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{0.0359}{2\sqrt{8.2(0.2591)}} = 0.0123 = 1.23\%$$

انرژی ارتعاش آزاد

- انرژی یک سیستم SDOF در اثر ارتعاش آزاد (شرایط اولیه u_0 و $\dot{u}_0$) ، در لحظه شروع :

$$E_1 = \frac{1}{2}k(u_0)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{u}_0)^2$$

در هر لحظه از ارتعاش آزاد ، انرژی کل از جمع دو انرژی است ؛ انرژی جنبشی E_k و انرژی پتانسیل از کرنش E_s :

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{u}^2(t)$$

$$E_s = \frac{1}{2}ku^2(t)$$

انرژی ارتعاش آزاد

- بجای $u(t)$ از معادلش در حالت ارتعاش بدون میرایی قرار می دهیم :

$$E_s(t) = \frac{1}{2}k\left[u_0 \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t\right]^2$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2}m\omega^2\left[-u_0 \sin\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\cos\omega t\right]^2$$

- انرژی کل :

$$E_k(t) + E_s(t) = \frac{1}{2}ku_0^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}_0^2$$

انرژی ارتعاش آزاد

- مقدار کل انرزی در هر لحظه مستقل از زمان بوده و برابر انرژی لحظه ابتدایی است (میرایی صرفنظر شده).
- اگر میرایی در نظر گرفته شود ، برای محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل باید از $u(t)$ حالت ارتعاش آزاد با میرایی استفاده نمود .
- انرژی کل در این حالت دارای تابع کاهشی در زمان خواهد بود چون از انرژی بصورت لزجی استهلاک می شود که در مدت زمان صفر تا t برابر :

$$E_D = \int_0^u f_D(t)du = \int_0^u c\dot{u}du = \int_0^u c\dot{u}^2 dt$$

مقدار انرژی کل اولیه (لحظه اول شروع ارتعاش) به مرور مستهلک خواهد شد .

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- **این بخش از مباحث کلاسیک و پایه ای دینامیک سازه هاست. چرا؟**

از یک طرف اکثر بارها بصورت هارمونیکی بیان می شوند (نیروی نا متعادل ماشین های چرخان – امواج دریا – زلزله – بارهای پریودیک و .....).

از طرف دیگر درک رفتار سازه ها در برابر نیروهای هارمونیک کمک فراوانی به درک واکنش سازه در برابر سایر نیروها می نماید.

در ضمن نوع تابع هارمونیک و نتایج حاصل از تحلیل و تفسیر آنها ساده می باشد.

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t$$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- الف – حالت بدون میرایی:

$$m\ddot{u}+ku=p_0\sin\Omega t \qquad \beta=\frac{\Omega}{\omega}$$

$$u(t)=\left[u_0\cos\omega t+\left(\frac{u_0}{\omega}-\frac{p_0}{k}\frac{\beta}{1-\beta^2}\right)\sin\omega t\right]+\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin\Omega t$$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- اگر شرایط اولیه صفر باشد:

$$u(t)=\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\left(\sin\Omega t-\beta\sin\omega t\right) \qquad :u_0=\dot{u}_0=0$$

پایدار   گذرا

$$R(t)=\frac{u(t)}{u_{st}}$$ ضریب رفتار $$\leftarrow u_{st}=\frac{p_0}{k}$$

$$R_{\max}(t)=D=\frac{u_{\max}(t)}{u_{st}}=\frac{\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}\sin\Omega t}{\frac{p_0}{k}}=\frac{1}{\left|1-\beta^2\right|}$$

ضریب بزرگ نمایی تغییر مکان

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

حالت تشدید (رزونانس)

$$\Omega=\omega \rightarrow \beta=1 \rightarrow D=\frac{1}{0}=\infty$$

$u(t)\overset{\infty}{\uparrow} \rightarrow$ با رفع ابهام :

$$u(t)=-0.5\frac{p_0}{k}(\omega t\cos\omega t-\sin\omega t)$$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- الف – حالت با میرایی:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p_0\sin\Omega t$$

$$u(t)=e^{\xi\omega t}(A\cos\omega_D t+B\sin\omega_D t)+M\sin\Omega t+N\cos\Omega t$$

A و B از شرایط اولیه بدست می آید

$$M=\frac{p_0}{k}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

$$N=\frac{p_0}{k}\frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- اگر از جواب گذرا صرفنظر شود:

$$u(t) \cong u_p(t) = \rho \sin(\Omega t - \alpha)$$

$$\rho = \frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

$$D = \frac{\rho}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

- در رزونانس $\beta \to 1 \Rightarrow D = \frac{1}{2\xi}$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- توجه: حداکثر D در مقادیر قدری کمتر از $\beta = 1$

$$\frac{dD}{d\beta} = -4\beta(1-\beta^2) + 8\xi^2\beta = 0 \rightarrow \beta^2 = 1 - 2\xi^2$$

- برای مثال $\xi = 15\%$ ⟵ حداکثر D به ازاء $\beta = 0.977$ حاصل میشود.

- اگر از جواب گذرا صرفنظر نشود (با شرایط اولیه صفر): $u_0 = \dot{u}_0 = 0$

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi}\left[e^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D t\right) - \cos\omega t\right]$$

- ترم sin در عبارت بالا کوچک است (صرفنظر می شود) و $\omega_D \approx \omega$:

$$u(t) \cong \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi}\left(e^{-\xi t} - 1\right)\cos\omega t$$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- برای حالت حذف جواب گذرا:

۱. اگر $\beta \langle\langle 1$ (تغییرات نیرو آهسته است) ضریب بزرگنمایی D کمی بزرگتر از یک است و مستقل از میرایی – پس $u_{\max} \cong \rho \cong \frac{p_0}{k}$ رفتار دینامیکی مانند تغییر شکل استاتیکی است.

*سختی سیستم کنترل کننده است. $D \cong 1$

۲. اگر $\beta \rangle\rangle 1$ (تغییرات نیرو سریع است) با افزایش β مقدار D به سمت صفر میل می کند و میرایی اثر زیادی ندارد. برای مقادیر بزرگ β ترم β^4 در بیان عبارت D تعیین کننده است و تقریبا داریم:

$$D = \frac{\rho}{p_0/k} \cong \frac{1}{\beta^2} = \frac{\omega^2}{\Omega^2}$$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

*جرم کنترل کننده است $\rho \cong \frac{p_0}{k}\frac{\omega^2}{\Omega^2} = \frac{p_0}{m\Omega^2}$ دامنه حرکت

۳. اگر $\beta \cong 1$ (فرکانس بارگذاری و فرکانس طبیعی سیستم تقریبا برابر است) مقدار D بسیار به درصد میرایی حساس است. تغییر شکل دینامیکی خیلی از تغییر شکل استاتیکی بزرگتر است.

*میرایی کنترل کننده است. $$\rho = \frac{p_0/k}{2\xi} = \frac{p_0}{c\omega}$$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- مثال:

دامنه حرکت (با تقریب ρ) یک سیستم معادل یک درجه آزادی تحت اثر دو حالت بارگذاری هارمونیکی

بصورت زیر است. مطلوبست تخمین درصد میرایی سیستم؟

$\rho = 0.02'' \longleftarrow \Omega = 5\omega$ $\qquad$ $\rho = 5'' \longleftarrow \Omega = \omega$

$\omega = \Omega :$

$$\rho = \frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi} = 5$$

$$\xi = 0.05 = 5\%$$

$\Omega = 5\omega$

$$\rho \cong \frac{p_0}{k}\frac{1}{\beta^2} = \frac{p_0/k}{25} = 0.02 \rightarrow \frac{p_0}{k} = 0.5''$$

برآورد در صد میرایی از روش تشدید هارمونیکی

- تئوری: نوسان کننده ساده مستهلک شونده با فرکانس زاویه ای ω

$$p(t) = p_0 \sin \omega t \qquad \Omega = \omega \rightarrow \beta = 1$$

$$u(t) \cong u_p(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(2\xi\beta)^2}(-2\xi\beta\cos\omega t)$$

$$u(t) = -\frac{p_0}{2k\xi}\cos\omega t$$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- الف – نیروی f_S در فنر $f_S = ku(t)$

دامنه $a = p_0 / 2k\xi$

- ب – نیروی f_D در میراگر $f_D = c.\dot{u}(t)$

$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega \rightarrow c = 2m\xi\omega \rightarrow f_D = 2m\xi\omega\dot{u}$$

$$u(t) = -a\cos\omega t \rightarrow \dot{u}(t) = a\omega\sin\omega t$$

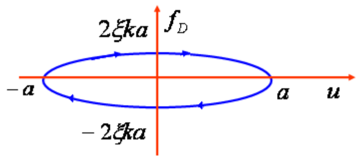
$$f_D = 2m\xi\omega a\omega\sin\omega t = 2m\xi\omega^2 a\sin\omega t$$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

$$\omega^2 = k/m \rightarrow \omega^2 m = k \rightarrow f_D = 2k\xi a\sin\omega t$$

$$\frac{f_D}{2k\xi a} = \sin\omega t \rightarrow \left(\frac{f_D}{2k\xi a}\right)^2 = \sin^2\omega t$$

$$\sin^2\omega t = 1 - \cos^2\omega t = 1 - u^2/a^2$$

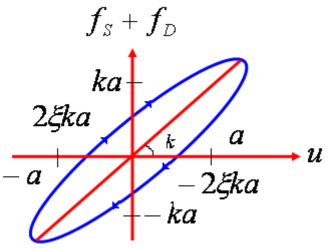


$$f_D^2 / (2k\xi a)^2 = 1 - u^2/a^2$$ تابع بیضی

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- دریک سیکل کامل مقدار انرژی پتانسیل در فنر تماما پس داده می شود ولی انرژی استهلاک شده در میراگر مصرف می شود و مقدار آن برابر سطح زیر بیضی است:

$$A = 2\pi a^2 k\xi \Rightarrow \qquad \xi = \frac{A}{2\pi a^2 k}$$



- رابطه بین مجموع دو نیروی f_D, f_S وتغییر مکان u :

شکل بدست آمده برای حالت تئوریک و ایده آل بوده است

برآورد در صد میرایی از روش تشدید هارمونیکی

- از شکل مساحت بیضی – مقدار k, a محاسبه و درصد میرایی نسبی تخمین زده می شود

$$\xi = A \big/ 2\pi a^2 k$$

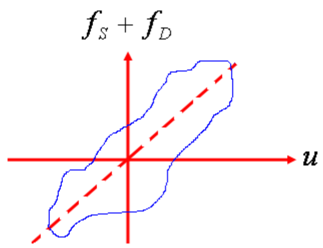
بتن مسلح 7%

فولادی پیچ و مهره 7%

بتن پیش تنیده 5%

فولادی جوش شده 4%

(توصیه سازمان انرژی اتمی آمریکا)



(منحنی در حالت واقعی)

برآورد در صد میرایی از روش تشدید هارمونیکی

- مقدار انرژی مستهلک شده یک سیستم SDOF در یک سیکل تحت اثر $p(t)=p_0\sin\Omega t$

(جواب پایدار):

$$E_D=\int f_D du=\int_0^{2\pi/\Omega}(c\dot{u})\dot{u}dt=\int_0^{2\pi/\Omega}c\dot{u}^2dt$$

$$=c\int_0^{2\pi/\Omega}\left[\Omega\rho\cos(\Omega t-\alpha)\right]^2dt=\pi c\Omega\rho^2$$

توجه از قبل داشتیم: $u(t)\cong u_p(t)=\rho\sin(\Omega t-\alpha)$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

- مثال:

نیروی مقاوم برای حرکت جسمی در یک سیال با توان دو سرعت رابطه دارد $f_D=\pm b\dot{u}^2$

مطلوبست تعیین ضریب میرایی معادل لزجی c_{eq} برای چنین نیرویی که بر سیستم مرتعش تحت اثر نیروی هارمونیکی با دامنه حرکت ρ و فرکانس زاویه ای Ω و هم چنین تخمین ρ در حالت $\Omega=\omega$

- حل: اگر زمان از حالت تغییر مکان حداکثر منفی در نظر باشد: $u(t)=-\rho\cos\Omega t$

$$c_{eq}E_D=\int f_D du=\int_0^{2\pi/\Omega}f_D\dot{u}dt=2\int_0^{\pi/\Omega}f_D\dot{u}dt=2\int_0^{\pi/\Omega}\left(b\dot{u}^2\right)\dot{u}dt$$

$$=2b\Omega^3\rho^3\int_0^{\pi/\Omega}\sin^3\Omega t dt=\frac{8}{3}b\Omega^2\rho^3$$

واکنش سیستم های SDOF در بار گذاری های هارمونیک

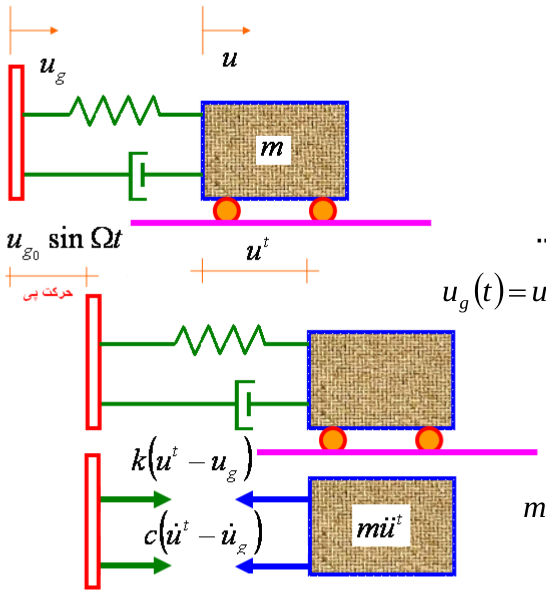
$$\pi c_{eq}\Omega\rho^2 = \frac{8}{3}b\Omega^2\rho^3 \rightarrow c_{eq} = \frac{8}{3\pi}b\Omega\rho$$

از قبل

$$\rightarrow \Omega = \omega \rightarrow \rho = \frac{p_0}{c\omega} \rightarrow$$

$$\rho = \left(\frac{3\pi}{8b}\frac{p_0}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

کاهندگی ارتعاش



- الف: انتقال حرکت از تکیه گاه به سازه

ماشین آلات- عبور قطار- انفجار- زلزله ....

$$u_g(t) = u_{g_0}\sin\Omega t \rightarrow \dot{u}_g = u_{g_0}\Omega\cos\Omega t$$

برای سادگی u^t را با u نشان میدهیم

$$m\ddot{u} + c(\dot{u}+\dot{u}_g) + k(u-u_g) = 0$$

کاهندگی ارتعاش

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=ku_{g_0}\sin\Omega t+c\Omega u_{g_0}\cos\Omega t$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{p_0\sin(\Omega t+\alpha)}$$

$$\frac{c\Omega}{k}=\frac{2c\Omega}{2m\omega^2}=\frac{2c\Omega}{2m\omega\times\omega}2\xi\beta$$

c_{cr}

$$p_0=ug_0\sqrt{k^2+(c\Omega)^2}=u_{g_0}k\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}\qquad \tan\alpha=\frac{c\Omega}{k}2\xi\beta$$

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p_0\sin(\Omega t+\alpha)\rightarrow$$

$$u_{\max}=\frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}ku_{g_0}\sin\Omega t+c\Omega u_{g_0}\cos\Omega t$$

حداکثر تغییر مکان منتقله از پی سازه به خود سازه وقتی پی بصورت $u_{g_0}\sin\Omega t$ ارتعاش می کند

کاهندگی ارتعاش

- **مساله مهم در کاهندگی ارتعاش:**

حفاظت سیستم از ارتعاشات مزاحم ناشی از حرکت تکیه گاه است.

- **ضریب قابلیت انتقال:**

معیاری جهت تعیین میزان انتقال حرکت از پی به دستگاه

$$TR=\frac{u_{\max}}{u_{g_0}}=\frac{\frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}}{\frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}}=\frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

کاهندگی ارتعاش

$$\Leftarrow D = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}} \leftarrow \sin$$ در بارگذاری

$$TR = D\sqrt{1+\left(2\xi\beta\right)^2}$$

کاهندگی ارتعاش

- **به ازای $\beta = \sqrt{2}$ همه منحنی ها از یک نقطه عبور و $TR = 1$ (حداکثر تغییر مکان منتقله به سیستم برابر حداکثر (دامنه) ارتعاش پی).**
- **هر چه β از $\sqrt{2}$ بزرگتر باشد ضریب انتقال کاهش می کند بنابراین تغییر مکان منتقله کمتر می شود.**
- **هر چه ξ کمتر باشد ضریب انتقال کمتر می شود! تاثیر نیروی میرایی مهم و هر چه کمتر باشد بهتر است. نقش نیروی میرایی؟ نا مطلوب!**

u_{max} تغییر مکان حداکثر سیستم است ولی برای نیروی داخلی سازه در اثر حرکت تکیه گاهی باید تغییر مکان نسبی معلوم باشد: u_r

کاهندگی ارتعاش

$$u_r = u - u_g$$

$$m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + ku_r = -m\ddot{u}_g = mu_{g_0}\Omega^2 \sin \Omega t$$

$$p_{eff} = -m\ddot{u}_g$$

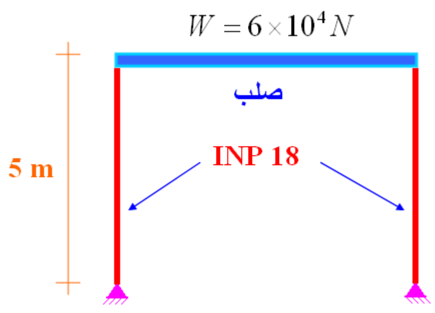
$$u_{r\max} = \frac{mu_{g_0}\Omega^2}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}}$$

$$\frac{m\Omega^2}{k} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \beta^2 \rightarrow \frac{u_{r\max}}{u_{g_0}} = \frac{\beta^2}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}}$$

$$u_{r\max} = u_{g_0} D\beta^2$$

کاهندگی ارتعاش

- مثال :



$E = 2.1 \times 10^6 kg / cm^2$

$I = 1450 cm^2$

$\xi = 5\%$

$TR = ?$

حداکثر تنش موجود در ستونها؟

کاهندگی ارتعاش

$$k=\frac{6EI}{h^3}=146.2kgf/cm=\frac{6\times2.1\times10^6 1450}{(500)^3}$$

$$k=146.2\times9.8\times100=143276N/m$$

$$u_{g_0}=0.4cm$$

$$\omega=\sqrt{k/m}=\sqrt{\frac{143276\times9.8}{6\times10^4}}=4.84Rad/s$$

$$\Omega=4Rad/s\to\beta=4/4.84=0.826$$

کاهندگی ارتعاش

$$D=\frac{1}{\sqrt{(1-0.826^2)^2+(2\times0.05\times0.826)^2}}=3.046$$

$$TR=3.046\sqrt{1+(2\times0.05\times0.826)^2}=3.056$$

$$u_{r\max}=u_{g_0}D\beta^2=0.4\times3.046\times(0.826)^2=0.83cm$$

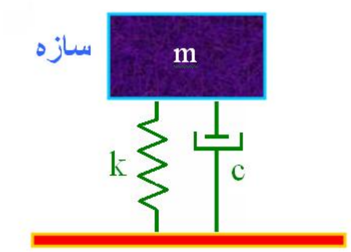
نیروی هر ستون $=\dfrac{146.2\times0.83}{2}=60.67kgf$

لنگر حداکثر هر ستون $M_{\max}=60.67\times500=30335kgf-cm$

$$\sigma_{\max}=M/\frac{I}{h}=\frac{30335}{1450/9}=188.3kgf/cm^2 \qquad INP18\to h=9$$

کاهندگی ارتعاش

- **ب: انتقال نیرو از سازه به تکیه گاه**



در طراحی پی های ماشین های مرتعش بکار می رود.
سازه مرتعش است و هدف تعیین مقدار نیروی منتقله از سازه به تکیه گاه است

کاهندگی ارتعاش

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p_0\sin\Omega t$$

جواب پایدار $u(t)=\rho\sin(\Omega t-\alpha)$

$$\rho=\frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\xi\beta\right)^2}}=\frac{p_0}{k}\times D$$

- برآیند نیروهای انتقال یافته از سازه به پی برابر مجموع نیروهای فنر و کمک فنر است . در استاتیک

فقط نیروی ku منتقل می شود اما در دینامیک ، ku و $c\dot{u}$ منتقل می شود .

$$R=f_S+f_D=ku+c\dot{u}$$

کاهندگی ارتعاش

$$R=\rho\left[k\sin(\Omega t-\alpha)+c\Omega\cos(\Omega t-\alpha)\right]$$
$$=\rho\sqrt{k^2+c^2\Omega^2}\,\sin(\Omega t-\alpha+\gamma)$$

$$\gamma=\arctan\left(\frac{c\Omega}{k}\right)=2\xi\beta$$

$$(\alpha-\gamma)=\theta$$ زاویه فاز $$\rightarrow \tan\theta=\frac{\tan\alpha-\tan\gamma}{1+\tan\alpha\tan\gamma}=\frac{2\xi\beta^2}{1-\beta^2+4\xi^2\beta}$$

$$R=\rho k\sqrt{1+\left(\frac{c\Omega}{k}\right)^2}\,\sin(\Omega t-\theta)=\rho k\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}\,\sin(\Omega t-\theta)$$

$$R_{\max}=\frac{p_0\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

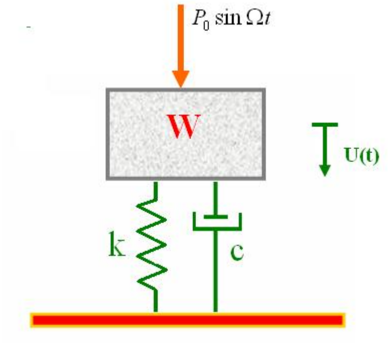
کاهندگی ارتعاش

- TR : قابلیت انتقال در این حالت عبارت از نسبت حداکثر نیروی انتقال یافته به تکیه گاه به حداکثر نیروی هارمونیکی وارد بر سازه است .

$$TR=\frac{R_{\max}}{p_0}=\frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}}=D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$$ شبیه حالت الف

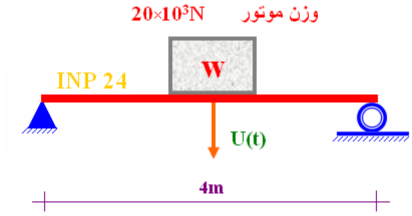
- انتقال حرکت از تکیه گاه به سازه و انتقال نیرو از سازه به تکیه گاه از یک قانون پیروی می کنند ، (منحنی تغییرات TR مشابه است) .

کاهندگی ارتعاش



- **مثال :** $\xi = 10\%$

نیروی انتقال یافته از موتور به تیر ؟



$$p(t) = \left(3\times10^4\right)\sin 40t \qquad N$$

$$I_x = 4250cm^4$$

$$E = 2.1\times10^6 kg/cm^2$$

از وزن تیر صرفنظر می شود ،

کاهندگی ارتعاش

- **حل :**

$$k = \frac{48EI}{l^3} = \frac{48\times2.1\times10^6\times4250}{(400)^3} = 6694kgf/cm$$

$$k = 6694\times9.8\times100 = 6560120N/m$$

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{6560120\times9.8}{20\times10^3}} = 56.77Rad/s$$

$$\beta = \Omega/\omega = 40/56.7 = 0.7$$

$$u_{st} = p_0/k = \frac{3\times10^4}{6560120}\times100 = 0.46cm$$

کاهندگی ارتعاش

$$D = \frac{1}{\sqrt{\left(1-0.7^2\right)^2 + \left(2\times 0.1\times 0.7\right)^2}} = 1.89$$

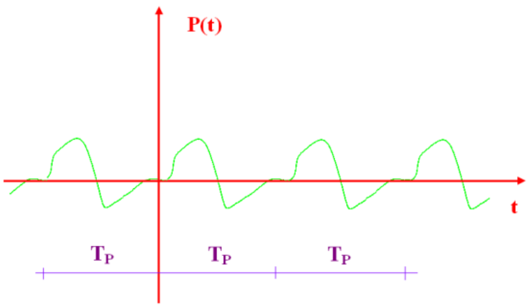
$$\rho = \frac{p_0}{k} D = 0.46\times 1.89 = 0.87cm$$ حداکثر تغییر مکان

$$TR = D\sqrt{1+\left(2\xi\beta\right)^2} = 1.89\sqrt{1+\left(2\times 0.1\times 0.7\right)^2} = 1.91$$

$$p_{\max} = p_0 \times TR = 3\times 10^4 \times 1.91 = 5.73\times 10^4 \; N$$ تاثیر نیروی دینامیکی

Periodic Excitation پاسخ سیستم SDOF به بارگذاری پریودیک

- نیروی پریودیک نیرویی که تابع آن پس از یک پریود ثابت ، عینا تکرار شود (پریود T_p) ، نیروی پروانه کشتی ، امواج روی سکوهای دریایی ، نیروی گردابی باد بر ساختمانهای بلند و لاغر و خیلی نیروهای دیگر ، پریودیک یا نزدیک به آن هستند : شبیه سازی زلزله و حرکت اتوموبیل روی دهانه بلند پل ها به دلیل اثر بلند مدت خزش از آن جمله می باشند ،



Periodic Excitation پاسخ سیستم SDOF به بارگذاری پریودیک

- با کمک بسط سری فوریه ، نیروی پریودیک به ترم های هارمونیک تبدیل می شود (رفتار سازه خطی).

پریودیک

$$p(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

$$a_0=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}p(t)dt$$

مقدار متوسط P(t) در یک پریود

$$\begin{cases}\Omega=\dfrac{2\pi}{T_p}\\ n=1,2,3,\ldots\end{cases}$$

Periodic Excitation پاسخ سیستم SDOF به بارگذاری پریودیک

$$a_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}p(t)\cos(n\Omega t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_p}\int_0^{T_p}p(t)\sin(n\Omega t)dt$$

- در تئوری ∞ ترم ولی در عمل چند ترم اول برای همگرایی کافی است .

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

$$\beta_n=\frac{\Omega_n}{\omega}=\frac{2\pi n/T_p}{2\pi/T}=\frac{nT}{T_p}=\frac{n\Omega_1}{\omega}\qquad \Omega_n=n\Omega_1$$

Periodic Excitation پاسخ سیستم SDOF به بارگذاری پریودیک

از حل معادله برای هر ترم بارگذاری $\Rightarrow u(t)$

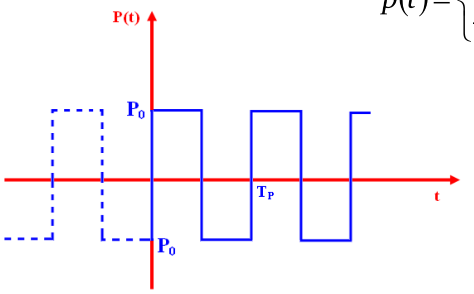
$$u(t)=\frac{a_0}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{1}{\left(1-\beta_n^2\right)^2+\left(2\xi\beta_n\right)^2}\left\{\left[2\xi\beta_n a_n+\left(1-\beta_n^2\right)b_n\right]\right.$$
$$\left.\sin\Omega_n t+\left[\left(1-\beta_n^2\right)a_n-2\xi\beta_n b_n\right]\cos\Omega_n t\right\}$$

- $u(t)$ یک تابع پریودیک با پریود T_p
- تاثیر نسبی هر ترم بستگی مستقیم به مقدار a_n و b_n از مولفه نیرو $p(t)$ و همینطور ضریب β_n دارد .

Periodic Excitation پاسخ سیستم SDOF به بارگذاری پریودیک

- **مثال :** مطلوبست تحلیل یک SDOF تحت اثر نیروی پریودیک

$$p(t)=\begin{cases} p_0 & 0\le t\le T_p/2 \\ -p_0 & T_p/2\le t\le T_p \end{cases}$$



$$a_0=\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}p(t)dt=0$$

Periodic Excitation پاسخ سیستم SDOF به بارگذاری پریودیک

$$a_n = \frac{2}{T_p}\left[p_0 \int_0^{T_p/2} \cos(n\Omega t)dt + (-p_0)\int_{T_p/2}^{T_p} \cos(n\Omega t)dt \right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\left[p_0 \int_0^{T_p/2} \sin(n\Omega t)dt + (-p_0)\int_{T_p/2}^{T_p} \sin(n\Omega t)dt \right] = \begin{cases} 0 & \text{n زوج} \\ 4p_0/n\pi & \text{n فرد} \end{cases}$$

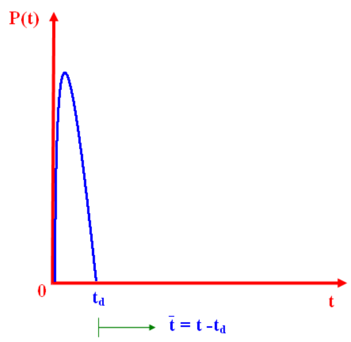
$$p(t) = \sum p_n(t) = \frac{4p_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\Omega t)$$

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(1-\beta_n^2)^2\sin(n\Omega t) - 2\xi\beta_n\cos(n\Omega t)}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}$$

تحلیل دینامیکی SDF در بار گذاری اختیاری و کلی (انتگرال دوهامل)

- Duhamel's integral (Response to Arbitrary Force)

- قبل از پرداختن به بار گذاری کلی (بدون محدودیت خاص) ، تحلیل دینامیکی در برابر بار آنی دیده می شود . مدت زمان اعمال بار بقدری کوتاه که سیستم فرصت عکس العمل ندارد ، بنابراین تغییر مکان در فاز بارگذاری تقریبا صفر است ، میرایی در این نوع بارگذاری اثر بسیار ناچیز دارد . جواب سیستم در فاز ارتعاش آزاد خواهد بود : $t \langle t_d$



تحلیل SDFدر بار گذاری اختیاری و کلی (انتگرال دوهامل) دینامیکی

- شرایط اولیه در لحظه t_d برآورد شده و رابطه ارتعاش آزاد (بدون میرایی) نوشته می شود .

ضربه = اندازه مقدار حرکت $\Rightarrow \int_0^{t_d} p(t)dt = m\Delta\dot{u} = m(\dot{u}_{t_d} - \dot{u}_0) = m\dot{u}_{t_d}$ (صفر)

$u_{t_d} \#0$ و $\dot{u}_{t_d} = \dfrac{\int p(t)dt}{m}$

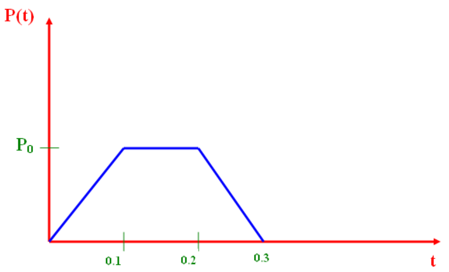
رابطه ارتعاش آزاد $u(\bar{t}) = \dfrac{\dot{u}_{t_d}}{\omega}\sin\omega\bar{t} + u_{t_d}\cos\omega\bar{t} = \dfrac{\int_0^{t_d} p(t)dt}{m\omega}\sin\omega\bar{t}$ (صفر)

- معمولا اگر $t_d \leq \dfrac{T}{4}$ باشد ، جواب تقریبی فوق ، قابل قبول خواهد بود.

تحلیل دینامیکی SDF در بار گذاری اختیاری و کلی (انتگرال دوهامل)

- **مثال –** یک سیستم SDF با T=0.4 sec تحت بار ذوزنقه ای شکل است .

$u(t=1.8)=?$

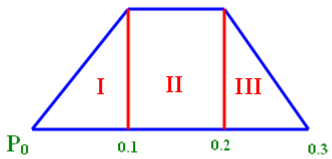


$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0.4} = 15.7 Rad/s$

$t_d = 0.3 \rangle \dfrac{T}{4}$

تحلیل دینامیکی SDFدر بار گذاری اختیاری و کلی (انتگرال دوهامل)

- روش مستقیم یا ....



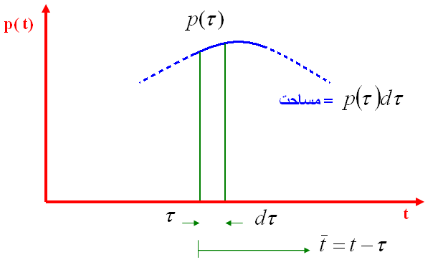
فقط فاز I $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_1(\bar{t} = 1.7) = \frac{0.1 p_0}{2m\omega}\sin(1.7\omega)$

فقط فاز II $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_2(\bar{t} = 1.6) = \frac{0.1 p_0}{m\omega}\sin(1.6\omega)$

فقط فاز III $t_d = 0.1 = \frac{T}{4} \rightarrow u_3(\bar{t} = 1.5) = \frac{0.1 p_0}{2m\omega}\sin(1.5\omega)$

سیستم خطی $\rightarrow u(t = 1.8) = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{0.1 p_0}{2m\omega}(\sin 1.7\omega + 2\sin 1.6\omega + \sin 1.5\omega)$

تحلیل دینامیکی SDFدر بار گذاری اختیاری و کلی (انتگرال دوهامل)



$$du(\bar{t}) = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega}\sin\omega\bar{t}$$

$$\int_0^t du = u(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t p(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

تحلیل دینامیکی SDFدر بار گذاری اختیاری و کلی (انتگرال دوهامل)

- **انتگرال دوهامل برای حالت بدون میرایی**

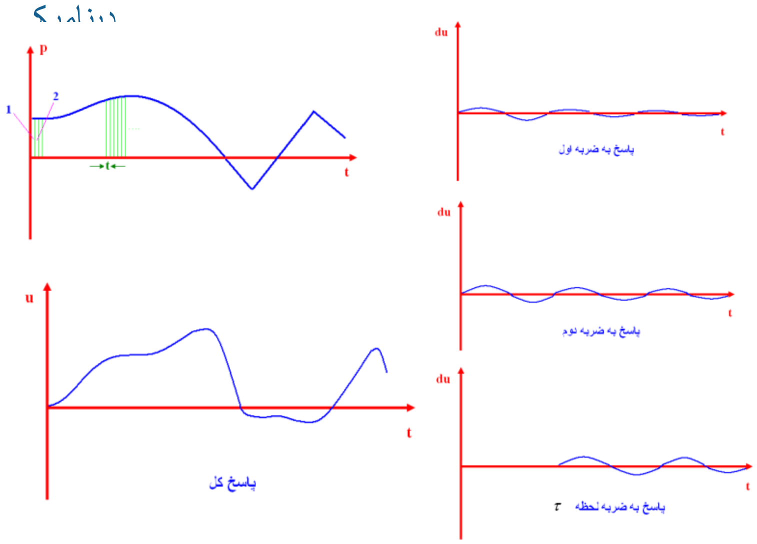
جواب خیلی دقیق است چون $d\tau \langle\langle \frac{T}{4}$

- **پاسخ انتگرال دوهامل برای حالت با میرایی**

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)d\tau$$

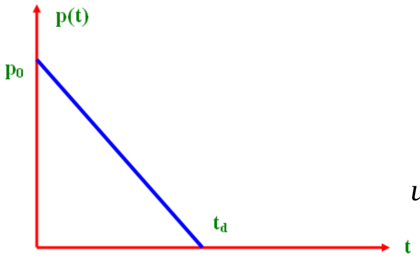
اگر تابع $p(t)$ پیچیده باشد یا شکل خاصی نداشته باشد ، از روش برآورد عددی استفاده می شود ، در عمل ، روش های عددی انتگرال دوهامل از کارایی خوبی بر خوردار نمی باشند .

تحلیل SDFدر بار گذاری اختیاری و کلی (انتگرال دوهامل)



تحلیل SDFدر بار گذاری اختیاری و کلی (انتگرال دوهامل دینامیکی

- **مثال –** مطلوبست تحلیل یک SDF با روش انتگرال دو هامل برای بار گذاری زیر :



حالت بدون میرایی

$$p(t) = p_0\left(1 - \frac{t}{t_d}\right) \qquad 0 \le t \le t_d$$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t p_0\left(1 - \frac{\tau}{t_d}\right)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

تحلیل SDFدر بار گذاری اختیاری و کلی (انتگرال دوهامل دینامیکی

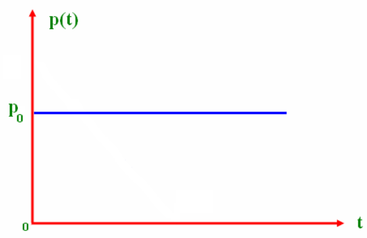
پس از عملیات پر حجم انتگرال گیری (شرایط اولیه صفر فرض شده است):

$$p(t) = \frac{p_0}{k}\left[1 - \frac{t}{t_d} - \cos\omega t + \frac{1}{\omega t_d}\sin\omega t\right] \qquad 0 \le t \le t_d$$

برای $t \rangle t_d$ (ارتعاش آزاد) :

باید u و $\dot{u}$ در لحظه t_d بر آورد شود و در رابطه ارتعاش آزاد قرار گیرد .

پاسخ سیستم SDF در چند حالت بار گذاری خاص



- الف – STEP FORCE

$$m\ddot{u} + ku = p(t) = p_0$$

جواب بدون میرایی

$$u(t) = \frac{p_0}{k}(1 - \cos \omega t)$$

- در این حالت $u_{max}(t) = 2\frac{p_0}{k}$ به ازای لحظه ای که پاسخ حداکثر می شود .

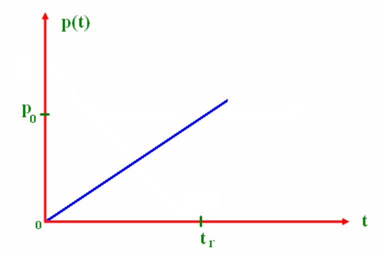
حالت با میرایی

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\left[1 - e^{-\xi \omega t}\left(\cos \omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin \omega_D t\right)\right]$$

- تحلیل بالا از روش مستقیم (حل معادله دیفرانسیل) یا انتگرال دوهامل قابل حصول است .

پاسخ سیستم SDF در چند حالت بار گذاری خاص

- ب – RAMP FORCE (نیروی افزاینده خطی)



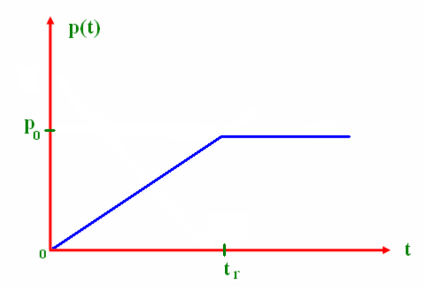
$$p(t) = p_0 \frac{t}{t_r}$$

رفتار سازه خطی است و

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega t}{\omega t_r}\right) : \xi = 0$$

پاسخ سیستم SDF در چند حالت بار گذاری خاص

- ج – STEP FORCE with FINITE RISE TIME (بدون میرایی)



$$p(t)=\begin{cases} p_0\left(t/t_r\right) & t\le t_r \\ p_0 & t\ge t_r \end{cases}$$

$$u(t)=\frac{p_0}{k}\left(\frac{t}{t_r}-\frac{\sin\omega t}{\omega t_r}\right) \qquad t\le t_r$$

پاسخ سیستم SDF در چند حالت بار گذاری خاص

$$u(t)=\frac{p_0}{k}\left\{1-\frac{1}{\omega t_r}\left[\sin\omega t-\sin\omega(t-t_r)\right]\right\} \qquad t\ge t_r$$

$$u_{\max}(t)=\frac{p_0}{k}\left\{1-\frac{1}{\omega t_r}\sqrt{(1-\cos\omega t_r)^2+(\sin\omega t_r)^2}\right\} \qquad t\ge t_r$$

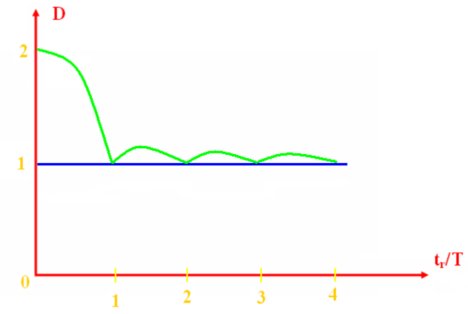
ضریب بزرگنمایی دینامیکی

$$D=\frac{u_{\max}}{p_0/k}=1+\frac{\left|\sin\left(\pi t_r/T\right)\right|}{\pi t_r/T}$$

پاسخ سیستم SDF در چند حالت بار گذاری خاص

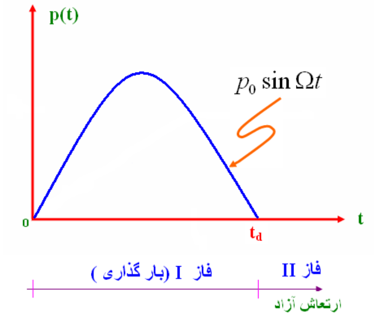
- **طیف جواب برای بارگذاری فوق**

حالت بدون میرایی



تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای PULSE EXCITATION

- انواع بار گذاری ضربه ای مثلثی ، مستطیلی ، نصف هارمونیک و ...... بر سازه ها اثر می کنند .
- جزئیات تحلیل برای نمونه در مورد بار ضربه ای نصف سینوس ارائه می شود .



موج انفجار ، ترمز جرثقیل های بزرگ ، افزایش ناگهانی

نیروی موتور از جمله بارهای ضربه ای هستند ،

معمولا اثر میرایی خیلی کم است ،

تحلیل در دو فاز انجام می شود : فاز I و فاز II

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای PULSE EXCITATION

- **تحلیل فاز بار گذاری (I)** $0 \le t \le t_d$

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \Omega t$$

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} (\sin \Omega t - \beta \sin \omega t)$$

- آیا u_{max} در فاز I است یا II ؟

$$\frac{du}{dt} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} (\Omega \cos \Omega t - \beta\omega \cos \omega t) = 0$$

$$\Omega \cos \Omega t - \Omega \cos \omega t = 0 \Rightarrow \cos \Omega t = \cos \omega t$$

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای PULSE EXCITATION

$$\Omega t = 2\pi n \pm \omega t$$ → لحظه پاسخ حداکثر $$t_{max} = \frac{2\pi n}{\Omega \pm \omega} = \frac{2\pi n}{\Omega \left(1 \pm \frac{2t_d}{T}\right)}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2\pi / 2t_d}{2\pi / T} = \frac{T}{2t_d}$$

- برای اینکه حداکثر در فاز I باشد باید $t_{max} < t_d$

- بارگذاری نصف sin پس سیکل اول (n=1) و اگر با علامت منفی ادامه دهیم خواهیم داشت $\beta \le 1$

که معنی ندارد پس رابطه شرطی را با n=1 و علامت + بررسی می کنیم .

تحليل ديناميکی سيستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای
PULSE EXCITATION

$$t_{\max} = \frac{2\pi}{\Omega\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} = \frac{2\pi}{\Omega\left(1+\frac{2t_d}{T}\right)} \le t_d \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{1+\frac{1}{\beta}} \le \Omega t_d = \pi \Rightarrow \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{\pi}{t_d} \to \Omega t_d = \Omega \Rightarrow$$

$\beta \le 1$ يا $\Omega \le \omega$ يا $\frac{T}{2} \le t_d$

تحليل ديناميکی سيستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای
PULSE EXCITATION

- **تحليل فاز ارتعاش آزاد (II)** $t \rangle t_d$

برای رابطه ارتعاش آزاد $u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}(\bar{t}=0)}{\omega}\sin\omega\bar{t} + u(\bar{t}=0)\cos\omega\bar{t}$ بايد تغيير مکان و سرعت در لحظه t_d تعيين شوند (لحظه $\bar{t}=0$ يعنی $t=t_d$).

از رابطه فاز I مقادير u_{t_d} و $\dot{u}_{t_d}$ محاسبه می شوند :

$$\Omega t_d = \pi \to \sin\Omega t_d = \sin\pi = 0$$

$$u(t_d) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}(\sin\Omega t_d - \beta\sin\omega t_d)$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} \to \omega = \Omega/\beta \to \omega t_d = \frac{\Omega t_d}{\beta} = \frac{\pi}{\beta} \Rightarrow u(t_d) = -\frac{p_0}{k}\frac{\beta\sin\pi/\beta}{(1-\beta^2)}$$

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای PULSE EXCITATION

- برای محاسبه $\dot{u}(t_d)$:

$$\dot{u}(t_d)=\frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}(\Omega\cos\Omega t_d-\Omega\cos\omega t_d)$$

$$\dot{u}(t_d)=-\frac{p_0}{k}\frac{\Omega}{(1-\beta^2)}\left(1+\cos\pi/\beta\right)$$

پس :

$$u(\bar{t})=-\frac{p_0}{k}\frac{\beta}{(1-\beta^2)}\left[\left(1+\cos\pi/\beta\right)\sin\omega\bar{t}+\sin\frac{\pi}{\beta}\cos\omega\bar{t}\right]$$

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای PULSE EXCITATION

- **برآورد حداکثر تغییر مکان در فاز II :**

$$u(\bar{t})=\rho\sin(\omega t+\alpha)$$ که $$\rho=\sqrt{u_{t_d}^2+\left(\frac{\dot{u}_{t_d}}{\omega}\right)^2}$$

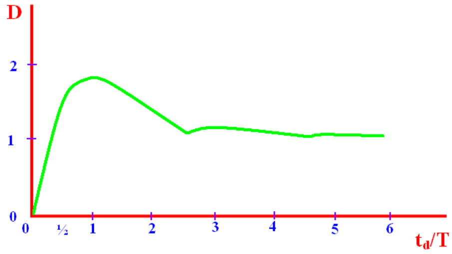
$u_{max}(\bar{t})=\rho$ که اگر بجای u_{t_d} و $\dot{u}_{t_d}$ از معادل آنها استفاده شود :

$$u_{max}=\frac{p_0}{k}\frac{2\beta}{(1-\beta^2)}\cos\pi/2\beta$$ در فاز II

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای
PULSE EXCITATION

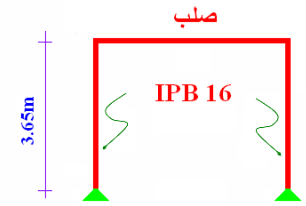
- **تهیه طیف پاسخ بار گذاری نصف سینوسی**

- با توجه به تعیین تغییر مکان حداکثر در فاز I و II می توان ضریب بزرگنمایی را محاسبه و بر حسب $\frac{t_d}{T}$ های مختلف ، منحنی مربوط ترسیم شود .



تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای
PULSE EXCITATION

- **مثال –** قاب یک طبقه مطابق شکل مفروض است . پریود طبیعی قاب برابر 0.5 sec و ستون ها از مقطع IPB 16 می باشد ($E= 2.1\times10^6$ kg/cm²) ، مطلوبست تعیین پاسخ حداکثر قاب تحت اثر بار ضربه ای نیم سینوس با حداکثر مقدار 1.8 ton و t_d= 0.25 sec . منظور از پاسخ در این مساله حداکثر تغییر مکان در بالای قاب و حداکثر تنش خمشی در ستونها؟



$$IPB16 \rightarrow I_x = 2492cm^4 \text{ و } W_x = 311cm^3$$

$$t_d/T = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 \xrightarrow{\text{طیف مربوطه}} D = 1.5$$

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای PULSE EXCITATION

یک ستون $k = \frac{3EI}{h^3} = \frac{3(2.1\times10^6)2492}{(3.65\times100)^3} = 322.85 kg/cm$

قاب $k = 2\times322.85 = 645.7 kg/cm$

$$p_0/k = \frac{1800}{645.7} = 2.79 cm$$

$$u_{max} = \frac{p_0}{k}\times D = 2.79\times1.5 = 4.185 cm$$

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای PULSE EXCITATION

$$M = \frac{3EI}{h^2}u_{max} = \frac{3\times2.1\times10^6\times2492}{(365)^2}\times4.185 = 493171.86 kg-cm$$

$$\cong 4.93 t-m$$

- برآورد لنگر از روش دیگر :

$$f_{s\max} = ku_{max} = p_0\times D = 1.8\times1.5 = 2.7 ton$$

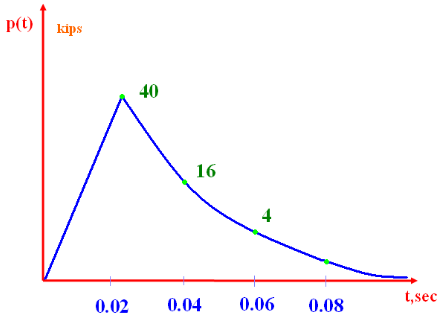
$$M = \frac{f_{s\max}}{2}\times h = \frac{2.7}{2}\times3.65 \cong 4.93 ton-m$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{4.93\times10^5}{311} = 1585 kg/cm^2$$

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای
PULSE EXCITATION

- **مثال –** برج آب مثال های قبل با ارتفاع 80 تحت اثر نیروی p(t) ناشی از انفجار قرار می گیرد .

مطلوبست تعیین حداکثر برش و لنگر خمشی در پای برج؟



تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای
PULSE EXCITATION

از مثال های قبل:

$$\begin{cases} \text{برج} \quad k = 8.2 kips/in \\ \text{پر} \quad T = 1.12 \sec \end{cases}$$

$$t_d/T = \frac{0.08}{1.12} = 0.071 \langle 0.25 \rightarrow$$ روش تقریبی

- **حل مثال :**

از قانون ذوزنقه برای محاسبه انتگرال (مساحت منحنی بارگذاری) استفاده می شود :

$$\int_0^{0.08} p(t)dt = \frac{\int p(t)dt}{m\omega} \sin \omega t \rightarrow u_{\max} = \frac{\int p(t)dt}{m\omega} = \frac{I}{m\omega}$$

تحلیل دینامیکی سیستم SDF در برابر بارگذاری ضربه ای
PULSE EXCITATION

$$u_{\max} = \frac{I}{k}\frac{2\pi}{T} = \frac{(1.2)2\pi}{(8.2)(1.12)} = 0.821in$$

$$f_{s_{\max}} = ku_{\max} = (8.2)(0.821) = 6.73kips$$

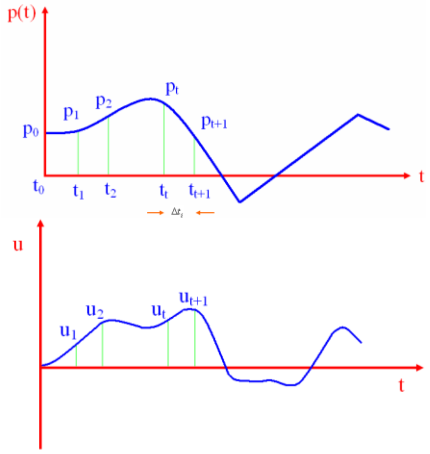
$\Rightarrow$ برش حداکثر $V_b = 6.73kips$ و

$$M_b = 6.73 \times 80 = 538kip - ft$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **برای انواع بارگذاری دینامیکی بویژه اگر نیرو دارای تابع ریاضی مشخصی نباشد :** $p(t)$
- **مسائل مهم :** دقت ، همگرایی ، پایداری و نکات برنامه نویسی و اجرا در کامپیوتر در مورد روش عددی مورد نظر
- **انواع روش :** سه روش کلی عددی : درون یابی تابع نیرو – تفاظل محدود در بیان سرعت و شتاب – فرض تغییرات مختلف شتاب

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF



ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **الف – روش های عددی متکی بر درون یابی در تابع نیرو**

- **Numerical Solution Based on Interpolation of the Excitation**

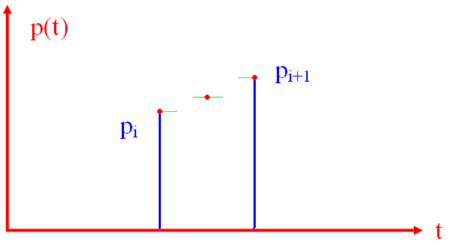
$$\tilde{p}_i = p(\tau) = p_i$$

یا

$$p_{i+1}$$

یا

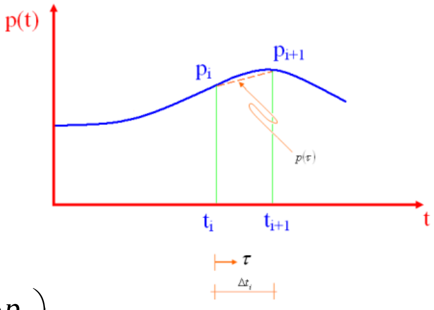
$$\frac{p_i + p_{i+1}}{2}$$



درون یابی ثابت تابع نیرو

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF



$$p(\tau) = p_i + \left(\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\right)\tau$$

درون یابی خطی تابع نیرو

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **۱- درون یابی ثابت تابع نیرو**

برای سادگی : از میرایی صرفنظر می کنیم – جواب کلی از دو قسمت تشکیل شده است :

۱. جواب سیستم تحت اثر نیروی ثابت در فاصله زمانی Δt_i بدون شرایط اولیه

۲. جواب سیستم درحالتی که نیرو وجود ندارد و فقط شرایط اولیه وجود دارد (ارتعاش آزاد)

1

$$m\ddot{\tilde{u}} + k\tilde{u} = \tilde{p}_i \rightarrow \tilde{u}_p = \frac{\tilde{p}_i}{k}$$

$$\tilde{u}_c = A_1 \sin\omega\tau + A_2 \cos\omega\tau$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$\tilde{u}(\tau)=\frac{\tilde{p}_i}{k}+A_1\sin\omega\tau+A_2\cos\omega\tau \qquad \left(\tilde{u}(0)=\dot{\tilde{u}}(0)=0\right)$$

$$A_1=0 \quad ,A_2=-\tilde{p}_i/k \rightarrow \tilde{u}(\tau)=\frac{\tilde{p}_i}{k}(1-\cos\omega\tau)$$

2

- ارتعاش آزاد (نیرو $\tilde{p}_i$ وجود ندارد) :

$$\hat{u}(\tau)=u_i\cos\omega\tau+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\tau$$

$$u(\tau)=\tilde{u}(\tau)+\hat{u}(\tau)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$u(\tau)=u_i\cos\omega\tau+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\tau+\frac{\tilde{p}_i}{k}(1-\cos\omega\tau)$$

$$\dot{u}(\tau)=\omega\left[-u_i\sin\omega\tau+\frac{\dot{u}_i}{\omega}+\cos\omega\tau+\frac{\tilde{p}_i}{k}\sin\omega\tau\right]$$

- اگر در روابط قبلی $\tau=\Delta t_i$ قرار گیرد ، تغییر مکان و سرعت در لحظه t_{i+1} بدست می آید .

$$u_{i+1}=u_i\cos(\omega\Delta t_i)+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin(\omega\Delta t_i)+\frac{\tilde{p}_i}{k}[1-\cos(\omega\Delta t_i)]$$

$$\dot{u}_{i+1}=\omega\left\{-u_i\sin(\omega\Delta t_i)+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\cos(\omega\Delta t_i)+\frac{\tilde{p}_i}{k}\sin(\omega\Delta t_i)\right\}$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- ۲ – درون یابی خطی تابع نیرو

$$p(\tau)=p_i+\left(\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\right)\tau$$

جزئیات حالت بدون میرایی ارائه می شود . جواب کلی از سه قسمت تشکیل شده است :

نیروی ثابت p_i بدون شرایط اولیه + شرایط اولیه بدون نیرو (ارتعاش آزاد) + نیروی خطی $\left(\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\right)\tau$ بدون شرایط اولیه (جزئیات دو مورد اول در حالت ۱ دیده شد و اینجا جزئیات مورد سوم) :

$$m\ddot{\bar{u}}+k\bar{u}=\left(\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\right)\tau$$

$$\left(\bar{u}(0)=\dot{\bar{u}}(0)=0 \quad ,0\langle\tau\langle\Delta t_i\right)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$\bar{u}_p=\frac{1}{k}\left(\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\right)\tau \quad \text{و} \quad \bar{u}_c=A_1\sin\omega\tau+A_2\cos\omega\tau$$

$$\bar{u}(\tau)=\bar{u}_p+\bar{u}_c=\left(\frac{\Delta p_i}{k\Delta t_i}\right)\tau+A_1\sin\omega\tau+A_2\cos\omega\tau$$

$$\bar{u}(\tau)=0\rightarrow A_2=0 \quad \text{و} \quad \dot{\bar{u}}(0)=0\rightarrow A_1=-\frac{\Delta p_i}{\omega k\Delta t_i}$$

$$\bar{u}(0)=\left(\frac{\Delta p_i}{k}\right)\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(\omega\tau-\sin\omega\tau)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- اگر $\tau = \Delta t_i$ پاسخ در لحظات t_{i+1} بدست می آید (جواب ۲ مورد اول نیز لحاظ شده است):

$$u_{i+1}=u_i\cos\omega\Delta t_i+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\sin\omega\Delta t_i+\frac{p_0}{k}(1-\cos\omega\Delta t_i)+\frac{\Delta p_i}{k}\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(\omega\Delta t_i-\sin\omega\Delta t_i)$$

$$\dot{u}_{i+1}=\omega\left\{-u_i\sin\omega\Delta t_i+\frac{\dot{u}_i}{\omega}\cos\omega\Delta t_i+\frac{p_0}{k}\sin\omega\Delta t_i+\frac{\Delta p_i}{k}\left(\frac{1}{\omega\Delta t_i}\right)(1-\cos\omega\Delta t_i)\right\}$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **روابط مربوط به درون یابی خطی تابع نیرو در حالت میرایی**

$$\begin{cases} u_{i+1}=Ap_i+Bp_{i+1}+Cu_i+D\dot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1}=A'p_i+B'p_{i+1}+C'u_i+D'\dot{u}_i \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{k}\left\{\frac{2\xi}{\omega\Delta t}+e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{1-2\xi^2}{\omega_D\Delta t}-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t-\left(1+\frac{2\xi}{\omega\Delta t}\right)\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$B=\frac{1}{k}\left[1-\frac{2\xi}{\omega\Delta t}+e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_D\Delta t}\sin\omega_D\Delta t+\frac{2\xi}{\omega\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$C = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right) \quad D = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{1}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$A' = \frac{1}{k}\left\{-\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t + \frac{1}{\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$B' = \frac{1}{k\Delta t}\left[1 - e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

$$C' = -e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right) \quad D' = e^{-\xi\omega\Delta t}\left(\cos\omega_D\Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- اگر Δt_i ثابت فرض شود ، ضرائب A تا D' یکبار محاسبه می شود . دقت روش وابسته به Δt است که هر چه کوچکتر باشد ، بهتر است . در حالت $\Delta t \le \frac{T}{10}$ جوابها قابل قبول است ، مساله در حالت خطی صادق است .

روش عددی استوار بر درون یابی تابع نیرو بصورت خطی

- **مثال –** یک سیستم معادل یکدرجه آزادی با سختی معادل $k = 40 \ {}^{ib}\!/_{in}$ و وزن $W = 38.6ib$ با شرایط اولیه صفر (سکون) تحت اثر نیروی هارمونیک $p(t)$ بصورت $p(t) = p_0 \cos \Omega t = 10 \cos 10t$ می باشد .
- جواب سیستم را برای فاصله زمانی $0 \le t \le 0.2 \quad \sec$ بدست آورید (حالت بدون میرایی $\xi = 0$) $\Delta t = 0.02 \quad \sec$ و از مبانی درون یابی خطی تابع نیرو استفاده شود . مساله را برای حالت دقیق (پاسخ از روش حل معادله دیفرانسیل حرکت) تحلیل و جوابها را مقایسه کنید .

روش عددی استوار بر درون یابی تابع نیرو بصورت خطی

$$\omega = \sqrt{{}^{k}\!/_{m}} = \sqrt{\dfrac{40}{\dfrac{38.6}{386}}} = 20 \qquad {}^{Rad}\!/_{s}$$

$A = 1.312 \times 10^{-3}$	$A' = 9.604 \times 10^{-2}$
$B = 6.613 \times 10^{-4}$	$B' = 9.868 \times 10^{-2}$
$C = 9.211 \times 10^{-1}$	$C' = -7.788$
$D = 1.947 \times 10^{-2}$	$D' = 9.211 \times 10^{-1}$

- جدول مساله مطابق ضمیمه تهیه و تنظیم می شود .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **ب – روش های عددی تحلیل دینامیکی SDF استوار بر تغییرات مختلف شتاب (گام به گام)**

- **Numerical Solution Based on Approximating Derivative**

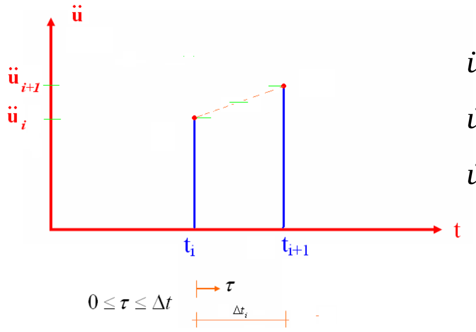
(step – by – step Numerical Integration)

- **اساس روش ها :** در یک گام زمانی ، تغییرات شتاب در حالتهای مختلف فرض می شود (ثابت ، متوسط یا خطی) و با انتگرال گیری از رابطه شتاب ، رابطه تغییر مکان حاصل می شود ،

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **۱ – روش عددی گام به گام با شتاب ثابت ابتدای گام**



$\ddot u(\tau)=\ddot u_i$ (1) انتگرال →

$\dot u(\tau)=\ddot u_i\tau + A \rightarrow \ \tau=0$ اعمال شرایط اولیه در

$\dot u(0)=\dot u_i \rightarrow A=\dot u_i \rightarrow \dot u(\tau)=\ddot u_i\tau+\dot u_i$ (2)

$\tau=\Delta t \rightarrow \dot u_{i+1}=\dot u_i+\Delta t\,\ddot u_i$ (3)

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- انتگرال رابطه (2) $\rightarrow u(\tau)=\frac{1}{2}\ddot{u}_i\tau^2+\dot{u}_i\tau+B \rightarrow \tau=0, \quad u(0)=u_i$

$$\rightarrow B=u_i \rightarrow u(\tau)=u_i+\dot{u}_i\tau+\frac{1}{2}\ddot{u}_i\tau^2 \quad (4)$$

$$\tau=\Delta t \rightarrow u_{i+1}=u_i+\Delta t\dot{u}_i+\frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i \quad (5)$$

- برای بدست آوردن $\ddot{u}_{i+1}$ و سرشکن کردن خطاها از رابطه اصلی تعادل کمک گرفته می شود :

$$m\ddot{u}_{i+1}+c\dot{u}_{i+1}+ku_{i+1}=p_{i+1} \quad (6)$$

- بجای u_{i+1} از (5) و بجای $\dot{u}_{i+1}$ از (3) قرار می دهیم :

$$\ddot{u}_{i+1}=\frac{1}{m}\left\{p_{i+1}-ku_i-(c+k\Delta t)\dot{u}_i-\left(c\Delta t+\frac{k\Delta t^2}{2}\right)\ddot{u}_i\right\}$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- ۲ – روش عددی گام به گام با شتاب متوسط

$$\ddot{u}(\tau)=\frac{1}{2}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1})$$

انتگرال $\rightarrow$ $\dot{u}(\tau)=\frac{1}{2}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1})+A_1 \rightarrow \tau=0 \quad ,\dot{u}(0)=\dot{u}_i$ اعمال شرایط اولیه

$$\rightarrow A_1=\dot{u}_i \rightarrow \dot{u}(\tau)=\dot{u}_i+\frac{1}{2}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1})\tau \rightarrow \tau=\Delta t \rightarrow$$

$$\dot{u}_{i+1}=\dot{u}_i+\frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1}) \Rightarrow \Delta\dot{u}_i=\frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1}) \quad (1)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$\dot{u}(\tau)$ انتگرال از $\longrightarrow$ $u(\tau)=\dot{u}_i\tau+\frac{1}{4}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1})\tau^2+A_2$

$$\tau=0\rightarrow u(0)=u_i\rightarrow A_2=u_i\rightarrow u(\tau)=u_i+\dot{u}_i\tau+\frac{1}{4}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1})\tau^2$$

$$\tau=\Delta t\rightarrow u_{i+1}=u_i+\dot{u}_i\Delta t+\frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1}) \qquad (2)$$

$$u_{i+1}-u_i=\Delta u_i=\dot{u}_i\Delta t+\frac{\Delta t^2}{4}(2\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1}-\ddot{u}_i)=$$

$$\dot{u}_i\Delta t+\frac{\Delta t^2}{4}(2\ddot{u}_i)+\frac{\Delta t^2}{4}\Delta\ddot{u}_i$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$\Delta\ddot{u}_i=\frac{4}{\Delta t^2}(\Delta u_i-\dot{u}_i\Delta t)-2\ddot{u}_i \qquad (3)$$

$$(2)\ \rightarrow\Delta u_i=\dot{u}_i\Delta t+\frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1})\Rightarrow$$

$$\frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1})=\frac{2}{\Delta t}(\Delta u_i-\dot{u}_i\Delta t)$$

$$(1)\ \rightarrow\Delta\dot{u}_i=\frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1})=\frac{2}{\Delta t}(\Delta u_i-\dot{u}_i\Delta t)\Rightarrow$$

$$\Delta\dot{u}_i=\left(\frac{2}{\Delta t}\right)\Delta u_i-2\dot{u}_i \qquad (4)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1}ku_{i+1} = p_{i+1}$$ و

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i ku_i = p_i$$

$$\Rightarrow m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + k\Delta u_i = \Delta p_i \qquad (5)$$

- در رابطه (5) بجای $\Delta\ddot{u}_i$ و $\Delta\dot{u}_i$ از روابط (3) و (4) استفاده می کنیم :

$$m\left[\frac{4}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{4}{\Delta t^2}\dot{u}_i\Delta t - 2\ddot{u}_i\right] + c\left[\frac{2}{\Delta t}\Delta u_i - 2\dot{u}_i\right] + k\Delta u_i = \Delta p_i$$

$$k_i^*\Delta u_i = \Delta p_i^* \qquad (6)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$k_i^* = k + \frac{2c}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2}$$

$$\Delta p_i^* = \Delta p_i + \left[\left(\frac{4m}{\Delta t}\right) + 2c\right]\dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i$$

- بنابراین از رابطه $\Delta\dot{u}_i$ مقدار $\Delta\ddot{u}_i$ و در حقیقت $\dot{u}_{i+1}$ و سپس از روابط (4) و (3) مقادیر $\Delta\dot{u}_i$ و $\Delta\ddot{u}_i$ که $\dot{u}_{i+1}$ و $\ddot{u}_{i+1}$ را ارائه می دهند ، حاصل می شوند .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- برای سرشکن کردن خطاها در هر گام می توان $\ddot{u}_{i+1}$ را از رابطه تعادل محاسبه نمود :

$$\ddot{u}_{i+1}=\frac{1}{m}\left(p_{i+1}-c\dot{u}_{i+1}-ku_{i+1}\right)$$

- روش فوق را روش $\left(\gamma=\frac{1}{2} \quad \beta=\frac{1}{4}\right)$ $NEWMARK'S \;\; \beta$ گویند .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **۳ – روش عددی گام به گام با شتاب خطی**

$$0\le\tau\le\Delta t$$

$$\ddot{u}(\tau)=\ddot{u}_i+\frac{\Delta\ddot{u}_i}{\Delta t}\tau\longrightarrow\dot{u}(\tau)=\ddot{u}_i\tau+\frac{\Delta\ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{1}{2}\tau^2+A_1$$

اعمال شرایط اولیه $\quad \dot{u}(0)=\dot{u}_i\rightarrow A_1=\dot{u}_i\rightarrow\dot{u}(\tau)=\dot{u}_i+\ddot{u}_i\tau+\frac{\Delta\ddot{u}}{2\Delta t}\tau^2$

$$m\Delta\ddot{u}_i+c\Delta\dot{u}_i+k\Delta u_i=\Delta p_i \qquad (1)$$

$$\tau=\Delta t\rightarrow\dot{u}_{i+1}=\dot{u}_i+\ddot{u}_i\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\Delta\ddot{u}_i}{\Delta t}\Delta t^2$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$\Delta\dot{u}_i = \ddot{u}_i\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\Delta\ddot{u}_i \qquad (2)$$

$\dot{u}(\tau)$ انتگرال از $\rightarrow u(\tau) = \dot{u}_i\tau + \frac{\dot{u}_i}{2}\tau^2 + \frac{\Delta\ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\tau^3}{6} + A_2$

$$u(0) = u_i \rightarrow A_2 = u_i \rightarrow u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \frac{\ddot{u}_i}{2}\tau^2 + \frac{\Delta\ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\tau^3}{6}$$

$$\tau = \Delta t \rightarrow u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\Delta t + \frac{\ddot{u}_i}{2}\Delta t^2 + \frac{\Delta\ddot{u}_i}{\Delta t}\frac{\Delta t^3}{6}$$

$$\Delta u_i = \dot{u}_i\Delta t + \ddot{u}_i\frac{\Delta t^2}{2} + \Delta\ddot{u}_i\frac{\Delta t^2}{6} \qquad (3)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

(3) از رابطه $\Rightarrow \Delta\ddot{u}_i = \frac{6}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i - 3\ddot{u}_i \qquad (4)$

- در رابطه (2) بجای $\Delta\ddot{u}_i$ از (4) $\Leftarrow$

$$\Delta\dot{u}_i = \frac{3}{\Delta t}\Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i \qquad (5)$$

- در رابطه (1) یعنی معادله جزئی حرکت بجای $\Delta\ddot{u}_i$ و $\Delta\dot{u}_i$ از معادل آنها از (4) و (5) قرار می دهیم :

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$m\left[\frac{6}{\Delta t^2}\Delta u_i - \frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i - 3\ddot{u}_i\right] + c\left[\frac{3}{\Delta t}\Delta u_i - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_1\right] + k\Delta u_i = \Delta p_i$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{k}\Delta u_i = \Delta\tilde{p}_i$$

$$\rightarrow \quad \tilde{k} = k + \frac{6}{\Delta t^2}m + \frac{3}{\Delta t}c$$

$$\Delta\tilde{p}_i = \Delta p_i + m\left[\frac{6}{\Delta t}\dot{u}_i + 3\ddot{u}_i\right] + c\left[3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right]$$

- به این روش ، روش $\left(\beta = \frac{1}{6} \quad \gamma = \frac{1}{2}\right)$ $NEWMARK'S \quad \beta$ نیز می گویند .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- در هر گام می توان مقدار c و k آن لحظه را قرارداد (برای رفتار غیر خطی) .

در این روش نیز می توان برای سرشکن کردن خطاها ، مقدار $\ddot{u}_{i+1}$ را از معادله حرکت محاسبه نمود .

مساله به Δt حساس است (از نظر پایداری و دقت) :

- **اشاره :** پایداری روش های Newmark بصورت زیر بیان می شود :

جزئیات در مباحث پیشرفته دینامیک سازه ها $\leftarrow$ $\frac{\Delta t}{T} \le \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}}$

برای حالت شتاب متوسط $\beta = \frac{1}{4} \quad \leftarrow \gamma = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\Delta t}{T} \le 0.551$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- یعنی روش شتاب متوسط به ازای هر مقدار Δt ، پایدار است ، البته در عمل مقادیر منطقی در نظر گرفته می شود .

برای حالت شتاب خطی
$$\frac{\Delta t}{T} \le 0.551 \quad \leftarrow \gamma = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{6}$$

یعنی پایداری روش مشروط است ، البته در عمل ، معمولا Δt کوچک فرض می شود و این شرط بر قرار است . برای مثال در حالت زلزله ، برای در نظر گرفتن تغییرات شتاب زلزله ثبت شده معمولا Δt برابر ۰,۰۲ یا ۰,۰۱ در نظر گرفته می شود که با توجه به پریود طبیعی سازه ها ، این Δt کمتر از ۰,۵۵۱ T خواهد بود . معمولا $\Delta t \le \frac{T}{10}$ مناسب است .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **خلاصه نتایج روش های عددی گام به گام**

۱ - روش شتاب ثابت ابتدای گام

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t \ddot{u}_i$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m}\left\{p_{i+1} - ku_i - (c + k\Delta t)\dot{u}_i - \left(c\Delta t + \frac{k\Delta t^2}{2}\right)\ddot{u}_i\right\}$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

۲ – روش شتاب متوسط

$$u_{i+1} = \left\{ p_{i+1} + m\left(\frac{4}{\Delta t^2} u_i + \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_i + \ddot{u}_i \right) \right\} \Big/ \left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k \right)$$

$$\dot{u}_{i+1} = -\dot{u}_i + \frac{2}{\Delta t}\left(u_{i+1} - u_i \right)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - u_i - \Delta t \dot{u}_i \right) - \ddot{u}_i$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

۳ – روش شتاب خطی

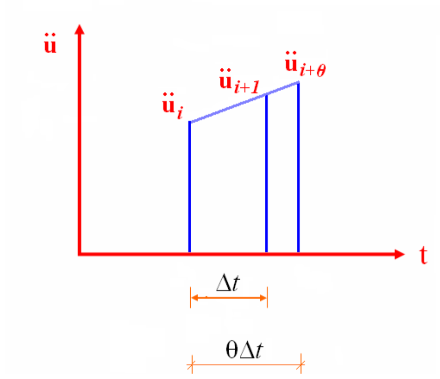
I $$u_{i+1} = \left\{ p_{i+1} + m\left(\frac{6}{\Delta t^2} u_i + \frac{6}{\Delta t} \dot{u}_i + \ddot{u}_i \right) + c\left(\frac{3}{\Delta t} u_i + 2\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \right) \right\} \Big/ \left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k \right)$$

II $$\dot{u}_{i+1} = \frac{3}{\Delta t}\left(u_{i+1} - u_i \right) - 2\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}$$

III $$\ddot{u}_{i+1} = \frac{6}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - u_i - \Delta t \dot{u}_i - \frac{\Delta t^2}{3} u \right)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **روش عددی گام به گام – Wilson**



اساس روش مشابه روش گام به گام شتاب خطی است با این تفاوت که E.L.Wilson فرض می کند شتاب در فاصله کمی بزرگتر از Δt ، خطی است $(\theta\Delta t)$. این امر برای تضمین پایداری شتاب خطی است و مقدار θ معمولا بین ۱,۴ تا ۲ در نظر گرفته می شود .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- روابط اصلی این روابط I ، II ، III از روش شتاب خطی است و فقط بجای $i+1$ از $i+\theta$ و بجای Δt از $i+\theta$ استفاده شده است .

$$\ddot{u}_{i+\theta} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}\left\{u_{i+\theta} - u_i - \theta\Delta t\dot{u}_i - \frac{(\theta\Delta t)^2}{3}\ddot{u}_i\right\} \quad \text{(a)}$$

$$\dot{u}_{i+\theta} = \frac{3}{\theta\Delta t}(u_{i+\theta}-u_i) - 2\dot{u}_i - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{u}_i \quad \text{(b)}$$

$$u_{i+\theta} = \left\{p_{i+\theta} + m\left[\frac{6u_i}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right] + c\left[\frac{3}{\theta\Delta t}u_i + 2\dot{u}_i + \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right]\right\} \Big/ \left[\frac{6m}{(\theta\Delta t)^2}+\frac{3c}{\theta\Delta t}+k\right] \quad \text{(c)}$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- چون فرض شده که شتاب بطور خطی از زمان $i\Delta t$ تا $(i+\theta)\Delta t$ تغییر می کند ، بنابراین

نیروی موثر هم فرض می شود که در این فاصله زمانی ، خطی تغییر می کند و $p_{i+\theta}$ بصورت :

$$p_{i+\theta} = p_i + \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta t}\right)\theta\Delta t = p_i(1-\theta) + p_{i+1}\theta \quad \text{(d)}$$

از رابطه (c) مقدار $u_{i+\theta}$ بدست آمده و آنرا در رابطه (a) قرار داده و $\ddot{u}_{i+\theta}$ محاسبه می شود ،

شتاب در گام زمانی معمولی Δt از رابطه زیر بدست می آید :

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{\theta} \quad \text{(e)}$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- مقدار $\dot{u}_{i+1}$ را در رابطه

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad \text{(f)}$$

و همینطور در رابطه

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t\dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{3}\ddot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6}\ddot{u}_{i+1} \quad \text{(g)}$$

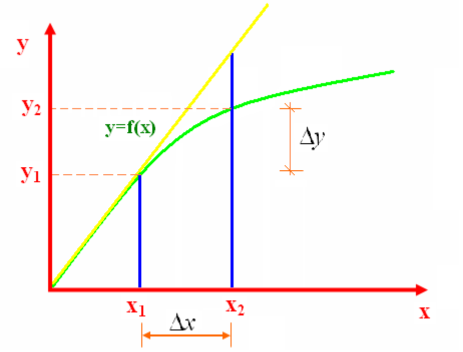
از روابط شتاب خطی قرار داده و سرعت و تغییر مکان در لحظه t_{i+1} بدست می آید .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **ج – روش عددی تحلیل دینامیکی SDF استوار بر تفاضل محدود سرعت و شتاب**

- **Central Difference Method (Finite Difference F.D.)**



یکی از روش های حل دستگاه معادله دیفرانسیل آن است که به نحوی شتاب و سرعت را بر حسب تغییر مکان بیان نمود ، در این حالت مساله دینامیکی به صورت استاتیکی تبدیل می شود .

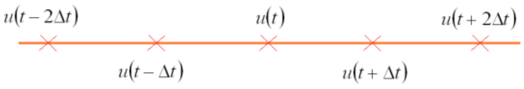
ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{ریاضیات}} \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در ریاضیات کاربردی $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cong \frac{dy}{dx}$

$$\dot{u}(t) = \underbrace{\frac{du}{dt}}_{\text{شکل مشکل برای حل}} \cong \frac{\Delta u}{\Delta t} = \underbrace{\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}}_{\text{شکل آسان برای حل}}$$



ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- تفاضل محدود پیش رونده Forward F.D.

$$\frac{du}{dt} \cong \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t = \frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}$$

- تفاضل محدود پس رونده Backward F.D.

$$\frac{du}{dt} \cong \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t = \frac{u(t)-u(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

- تفاضل محدود مرکزی Central F.D.

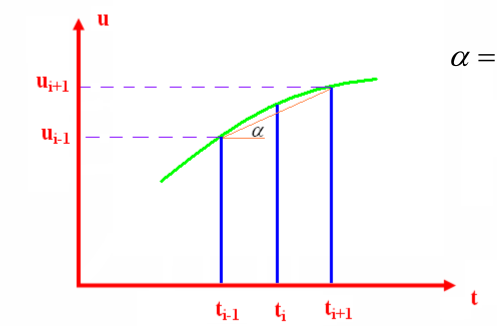
$$\frac{du}{dt} \cong \left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)_t = \frac{u(t+\Delta t)-u(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

معمولا در روش های عددی ، روش تفاضل محدود مرکزی از خطای کمتری نسبت به دو روش دیگر برخوردار است .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **جزیات روش عددی تحلیل دینامیکی SDF از طریق تفاضل محدود مرکزی با توجه به اصول**

روش تفاضل محدود مرکزی :



$$\alpha = \dot{u}_i = \frac{1}{2\Delta t}(u_{i+1}-u_{i-1}) + R \quad \text{خطا}$$ (1)

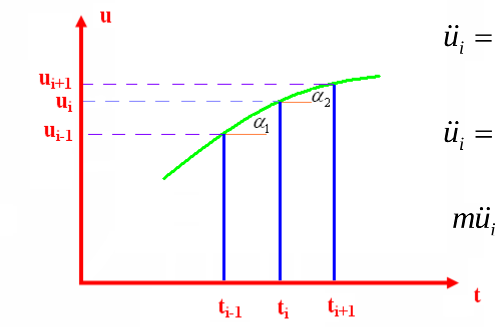
$$\alpha_1 = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t}$$

$$\alpha_2 = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t}$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$\ddot{u}_i = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\Delta t} = \text{شتاب} = \frac{\text{(سرعت)} \ \alpha \ \text{تغییرات}}{\text{زمان}}$$



$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i+1}\right) + R \quad (2)$$

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = p_i \quad (3)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- از خطا صرفنظر و از دو رابطه (1) و (2) در (3) قرار داده و u_{i+1} را محاسبه می کنیم :

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right)u_{i+1} = p + \left(-k + \frac{2m}{\Delta t^2}\right)u_i + \left(\frac{c}{2\Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2}\right)u_{i+1} \quad (4)$$

- پس از تعیین u_{i+1} از روابط (1) و (2) می توان $\dot{u}_i$ و $\ddot{u}_i$ را تعیین کرد .
- با توجه به رابطه (4) و در شروع کار ، نیاز به u_0 و u_{-1} می باشد ، روابط (1) و (2) برای

لحظه $t = 0$ نوشته شده و بطور همزمان حل می شوند تا رابطه u_{-1} حاصل شود :

$$u_{-1} = u_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0 - \Delta t\dot{u}_0 \quad (5)$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- در یک مساله واقعی ، دو پارامتراز سه پارامتر u_0 ، $\dot{u}_0$ و $\ddot{u}_0$ کافی است .
- **توجه :** در تمام روش ها ، یکی از سه رابطه اصلی بکار گرفته شده ، رابطه حرکت در لحظه t_{i+1} بوده بجز روش تفاضل محدود مرکزی که معادله حرکت در لحظه t_i بکار رفت .
- روش هایی که معادله حرکت در لحظه t_{i+1} را لازم دارند ، روش های ضمنی Implicit گویند . و روش هایی که معادله حرکت در لحظه i را دارند ، روش های صریح Explicit کویند .

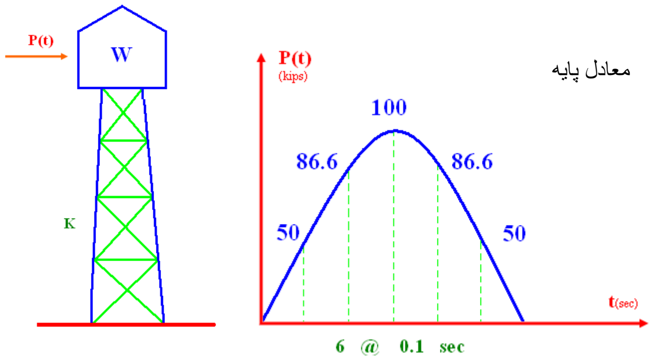
ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- در تحلیل سیستم های چند درجه آزادی ، عملیات محاسباتی بیشتری در روش ضمنی نسبت به روش صریح وجود خواهد داشت ، در ضمن روش های صریح فقط بصورت مشروط پایدار خواهند بود در حالی که برخی روش های ضمنی بصورت غیر مشروط پایدار می باشند .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **مثال –** مطلوبست تحلیل دینامیک برج آب داده شده تحت بار نصف سینوس مطابق شکل در یک ثانیه



معادل پایه $k = 100 \quad kips/in$

$\Delta t = 0.1 \quad \sec$

$W = 978.8 \quad kips$

$\xi = 10\%$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی

Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$m = \frac{W}{g} = \frac{978.8}{386.4} 2.533 \frac{kips - s^2}{in}$$

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{100}{2.533}} = 6.283 \qquad Rad/s$$

- برای مقایسه ، از ۵ روش عددی شتاب ثابت ، متوسط ، خطی ، θ ویلسون و تفاضل محدود مرکزی استفاده می شود .

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6.283} \#1 \qquad \sec$$

$$\Delta t = 0.1 = \frac{T}{10}$$

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- در فرمول ها مقدار c لازم است : $c = 2\xi\omega m = 3.183 \quad kip-s/in$

شرایط اولیه صفر است : $u_0 = \dot{u}_0 = \ddot{u}_0 = 0$

روابط اصلی ۵ روش به شرح زیر بدست می آید :

الف – روش شتاب ثابت ابتدای گام

$$u_{i+1} = u_i + 0.1\dot{u}_i + 0.005\ddot{u}_i \qquad \text{(a)}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + 0.1\ddot{u}_i \qquad \text{(b)}$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{2.533}\left(p_{i+1} - 100u_i - 13.183\dot{u}_i - 0.8183\ddot{u}_i\right) \qquad \text{(c)}$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول اول

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

ب – روش شتاب متوسط

$$1176.9u_{i+1} = p_{i+1} + 11076.9u_i + 104.5\dot{u}_i + 2.533\ddot{u}_i \qquad \text{(d)}$$

$$\dot{u}_{i+1} = 20\left(u_{i+1} - u_i\right) - \dot{u}_i \qquad \text{(e)}$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 400\left(u_{i+1} - u_i\right) - 40\dot{u}_i - \ddot{u}_i \qquad \text{(f)}$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول دوم

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

ج – روش شتاب خطی

$$1715.3u_{i+1} = p_{i+1} + 1615.3u_i + 158.35\dot{u}_i + 5.225\ddot{u}_i \quad \text{(g)}$$

$$\dot{u}_{i+1} = 30(u_{i+1} - u_i) - 2\dot{u}_i - 0.05\ddot{u}_i \quad \text{(h)}$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 600(u_{i+1} - u_i) - 60\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i \quad \text{(i)}$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول سوم

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

د – روش WILSON - θ

$\theta = 1.5$ فرض می کنیم

از روابط روش که با حروف لاتین در جزئیات آن بود استفاده می شود .

مقادیر $\theta, \Delta t, k, c, m$ را در رابطه (c) قرار می دهیم .

$$839.13u_{i+1} = p_{i+\theta} + 739.13u_i + 107.69\dot{u}_i + 5.305\ddot{u}_i$$

$p_{i+\theta}$ از رابطه (d) محاسبه می شود .

$$\ddot{u}_{i+\theta} = 266.7(u_{i+\theta} - u_i) - 40\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i$$

رابطه (a)

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$\ddot{u}_{i+1} = 0.6667\ddot{u}_{i+\theta} + 0.3333\ddot{u}_i$$ ← از رابطه (e)

- در نهایت رابطه اخیر را در معادلات (f) و (g) قرار داده :

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + 0.05(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$u_{i+1} = u_i + 0.1\dot{u}_i + 0.00333\ddot{u}_i + 0.00167\ddot{u}_{i+1}$$

نتایج حاصل برای یک ثانیه در جدول چهارم

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

هـ - روش تفاضل محدود مرکزی

مقادیر $\Delta t, k, c, m$ را در رابطه (4) قرار داده خواهیم داشت :

روابط (1) و (2) :

$$269.21u_{i+1} = p_i + 406.6u_i - 237.39u_{i-1}$$

$$\dot{u}_i = 5(u_{i+1} - u_{i-1})$$

$$\ddot{u}_i = 100(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

برای شروع از رابطه (5) مقدار u_{-1} محاسبه می شود . چون در مساله u_0 ، $\dot{u}_0$ و $\ddot{u}_0$ صفر است پس u_{-1} هم صفر است . نتایج مراحل گام به گام در یک ثانیه در جدول پنجم (توجه شود در جداول بجای i از n استفاده شده است).

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- **روابط مربوط به محاسبه نتایج دقیق تحت اثر بار نصف Sin :**

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2t_d} = \frac{2\pi}{2\times 0.6} = \frac{\pi}{0.6} = 5.236 \qquad Rad/s$$

$$p_0 = 100 \qquad kips$$

$$p(t) = p_0 \sin\Omega t = 100\sin(5.236t)$$

$$\omega = 6.283 \rightarrow \beta = \frac{\Omega}{\omega} = 0.833$$

برای $t \rangle 0.6$ (ارتعاش آزاد) باید شرایط اولیه آن در $t = 0.6$ برآورد شود .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 6.283\sqrt{1-0.1^2} = 6.2515 \qquad Rad/s$$

- **پاسخ سازه برای حالت بارگذاری (میرایی)**

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2 + (2\xi\beta)^2}\left\{\left(1-\beta^2\right)\sin\Omega t - 2\xi\beta\cos\Omega t\right\} +$$

$$\frac{p_0}{k}\frac{e^{-\xi\omega t}}{\left(1-\beta^2\right)^2 + (2\xi\beta)^2}\left\{2\xi\beta\cos\omega_D t + \frac{\Omega}{\omega_D}\left(1+\beta^2 - 2\frac{\omega_D^2}{\omega^2}\right)\sin\omega_D t\right\}$$

- در رابطه $t = 0.6$ قرار داده و $u = (t = 0.6)$ تعیین می شود .

ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم SDF به روش عددی
Numerical Evaluation of Dynamic Response of SDF

- از فرمول $u(t)$ مشتق گرفته و در لحظه $t=0.6$ سرعت $\dot{u}=(t=0.6)$ بدست می آید .

رابطه ارتعاش بصورت زیر است :

$$u(t)=e^{-\xi\omega(t-0.6)}\left\{\frac{\dot{u}(0.6)+u(0.6)\xi\omega}{\omega_D}\sin\omega_D(t-0.6)+u(0.6)\cos\omega_D(t-0.6)\right\}$$

نتایج شتاب متوسط و خطی خوب است ولی شتاب ثابت خوب نیست .

برای شتاب ثابت باید از Δt خیلی کوچکتر استفاده شود .

پایداری و خطاهای محاسباتی در روش های عددی
Stability & Computational Error of Numerical Procedures

- پایداری روش عددی یعنی الگوریتم روش طوری باشد که با تغییر کوچک در گام زمانی Δt جوابهای مساله زیاد تغییر نکند (در روش های ناپایدار به ازای برخی Δt ، جوابها اشتباه و خیلی دوراز جواب واقعی خواهد بود).
- با بررسی معیار خطا بر حسب Δt های مختلف برای یک روش عددی ، می توان شرط پایداری را تعیین نمود (روش های پایدار غیر مشروط – روش های پایدار مشروط).

روش عددی شتاب متوسط پایدار غیر مشروط – شتاب خطی و تفاضل محدود مرکزی پایدار مشروط

پایداری و خطاهای محاسباتی در روش های عددی
Stability & Computational Error of Numerical Procedures

- در سیستم های معادل یک درجه آزادی ، مساله پایداری روش عددی معمولا مطرح نیست چون Δt بطور محسوسی کوچکتر از حد پایداری خواهد بود (به دلیل T کوچک این سیستم ها).

در سیستم های چند درجه آزادی به دلیل نقش پریودهای مودهای بالاتر ، مناسب و لازم است از روش های غیر مشروط استفاده کنیم .

خطاهای محاسباتی از چند طریق وارد روش عددی می شود :

الف – Round – off error ناشی از گرد کردن اعداد تولید شده بوسیله محاسبات تکراری

$\frac{1}{5}=0.2$ و $\frac{1}{3}=0.333....$

پایداری و خطاهای محاسباتی در روش های عددی
Stability & Computational Error of Numerical Procedures

ب – Propagated error خطای نچشیدگی تولید شده در اثر جایگزینی معادله دیفرانسیل بوسیله تفاضل محدود معادل

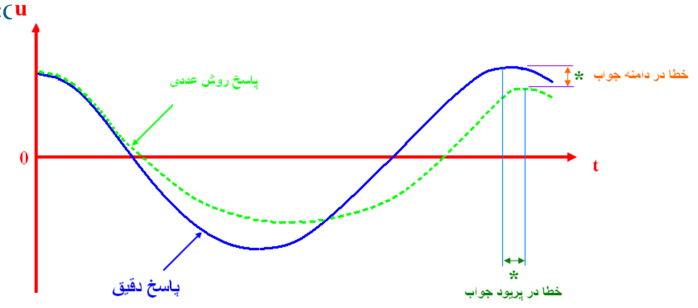
ج – Truncation error تولید شده در اثر بیان u_{i+1} یا $\dot{u}_{i+1}$ توسط تعداد محدود عبارت در بسط سری تیلور

$$u_{i+1}=\sum_{l=i-k}^{i}A_l u_l+\sum_{l=i-k}^{i+1}B_l\dot{u}_l+\sum_{l=i-k}^{i+1}C_l\ddot{u}_l+R \quad \text{خطا}$$

A_l ، B_l و C_l ضرایب ثابت که برخی صفر می شوند . در روش های عددی با توجه به الگوریتم روش ، فقط برخی از سری کلی بالا وجود دارد ، پس خطا خواهیم داشت .

پایداری و خطاهای محاسباتی در روش های عددی

Stability & Computational Error of Numerical Procec



- بطور کلی در مسائل متعارف رعایت $\Delta t \leq \frac{T}{10}$ پایداری و دقت قابل قبول را باعث می شود .

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی

Analysis of Nonlinear Response

- **از دو طریق رفتار سیستم ها از حالت خطی به غیر خطی تبدیل می شود : هندسی و فیزیکی**

تغییر مکانهای بزرگ (غیر خطی هندسی) و عدم پیروی اجزاء و مصالح از قانون هوک (غیرخطی فیزیکی).

اساس روش های تحلیل دینامیکی ، صادق بودن قانون جمع آثار قوا بوده است که در رفتار خطی مصداق دارد

و در حال حاضر تنها روش تحلیل دینامیکی برای سیستم های غیر خطی ، روش های عددی می باشد .

دلایل دیگری برای بکار گیری روش های عددی وجود دارد : اندر کنش خاک – سازه – آب ، که تحلیل در

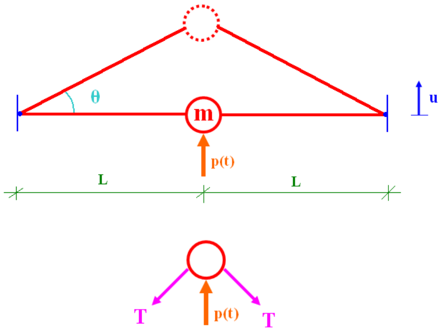
میدان فرکانس را ضروری می سازند ، ضربه های خیلی ناگهانی (انفجار) که باعث تحریک مودهای بالا

می شود و روش مناسب ، روش عددی است .

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی
Analysis of Nonlinear Response

- **مثال** – سیستم ساده جرم که توسط دو کابل کشیده نگهداشته شده هست ، معادله حرکت ؟

T_0 کشش اولیه در حالت بدون تغییر مکان ریسمان اجزاء سازه از قانون هوک پیروی می کنند :



$$\sigma = \varepsilon E$$

$$\delta = \sqrt{l^2 + u^2} - l$$ تغییر طول کابل

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l} \quad و \quad \sigma = \frac{T}{A} \Rightarrow T = \frac{EA}{l}\delta$$

$$\sum F = m\ddot{u} \rightarrow p(t) - 2T\sin\theta = m\ddot{u}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی
Analysis of Nonlinear Response

$$\sin\theta = \frac{u}{\sqrt{l^2+u^2}} \Rightarrow m\ddot{u} + 2\left\{T_0 + \frac{EA}{l}\left[\left(l^2+u^2\right)^{1/2} - l\right]\right\}\frac{u}{\sqrt{l^2+u^2}} = p(t)$$

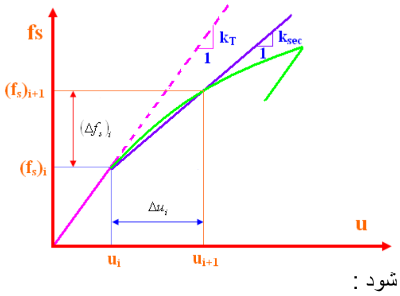
رابطه غیر خطی هندسی رفتار جرم m

اگر $u \langle\langle l$ $\quad \rightarrow m\ddot{u} + 2T_0\frac{u}{l} = p(t)$ ← رابطه خطی

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی

Analysis of Nonlinear Response

- رفتار غیر خطی فیزیکی از متغیر بودن جرم ، میرایی و سختی وارد مساله می شود . معمولا جرم با زمان تغییر نمیکند و با توجه به عدم قطعیت در تعیین دقیق میرایی ، خطی در نظر داشتن آن دور از واقعیت نخواهد بود .



بنابراین منشاء اصلی رفتار غیر خطی در سیستم های متعارف همانا عدم پیروی از قانون هوک در اجزاء ومصالح سازه خواهد بود .

این رفتار توسط مبانی علم تئوری پلاستیسیته تعیین می شود :

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی

Analysis of Nonlinear Response

- در فاصله زمانی i و $i+1$ معادله جزئی حاکم :

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + (\Delta f_s)_i = \Delta p_i \quad (1)$$

$$(\Delta f_s)_i = (k_i)_{\text{sec}}\Delta u_i \quad (2)$$

- سختی سکانت Secant Stiffness در فاصله گام زمانی به دلیل اینکه u_{i+1} مشخص نمی باشد نمیباشد نمیتواند بکار رود چون معلوم نیست . اگر فاصله زمانی Δt کوچک باشد ، می توان از سختی مماسی k_T استفاده کرد :

$$(\Delta f_s)_i \cong (k_i)_T\Delta u_i \quad (3)$$

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی
Analysis of Nonlinear Response

- بنابراین در الگوریتم روش های عددی قبلی تغییر کلی رخ نمی دهد بلکه فقط مقدار k در هر گام ثابت

نبوده و مقدار آن برابر k_T (سختی مماسی ابتدای گام) خواهد بود.

برای نمونه کلیات روش نیومارک (شتاب خطی) در این حالت بیان می شود :

از قبل داشتیم : (4)

$$\Delta u = \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6}\Delta\ddot{u}$$

$u_{i+1} = u_i + \Delta u$ و $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}$

(4) از رابطه

$$\rightarrow \Delta\ddot{u} = \frac{6}{(\Delta t)^2}\left(\Delta u - \Delta t \dot{u}_i - \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i\right) \quad (5)$$

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی
Analysis of Nonlinear Response

در روش نیو مارک

$$\rightarrow \Delta\dot{u} = \Delta t \ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\Delta\ddot{u} \quad (6)$$

که $\Delta\dot{u} = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i$ با بکار گیری (5) در (6) :

$$\Delta\dot{u} = \frac{3}{\Delta t}\Delta u - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i \quad (7)$$

حال اگر (3)، (5) و (7) را در (1) قرار دهیم :

$$\left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k_T\right)\Delta u = \Delta p + m\left(\frac{6\dot{u}_i}{\Delta t} + 3\ddot{u}_i\right) + c\left(3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right)$$

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی

Analysis of Nonlinear Response

یا $k_T^* \Delta u = \Delta p^*$ (8)

که

$$\begin{cases} k_T^* = \dfrac{6m}{\Delta t^2} + \dfrac{3c}{\Delta t} + k_T \\ \Delta p^* = \Delta p + m\left(\dfrac{6\dot{u}_i}{\Delta t} + 3\ddot{u}_i\right) + c\left(3\dot{u}_i + \dfrac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right) \end{cases}$$

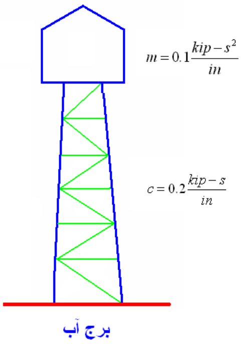
- پس از تعیین Δu از رابطه (8) ، مقدار آن را در (6) قرار داده و $\Delta\dot{u}$ محاسبه می شود . و بنابراین با داشتن Δu و $\Delta\dot{u}$ می توان u_{i+1} و $\dot{u}_{i+1}$ را تعیین نمود . مقدار شتاب می تواند از رابطه (5) یا برای سرشکن کردن خطای سختی مماسی از رابطه تعادل کلی در زمان $i+1$ تعیین شود :

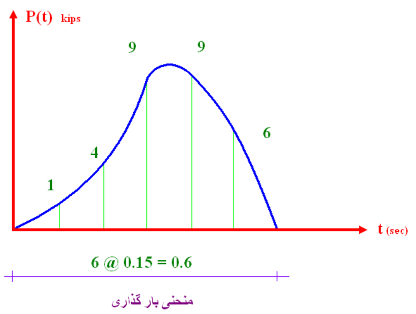
$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m}\left\{p_{i+1} - f_s(t+\Delta t) - c\dot{u}_{i+1}\right\} \quad (9)$$

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی

Analysis of Nonlinear Response

- **مثال –** برج آب با جرم m و میرایی c تحت انفجار قرار می گیرد ، منحنی رفتاری $f_s - u$ داده شده است ، مطلوبست واکنش برج در لحظه $0.8\sec$ با روش عددی شتاب متوسط ؟





تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی
Analysis of Nonlinear Response

- **حل:** از الگوریتم روش شتاب متوسط :

$$\Delta\ddot{u} = \frac{4}{\Delta t^2}\left(\Delta u - \Delta t\dot{u}_i - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_i\right)$$

$$\Delta\dot{u} = \frac{2}{\Delta t}\Delta u - 2\dot{u}_i = 20\Delta u - 2\dot{u}_i \quad \text{و} \quad k^*\Delta u = \Delta p*$$

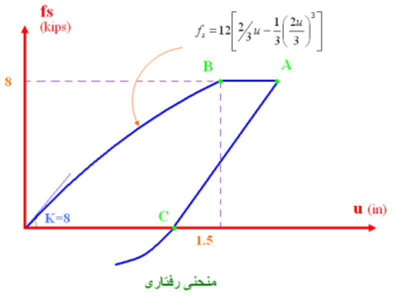
$$k* = \left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k_T\right) = 44 + k_T$$

$$\Delta p* = \Delta p + m\left(\frac{4\dot{u}_i}{\Delta t} + 2\ddot{u}_i\right) + 2c\dot{u}_i = \Delta p + 4.4\dot{u}_i + 0.2\ddot{u}_i$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{\text{اولیه}}}} = 0.702 \quad \sec \quad \text{و} \quad \Delta t = 0.1 \cong \frac{1}{7}T$$

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی
Analysis of Nonlinear Response

جدول مربوط تکمیل می شود . به نکات زیر توجه شود :

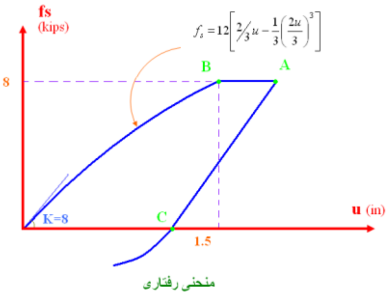


- برای in $u \rangle 1.5$ ، نیروی f_s برابر $8 \quad kips$ می باشد .
- در فاصله زمانی ۰٫۴ به ۰٫۵ تغییر مکان از ۱٫۱۱۲۸ به ۱٫۷۰۹۳ می رسد (بزرگتر از ۱٫۵) و f_s از رابطه خود به مقدار ثابت ۸ تغییر کند ولی چون Δt بزرگ است ، محل و زمان دقیق این تغییر نا مشخص است .

تحلیل دینامیکی سیستم های غیر خطی

Analysis of Nonlinear Response

- در فاصله زمانی ۰,۵ به ۰,۶ ، سرعت تغییر علامت داده ، یعنی صفر شده سپس تغییر علامت ، بنابراین سختی از صفر باید به ۸ تبدیل شود (پس از نقطه A منحنی رو به پایین است) ولی محل دقیق مشخص نیست.

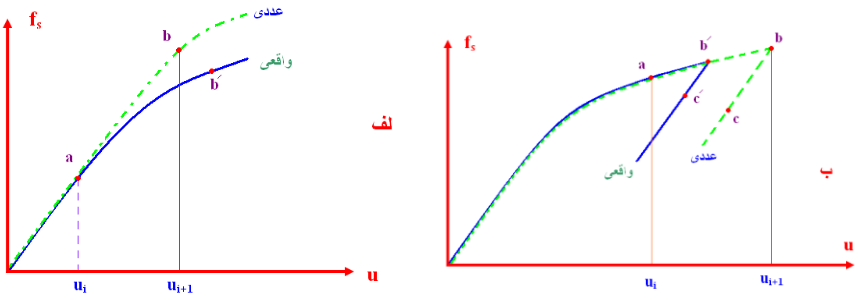


- در گام های بعد از ۰,۶ ، k_T به ۸ تغییر می کند و نیروی فنر در بخش تنزلی منحنی رفتار قرار دارد ، مثلا در ۰,۷ ثانیه :

$$f_s = 8 + 8\Delta u = 8 - 8 \times 0.3459 = 5.2328 \quad kips$$

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها

- علاوه بر خطاهای رایج روش های عددی ، خطاهای دیگری که مختص حالت غیر خطی است ، بوجود می آید (در بکار گیری سختی از رابطه و منحنی نیرو – تغییر مکان) :



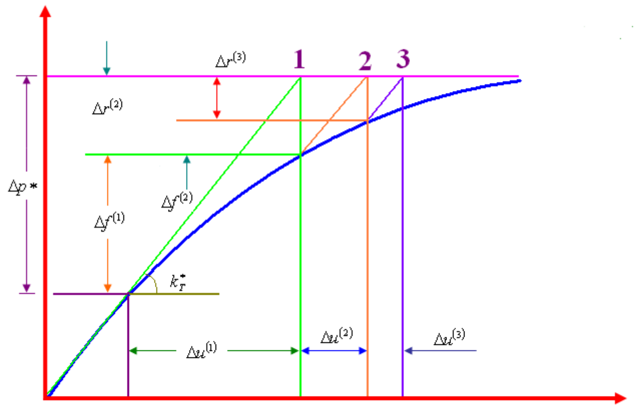
خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها

- **الف –** خطای ناشی از استفاده سختی مماسی ابتدای گام به جای سختی واقعی
- **ب –** تاخیر در آشکار سازی گذاری رابطه نیرو – تغییر مکان

برای کاهش اثر خطاهای حالت ب می توان در محل های تغییر جهت منحنی ، از Δt کوچکتر استفاده شود که معمولا از $\frac{\Delta t}{4}$ استفاده می شود (کنترل و اعمال توسط کامپیوتر) ، خطای ناشی از بکار گیری سختی مماسی با بکار گیری روش تکراری در هر گام ، می توان حداقل شود .

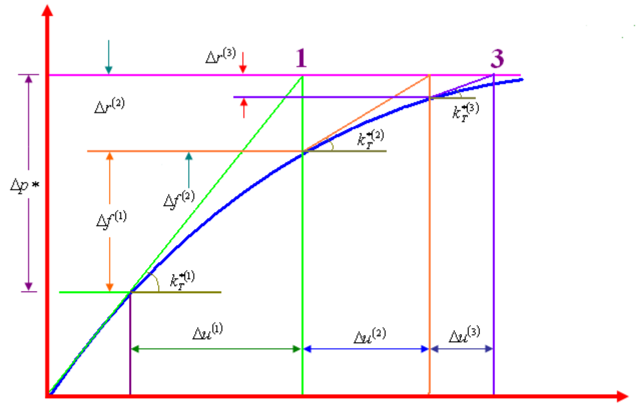
$$k_T^* = \frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k_T$$

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها



(tangent stiffness)
Modified Newton – Raphson Iteration

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها



(current tangent stiffness)
Original Newton – Raphson Method

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها

- با توجه به شکل $f_s - u$ برای خطای مورد نظر و جهت دسترسی به نقطه b' واقعی از طریق نقطه b ، روش تکراری Iteration در یک گام بکار می رود (به شرح زیر) :

رابطه 8 روش نیومارک شتاب خطی

$$k_T^* \Delta u^{(1)} = \Delta p * \quad (8)$$

در حالت غیر خطی که سختی فنر با افزایش تغییر مکان ، کاهش می یابد ، نیروی فنر معادل ناشی از تغییر مکان $\Delta u^{(1)}$ کمتر از مقداری است که رابطه 8 ارائه می دهد ، بعنوان نتیجه ، یک نیروی اضافی باقی می ماند که در شکل ملاحظه می شود و آنرا با $\Delta r^{(2)}$ نشان دادهایم . تغییر مکان اضافی در اثر این نیروی باقی مانده بصورت زیر است :

$$k_T^* \Delta u^{(2)} = \Delta r^{(2)} = \Delta p^* - \Delta f^{(1)} \quad (9)$$

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها

- از این تغییر مکان اضافی ، نیروی باقی مانده جدید پیدا شده و مساله به همین ترتیب ادامه می یابد تا همگرایی حاصل شود . مراحل تکرار در یک گام زمانی به شرح زیر است :

$$k_T^* \Delta u^{(k)} = \Delta r^{(k)}$$

$$u_{i+1}^{k} = u_{i+1}^{k-1} + \Delta u^{(k)}$$ (10)

$$\Delta f^{(k)} = f_s^{(k)} - f_s^{k-1} + \frac{6m}{\Delta t^2}\Delta u^{(k)} + \frac{3c}{\Delta t}\Delta u^{(k)} \qquad k = 1, \hat{k}$$

$$\Delta r^{k+1} = \Delta r^{(k)} - \Delta f^{(k)}$$

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها

- از رابطه (8) مشخص است که مرحله تکرار با $\Delta r^{(1)} = \Delta p *$ شروع می شود .

وقتی مراحل تکرار ، همگرا شد یعنی $\Delta u^{(k)}$ یا $\Delta r^{(k)}$ به اندازه کافی کوچک شد ، تغییر مکان کل نموی از رابطه $\Delta u = \sum_{k=1}^{\hat{k}} \Delta u^{(k)}$ حاصل می شود.

نرخ همگرایی می تواند بهتر شود چنانچه بجای سختی مماسی اولیه از جریان مماسی سختی استفاده شود که البته بر آورد سختی مماسی جدید مستلزم محاسبات بیشتر است .

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها

- **مثال –** برج آب مثال قبل مورد نظر است تحت اثر همان بار گذاری ، منتحی این بار در منحنی رفتار غیر خطی از روش تکراری استفاده شود . قسمت انتقال A نیز با دقت بیشتری بررسی شود . روش عددی شتاب متوسط بکار می رود با $\Delta t = 0.1$ که در مرحله تغییر فاز از Δt کوچکتر استفاده خواهد شد .

$$k_T^* \Delta u^{(k)} = \Delta r^{(k)} \quad \text{و} \quad u_{i+1}^{(k)} = u_{i+1}^{(k-1)} + \Delta u^{(k)}$$

$$\Delta f^{(k)} = f_s^{(k)} - f_s^{(k-1)} + \frac{4m}{\Delta t^2}\Delta u^{(k)} + \frac{2c}{\Delta t}\Delta u^{(k)}$$

$$k_T^* = \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + k_T = 44 + k_T \quad \text{که} \quad \Delta r^{(k+1)} = \Delta r^{(k)} - \Delta f^{(k)}$$

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها

و

$$\Delta p^* = \Delta p + m\left(\frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right) + 2c\dot{u}_i = \Delta p + 4.4\dot{u}_i + 0.2\ddot{u}_i$$

- نتایج ۰,۸ ثانیه و مراحل تکرار در قسمت غیر خطی در جدول ارائه شده است .
- برای نمونه مراحل مربوط به فاصله زمانی ۰,۳ تا ۰,۴ به شرح زیر خواهد بود :

$$\Delta u^{(1)} = \frac{1}{k_T^*}\Delta r^{(1)} = \frac{1}{k_T^*}\Delta p* = \frac{31.3839}{51.0968} = 0.6142$$

پس

$$u^{(1)}(0.4) = u^{(1)}(0.3) + 0.6142 = 1.1182$$

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها

$$\Delta f^{(1)} = f_s(1.1182) - f_s(0.5040) + \frac{4m}{\Delta t^2}\Delta u^{(1)} + \frac{2c}{\Delta t}\Delta u^{(1)}$$
$$= 7.2885 - 3.8803 + 44 \times 0.6142 = 30.4330$$

$$\Delta r^{(2)} = 31.3839 - 30.4330 = 0.9509$$

$$\Delta u^{(2)} = \frac{0.9509}{51.0968} = 0.0186 \rightarrow u^{(2)}(0.4) = 1.1182 + 0.0186 = 1.1368$$

$$\Delta f^{(2)} = f_s(1.1368) - f_s(1.1182) + 44 \times 0.0186$$
$$= 7.3532 - 7.2885 + 44 \times 0.0186 = 0.8831$$

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها

$$\Delta r^{(3)} = \Delta r^{(2)} - \Delta f^{(2)} = 0.9509 - 0.8831 = 0.0678$$

$$\Delta u^{(3)} = \frac{0.0678}{51.0968} = 0.0013 \rightarrow$$ و ادامه......

- بین ۰,۶ و ۰,۷ ثانیه ، سرعت از مثبت به منفی تبدیل می شود . بوسیله عملیات تکراری ، زمان $\dot{u}_i = 0$ برابر ۰,۶۰۳۳۹ ثانیه است ، بعد از این لحظه ، سختی به ۸ $kips/in$ بر می گردد .

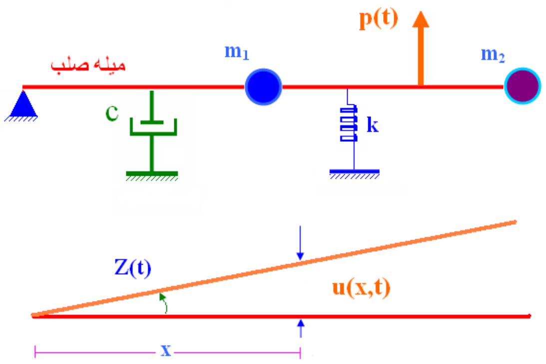
- محاسبات بین ۰,۶ و ۰,۶۰۳۳۹ با $\Delta t = 0.00339$ انجام شده است .

خطا در تحلیل غیر خطی دینامیکی سیستم ها

- بطور مشابه محاسبات بین ۰,۶۰۳۳۹ و ۰,۷ ثانیه با $\Delta t = 0.09661$ انجام گردید .
- بعد از لحظه $t = 0.60339$ ، نیروی فنر f_s در قسمت تنزلی به طرف پائین می افتد طوریکه نیروی فنر به $8\Delta u$ کاهش می یابد (در هر گام زمانی) .
- با مقایسه نتایج دو جدول در دو مثال اخیر ، ملاحظه می شود اگر در فاصله زمانی که تغییر مکان و نیرو درمنحنی رفتار ، غیر خطی است ، از روش تکراری استفاده نشود ،
- در اصلاح نتایج و ملحوظ داشتن مساله غیر خطی در محاسبات ، اشتباه قابل توجهی خواهیم داشت .

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- در حالت تقریبی (انعطاف پذیر) دقت فرکانس زاویه ای بستگی به شکل ارتعاشی مفروض خواهد داشت ،
- **سیستم زیر :** صلب $\leftarrow u(x,t) = \psi(x)z(t)$

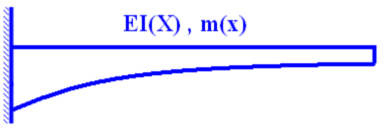


تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- **مختصات شاخص SDF :** می تواند چرخش $z(t)$ باشد

تابع تغییر شکل ، چون میله صلب ← $\psi(x) = x$

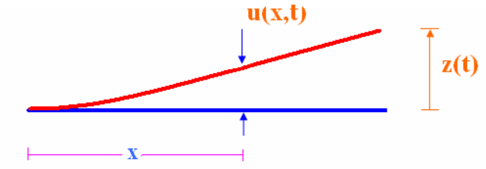
چون دو جرم متمرکز وجود دارد ← سیتم معادل SDF یک جرم مشکل است !



سیستم روبرو : جرم وسختی متغیر (انعطاف پذیر)

دارای بینهایت درجه آزادی – فرکانس اصلی (اول)

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System



در ارتعاش بسیار مهم – بطور تقریبی می توان

تابع تغییر شکل حالت ارتعاش اصلی (مود اول)

را (فقط) در نظر گرفت $\psi(x)$ و در این حالت

یک مختصات شاخص را انتخاب نمود $z(t)$ ،

مثلا انتهای تیر طره .

هر دو سیستم حالت تعمیم داده شده دارند چون تغییر مکان هر نقطه با رابطه $u(x,t) = \psi(x) z(t)$

مشخص می شود . $m^* \ddot{z} + c^* \dot{z} + k^* z = p^*(t)$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

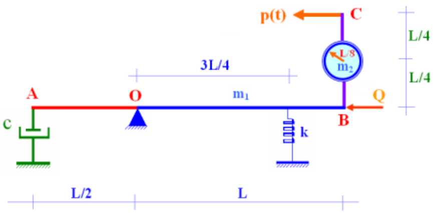
- جرم ، میرایی ، سختی و نیروی تعمیم داده شده (علامت ستاره) ، حل معادله از روش های متعارف امکان پذیر است ، مرحله اصلی تحلیل سیستم جدید تعمیم داده شده ، همانا ارزیابی مشخصات تعمیم داده شده می باشد .

حالت الف – سیستم های صلب سر هم بندی شده

- در این نوع سیستم ، اجزاء صلب همراه جرم گسترده و جرم متمرکز و سختی و میرایی متمرکز وجود دارند که تحت اثر نیروی دینامیکی قرار می گیرند ، برای تشکیل معادله حرکت ، روش قانون دوم نیوتن مشکل بوده و بهتر است از روش دالامبر استفاده شود (نیروهای اینرسی در پیکره آزاد سیستم لحاظ شوند).

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

نیروی اینرسی گسترده برای یک جسم صلب با جرم گسترده با دو مولفه جایگزین (بیان) می شود ، نیروی اینرسی ونتجه کل جرم در مرکز ثقل و ممان اینرسی جسم

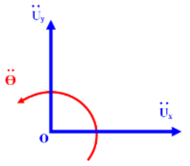


مثال – در سیستم سرهم بندی شده زیر مطلوبست تعیین:

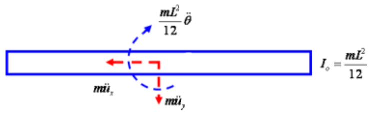
۱- معادله حرکت
۲- فرکانس طبیعی
۳- در صد میرایی
۴- پاسخ سیستم بدون میرایی تحت اثر ناگهانی نیروی p_0
۵- اصلاح معادله حرکت وقتی نیروی افقی Q در میله افقی اثر می کند .
۶- نیروی بحرانی (کمانش).

تغییر مکانها کوچک و مختصات شاخص ، چرخش حول نقطه o در نظر است .

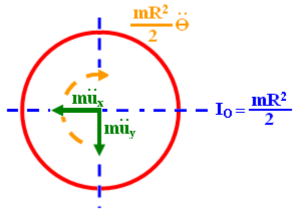
تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System



- **حل :** سیستم صلب – OA و BC بدون جرم - OB دارای جرم گسترده کل m_1



با توجه به نیروها ، نسبت به نقطه O لنگر می گیریم :



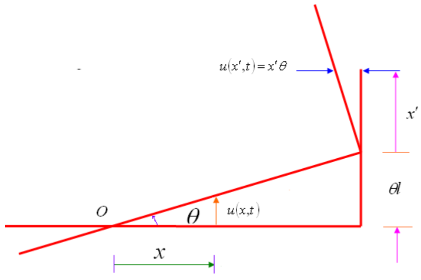
$$I_1\ddot{\theta}+\left(m_1\frac{l}{2}\theta^2\right)\frac{l}{2}+I_2\theta^2+$$

$$(m_2 l\ddot{\theta})l+\left(m_2\frac{l}{4}\ddot{\theta}\right)\frac{l}{4}+\left(c\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)\frac{l}{2}+$$

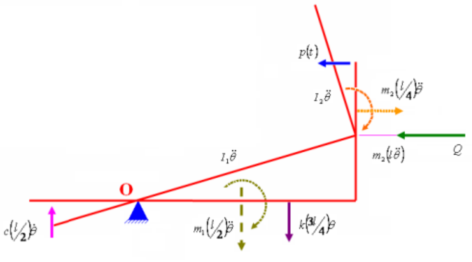
$$\left(k\frac{3l}{4}\theta\right)\frac{3l}{4}=p(t)\frac{l}{2}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

$$u(x,t)=x\theta(t)$$



(تغییر مکانها)



(نیروها)

$$I_1=m_1\,l^2/12 \quad \text{و}$$

$$I_2=m_2\,(l/8)^2/2=m_2 l^2/128$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

$$\left(\frac{m_1 l^2}{3}+\frac{137}{128}m_2 l^2\right)\ddot{\theta}+\frac{cl^2}{4}\dot{\theta}+\frac{9kl^2}{16}\theta=p(t)\frac{l}{2}$$

$$m^*\ddot{\theta}+c^*\dot{\theta}+k^*\theta=p^*(t)$$ ← معادله حرکت

$$m^*=\left(\frac{m_1}{3}+\frac{137}{128}m_2\right)l^2$$ و $$c^*=\frac{cl^2}{4}$$ و

$$k^*=\frac{9kl^2}{16}$$ و $$p^*(t)=p(t)\frac{l}{2}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

$$\omega^*=\sqrt{k^*/m^*}$$ و $$\xi=\frac{c^*}{c_{cr}}=\frac{c^*}{2m^*\omega^*}=\frac{c^*}{2\sqrt{k^*m^*}}$$

- از حل معادله حرکت :

$$p^*(t)=\frac{p(t)l}{2}=\frac{p_0 l}{2}\equiv p_0^*$$

$$\theta(t)=\frac{p_0^*}{k^*}(1-\cos\omega t)=\frac{8p_0}{9kl}(1-\cos\omega t)$$

$$u(x,t)=x\theta(t)$$ و $$u(x',t)=x'\theta(t)$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- اگر نیروی افقی Q باشد :

در لنگر گیری : $Ql\theta$

$$m^*\ddot{\theta}+c^*\dot{\theta}+\left(k^*-Ql\right)\theta=p^*(t)$$

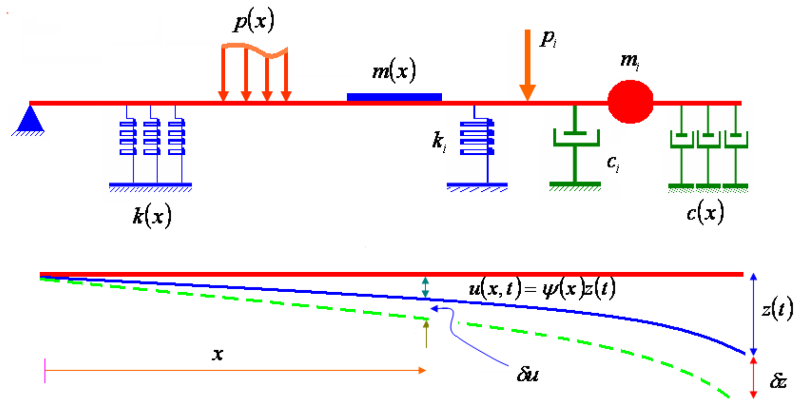
$$k^*-Ql=0$$

- نیروی افقی فشاری ، سختی را کاهش می دهد .

$$Q_{cr}=\frac{k^*}{l}=\frac{9kl}{16}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- **حالت ب – سیستم های انعطاف پذیر**



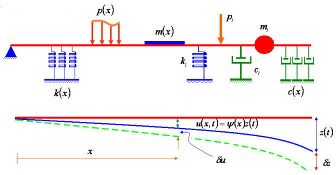
تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- سیستم با بینهایت درجه آزادی با سختی و جرم گسترده در حالت مرتعش (غیر صلب)

$$u(x,t)=\psi(x)z(t)$$

دقت مساله بستگی به تابع شکل $\psi(x)$ دارد که تا چه حدی

شرایط مرزی (هندسی) و شرایط فیزیکی را ارضاء می نماید



- **حالت کلی :**

- **کاربرد اصل کار مجازی :** کار نیروها برابر صفر

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

نیروی فنر گسترده

کار مجازی الاستیک $$W_s=-\int \overbrace{k(x)u(x,t)dx}\cdot\delta u-\sum_i k_i u_i\cdot\delta u_i$$

$$\begin{cases} u(x,t)=\psi(x)z(t)\rightarrow \delta u=\psi(x)\delta z \\ u_i=\psi_i z(t)\rightarrow \delta u_i=\psi_i\delta z \end{cases}$$

$$W_s=-\left\{\int k(x)\psi^2(x)dx+\sum_i k_i\psi_i^2\right\}z\delta z$$

کار مجازی نیروهای میرایی $$W_D=-\int c(x)\dot{u}(x,t)dx\cdot\delta u-\sum_i c_i\dot{u}_i\cdot\delta u_i$$

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t)=\psi(x)\dot{z}(t)\rightarrow \delta u=\psi(x)\delta z \\ \dot{u}_i=\psi_i\dot{z}(t)\rightarrow \delta u_i=\psi_i\delta z \end{cases}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

$$W_D = -\left\{\int c(x)\psi^2(x)dx + \sum_i c_i\psi_i^2\right\}\dot{z}\delta z$$

به همین ترتیب ، کار مجازی نیروی اینرسی :

$$W_I = -\left\{\int m(x)\psi^2(x)dx + \sum_i m_i\psi_i^2\right\}\ddot{z}\delta z$$

کار مجازی نیروهای خارجی:

$$W_p = \int p(x)dx \cdot \delta u + \sum_i p_i \delta u_i$$

$$W_p = \left\{\int p(x)\psi(x)dx + \sum_i p_i\psi_i\right\}\delta z$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- با توجه به جهت نیروها و جهت تغییر مکان مجازی و علامت کار ها ، خواهیم داشت :

$$\delta z \neq 0$$

معادله حرکت سیستم معادل SDF

$$m^*\ddot{z} + c^*\dot{z} + k^*z = p^*(t)$$

$$m^* = \int m(x)\psi^2(x)dx + \sum_i m_i\psi_i^2$$

$$c^* = \int c(x)\psi^2(x)dx + \sum_i c_i\psi_i^2$$

$$k^* = \int k(x)\psi^2(x)dx + \sum_i k_i\psi_i^2$$

$$p^* = \int p(x)\psi(x)dx + \sum_i p_i\psi_i$$

جرم ، میرایی ، سختی و نیروی موثر معادل سیستم SDF تعمیم داده شده با تابع $\psi(x)$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- برای بیان سختی معادل موثر k^* از اصول مقاومت مصالح (انرژی پتانسیل تغییر شکل) :

انرژی یا کار لنگر (ممان) :

$$V=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}dx \qquad و \qquad u''(x,t)=\frac{d^2u(x,t)}{dx^2}=\frac{M}{EI}$$

$$M=EIu'' \qquad و \qquad u''=\psi''(x)z(t)$$

$$V=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{(EI)^2}{EI}(u'')^2dx \qquad \Rightarrow$$

$$V=\frac{1}{2}\int_0^l EI(x)(\psi''(x)z(t))^2dx$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

$$V=\frac{1}{2}k^*z^2 \qquad \text{که} \qquad k^*=\int_0^l EI(x)\psi''^2(x)dx$$

سختی هندسی معادل موثر : نیروی محوری (قائم) $N \longleftarrow$ افت راس برج آب e

از مقاومت مصالح:

$$e(t)=\frac{1}{2}\int_0^l u'^2(x,t)dx$$

انرژی پتانسیل آن $V_N=-\frac{N}{2}\int_0^l u'^2(x,t)dx$

- انرژی پتانسیل نیروی N در اثر افت $e(t)$ کم می شود ← علامت منفی

اگر وزن متغیرپایه مد نظر باشد ، $N(x)$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده

Dynamic Analysis of Generalized SDF System

$$V_N = -\frac{1}{2}\int_0^l N(x)u'^2(x,t)dx = -\frac{1}{2}\int_0^l N(x)[\psi'(x)z]^2 dx$$

$$V_N = -\frac{1}{2}k_G^* z^2 \qquad \text{که} \qquad k_G^* = \int_0^l N(x)\psi'^2(x)dx$$

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^* = \int_0^l EI(x)\psi''^2(x)dx - N_{cr}\int_0^l \psi'^2(x)dx = 0$$

بحرانی (کمانش)

$$N_{cr} = \frac{\int_0^l EI(x)\psi''^2(x)dx}{\int_0^l \psi'^2(x)dx}$$

محاسبه فرکانس زاویه ای معادل موثر

$$\omega^* = \sqrt{k^*/m^*}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده

Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- **مثال –** در برج آب قبلی $EI(x)$ و $m(x)$ در طول ارتفاع ثابت فرض می شود ، مطلوبست برآورد ω^* برای توابع مختلف شکل $\psi(x)$ (جرم گسترده m).

الف – اگر از فرمول اولر در پایداری سازه ها استفاده کنیم

$$\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2l}$$

$$m^* = \int_0^l m\psi^2(x)dx = m\int_0^l \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2l}\right)^2 dx = 0.228 \qquad ml$$

$$k^* = \int_0^l EI\psi''^2(x)dx = EI\int_0^l \left(\frac{\pi^2}{4l^2}\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{l^3}$$

$$\omega^* = \sqrt{k^*/m^*} = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32l^3 \times 0.228ml}} = \frac{3.653}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- ب – اگر شکل ارتعاش برج را سهمی فرض کنیم :

$$\psi(x)=\frac{x^2}{l^2}$$

$$m^* = 0.2 \quad ml \qquad \text{و} \qquad k^* = \frac{4EI}{l^3} \qquad \text{و}$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{4EI}{l^3 \times 0.2ml}} = \frac{4.472}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

جواب دقیق از حل سیستم پیوسته :

$$\omega^* = \frac{3.517}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- در حالت ب ، $\psi(x)=\dfrac{x^2}{l^2} \longrightarrow \dfrac{d^2u}{dx^2} = z\psi'' = z\dfrac{2}{l^2}$

و $\dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{M}{EI} = z\dfrac{2}{l^2}$

- یعنی لنگر در طول ارتفاع ثابت است در صورتیکه در انتهای برج صفر و در تکیه گاه حداکثر است پس تابع مد نظر $\psi(x)$ یکی از شرایط فیزیکی را ارضاء نکرده و جواب از واقعیت دور است .

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

- **ج –** در این حالت سعی می شود با ارضاء شرایط مرزی و فیزیکی بیشتر ، به یک تابع شکل $\psi(x)$ بهتر دست یابیم . یک تابع درجه ۳ (چند جمله ای) فرض می کنیم:

چهار ضریب پس چهار شرط لازم است .

$$\psi(x)=ax^3bx^2cx+d$$

۱- تغییر مکان در تکیه گاه صفر است :

$$u=0\longrightarrow\psi(x=0)=0$$

۲- ضریب زاویه در تکیه گاه گیردار صفر است :

$$u'=0\longrightarrow\psi'(x=0)=0$$

۳- لنگر در انتهای برج صفر است :

$$u''=0\longrightarrow\psi''(x=l)=0$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

۴- همیشه در نقطه شاخص (مختصات شاخص) :

$$u(x,t)=z(t)\longrightarrow\psi(l)=1$$

اعمال شرایط

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{2l^3}$$ و

$$b=\frac{3}{2l^2}$$ و

$$c=d=0\Rightarrow$$

$$\psi(x)=-x^3/2l^3+3x^2/2l^2$$ و

$$\psi''(x)=\frac{3}{l^2}\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

$$k^* = \frac{3EI}{l^3} \quad \text{و} \quad m^* = 0.2357 \quad ml \Rightarrow$$

$$\omega^* = \frac{3.568}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

- بر آورد سختی هندسی و نیروی N_{cr}

حالت الف $\longrightarrow \psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2l} \longrightarrow k_G^* = \int_0^l N\psi'^2(x)dx$

$$k_G^* = N\int_0^l \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \left(\sin\frac{\pi x}{2l}\right)^2 dx = \frac{N\pi^2}{8l} \longrightarrow N_{cr} = 2.467\frac{EI}{l^2}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده
Dynamic Analysis of Generalized SDF System

حالت ب $\longrightarrow \psi(x) = x^2/l^2 \longrightarrow k_G^* = \frac{4}{3}\frac{N}{l} \longrightarrow N_{cr} = \frac{3EI}{l^2}$

حالت ج $\longrightarrow \psi(x) = -x^3/2l^3 + 3x^2/2l^2 \longrightarrow k^* = \frac{6}{5}\frac{N}{l} \longrightarrow N_{cr} = 2.5\frac{EI}{l^2}$

حالت واقعی $\longrightarrow N_{cr} = 2.67\frac{EI}{l^2}$

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله
Rayleigh's Method for ω

- در سال ۱۸۷۳ با استفاده از اصل بقای انرژی ، روش ساده برای برآورد ω (ارتعاش آزاد)

- **الف – سیستم جرم وفنر (سختی و جرم موثر معادل)**

$$u(t)=u_0\sin\omega t$$

$$\dot{u}(t)=u_0\cos\omega t \qquad \text{و} \qquad u_{\max}=u_0 \qquad \text{و} \qquad \dot{u}_{\max}=u_0\omega$$

حداکثر انرژی پتانسیل

$$V_{\max}=\frac{1}{2}ku_{\max}^2=\frac{1}{2}ku_0^2$$

حداکثر انرژی جنبشی

$$T_{\max}=\frac{1}{2}m\dot{u}_{\max}^2=\frac{1}{2}mu_0^2\omega^2$$

$$T_{\max}=V_{\max}\Rightarrow \qquad \omega^2=k/m$$

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله
Rayleigh's Method for ω

- **ب – سیستم با جرم و سختی گسترده بطول L**

$$u(x,t)=\psi(x)z(t)$$

$$z(t)=z_0\sin\omega t$$ تغییر مکان نقطه شاخص

$$u(x,t)=\psi(x)z_0\sin\omega t\longrightarrow u_{\max}=\psi(x)z_0$$

$$\dot{u}(x,t)=\psi(x)z_0\cos\omega t\longrightarrow \dot{u}_{\max}=\psi(x)z_0\omega$$

$$u''(x,t)=\psi''(x)z_0\sin\omega t\longrightarrow u''_{\max}=\psi''(x)z_0$$

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله
Rayleigh’s Method for ω

انرژی پتانسیل $$V = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)u''^2 dx \longrightarrow V_{\max} = \frac{1}{2} z_0^2 \int_0^l EI(x)\psi''^2(x)dx$$

انرژی جنبشی $$T = \frac{1}{2}\int_0^l m(x)\dot{u}^2 dx \longrightarrow T_{\max} = \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 \int_0^l m(x)\psi^2(x)dx$$

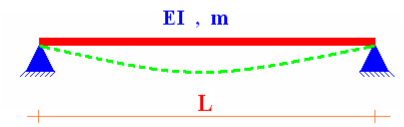
$$T_{\max} = V_{\max} \longrightarrow$$

$$\omega^2 = \int_0^l EI(x)\psi''(x)dx \Big/ \int_0^i m(x)\psi^2(x)dx = k^*/m^*$$

- خرج قسمت رایله **Rayleigh’ quotient**

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله
Rayleigh’s Method for ω

- **مثال –** مطلوبست تعیین ω یک تیر ساده خمشی به روش رایله ؟ مود اصلی مد نظر است .



- الف – $\psi(x) = \sin \pi x / l$
- ب - $\psi(x) = \dfrac{x}{l}\left(\dfrac{x}{l} - 1\right)$

- الف – $\psi''(x) = \dfrac{2}{l^2}$ و

$$V_{\max} = \frac{1}{2} z_0^2 EI \int_0^l \left(\frac{2}{l^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2} z_0^2 \frac{4EI}{l^3}$$

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله
Rayleigh's Method for ω

$$T_{\max}=\frac{1}{2}z_0^2\omega^2 m\int_0^l\left[\frac{x}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right)\right]^2dx=\frac{1}{2}z_0^2\omega^2\frac{ml}{30}$$

$$T_{\max}=V_{\max}\longrightarrow\omega=\frac{10.95}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

- ب -

$$\psi(x)=\sin\frac{\pi x}{l}\longrightarrow\psi'(x)=\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\longrightarrow\psi''(x)=-\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$V_{\max}=\frac{1}{2}z_0^2EI\int_0^l\left(-\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right)^2dx=\frac{1}{2}z_0^2EI\frac{\pi^4}{l^4}\int_0^l\sin^2\frac{\pi x}{l}dx$$

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله
Rayleigh's Method for ω

$$T_{\max}=\frac{1}{2}z_0^2\omega^2 m\int_0^l\sin^2\frac{\pi x}{l}dx$$

$$T_{\max}=V_{\max}\longrightarrow EI\,\pi^4/l^4=\omega^2 m\longrightarrow\omega=\frac{9.87}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

- انتخاب تابع شکل $\psi(x)$ - پیشنهاد رایله

$f_I+f_s=0$ ارتعاش آزاد بدون میرایی

تشریح حالات : تغییر مکان u در اثر اعمال نیروی اینرسی :

$$m\ddot{u}=-ku$$

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله
Rayleigh's Method for ω

$$u(x,t)=\psi(x)z(t)\longrightarrow$$

$$f_I=-m(x)\psi(x)z_0\omega^2\sin\omega t$$

$f_I \quad \alpha \quad m(x) \quad \psi(x)$ دقت نتایج بستگی به درستی $\psi(x)$ دارد.

- **پیشنهاد رایله :** فرض میکنیم شکل تغییر مکان تحت اثر وزن سیستم بوجود می آید : mg

با اینکار پارامتر اصلی (جرم) اثر کرده و شرایط تکیه گاهی نیز ارضاء می شود .

- **اساس روش رایله :** نیرو $p(x)\xrightarrow{\text{باعث}}u(x)$ تغییر مکان

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله
Rayleigh's Method for ω

حداکثر انرژی پتانسیل حاصل $V_{\max}=\frac{1}{2}\int_0^l p(x)u_{\max}(x)dx$

و $u(t)=u_0\sin\omega t\longrightarrow u_{\max}=u_0$

$$\dot{u}(t)=u_0\omega\cos\omega t\longrightarrow\dot{u}_{\max}=u_0\omega$$

حداکثر انرژی جنبشی $T_{\max}=\frac{1}{2}\int_0^l m\dot{u}_{\max}^2dx=\frac{1}{2}\int_0^l mu_{\max}^2\omega^2dx$

$$T_{\max}=V_{\max}\longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_0^l mu_{\max}^2\omega^2dx=\frac{1}{2}\int_0^l p(x)u_{\max}dx$$

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله

Rayleigh's Method for ω

فرض رایله $p(x) = m(x)g \quad \Rightarrow$

$$\frac{\omega^2}{2}\int_0^l m(x)u^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^l m(x)gu(x)dx$$

$$\omega^2 = \frac{g\int_0^l m(x)u(x)dx}{\int_0^l m(x)u^2(x)dx} = \frac{g\int_0^l m(x)\psi(x)dx}{z_0\int_0^l m(x)\psi^2(x)dx}$$

- در حالت سیستم با جرم های متمرکز (قاب های برشی) داریم :

$$\omega^2 = \frac{g\sum_{i=1}^{n} m_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i u_i^2}$$

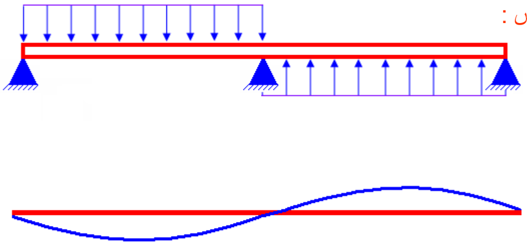
تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله

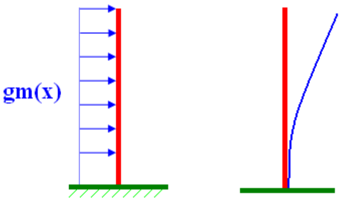
Rayleigh's Method for ω

- **توجه :** در فرض رایله ، وزن گسترده یا متمرکز در جهت ارتعاش و بصورتی که باعث تغییر شکل

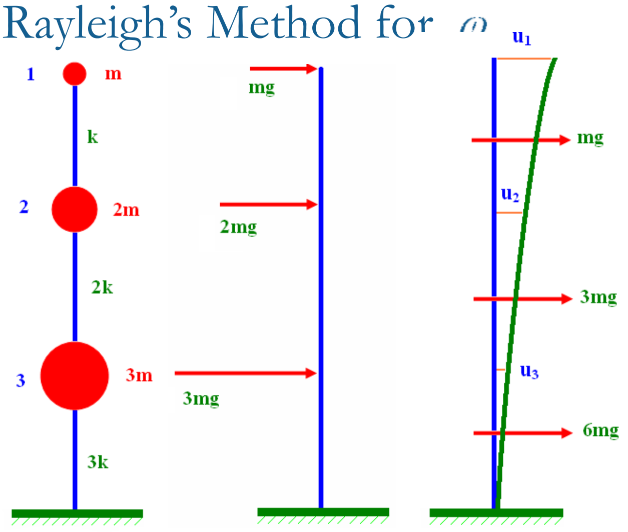
در مود ارتعاشی مورد نظر باشد ، در نظر گرفته می شود .

رعایت شرایط مرزی و سازگاری و شکل ارتعاش :





تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله
Rayleigh's Method for ω



- مثال :

مطلوبست تعیین ω اصلی سیستم سه جرمی روبرو؟

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله
Rayleigh's Method for ω

$$\Delta u_3 = \frac{F_3}{k_3} = \frac{6mg}{3k}$$

$$u_3 - u = u_3 = \frac{2mg}{k}$$

(u زمین = صفر)

$$\Delta u_2 = u_2 - u_3 = \frac{F_2}{k_2} = \frac{3mg}{2k}$$

$$u_2 = \frac{3mg}{2k} + \frac{2mg}{k} = \frac{7mg}{2k} = 3.5\frac{mg}{k}$$

$$\Delta u_1 = u_1 - u_2 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{mg}{k} \rightarrow u_1 = \frac{mg}{k} + \frac{3.5mg}{k} = 4.5\frac{mg}{k}$$

تعیین فرکانس زاویه ای بوسیله روش رایله

Rayleigh's Method for ω

$$\omega^2 = \frac{g\sum_1^3 m_i u_i}{\sum_1^3 m_i u_i^2} = \frac{g \times \left(\frac{mg}{k}\right)(1\times 4.5 + 2\times 3.5 + 3\times 2)}{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 (1\times 4.5^2 + 2\times 3.5^2 + 3\times 2^2)} =$$

$$\frac{k}{m}\frac{17.5}{56.25} = 0.312 \quad {k}/{m} \longrightarrow \omega = 0.56\sqrt{{k}/{m}}$$

روش رایله اصلاح شده

- یک روش ساده با تکرار مراحل (Iteration) و مناسب برای ساختمانهای برشی
- فرض تغییر مکان اولیه برای شکل ارتعاشی یا محاسبه آن از طریق اعمال وزن سازه : $u^{(0)}(x,t)$

$$V_{\max}^{(0)} = \frac{1}{2}\int EI(x) u^{(0)''} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\sum k_i \Delta u_i^{(0)^2}$$

$$T_{\max}^{(0)} = \frac{1}{2}\int m(x)\dot{u}^{(0)^2} dx = \frac{1}{2}\omega^2 \int m(x) u^{(0)^2} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i u^{(0)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{\max}^{(0)} = V_{\max}^{(0)} \\ \\ \omega_{R00} \ \text{معلوم} \end{array}\right\}$$

روش رایله اصلاح شده

- $p_i^{(0)} = k_i u_i^{(0)}$ نیرویی که باعث ایجاد تغییر مکان $u^{(0)}$ می شود .

$$k_i = m_i \omega^2 \longrightarrow p_i^{(0)} = m_i \omega^2 u_i^{(0)}$$

- تحت اثر نیروی اخیر ، تغییر مکان جدید را محاسبه می کنیم $u_i^{(1)}$ و سپس انرژی پتانسیل جدید

$$V_{\max}^{(1)} = \frac{1}{2}\int p^{(0)} u^{(1)} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\sum p_i^{(0)} u_i^{(1)}$$

$$V_{\max}^{(1)} = T_{\max}^{(0)} \longrightarrow \omega_{R01} \quad \text{معلوم}$$

روش رایله اصلاح شده

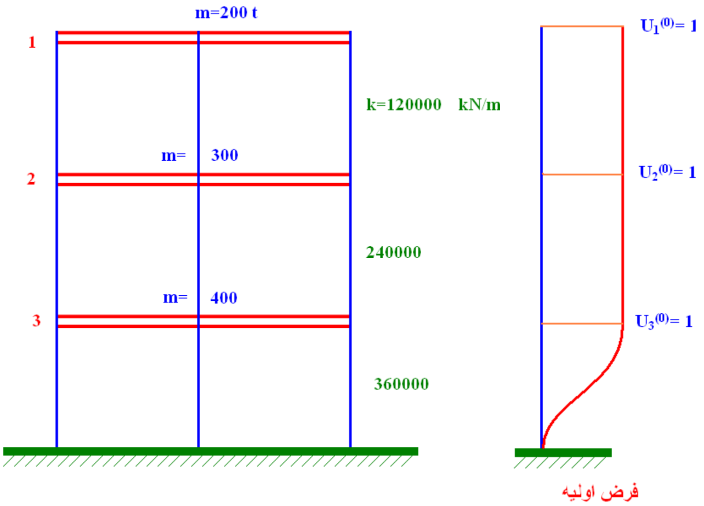
- اگر انرژی جنبشی جدید را نیز از طریق تغییر مکان جدید $u^{(1)}$ محاسبه کنیم :

$$T_{\max}^{(1)} = \frac{1}{2}\int m(x)\dot{u}^{(1)^2} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\sum m_i \, \omega^2 u_i^{(1)^2}$$

$$T_{\max}^{(1)} = V_{\max}^{(1)} \longrightarrow \omega_{R11} \ \text{معلوم} \ \xrightarrow[\text{ادامه}]{\text{به همین ترتیب}}$$

$$p_i^{(1)} = m_i \omega^2 u_i^{(1)}$$

روش رایله اصلاح شده



- **مثال :**

مطلوبست تعیین قاب سه طبقه به روش رایله اصلاح شده؟ (سقف ها صلب)

روش رایله اصلاح شده

$$u_1^{(0)}=u_2^{(0)}=u_3^{(0)}=1 \qquad \dot{u}^{(0)}=\omega u^{(0)}$$

$$T_{\max}^{(0)}=\frac{1}{2}\sum m_i \dot{u}^{(0)^2}=\frac{1}{2}\omega^2(900)$$

$$V_{\max}^{(0)}=\frac{1}{2}\sum k_i \Delta u_i^{(0)^2}=$$

$$\frac{1}{2}\left[k_1(1-1)^2+k_2(1-1)^2+k_3(1-0)^2\right]=\frac{1}{2}(360000)$$

$$T_{\max}^{(0)}=V_{\max}^{(0)} \longrightarrow$$

$$\omega^2=\frac{360000}{900}=400\longrightarrow \omega_{R00}=20 \qquad Rad/s$$

روش رایله اصلاح شده

$$p_i^{(0)} = m_i \omega^2 u_i^{(0)} \longrightarrow$$

$$p_1^{(0)} = 200\omega^2 \quad \text{و} \quad p_2^{(0)} = 300\omega^2 \quad \text{و} \quad p_3^{(0)} = 400\omega^2$$

- برش طبقات :

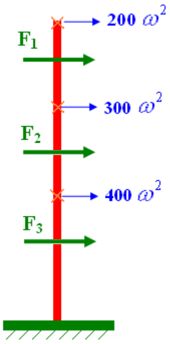
$$F_1 = 200\omega^2$$

و

$$F_2 = 500\omega^2$$

و

$$F_3 = 900\omega^2$$



روش رایله اصلاح شده

- محاسبه $u_i^{(1)}$:

$$\Delta u_3^{(1)} = u_3^{(1)} - u \longrightarrow \frac{F_3}{k_3} = u_3^{(1)} - 0$$

$$u_3^{(1)} = 900\omega^2 / 360000 = 0.0025\omega^2 \qquad \Rightarrow$$

$$u_2^{(1)} = 0.004583\omega^2 \quad \text{و} \quad u_1^{(1)} = 0.006253\omega^2$$

$$V_{\max}^{(1)} = \frac{1}{2}\sum p_i^{(0)} u_i^{(1)} = \frac{1}{2}\omega^4(3.625)$$

$$V_{\max}^{(1)} = T_{\max}^{(0)} \longrightarrow \frac{1}{2}(3.625)\omega^4 = \frac{900}{2}\omega^2 \longrightarrow \omega_{R01} = 15.75 \quad Rad/s$$

روش رایله اصلاح شده

$$T_{\max}^{(1)} = \frac{1}{2}\sum m_i \omega^2 u_i^{(1)^2} = \frac{1}{2}\omega^6 (0.01661)$$

$$T_{\max}^{(1)} = V_{\max}^{(1)} \longrightarrow \frac{1}{2}\omega^6 (0.01661) = \frac{1}{2}\omega^4 (3.625) \Rightarrow \omega_{R11} = 14.77 \quad Rad/s$$

- جوابها به سمت همگرایی میل می کند . برای دقت بیشتر می توان

$$p_i^{(1)} = m_i \omega^2 u_i^{(1)} \ldots\ldots$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- اکثر سازه ها می توانند بصورت جرم متمرکز (در یک یا چند نقطه) مدل شوند (ساختمانهای چند طبقه با کف صلب و ساختمان هایی با اجزاء تیر و ستون با جرم نا چیز) .
- بخش بزرگی از درس به تجزیه و تحلیل این نوع مدل ها پرداخته و می پردازد ، به دو دلیل :
- اول اینکه چنین مدل هایی بصورت بسیار مناسب و موثر رفتار دینامیکی سازه را بیان می دارد بویژه ساختمانهای چند طبقه و
- دوم اینکه روش های محاسباتی با کامپیوتر جهت حل معادلات دیفرانسیل معمولی حرکت این سازه ها به تعداد زیاد موجود است .

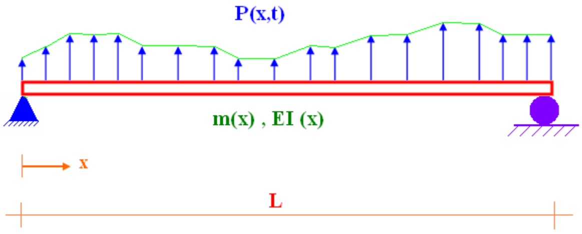
معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- با این حال برای برخی سازه ها با جرم و سختی گسترده نظیر دودکش ها ، سدهای قوسی و سازه

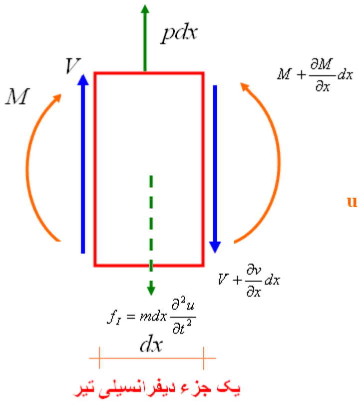
راکتورهای هستهای و ...... روش فوق مناسب نیست و باید از روش تحلیل سیستم های پیوسته کمک گرفت .

- در این بخش به مسائل یک بعدی با جرم گسترده نظیر تیرها و برج ها و تحلیل آنها پرداخته می شود .

- معادله حرکت (حالت بدون میرایی) برای نیروی اعمالی بصورت زیر بیان می شود:



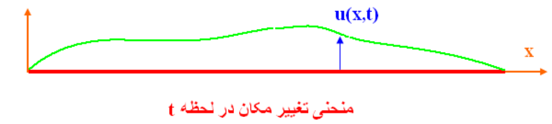
معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity



- یک تیر مستقیم با ارتعاش جانبی وبا شرایط تکیه گاهی خود ،

از تعادل نیروها در جهت قائم داریم :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = p - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$



- در رابطه روبرو ، اگر نیروی اینرسی نبود ، رابطه کلاسیک

بین برش و نیروی گسترده در تیرهای تحت بار گسترده حاصل می شد .

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- در مقاومت مصالح اگر از لنگر اینرسی مرتبط (وابسته) به شتاب زاویه ای جزء صرفنظر کنیم ،

از تعادل چرخشی المان رابطه استاندارد روبرو را داریم

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2)$$

باز هم در مقاومت مصالح اگر از تغییر شکل های برشی صرفنظر کنیم ، داریم :

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

اگر روابط (2) و (3) را در رابط (1) قرار دهیم ، معادله حاکم بر تغییر مکان (ارتعاش) جانبی $u(x,t)$ تیر حاصل می شود :

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = p(x,t) \quad (4)$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- برای حل معادله نیاز به دو شرط مرزی در هر یک از انتهای تیر و تغییر مکان و سرعت اولیه داریم .

مهمترین بخش حل معادله ، مرحله ارتعاش آزاد آن است : برای سادگی m, EI

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0 \quad (5)$$

برای حل فرض می کنیم پاسخ بصورت روبرو باشد :

$$u(x,t) = \phi(x)\cdot q(t) \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi''(x)\cdot q(t) \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi(x)\cdot q''(t) \quad (7)$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- با بکار گیری روابط (7) در (5) :

$$\phi(x)q''(t)+\frac{EI}{m}q(t)[\phi''(x)]''=0$$

$$\phi(x)q''(t)+\frac{EI}{m}\phi^{IV}(x)q(t)=0 \qquad (8)$$

$$-\frac{q''(t)}{q(t)}=\frac{EI}{m}\cdot\frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)}= \text{مقدار ثابت} =\omega^2$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- رابطه کلاسیک ارتعاش آزاد بدون میرایی :

$$\begin{cases}\ddot{q}(t)+\omega^2 q(t)=0 & (9)\\ \phi^{IV}(x)-\dfrac{m\omega^2}{EI}\phi(x)=0\end{cases} \qquad \longleftarrow \ddot{u}+\omega^2 u=0$$

و

$$\frac{m\omega^2}{EI}=\lambda^4$$

$$\phi^{IV}(x)-\lambda^4\phi(x)=0 \quad (10) \quad \text{یا} \quad [EI\phi''(x)]''-\omega^2 m\phi(x)=0$$

- از معادله (9) به ازای هر ω با توجه به شرایط اولیه ، تابع $q(t)$ مشخص خواهد شد :

$$q(t)=\frac{\dot{q}_0}{\omega_i}\sin\omega_i t+q_0\cos\omega_i t \qquad (11)$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- برای حل معادله (10)

$$\phi(x)=\bar{c}e^{sx}\longrightarrow(s^4-\lambda^4)\bar{c}e^{sx}=0$$

$$s^4-\lambda^4=0=1 \longrightarrow s=\pm\lambda \quad و \quad \pm i\lambda \Rightarrow$$

$$\phi(x)=A_1e^{i\lambda x}+A_2e^{-i\lambda x}+A_3e^{\lambda x}+A_4e^{-\lambda x}$$

یا

$$\phi(x)=B_1\cosh(\lambda x)+B_2\sinh(\lambda x)+B_3\cos\lambda x+B_4\sin\lambda x \quad (12)$$

- با اعمال شرایط مرزی در تکیه گاه ها به معادلاتی مثلثاتی خواهیم رسید که ما را به بینهایت ω هدایت خواهد کرد (سیستم پیوسته پس بینهایت درجه آزادی) .

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- بنابراین جواب ارتعاش آزاد جمع کلیه جوابها خواهد بود :

$$\omega_i\longrightarrow\phi_i(x) \quad و \quad q_i(t) \Rightarrow$$

$$u_c(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(x)q_i(t) \quad (13)$$

- با توجه به شرایط تکیه گاهی و شرایط فیزیکی در انتهای آزاد تیرها :

$\frac{d^2\phi}{dx^2}=0$	لنگر خمشی صفر	$\phi(x)=0$	تغییر مکان صفر
$\frac{d^3\phi}{dx^3}=0$	برش صفر	$\frac{d\phi}{dx}=0$	شیب صفر

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- در انتهای آزاد ، لنگر و برش صفر – در تکیه گاه گیردار ، تغییر مکان و شیب صفر – در تکیه گاه

غلتکی ، تغییر مکان و لنگر صفر پس در هر انتها به هر حال دو شرط مرزی خواهیم داشت :

- **روش ساده شده :** $\sinh \equiv sh$ و $\cosh \equiv ch$

$$ch(\lambda x)+\cos(\lambda x)=S \longrightarrow S'=\lambda(sh(\lambda x)-\sin(\lambda x))=\lambda V$$
$$sh(\lambda x)+\sin(\lambda x)=T \longrightarrow T'=\lambda(ch(\lambda x)+\cos(\lambda x))=\lambda S$$
$$ch(\lambda x)-\cos(\lambda x)=U \longrightarrow U'=\lambda(sh(\lambda x)+\sin(\lambda x))=\lambda T$$
$$sh(\lambda x)-\sin(\lambda x)=V \longrightarrow V'=\lambda(ch(\lambda x)-\cos(\lambda x))=\lambda U$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- رابطه (12) را بصورت روبرو می نویسیم :

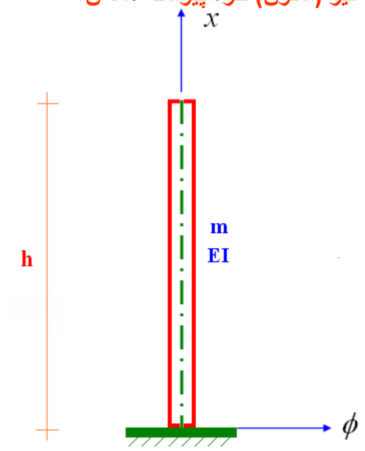
$$\phi(x)=C_1S+C_2T+C_3U+C_4V$$
$$\frac{d\phi}{dx}=C_1S'+C_2T'+C_3U'+C_4V'=\lambda(C_1V+C_2S+C_3T+C_4U)$$
$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\lambda^2(C_1U+C_2V+C_3S+C_4T)$$
$$\frac{d^3\phi}{dx^3}=\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\lambda^3(C_1T+C_2U+C_3V+C_4S)$$

با توجه به شرایط مرزی و استفاده از روابط ساده بین ضرایب C_1، C_2، C_3، C_4 می توان

این ضرایب را محاسبه نمود .

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- **مثال** – مطلوبست برآورد فرکانس های طبیعی یک تیر (ستون) طره پیوسته همگن؟



$$(\phi)_{x=0}=0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0}=0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_{x=h}=0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_{x=h}=0 \quad (4)$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- از شرایط مرزی بالا $C_1=C_2=0$ و

$$\begin{cases} C_3[ch(\lambda h)+\cos(\lambda h)]+C_4[sh(\lambda h)+\sin(\lambda h)]=0 & (5)\\ C_3[sh(\lambda h)-\sin(\lambda h)]+C_4[ch(\lambda h)+\cos(\lambda h)]=0 & (6)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ch(\lambda h)+\cos(\lambda h) & sh(\lambda h)+\sin(\lambda h)\\ sh(\lambda h)-\sin(\lambda h) & ch(\lambda h)+\cos(\lambda h)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_3\\ C_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \quad (7)$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- C_3 و C_4 نمی توانند صفر باشند چون در آنصورت ارتعاشی وجود نخواهد داشت پس دترمینان ماتریس ضرایب صفر است ، از آنجا داریم :

$$[ch(\lambda h)+\cos(\lambda h)]^2-[sh(\lambda h)+\sin(\lambda h)]\;[sh(\lambda h)-\sin(\lambda h)]=0$$

$$ch^2(\lambda h)+\cos^2(\lambda h)+2ch(\lambda h)\cos(\lambda h)-sh^2(\lambda h)+\sin^2(\lambda h)=0$$

$$1+1+2ch(\lambda h)\cos(\lambda h)=0 \longrightarrow$$

$$ch(\lambda h)\cos(\lambda h)+1=0 \quad (8)$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- از روش ساده امکان حل معادله بالا وجود ندارد پس به کمک روش عددی حل شده و داریم :

$$\lambda_i h=1.8751,\quad 4.6941,\quad 7.8548,\quad 10.996,\quad 14.137,\quad 17.279,....$$

برای $i\rangle 4$ تقریبا $\lambda_i h\cong\frac{(2n-1)\pi}{2}$ با توجه به $\omega^2=\frac{\lambda^4 EI}{m}$

$$\omega_1=\frac{3.516}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \quad و \quad \omega_2=\frac{22.03}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \quad و \quad \omega_3=\frac{61.70}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$و \quad \omega_4=\frac{120.9}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad \omega_i=\lambda_i^2\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- اگر C_3 را بر حسب C_4 بنویسیم (رابطه 5) و آنرا در رابطه (12 درس) قرار دهیم و از روابط بین ضرایب در شرایط مرزی کمک بگیریم ، تابع $\phi_i(x)$ بصورت زیر خواهد بود :

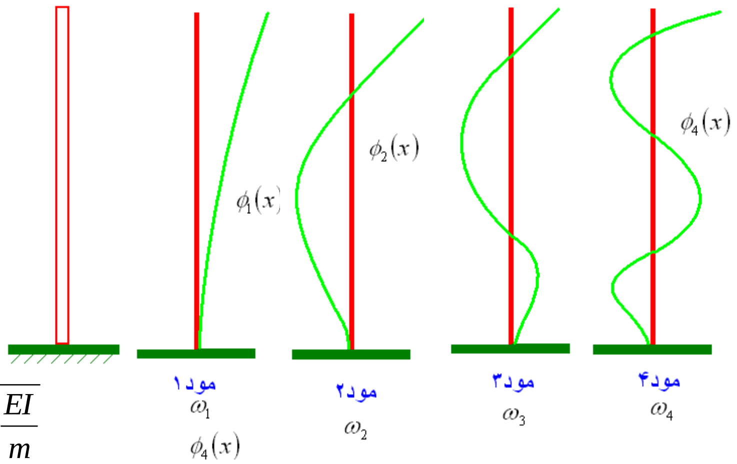
$$\phi_i(x)=C_4\left[ch(\lambda_i x)-\cos(\lambda_i x)-\frac{ch(\lambda_i h)+\cos(\lambda_i \lambda)}{sh(\lambda_i h)+\sin(\lambda_i h)}\left(sh(\lambda_i x)-\sin(\lambda_i x)\right)\right]$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

$$T=2\pi/\omega$$

$$\Rightarrow$$

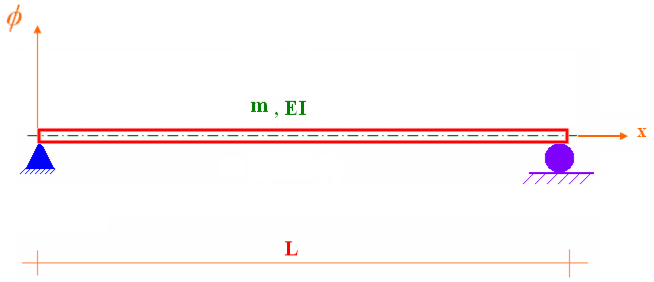
$$T_i=\frac{2\pi h^2}{(\lambda_i h)^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$



معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

- **مثال –** مطلوبست تعیین فرکانس ها و شکل تغییر مکانی ارتعاش آزاد یک تیر ساده .

در دو انته با توجه به تکیه گاه ها ، تغییر مکان و لنگر صفر است .



$$u(0)=0 \longrightarrow \phi(0)=0 \longrightarrow B_3+B_1=0$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

$$M(0)=0 \longrightarrow EI\phi''(0)=0 \longrightarrow \lambda^2(-B_3+B_1)=0 \qquad \Rightarrow$$

$$B_1=B_3=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\phi(x)=B_4\sin(\lambda x)+B_2 sh(\lambda x)$$

$$x=l \longrightarrow u(l)=0 \longrightarrow \phi(l)=0 \qquad \longrightarrow$$

$$B_4\sin(\lambda l)+B_2 sh(\lambda l)=0$$

$$M(l)=0 \longrightarrow EI\phi''(l)=0 \longrightarrow \lambda^2(-B_4\sin(\lambda l)+B_2 sh(\lambda l))=0$$

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

از جمع دو رابطه اخیر ← $B_2 sh(\lambda l)=0$ در اینحالت $sh(\lambda l)$ نمی تواند صفر شود

چون ω صفر میشود که در ارتعاش بی معنی است پس $B_2=0$ ← $B_4\sin(\lambda l)=0$

- اگر $B_4=0$ داریم $\phi(x)=0$ که معنی ندارد پس $\sin(\lambda l)=0 \Leftarrow$

→ با توجه به $\lambda^4=\dfrac{\omega^2 m}{EI}$ $\Rightarrow$ $n=1,2,3,.....$ برای $\lambda l = n\pi$

$$\omega_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \text{و} \quad n=1,2,3,.....$$

اگر $\lambda l = n\pi$ را در رابطه $\phi(x)$ بکار ببریم :

$$\phi_n(x)=B_4\sin\frac{n\pi x}{l}$$

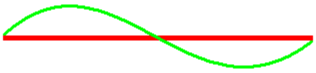
که B_4 مقدار اختیاری است

معادلات سیستم های پیوسته با جرم و سختی گسترده
Systems with Distributed Mass and Elasticity

$\phi_1(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)$

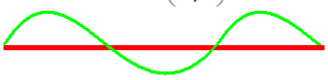
$$\omega_1=\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$ نصف سینوس

$\phi_2(x)=\sin\left(\dfrac{2\pi x}{l}\right)$



$$\omega_2=\frac{4\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}=4\omega_1$$ یک سینوس

$\phi_3(x)=\sin\left(\dfrac{3\pi x}{l}\right)$



$$\omega_3=\frac{9\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}=9\omega_1$$ یک و نیم سینوس

رابطه ارتعاش آزاد سیستم بر اساس تئوری تیر تیموشنکو

- اگر از لنگر اینرسی چرخشی تیر صرفنظر نشود و تغییر شکل حاصل از تنش برشی ملحوظ شود

(تئوری تیر تیموشنکو) ، معادله ارتعاش آزاد بصورت زیر در می آید :

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-mr^2\left(1+\frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 t^2}+\frac{m^2 r^2}{kGA}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=0$$

- G مدول ارتجاعی برشی ، $r=\sqrt{\frac{I}{A}}$ شعاع ژیراسیون مقطع ، A سطح مقطع و k ضریب شکل مقطع (مربوط به غیر یکنواخت بودن تنش برشی در مقطع) که مثلا برابر $\frac{5}{6}$ در مقطع مستطیلی و $\frac{9}{10}$ در مقطع دایروی است (مقاومت مصالح) .

رابطه تعامد مودال در سیستم های پیوسته

Modal Orthogonality

- در این بخش خاصیت عمود بودن مودهای ارتعاش آزاد در سیستم های پیوسته ملاحظه می شود ، برای سهولت بیان از یک تیر یک دهانه با انتهای مفصلی ، گیردار یا آزاد و بدون جرم متمرکز در انتها استفاده میشود ، برای شروع رابطه (10) (معادله دیفرانسیل تفکیک شده تابع شکلی ϕ) برای مود r ام بازنویسی می شود

$$\phi^{IV}(x)-\lambda^4\phi(x)=0 \quad (10) \quad \left(\frac{m\omega^2}{EI}=\lambda^4\right)$$

$$\left[EI(x)\phi_2''(x)\right]''=\omega_r^2 m(x)\phi_r(x)$$

- طرفین را در $\phi_n(x)$ ضرب نموده و از صفر تا l انتگرال می گیریم:

$$\int_0^l \phi_n(x)\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]''dx=\omega_r^2\int_0^l m(x)\phi_n(x)\phi_r(x)dx \quad (15)$$

رابطه تعامد مودال در سیستم های پیوسته
Modal Orthogonality

- طرف چپ را بصورت بخش انتگرال می گیریم (روش های انتگرال گیری) :

$$\int_0^l \phi_n(x)\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]'' dx = \left\{\phi_n(x)\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]'\right\}_0^l - \left\{\phi_n'(x)\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]\right\}_0^l + \int_0^l EI(x)\phi_n''(x)\phi_r''(x)dx \quad (16)$$

- به سادگی ملاحظه می شود ، مقادیر داخل آکولادها در $x = 0, l$ (انتهای تیر بصورت آزاد ، ساده یا گیر دار) برابر صفر هستند ، زیرا اگر گیر دار باشد داریم $\phi = 0$ و $\phi' = 0$ و اگر ساده باشد داریم $\phi = 0$ و به دلیل لنگر صفر $\phi'' = 0$ و اگر آزاد باشد ، لنگر و برش صفر پس $\phi'' = 0$ و $\phi''' = 0$

رابطه تعامد مودال در سیستم های پیوسته
Modal Orthogonality

- در این مرحله مقدار (15) را در (16) قرار می دهیم :

$$\int_0^l EI(x)\phi_n''(x)\phi_r''(x)dx = \omega_r^2 \int_0^l m(x)\phi_n(x)\phi_r(x)dx \quad (17)$$

- اینک مجددا از ابتدا شروع کرده و رابطه (10) را برای مود n ام می نویسیم و طرفین را در $\phi_r(x)$ ضرب کرده و از صفر تا l انتگرال می گیریم که مشابه حالت قبل خواهیم داشت :

$$\int_0^l EI(x)\phi_n''(x)\phi_r''(x)dx = \omega_n^2 \int_0^l m(x)\phi_n(x)\phi_r(x)dx \quad (18)$$

رابطه (17) را از رابطه (18) تفریق می کنیم :

$$\left(\omega_n^2 - \omega_r^2\right)\int_0^l m(x)\phi_n(x)\phi_r(x)dx = 0 \quad (19)$$

رابطه تعامد مودال در سیستم های پیوسته
Modal Orthogonality

- در نتیجه با توجه $\omega_n \neq \omega_r$ خواهیم داشت :

$$\int_0^l m(x)\phi_n(x)\phi_r(x)dx = 0 \qquad (20)$$

- با استفاده از رابطه (20) دررابطه (15) داریم:

$$\int_0^l \phi_n(x)\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]'' dx = 0 \qquad (21)$$

- روابط (20) و (21) روابط تعامد مودها نامیده می شوند .

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال
Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- رابطه (معادله) حرکت سیستم پیوسته را می نویسیم (رابطه (4)).

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = p(x,t)$$

- اگر سیستم را برای حالت ارتعاش آزاد حل کرده باشیم و ω_i و ϕ_i معلوم باشند جواب (واکنش) بصورت روبرو خواهد بود (رابطه (13)) :

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty}\phi_r(x)q_r(t)$$

ترکیب خطی مودها که در حقیقت جمع جوابهای حاصل از معادله دیفرانسیل است .

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال
Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- بنابراین ، پاسخ $u(x,t)$ از جمع آثار هر یک از مودهاست (ترم r ام در سری بالا مقدار مشارکت (تاثیر) مود r ام در کل پاسخ است).
- ϕ را مود و q را مختصات مودال می نامند که مجهول است . البته مجهول اصلی $u(x,t)$ است . جواب مفروض (رابطه (13)) را در معادله (4) قرار می دهیم :

$$\sum_{r=1}^{\infty} m(x)\phi_r(x)\ddot{q}_r(t)+\sum_{r=1}^{\infty}\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]'' q_r(t)=p(x,t)$$

- اینک هر ترم را در $\phi_n(x)$ ضرب و در طول تیر انتگرال می گیریم :

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال
Modal Analysis of Forced Dynamic Response

$$\sum_{r=1}^{\infty} q_r''(t)\int_0^l m(x)\phi_n(x)\phi_r(x)dx+\sum_{r=1}^{\infty} q_r(t)\int_0^l \phi_n(x)\left[EI(x)\phi_2''(x)\right]'' dx=$$
$$\int_0^l p(x,t)\phi_n(x)dx$$

- با توجه به خاصیت تعامد مود ها (روابط (20) و (21)) همه ترم ها در ترکیب عبارات سمت چپ برابر صفر است بجز ترم مربوط $r=n$ که خواهیم داشت :

$$\ddot{q}_n(t)\int m(x)\left[\phi_n(x)\right]^2 dx+q_n(t)\int_0^l \phi_n(x)\left[EI(x)\phi_n''(x)\right]'' dx=\int_0^l p(x,t)\phi_n(x)dx$$

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال

Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- که به صورت ساده روبرو می نویسیم :

$$M_n\ddot{q}_n(t)+k_nq_n(t)=p_n(t) \quad (22)$$

که

$$M_n=\int_0^l m(x)[\phi_n(x)]^2\,dx$$

$$k_n=\int_0^l \phi_n(x)[EI(x)\phi_n''(x)]''\,dx$$

$$p_n(t)=\int_0^l p(x,t)\phi_n(x)dx \quad (23)$$

- با توجه به روابط بخش خاصیت تعامد مودها :

$$k_n=\int_0^l EI(x)[\phi_n''(x)]^2\,dx \quad (24)$$

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال

Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- M_n و k_n عبارت از جرم و سختی تعمیم داده شده (generalized) برای مود nام می باشد

که رابطه کلی فرکانس میان آنها بر قرار است

$$\omega_n^2=\frac{k_n}{M_n}\longrightarrow k_n=\omega_n^2M_n \quad (25)$$

- رابطه اخیر با نوشتن معادله (14) برای مود n ام و ضرب طرفین رابطه در $\phi_n(x)$ و انتگرال گیری ازصفر تا l و استفاده از بیان M_n و k_n (روابط (23)) بدست مآید .

- $p_n(t)$ نیروی تعمیم داده شده برای مود n ام است . معادله (22) یک معادله دیفرانسیل معمولی است که مجهول آن $q_n(t)$ می باشد (مشابه SDF) و فقط به مود nام یعنی $\phi_n(x)$ ارتباط دارد .

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال
Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- بنابراین می توانیم بینهایت معادله مشابه معادله (22) برای هر یک از مودها داشته باشیم ، در حقیقت معادله معادله دیفرانسیل اولیه (معادله (4)) که بصورت Partial بود و مجهول آن $u(x,t)$ است تبدیل به بینهایت معادله دیفرانسیل معمولی (رابطه (22)) با مجهول $q_n(t)$ می شود و بصورت مجزا و کلاسیک قابل حل می باشند (با توجه به نوع بار گذاری $p(x,t)$).
- وقتی $q_n(t)$ معلوم باشد (مود n ام) می توان میزان مشارکت مود n ام در تغییر مکان $u(x,t)$ را بصورت زیر بدست آورد :

$$u_n(x,t)=\phi_n(x)q_n(t) \quad (26)$$

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال
Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- کل تغییر مکان از جمع آثار هر یک از مودها حاصل می شود

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)q_n(t) \quad (27)$$

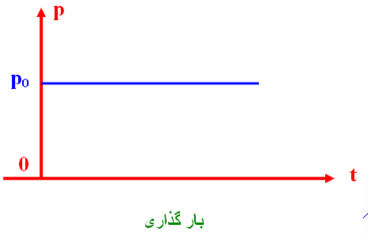
- لنگر خمشی و نیروی برشی در هر مقطع از تیر ناشی از تغییر مکان نقطه در لحظه t بصورت زیر می باشد :

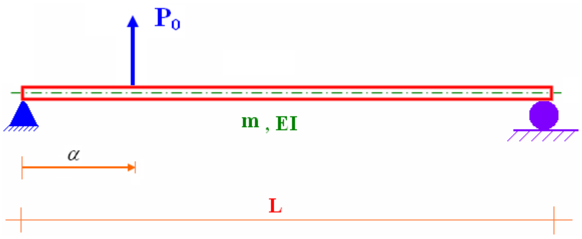
$$M(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}EI(x)\phi_n''(x)q_n(t) \quad (28)$$

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[EI(x)\phi_n''(x)\right]'q_n(t) \quad (29)$$

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال
Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- **مثال –** یک تیر ساده تحت بار گذاری داده شده مد نظر است . مطلوبست واکنش تیر (تغییر مکان و لنگر خمشی) وقتی که نیروی متمرکز در فاصله α از تکیه گاه سمت چپ اثر می کند . حالت خاص وقتی که نیرو در وسط دهانه اثر می کند .





تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال
Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- قبلا ارتعاش آزاد تیر ساده را تحلیل نموده بودیم :

$$\begin{cases} \omega_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}} \\ \phi_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{l} \end{cases} \quad \text{(a)}$$

- مقدار $\phi_n(x)$ را در روابط (23) قرار می دهیم :

$$M_n = \frac{ml}{2} \quad \text{و} \quad k_n = \frac{n^4\pi^4 EI}{2l^3} \quad \text{(b)}$$

$$p(x,t) = p_0\delta(x-a) \longleftarrow \text{دلتای دیراک } \delta(x-a) \text{ متمرکز در } \alpha$$

$$p_n(t) = p_0\phi_n(a) \quad \text{(c)}$$

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال
Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- معادله مودال nام ← $M_n\ddot{q}_n(t)+k_nq_n(t)=p_0\phi_n(\alpha)$ (d)
- قبلا حل یک سیستم SDF در بار گذاری پله ای (step) ملاحظه شده بود فقط پارامتر $u(t)$ به $q_n(t)$

و $u_{st}=p_0\phi_n(\alpha)/k_n$ حداکثر ، خواهد بود :

$$q_n(t)=\frac{p_0\phi_n(\alpha)}{k_n}(1-\cos\omega_nt)=\frac{2p_0l^3}{\pi^4EI}\frac{\phi_n(\alpha)}{n^4}(1-\cos\omega_nt) \quad (e)$$

- رابطه (e) را در معادله (27) قرار داده و توجه شود که $\phi_n(x)$ از رابطه α معلوم است ،

پس $u(x,t)$ بدست می آید .

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال
Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- در حالت خاص $\alpha=\frac{l}{2}$ مقدار را در معادله (e) قرار می دهیم سپس در رابطه (27) :

$$u(x,t)=\frac{2p_0l^3}{\pi^4EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n\left(l/2\right)}{n^4}(1-\cos\omega_nt)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (f)$$

که

$$\phi_n\left(\frac{l}{2}\right)=\begin{cases}0 & n=2,4,6,....\\ 1 & n=1,5,9,....\\ -1 & n=3,7,11,...\end{cases} \quad (g)$$

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال

Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- مقدار g را در f قرار داده :

$$u(x,t)=\frac{2p_0l^3}{\pi^4EI}\left(\frac{1-\cos\omega_1t}{1}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1-\cos\omega_3t}{81}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1-\cos\omega_5t}{625}\sin\frac{5\pi x}{l}-\frac{1-\cos\omega_7t}{2401}\sin\frac{7\pi x}{l}+\cdots\right. \qquad \text{(h)}$$

- تغییر مکان در وسط تیر:

$$u\left(\frac{l}{2},t\right)=\frac{2p_0l^3}{\pi^4EI}\left(\frac{1-\cos\omega_1t}{1}+\frac{1-\cos\omega_3t}{81}+\frac{1-\cos\omega_5t}{625}+\frac{1-\cos\omega_7t}{2401}+\cdots\right) \qquad \text{(i)}$$

- ضرایب 1 ,81 ,625 ,2401 و بقیه در مخرج کسر نشان می دهد که مشارکت و تاثیر مود اول تعیین کننده است و سری سریعا همگرا می شود .

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال

Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- لنگر خمشی از قرار دادن رابطه (h) در (28) بدست میآید:

$$M(x,t)=-\frac{2p_0l^3}{EI}\left(\frac{1-\cos\omega_1t}{1}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1-\cos\omega_3t}{9}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1-\cos\omega_5t}{25}\sin\frac{5\pi x}{l}-\frac{1-\cos\omega_7t}{49}\sin\frac{7\pi x}{l}+\cdots\right) \qquad \text{(j)}$$

- لنگر خمشی در وسط دهانه :

$$M\left(\frac{l}{2},t\right)=-\frac{2p_0l}{\pi^2}\left(\frac{1-\cos\omega_1t}{1}+\frac{1-\cos\omega_3t}{9}+\frac{1-\cos\omega_5t}{25}+\frac{1-\cos\omega_7t}{49}+\cdots\right) \qquad \text{(k)}$$

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال
Modal Analysis of Forced Dynamic Response

- در مجموعه اخیر با توجه به n^2 در مخرج کسر ، همگرایی کند است البته نسبت به رابطه که در مخرج n^4 را دارد . از این مطلب در می یابیم که مشارکت (تاثیر) مودهای بالاتر در نیرو بیشتر است نسبت به تغییر مکان .

- **توضیح مختصر در خصوص مشکلات تحلیل سیستم های پیوسته در عمل**

مشکل متغیر بودن $m(x)$ و $EI(x)$ در روابط و انتگرال گیری مشکل - ارضاء مشکل شرایط مرزی در تیرهای سرتاسری (امکان پذیر ولی پیچیده و طولانی) – گره های ارتباطی تیر و ستون در قابها

اصول تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس
Dynamic Analysis in the Frequency Domain

- **به چند دلیل ، تحلیل در حوزه فرکانسی بر تحلیل در حوزه زمانی ترجیح دارد :**

۱. در بار گذاری زلزله (تابع غیر مشخص – مشکل انتگرال دوهامل – طیف طرح – FFT)
۲. اندر کنش خاک و سازه (مدل سازی خاک – FE ، BE – امپدانس خاک)
۳. پدیده های تصادفی (آمار و احتمالات – ارتعاشات تصادفی – تحلیل ریسک)

اصول تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس
Dynamic Analysis in the Frequency Domain

- شکل نمایی سری فوریه برای بار گذاری دینامیکی (پریودیک)

$$p(t)=a_0+\sum_1^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi nt}{T_p}+\sum_1^{\infty}b_n\sin\frac{2\pi nt}{T_p}$$

$$\beta=\frac{\Omega}{\omega}=\frac{2\pi/T_p}{2\pi/T}=T/T_p$$

$$\beta_1=\frac{\Omega_1}{\omega}=T/T_p \quad \text{و} \quad \beta_2=\frac{\Omega_2}{\omega}=\frac{2\times 2\pi/T_p}{2\pi/T}=\frac{2T}{T_p}=\frac{2\Omega_1}{\omega}$$

اصول تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس
Dynamic Analysis in the Frequency Domain

$$\beta_n=\frac{\Omega_n}{\omega}=\frac{n\times 2\pi/T_p}{2\pi/T}=\frac{nT}{T_p}=\frac{n\Omega_1}{\omega}\quad\Rightarrow\quad\Omega_n=n\Omega_1$$

$$\sin\Omega_n t=\sin n\Omega_1 t=\frac{e^{in\Omega_1 t}-e^{-in\Omega_1 t}}{2i}$$

$$\cos\Omega_n t=\cos n\Omega_1 t=\frac{e^{in\Omega_1 t}+e^{-in\Omega_1 t}}{2}\quad\Rightarrow$$

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\bar{p}_n e^{in\Omega_1 t} \qquad (1)$$

ضرایب $\bar{p}_n$ مجهول است و مانند

ضرایب a_n و b_n باید معلوم شوند .

اصول تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس

Dynamic Analysis in the Frequency Domain

- خاصیت تعامد توابع اکسپونانسیل

$$\int_0^{T_p} e^{in\Omega_1 t} e^{-im\Omega_1 t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T_p & n = m \end{cases}$$

- با توجه به خاصیت تعامد ، طرفین رابطه (1) را در عبارت $e^{-im\Omega_1 t}$ ضرب و از صفر تا T_p انتگرال می گیریم :

$$\begin{cases} \bar{p}_n = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p(t) e^{-in\Omega_1 t} dt & n \text{ سایر مقادیر} \quad (2) \\ \bar{p}_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p(t) dt & n = 0 \quad (3) \end{cases}$$

تحلیل سیستم SDF در حوزه فرکانس

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}_n e^{in\Omega_1 t} \quad (4)$$

- از جواب گذرا صرفنظر می شود – برای سهولت ، جزئیات برای $n = 1$ ارائه می شود :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \bar{p}_1 e^{i\Omega_1 t}$$

- چون $\bar{p}_1$ ضریب و ثابت است (فاکتور) پس برای سهولت بیشتر در انتها در نظر گرفته می شود

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = e^{i\Omega_1 t} \longleftarrow$$

$$u(t) = \bar{H} e^{i\Omega_1 t} \quad \text{و} \quad \dot{u} = \bar{H} i\Omega_1 e^{i\Omega_1 t} \quad \text{و} \quad \ddot{u} = -\bar{H}\Omega_1^2 e^{i\Omega_1 t} \quad (i^2 = -1)$$

$$e^{i\Omega_1 t}\bar{H}\left[-\Omega_1^2 m + c\Omega_1 i + k\right] = e^{i\Omega_1 t}$$

تحلیل سیستم SDF در حوزه فرکانس

$$\bar{H}=\frac{1}{-\Omega_1^2 m+i\Omega_1 c+k}=\frac{1}{k\left(-\frac{\Omega_1^2 m}{k}+\frac{i\Omega_1 c}{k}+1\right)} \qquad e^{i\Omega_1 t}\neq 0$$

$$\beta_1=\frac{\Omega_1}{\omega} \quad \text{و} \quad \xi=\frac{c}{c_{cr}} \quad \text{و} \quad c_{cr}=2m\omega$$

$$\frac{\Omega_1 c}{k}=\frac{\Omega_1}{k}\times\frac{c}{c_{cr}}c_{cr}=\frac{\Omega_1}{k}\xi(2m\omega)=\frac{\Omega_1}{\omega^2}\xi 2\omega=2\beta_1\xi$$

$$\bar{H}(\Omega_1)=\frac{1}{k\left(-\beta_1^2+2i\beta_1\xi+1\right)}$$

تحلیل سیستم SDF در حوزه فرکانس

- در حالت کلی Ω_n :

$$\bar{H}(\Omega_n)=\bar{H}(n\Omega_1)=\frac{1}{k\left(-n^2\beta_1^2+2in\beta_1\xi+1\right)} \qquad (5)$$

- بنابراین در حالت کلی با توجه به فاکتور ثابت $\bar{p}_n$ در تابع نیرو و ترکیب بار از جملات تابع اکسپونانسیل ، جواب معادله مورد نظر بصورت زیر خواهد بود :

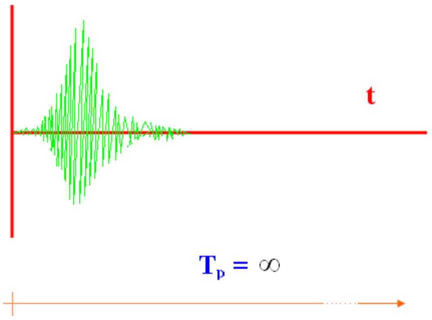
$$\bar{u}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\bar{H}(n\Omega_1)\bar{p}_n e^{in\Omega_1 t} \qquad (6)$$

رفتار سازه باید خطی باشد .

تحلیل سیستم SDF در بار گذاری غیر تناوبی – تبدیل فوریه

- **نیروهایی که تابع آنها شکل خاصی ندارد و پریودیک نمی باشند (زلزله – امواج تکی) .**
- **فرض :** یک نیروی پریودیک با زمان تناوب ∞
- تغییر متغیر زمان به فرکانس $t \longrightarrow \Omega$
- برای حل معادله دیفرانسیل تعادل دینامیکی از

تغییر متغیر استفاده می شود ، چند تعریف :



$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_P} = \Delta\Omega$$ و

تحلیل سیستم SDF در بار گذاری غیر تناوبی – تبدیل فوریه

$$n\Omega_1 = \Omega n$$

$$\overline{p}(\Omega_n) = T_p \overline{p}_n = \frac{2\pi}{\Omega_1}\overline{p}_n = \frac{2\pi}{\Delta\Omega}\overline{p}_n$$

$$\overline{p}_n = \overline{p}(\Omega_n)\frac{\Delta\Omega}{2\pi}$$

$$p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}\overline{p}_n e^{in\Omega_1 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\overline{p}(\Omega_n)e^{in\Omega_1 t}\Delta\Omega$$

$$p(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\overline{p}(\Omega_n)e^{in\Omega_n t}\Delta\Omega$$

7

تحلیل سیستم SDF در بار گذاری غیر تناوبی – تبدیل فوریه

- برای یافتن عبارت $\bar{p}(\Omega_n)$، طرفین عبارت $\bar{p}_n = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} p(t)e^{-i\Omega_n t}dt$ را که از قبل داشتیم در T_p ضرب می کنیم :

$$\bar{p}_n T_p = \bar{p}(\Omega_n) = \int_{-T_p/2}^{+T_p/2} p(t)e^{-i\Omega_n t}dt$$

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{T_p} \qquad T_p \longrightarrow \infty \quad \text{اگر} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\Omega = d\Omega$$

- Ω_n که به ازای nهای مختلف دارای مقدار منفرد (نقطه ای) بود ، حالا بصورت متغیر پیوسته ای از Ω در می آید . در ضمن شکل بیانی $p(t)$ که بصورت Σ بود ، به شکل انتگرال در می آید که به آن انتگرال فوریه می گویند : (8)

$$p(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\bar{p}(\Omega_n)e^{i\Omega_n t}\Delta\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{p}(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega \quad (8)$$

تحلیل سیستم SDF در بار گذاری غیر تناوبی – تبدیل فوریه

- که در این انتگرال فوریه مقدار $\bar{p}(\Omega)$ ←

$$\bar{p}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)e^{-i\Omega t}dt \quad (9)$$

- دو رابطه اخیر (8) و (9) را زوج تبدیل فوریه گویند .
- $\bar{p}(\Omega)$ را تبدیل فوریه $p(t)$ و $p(t)$ را تبدیل معکوس فوریه $\bar{p}(\Omega)$ می نامند .
- شرط لازم وجودی تبدیل فوریه آن است که $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt$ موجود باشد که البته اکثر توابع فیزیکی نظیر نیروها چنین خصوصیتی را دارند .
- خلاصه نتایج روش برای متغیر فرکانس $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ بصورت زیر می شود :

تحلیل سیستم SDF در بار گذاری غیر تناوبی – تبدیل فوریه

$$p(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{p}(f)e^{i(2\pi ft)}df \quad (10) \qquad \text{و} \qquad \bar{p}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(t)e^{-i(2\pi ft)}dt \quad (11)$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{H}(f)\bar{p}(f)e^{i(2\pi ft)}df \quad (12)$$

- یا بصورت دیگر :

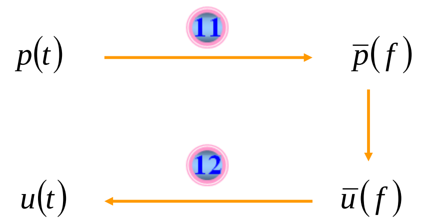
$$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{u}(f)e^{i(2\pi ft)}df \quad (13)$$

که

$$\bar{u}(f)=\bar{H}(f)\bar{p}(f) \quad (14)$$

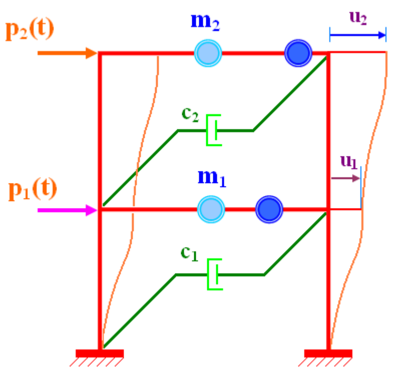
تحلیل سیستم SDF در بار گذاری غیر تناوبی – تبدیل فوریه

- تعیین انتگرال اخیر احتیاج به محاسبه انتگرال مرزی در صفحه مختلط دارد .



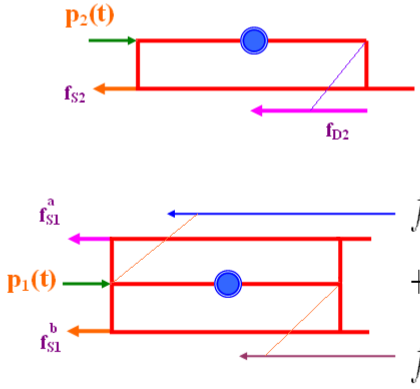
- برنامه FREQ-RESP در کتاب – در حالت زلزله برای انتگرال ها از روش عددی
- کاربرد مطالب در تهیه طیف فوریه بار گذاری (زلزله ....)

سیستم های چند درجه آزادی
Multi Degree of Freedom Systems (MDF)



- **سیستم ساده (قاب برشی دو طبقه)**
- برای سادگی فرض می شود تیرها و کف صلب هستند .
- از تغییر شکل محوری تیرها و ستون ها و از اثر نیروی محوری در سختی ستون ها صرفنظر می شود.
- رفتار خطی است .

سیستم های چند درجه آزادی
Multi Degree of Freedom Systems (MDF)



- تعداد درجات آزادی مستقل برابر دو است u_1, u_2
- قانون دوم نیوتن برای حرکت هر یک از جرم ها :

$$p_i - f_{Si} - f_{Di} = m_i \ddot{u}_i \qquad i = 1,2$$

$$f_{D1}^{a} + f_{D1}^{b} = f_{D1}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + f_{S1} + f_{D1} = p_1 \\ m_2\ddot{u}_2 + f_{S2} + f_{D2} = p_2 \end{cases}$$

سیستم های چند درجه آزادی
Multi Degree of Freedom Systems (MDF)

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

- معادله برداری حرکت MDF:

$$[m]\{\ddot{u}\}+\{f_D\}+\{f_S\}=\{p\}$$

- نیروی سختی $\{f_S\}$ بستگی به بردار تغییر مکان طبقات $\{u\}$ دارد ، سختی جانبی هر طبقه k_i که بستگی به برش طبقه V_i داشته و رابط بین آن و تغییر مکان طبقه است :

$$V_i = k_i + \Delta_i$$

- $\Delta_i = u_i - u_{i-1}$ و سختی هر طبقه (درقاب برشی) برابر سختی جانبی کل ستونهای طبقه می باشد :

سیستم های چند درجه آزادی
Multi Degree of Freedom Systems (MDF)

- نیروی سختی موثر در سقف طبقه اول از دو بخش تشکیل می شود : f_{S1}^a از طبقه بالا و f_{S2}^b از طبقه پائین :

$$k_i = \sum_{\text{ستونها}} \frac{12EI_c}{h^3}$$

$$f_{S1} = f_{S1}^b + f_{S2}^a$$

$\Delta_1 = u_1$ و $\Delta_2 = u_2 - u_1$ ⟶ $f_{S1} = k_1 u_1 + k_2(u_1 - u_2)$

- توجه شود که f_{S1}^a و f_{S2} هر دو بیان کننده برش در طبقه دوم هستند پس در مقدار مساوی ولی مختلف العلامت می باشند . پس :

$$f_{S2} = k_2(u_2 - u_1)$$

سیستم های چند درجه آزادی

Multi Degree of Freedom Systems (MDF)

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{یا} \qquad \{f_S\} = [k]\{u\}$$

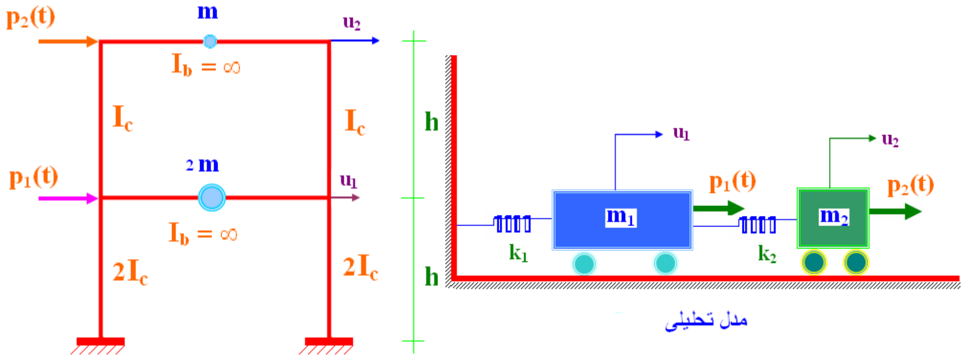
ماتریس سختی

- بطور مشابه می توان برای نیروی میرایی نیز اقدام نمود که البته به دلیل مسائل مطرح در تعیین میرایی در عمل ، معمولا بصورت در صد میرایی و در معادلات تفکیک شده اعمال می گردد .
- در نهایت معادله حرکت بصورت معادله دیفرانسیل برداری نوشته می شود که مجهولات u_1 و u_2 بوده و معادله بصورت وابسته است (coupled) که بنابراین معادله باید بصورت همزمان حل شود .

سیستم های چند درجه آزادی

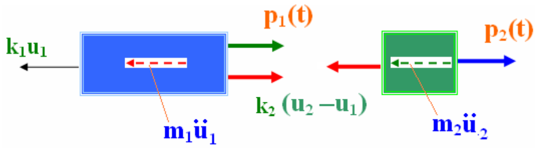
Multi Degree of Freedom Systems (MDF)

- مثال – مطلوبست تعیین معادله حرکت قاب برشی زیر ؟ مدول الاستیسیته E



سیستم های چند درجه آزادی

Multi Degree of Freedom Systems (MDF)



پیکره آزاد

$$m_1 = 2m \quad \text{و} \quad m_2 = m$$

$$k_1 = 2\frac{12(2EI_c)}{h^3} = \frac{48EI_c}{h^3}$$

$$k_2 = 2\frac{12(EI_c)}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$$

سیستم های چند درجه آزادی

Multi Degree of Freedom Systems (MDF)

$$[m] = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

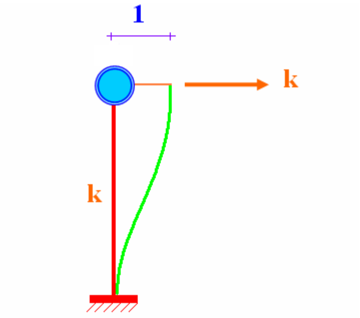
$$[k] = \frac{24EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 24\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

سیستم های چند درجه آزادی
Multi Degree of Freedom Systems (MDF)

- با استفاده از مدل جرم متمرکز ، ماتریس جرم همیشه قطری خواهد بود (قانون دوم نیوتن) .
- برای تشکیل ماتریس سختی ، چگونگی استفاده از سختی طبقه در سازه های برشی ملاحظه شد ، البته در حالت کلی از ضرایب سختی برای تشکیل ماتریس سختی استفاده می شود که در ابتدای شروع درس ، اشاراتی به آنها شد (جلسات اول درس دینامیک سازه ها) ، یاد آوری خلاصه :
- k_{ij} نیرو در درجه آزادی i وقتی تغییر مکان واحد در j اعمال می شود و سایر درجات آزادی گرفته (قفل) شده است .

سیستم های چند درجه آزادی
Multi Degree of Freedom Systems (MDF)

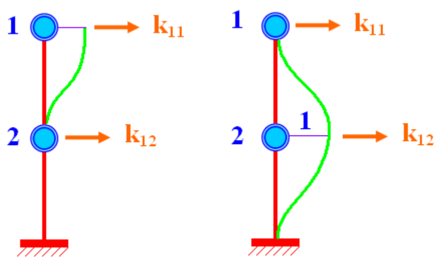


سیستم یک درجه آزادی (درجه آزادی افقی)

$$f_S = k\underbrace{(u-0)}_{\text{تغییر مکان نسبی}} = ku$$

سیستم های چند درجه آزادی

Multi Degree of Freedom Systems (MDF)



$$f_{S1} = k_{11}u_1 + k_{12}u_2$$

$$f_{S2} = k_{21}u_1 + k_{22}u_2$$

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

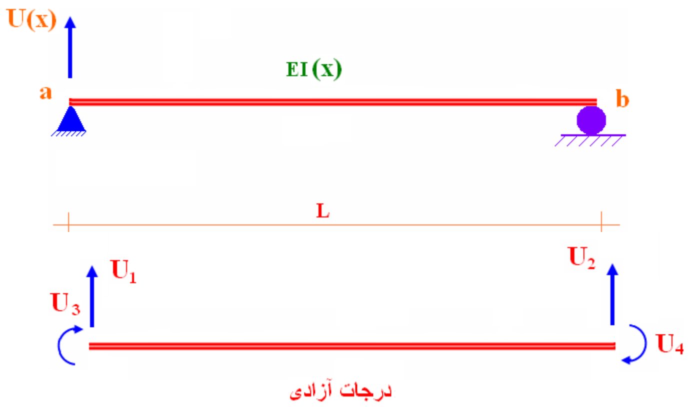
- **جزئیات تشکیل ماتریس سختی در دروس تحلیل سازه ها تشریح می شود .**

طریقه تعیین ضرایب ماتریس های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود

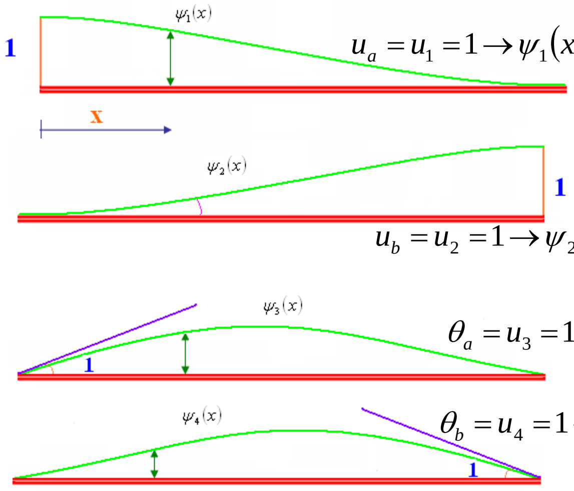
- **اساس :** شبکه بندی ، عناصر انتخابی ، گره ها ، توابع شکلی (shape function)
- $\psi(x)$ با توجه به حالت بار گذاری (صفحه یا .....) چند جمله ای هرمیتی یا لاگرانژی ......
- **خواص چند جمله ای ها :** ارضاء شرایط تغییر شکلی مورد نظر در المان مورد بررسی
- جزئیات روش اجزاء محدود در درس مربوط بوده و اینجا فقط به نحوه تعیین k_{ij} و m_{ij}

پرداخته می شود .

طریقه تعیین ضرایب ماتریس های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود



طریقه تعیین ضرایب ماتریس های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود



$$u_a = u_1 = 1 \rightarrow \psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$u_b = u_2 = 1 \rightarrow \psi_2(x) = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$\theta_a = u_3 = 1 \rightarrow \psi_3(x) = x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

$$\theta_b = u_4 = 1 \rightarrow \psi_4(x) = \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right)$$

چند جمله ای های هرمیتی

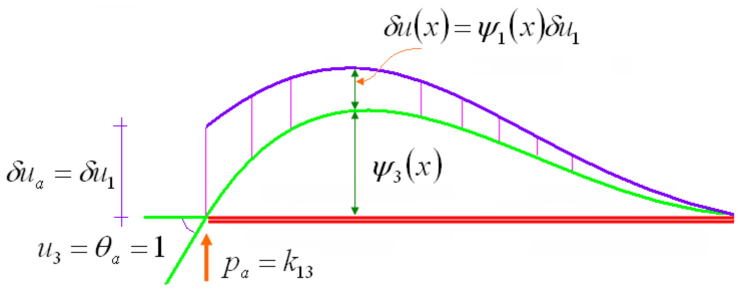
طریقه تعیین ضرایب ماتریس های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود

- در حالت کلی تغییر مکان یک نقطه از تیر بصورت زیر خواهد بود :

$$u(x)=\psi_1(x)u_1+\psi_2(x)u_2+\psi_3(x)u_4$$

- برای تعیین ضرایب می توان از روش تعادل ، انرژی ، کار مجازی استفاده کرد .
- **اینجا کار مجازی :**
- تساوی کار نیروهای خارجی با نیروهای داخلی در یک تغییر مکان مجازی
- برای نمونه جزئیات مراتب برای ضریب k_{13} ارائه می شود. نیروی قائم ایجاد شده در گره a بر اثر چرخش واحد در همان نقطه.

طریقه تعیین ضرایب ماتریس های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود



- در تیر چرخش واحد در a اعمال شده و یک تغییر مکان قائم مجازی در a در نظر می گیریم .
- تساوی کار نیروهای داخلی با کار نیروهای خارجی $k_{13}\leftarrow W_E=W_I$

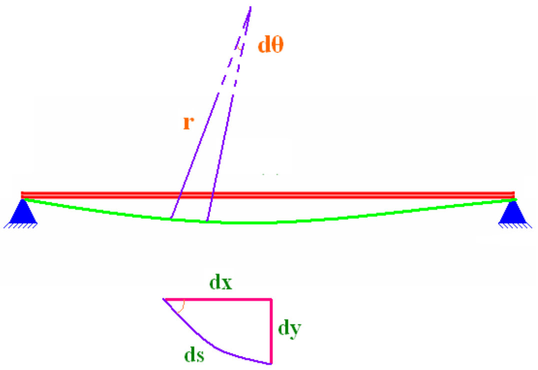
طریقه تعیین ضرایب ماتریس های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود

- در این حالت کار خارجی فقط توسط مولفه قائم نیرو در نقطه a انجام می شود زیرا تغییر مکانهای مجازی در گره های دیگر صفر است . $W_E = \delta u_a p_a = \delta u_1 k_{13}$
- کار مجازی داخلی توسط لنگرهای داخلی ناشی از $\theta_a = 1$ بر روی انحناهای مجازی انجام می شود ،
- **در یک تیر تحت خمش :** $\frac{1}{r}$ انحناء و $\frac{1}{r}dx = d\theta$ مقدار چرخش است ، $Md\theta$ کار مربوطه می باشد .

$$d\theta = \frac{ds}{r} \longrightarrow \quad \text{و} \quad ds \# dx$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx} \qquad \text{از طرفی} \longrightarrow d\theta = \frac{dy}{dx}$$

طریقه تعیین ضرایب ماتریس های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود



- مقدار انحناهای مجازی با صرفنظر کردن

از اثرات ناشی از تغییر شکل برشی عبارت از:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

- در حالت مورد نظر در اینجا ، تغییر

مکان مجازی δu می باشد :

$$y = \delta u$$

طریقه تعیین ضرایب ماتریس های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود

$$\frac{1}{r}=\frac{d^2}{dx^2}(\delta u(x))=\frac{d^2}{dx^2}(\psi_1(x)\delta u_1)=\psi_1''(x)\delta u_1$$

- لنگر داخلی ناشی از چرخش $\theta_a=1$ با توجه به $\frac{M}{EI}=y''$ و $\Leftarrow y=\psi_3(x)$

$$M(x)=EI(x)\psi_3''(x)\longrightarrow \text{کار داخلی} \quad Md\theta=M\frac{dx}{r}$$

$$W_I=\delta u_1\int_0^l EI(x)\psi_1''(x)\psi_3''(x)dx$$

$$W_I=W_E\Rightarrow \quad k_{13}=\int_0^l EI(x)\psi_1''(x)\psi_3''(x)dx$$

طریقه تعیین ضرایب ماتریس های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود

- در حالت کلی ضرایب سختی مربوط به خمش تیر :

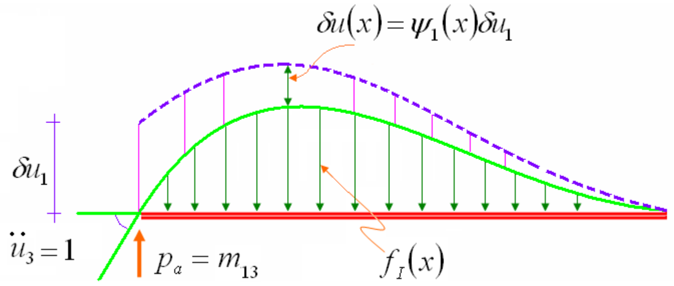
$$k_{ij}=\int_0^l EI(x)\psi_i''(x)\psi_j''(x)dx$$

- در حالت کلی با تعیین ضرایب دیگر ماتریس سختی به روش فوق برای تیر مورد نظر خواهیم داشت :
- ماتریس کل یک سازه از سر هم بندی ماتریس اجزاء

$$[k]=\frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix}6 & -6 & 3l & 3l\\ -6 & 6 & -3l & -3l\\ 3l & -3l & 2l^2 & l^2\\ 3l & -3l & l^2 & 2l^2\end{bmatrix}$$

تعیین ضرایب ماتریس جرم سازگار (پر)
Consistent Mass Matrix

- مشابه حالت k_{ij} عمل می شود (تساوی کارهای داخلی و خارجی)
- برای نمونه m_{13} مد نظر است .



تعیین ضرایب ماتریس جرم سازگار (پر)
Consistent Mass Matrix

- اگر تیر تحت اثر شتاب زاویه ای واحد در انتهای چپ قرار گیرد :

(بقیه صفر) $\ddot{u}_3=\ddot{\theta}_a=1$

- شتابهائی در طول تیر ایجاد می شود :

$$u(x)=\psi_1 u_1+\psi_2 u_2+\psi_3 u_3+\psi_4 u_4$$

$$\ddot{u}(x)=0+0+\psi_3(x)\ddot{u}_3+0 \quad\Longrightarrow\quad \underline{\ddot{u}(x)=\psi_3(x)\ddot{u}_3}$$

- نیروی اینرسی (طبق اصل دالامبر) مقاوم در برابر این شتاب :

$$f_I(x)=m(x)\ddot{u}(x)=m(x)\psi_3(x)\ddot{u}_3$$

تعیین ضرایب ماتریس جرم سازگار (پر)
Consistent Mass Matrix

- ضرایب تاثیر جرم مربوط به این شتاب به عنوان نیروهای اینرسی گره ای ناشی از آن تعریف می شوند .
- این نیروها به کمک اصل تغییر مکانهای مجازی از نیروی اینرسی گسترده معادله محاسبه می شوند .
- مثلا با ایجاد تغییر مکان مجازی قائم و مساوی قرار دادن کار انجام شده توسط نیروی گره ای خارجی

p_a با کار انجام شده توسط نیروهای اینرسی گسترده $f_I(x)$ ، نیروی قائم در انتهای چپ محاسبه می شوند

(همان m_{13}) :

$$W_E = W_I \rightarrow p_a \delta u_a = \int_0^l f_I(x)\delta u(x)dx$$

$$m_{13}\delta u_1 = \int_0^l \underbrace{(m(x)\psi_3(x)\times 1)}_{f_I(x)} \times \underbrace{\psi_1(x)\delta u_1}_{\delta u(x)} dx$$

تعیین ضرایب ماتریس جرم سازگار (پر)
Consistent Mass Matrix

$$m_{13} = \int_0^l m(x)\psi_1(x)\psi_3(x)dx \longrightarrow \boxed{m_{ij} = \int_0^l m(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx}$$

- با تعیین سایر ضرایب از توابع شکلی خود در نهایت ماتریس جرم سازگار المان تیری بصورت زیر :

$$[m] = \frac{\overline{m}l}{420}\begin{bmatrix} 156 & 54 & 22l & -13l \\ 54 & 156 & 13l & -22l \\ 22l & 13l & 4l^2 & -3l^2 \\ -13l & -22l & -3l^2 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

- برای ماتریس میرایی نیز بطور

مشابه می توان عمل کرد:

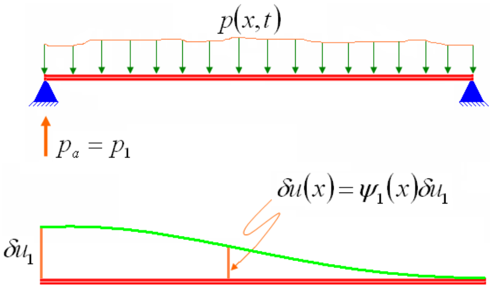
$$C_{ij} = \int_0^l c(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx$$

- ولی مشکل ارزیابی $c(x)$ که بیانگر مشخصه استهلاک ویسکوز پیوسته برای هر المان است ، می باشد،

در عمل اثر میرایی بصورت درصد میرایی در معاملات نهایی در نظر گرفته می شود .

بردار بارگذاری

- برای تعیین بردار بارگذاری مربوط به درجات آزادی مربوط ، ساده ترین روش استفاده از اصول ساده استاتیک است که بار بین گره ها را بطور ساده به درجات آزادی گره ها تقسیم و انتقال می دهد ، البته میتوان از بارهای گره ای سازگار نیز استفاده کرد ، مثلا تعیین نیروی سازگار متناظر با u_1 با استفاده از اصل کار مجازی : **نتیجه :**



$$p_1(t) = \int_0^l p(x,t)\psi_1(x)dx$$

در حالت کلی:

$$p_i(t) = \int_0^l p(x,t)\psi_i(x)dx$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی

Free Vibration of MDF

- **معادله حرکت در حالت کلی :**

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p(t)\}$$

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\} \quad (1)$$

معادله ارتعاش آزاد بدون میرایی

- اگر تعداد درجات آزادی N باشد پس N معادله دیفرانسیل هموژن وابسته coupled خواهیم داشت .
- حل معادله ارتعاش آزاد با میرایی امکان پذیر است ولی مستلزم داشتن (تعیین) ماتریس میرایی $[c]$ می باشیم .
- جواب معادله بصورت روبرو در نظر گرفته می شود :

$$\{u(t)\} = q_i(t)\{\phi\}_i \quad (2)$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

- $\{\phi\}_i$ بردار تغییر شکل که وابسته به زمان نمی باشد و متغیر زمان با تابع $q_i(t)$ وارد مساله می شود :

$$q_i(t) = A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t = D_i \sin(\omega_i t + \alpha)$$

- A_i و B_i ضرایب ثابت که از شرایط اولیه بدست می آید .

$$\{u(t)\} = \{\phi\}_i (A_i \cos\omega_i t + B \sin\omega_i t) \quad (3)$$

- توجه شود که ω_i و $\{\phi\}_i$ مجهول هستند . رابطه (جواب) (2) در معادله (1) :

$$\left[-\omega_i^2 [m]\{\phi\}_i + [k]\{\phi\}_i\right] q_i(t) = \{0\} \quad (4)$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

- $q_i(t) \neq 0$ پس :

$$\left[[k] - \omega_i^2 [m]\right] \{\phi\}_i = \{0\} \quad (5)$$

یا

$$[k]\{\phi\}_i = \omega_i^2 [m]\{\phi\}_i$$

$\{\phi\}_i \neq \{0\}$ **پس:** معادله مشخصه: $\det\left[[k] - \omega_i^2 [m]\right] = 0 \quad (6)$

$\Rightarrow \omega_i^2$ **چند جمله ای مرتبه N بر حسب** $\Rightarrow \omega_i \quad i = 1$ تا N **معلوم**

- ریشه های معادله مشخصه یعنی ω_i : مقادیر مشخصه ، Eigen Values ، فرکانس زاویه ای از رابطه (5) می توان بردار $\{\phi\}_i$ را به ازای ω_i ها بدست آورد (البته مقادیر نسبی دامنه حرکت و نه مقادیر مطلق آنها).

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

- بردار مود طبیعی ، شکل مود ارتعاش، Eigen Vectors بردار مشخصه ، ......

$$\{\phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix}$$

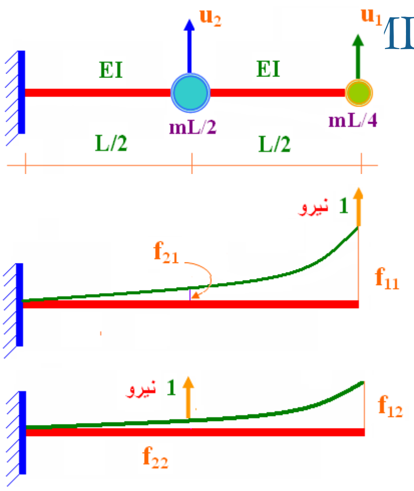
$$\omega_1 \langle \omega_2 \langle \omega_3 ......\langle$$

ترتیب شماره گذاری فرکانس ها و پریودها

$$T_1 \rangle T_2 \rangle ....$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

- **مثال** – مطلوبست تعیین فرکانس زاویه ای و مود شکل های سیستم زیر؟
- ابتدا باید معادله حرکت نوشته شود (ماتریس سختی و جرم):
- از روش ماتریس نرمی استفاده می شود (اعمال نیروی واحد و محاسبه تغییر مکانهای حاصل در درجات آزادی) از تحلیل سازه :



ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

$$[f]=\frac{l^3}{48EI}\begin{bmatrix}16 & 5\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$ ماتریس نرمی

$$[k]=[f]^{-1}=\frac{48EI}{7l^3}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -5 & 16\end{bmatrix}$$

$$[m]=\begin{bmatrix}ml/4 & 0\\ 0 & ml/2\end{bmatrix}\longrightarrow \quad [m]\{\ddot{u}\}+[k]\{u\}=\{0\}$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

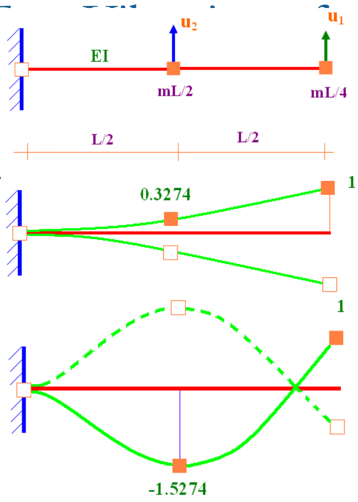
$$\left[[k]-\omega^2[m]\right]=\frac{48EI}{7l^3}\begin{bmatrix}2-\lambda & -5\\ -5 & 16-2\lambda\end{bmatrix}\longleftarrow \lambda=\frac{7ml^4}{192EI}\omega^2$$ برای سادگی

$$\det\begin{bmatrix}2-\lambda & -5\\ -5 & 16-2\lambda\end{bmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad 2\lambda^2-20\lambda+7=0$$

$$\lambda_1=0.36319 \quad \text{و} \quad \lambda_2=9.6368\longrightarrow \left|\begin{array}{l}\omega_1=3.15623\sqrt{\dfrac{I}{ml^4}}\\ \omega_2=16.2580\sqrt{\dfrac{EI}{ml^4}}\end{array}\right.$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

$$\left[[k]-\omega_i^2[m]\right]\{\phi\}_i=\{0\}$$



$$\left[[k]-\omega_1^2[m]\right]\begin{Bmatrix}1.0\\ \phi_2\end{Bmatrix}_i=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\longrightarrow \phi_{21}=0.3274$$

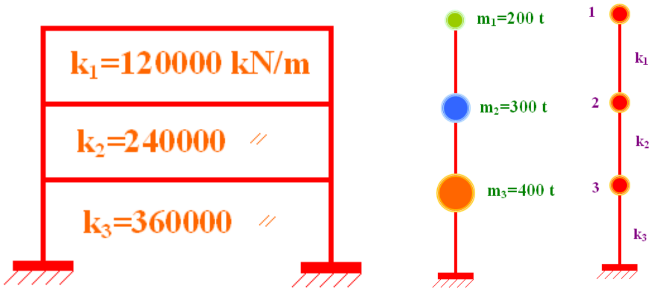
$$\left[[k]-\omega^2[m]\right]\begin{Bmatrix}1.0\\ \phi_2\end{Bmatrix}_i=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\longrightarrow$$

$$\{\phi\}_1=\begin{Bmatrix}1.0000\\0.3274\end{Bmatrix}\quad , \quad \phi_{22}=-1.5274$$

$$\{\phi\}_2=\begin{Bmatrix}1.0000\\-1.5274\end{Bmatrix}$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

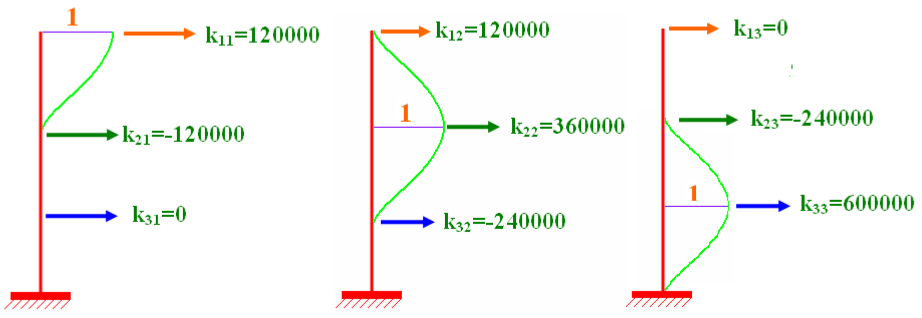
- **مثال** – در قاب سه طبقه داده شده مطلوبست تعیین ω_i و $\{\phi\}_i$ ؟



$$f_{S1}=k_1(u_1-u_2)$$

$$f_{S2}=k_2(u_2-u_3)-k_1(u_1-u_2) \qquad f_{S3}=k_3u_3-k_2(u_2-u_3)$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of



$u_1=1,\quad u_2=u_3=0$ $\qquad$ $u_2=1,\quad u_1=u_3=0$ $\qquad$ $u_3=1,\quad u_1=u_2=0$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

$$[k]=120\times10^3\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [m]=200\begin{bmatrix}1.0 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 2.0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_i=\omega_i^2/600$$ برای سادگی

$$[[k]-\omega^2[m]]=120\times10^3\begin{bmatrix}1-\lambda_i & -1 & 0\\ -1 & 3-1.5\lambda_i & -2\\ 0 & -2 & 5-2\lambda_i\end{bmatrix}$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

- دترمینان ماتریس اخیر صفر

$$\lambda_i^3 - 5.5\lambda_i^2 + 7.5\lambda_i - 2 = 0$$

$\lambda_1 = 0.351$ و $\lambda_2 = 1.61$ و $\lambda_3 = 3.54$

$\omega_1^2 = 210$ و $\omega_2^2 = 966$ و $\omega_3^2 = 2124$

$\omega_1 = 14.5 \quad Rad/s$ و $\omega_2 = 31.1$ و $\omega_3 = 46.1$

$$\left[[k] - \omega_i^2 [m]\right] \{\phi\}_i = \{0\}$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_i & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5\lambda_i & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 = 1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 1 + \begin{bmatrix} 3-1.5\lambda_i & -2 \\ -2 & 5-2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-1.5\lambda_i & -2 \\ -2 & 5-2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

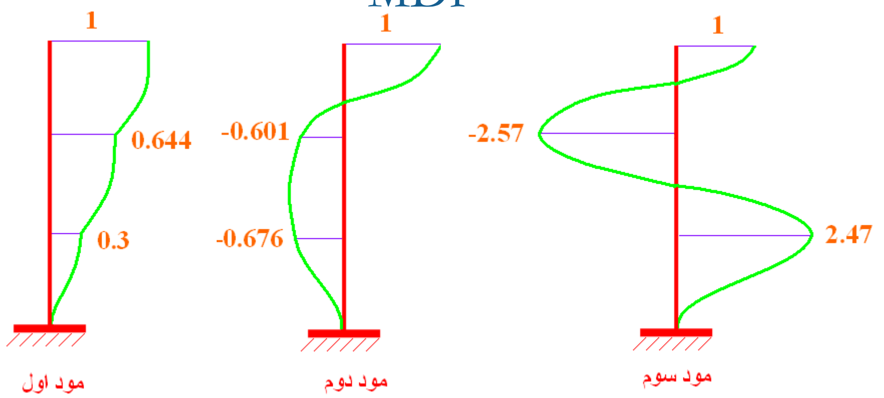
ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF

$$\lambda_1 = 0.351 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2.475 & -2 \\ -2 & 4.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \phi_{21} = 0.644 \\ \phi_{31} = 0.300 \end{cases} \qquad \lambda_2 = 1.61 \longrightarrow \phi_{22} = -0.601 \quad \text{و} \quad \phi_{32} = -0.676$$

$$\lambda_3 = 3.54 \longrightarrow \phi_{23} = -2.57 \quad \text{و} \quad \phi_{33} = 2.47$$

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی
Free Vibration of MDF



خاصیت تعامد مودها
Orthogonality of Modes

- معادله مشخصه $[[k]-\omega_i^2[m]]\{\phi\}_i=\{0\}$ را برای مود شماره r می نویسیم :

$$[k]\{\phi\}_r-\omega_r^2[m]\{\phi\}_r=\{0\}$$

- طرفین رابطه را در $\{\phi\}_S^T$ ضرب می کنیم :

$$\{\phi\}_S^T[k]\{\phi\}_r-\omega_r^2\{\phi\}_S^T[m]\{\phi\}_r=0 \quad (1)$$

- حال معادله را برای مود S ام می نویسیم :

$$[k]\{\phi\}_S-\omega_S^2[m]\{\phi\}_S=\{0\}$$

خاصیت تعامد مودها
Orthogonality of Modes

- طرفین رابطه را در $\{\phi\}_r^T$ ضرب می کنیم :

$$\{\phi\}_r^T[k]\{\phi\}_S-\omega_S^2\{\phi\}_r^T[m]\{\phi\}_S=0 \quad (2)$$

- چون $[k]$ و $[m]$ متقارن است ، رابطه (2) ←

$$\{\phi\}_S^T[k]\{\phi\}_r-\omega_S^2\{\phi\}_S^T[m]\{\phi\}_r=0 \quad (3)$$

رابطه (1) - رابطه (3) $\quad =(\omega_S^2-\omega_r^2)\{\phi\}_S^T[m]\{\phi\}_r=0 \quad \Rightarrow$

$$\{\phi\}_S^T[m]\{\phi\}_r=0 \quad \text{و} \quad \{\phi\}_S^T[k]\{\phi\}_r=0$$

رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس سختی و جرم

مقیاس کردن مودها
Normalization of Modes

- **الف –** با تقسیم مولفه های بردار مود بر بزرگترین عدد آنها ، بردار مود $\{\phi\}_i$ به عدد یک مقیاس می شود .

$$\{\phi\}=\begin{bmatrix}2.0\\1.0\end{bmatrix}\longrightarrow\{\phi\}=\begin{Bmatrix}1.0\\0.5\end{Bmatrix}$$

- **ب-** مقیاس نمودن بر حسب ماتریس جرم به نحویکه

$$\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i=1$$

$$\{\phi\}_i'^T[m]\{\phi\}'_i=M_i\longrightarrow\qquad\{\phi\}_i=\frac{1}{\sqrt{M_i}}\{\phi\}_i'$$

مقیاس کردن مودها
Normalization of Modes

ماتریس مودال

$$[\Phi]=[\{\phi\}_1,\{\phi\}_2....\{\phi\}_N]$$

ماتریس مقادیر مشخصه (فرکانس ها)

$$[\Omega^2]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & & & & 0\\ & \omega_2^2 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ 0 & & & & \omega_N^2\end{bmatrix}$$

مقیاس کردن مودها
Normalization of Modes

$$\{\phi\}_1^{'T}[m]\{\phi\}_1^{'}=M_1=360.2$$

در مثال قبل

$$\{\phi\}_1=\begin{Bmatrix}1.0/\sqrt{M_1}\\0.644/\sqrt{M_1}\\0.3/\sqrt{M_1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0527\\0.0339\\0.0158\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\{\phi\}_1^T[m]\{\phi\}_1=1$$

تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال
Modal Analysis

$$[m]\{\ddot{u}\}+[c]\{\dot{u}\}+[k]\{u\}=\{p(t)\}$$

- از تحلیل ارتعاش آزاد مقادیر ω_i و $\{\phi\}_i$ معلوم است $(i=1$ تا $N)$
- تغییر متغیر از مجهول فیزیکی $\{u\}$ به مجهول مودال :

$$\{u\}=[\Phi]\{q\}$$

$$\{u(t)\}=\sum_{i=1}^{N}\{\phi\}_i q_i(t)$$

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}\}+[c][\Phi]\{\dot{q}\}+[k][\Phi]\{q\}=\{p(t)\}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال
Modal Analysis

- طرفین رابطه را در $\{\phi\}_i^T$ ضرب می کنیم :

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m][\Phi]\{\ddot{q}\}}+\{\phi\}_i^T[c][\Phi]\{\dot{q}\}+\{\phi\}_i^T[k][\Phi]\{q\}=\{\phi\}_i^T\{p(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix}\phi_{1i}\\ \phi_{2i}\\ \cdot\\ \cdot\\ \phi_{Ni}\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}m_{11} & & & & 0\\ & m_{22} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & m_{NN}\end{bmatrix}\left[\begin{Bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\\ \cdot\\ \cdot\\ \phi_{N1}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{12}\\ \phi_{22}\\ \cdot\\ \cdot\\ \phi_{N2}\end{Bmatrix}\cdots\begin{Bmatrix}\phi_{1i}\\ \phi_{2i}\\ \cdot\\ \cdot\\ \phi_{Ni}\end{Bmatrix}\cdots\begin{Bmatrix}\phi_{1N}\\ \phi_{2N}\\ \cdot\\ \cdot\\ \phi_{NN}\end{Bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \ddot{q}_N\end{Bmatrix}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال
Modal Analysis

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m][\Phi]_1\ddot{q}_1}_{\text{صفر}}+\underbrace{\{\phi\}_i^T[m][\Phi]_2\ddot{q}_2}_{\text{صفر}}+\cdots\underbrace{\{\phi\}_i^T[m][\Phi]_i}_{M_i}\underbrace{\ddot{q}_i}_{\ddot{q}_i}+\cdots$$

- برای در نظر گرفتن میرایی معمولا با روش رایله عمل می شود :

$$[c]=\alpha[m]+\beta[k]$$

- بنابراین خاصیت تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی نیز بر قرار می شود :

$$\{\phi\}_r^T[c]\{\phi\}_S=0 \quad \text{و} \quad \{\phi\}_i^T[c]\{\phi\}_i=c_i$$

- در نهایت:

$$M_i\ddot{q}_i+c_i\dot{q}_i+k_iq_i=p_i$$

تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال
Modal Analysis

$\{\phi\}_i^T [k] \{\phi\}_i = k_i$ و $\{\phi\}_i^T \{p(t)\} = p_i$

- با توجه به روابط بین جرم ، سختی و میرایی

$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = p_i / M_i$ **معادله یک درجه آزادی مستقل** $i = 1$ تا N

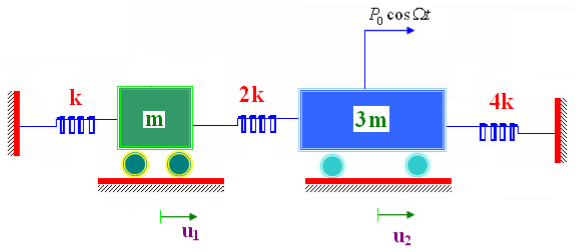
$\Rightarrow$ q_i **معلوم** $\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{N} \{\phi\}_i q_i$

- مودهای اولیه مهم است ، می توان چند مود اول را در نظر گرفت

$\{u\} = \sum_{i=1}^{r} \{\phi\}_i q_i$ $r \langle\langle N$

تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال
Modal Analysis

- **مثال ــ** یک سازه دو درجه آزادی بصورت زیر مدل شده است . مطلوبست تحلیل آن ؟



$k = 1000$ و $m = 0.5$

$\xi = 2\%$ **واحدها هماهنگ است .**

تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال
Modal Analysis

$$\Omega = 1.03\omega_1$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 6k \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [m] = m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[[k] - \omega^2[m]\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3k - \omega^2 m & -2k \\ -2k & 6k - 3\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1^2 = 1.2417 \quad k/m \quad \text{و} \quad \omega_2^2 = 3.7584 \quad k/m$$

تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال
Modal Analysis

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8792 & -0.3792 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Omega = 1.03\omega_1 = 51.32 \quad Rad/s$$

$$M_1 = \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 3.319m \quad \text{و} \quad M_2 = 1.4314m$$

$$k_1 = \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 4.1212k \quad \text{و} \quad k_2 = 5.3798k$$

$$\{p(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_0 \cos\Omega t \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} \{\phi\}_1^T \{p(t)\} &= p_1 = 0.8792 p_0 \cos\Omega t \\ \{\phi\}_2^T \{p(t)\} &= p_2 = -0.3792 p_0 \cos\Omega t \end{aligned}$$

تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال
Modal Analysis

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{p_i}{M_i}$$

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{2} \{\phi\}_i q_i$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.9008 \\ 2.5500 \end{Bmatrix} \frac{p_0}{k} \cos(\Omega t - 2.5468) -$$

اثر مود اول

$$\begin{Bmatrix} 0.1084 \\ -0.0411 \end{Bmatrix} \frac{p_0}{k} \cos(\Omega t - 0.0364)$$

اثر مود دوم